

Instabiliteiten rond  
de straalstroom

R.P. Henzen

technische rapporten; TR-117

## INHOUD

Voorwoord	ii
Abstract	iii
<b>1. Inleiding</b>	<b>1</b>
<b>2. Ozon in de atmosfeer</b>	
2.1 De indeling van de atmosfeer	2
2.2 Fysische en chemische eigenschappen van ozon	3
2.3 Ozonmetingen	6
2.4 Ozon in de troposfeer	7
2.5 Ozon in de stratosfeer	8
<b>3. De straalstroom</b>	
3.1 De Corioliskracht	11
3.2 De straalstroom	13
<b>4. Instabiliteiten rond de straalstroom</b>	
4.1 Voorbereiding	15
4.2 De Taylor-Goldstein vergelijking	16
4.3 Een criterium voor instabiliteit	19
4.4 De halfcirkelstelling	20
4.5 De groeisnelheid	22
<b>5. Een model voor de straalstroom</b>	
5.1 Het randwaardeprobleem	23
5.2 Numerieke oplosmethode	24
5.3 Het model	26
5.5 Conclusie	28
<b>Appendix: Het Fortran-77 programma</b>	<b>30</b>
<b>Literatuur</b>	<b>40</b>

## Voorwoord

Dit verslag is het resultaat van een 7 maanden durende stage die ik van april tot november 1989 doorbracht op het KNMI in de Bilt. Het onderwerp van onderzoek was het bestuderen van instabiele modes van infinitesimale verstoringen in een gegeven windprofiel, in het kader van een onderzoek naar ozon-uitwisseling tussen stratosfeer en troposfeer.

Aan het KNMI wil ik mijn dank betuigen voor de gastvrijheid die ik gedurende mijn stage mocht ontvangen. Verder wil ik op deze plaats iedereen bedanken die op zijn eigen wijze heeft bijgedragen aan de tot standkoming van dit verslag. In het bijzonder gaat mijn waardering uit naar Henny Kelder, die nogmaals zijn kwaliteiten als stagebegeleider heeft bewezen. Tevens mag de inbreng van Peter van Velthoven niet ongenoemd blijven; op mijn vele vragen bleef hij onvermoeibaar antwoord geven. Rinus Scheele tenslotte was degene die mij met onuitputtelijk geduld in de diepere geheimen van het computersysteem heeft proberen in te wijden, waarvoor mijn hartelijke dank.

Ik wil er echter op wijzen dat alleen de auteur verantwoordelijk is voor de inhoud van dit rapport; iedere fout die er in voor mocht komen is hem alleen aan te rekenen.

de Bilt  
november 1989

Rob Henzen

**ABSTRACT**

When a small perturbation of the form  $\eta(x,z,t)=\psi(z)e^{ik(x-ct)}$  is imposed on a background windprofile  $U(z)$  the resulting linearised equations of motion lead to the so called Taylor-Goldstein equation.

This is an ordinary differential equation of second order with coefficients depending on the background windprofile, the Brunt-Väisälä frequency, the phase velocity  $c$  and the wavenumber  $k$ .

This equation allows solutions which grow in time, a so-called unstable mode.

We are interested in this unstable modes for the following reason.

An unstable mode with growing amplitude might cause an inversion in the local temperature gradient, thus giving rise to turbulence. This turbulence is thought to play a role in the exchange of mass between the stratosphere and the troposphere.

As a natural background windprofile we take the tropospheric jet stream, which has its maximum wind speed near the tropopause. Having chosen a model for the jet stream (in our case we took a  $\cosh^{-2}$ -profile, with suitable parameters) we are able to calculate the values of the imaginary part of the frequency  $c_i$  with  $c_i > 0$  for which the Taylor-Goldstein equation admits a solution.

We investigated the existence of unstable modes for the profile mentioned above for several values of the wavenumber  $k$  by solving the Taylor-Goldstein equation numerically using a Merson integration technique and a two dimensional secant iteration method.

## 1. INLEIDING

### 1.1

Vandaag de dag staat ozon volop in de belangstelling, niet alleen van de wetenschap, maar ook van pers en politiek. Spreek een willekeurige persoon op straat aan, en de kans is groot dat hij/zij bekend is met termen als ozon-gat, CFK, broeikaseffect en UV-straling. Dat ultraviolette straling schadelijk kan zijn voor de mens, dat ozon deze schadelijke van de zon afkomstige straling absorbeert, dat CFK 's de ozonlaag rond de aarde aantasten, en dat we dus geen spuitbussen moeten gebruiken, het is de meesten van ons bekend.

Over ozon valt echter veel meer te zeggen dan datgene wat we regelmatig in de krant lezen of op TV zien. Hoofdstuk 2 van dit verslag is daarom gewijd aan enkele minder bekende, maar daarom niet minder boeiende aspecten van de stof ozon.

Een van de vragen die men zich kan stellen in het kader van het ozon-onderzoek is: "wat is de globale verdeling van de ozon op aarde, en hoe verandert die verdeling?". Zo is het bijvoorbeeld interessant om te weten of en zo ja hoe snel ozon uit de stratosfeer wordt getransporteerd naar de troposfeer en vice versa. Dit laatste is onder meer van belang omdat troposferisch ozon een bijdrage levert aan het zogenaamde broeikaseffect; het opwarmen van de atmosfeer doordat er teveel gassen in de atmosfeer voorkomen die de door de aarde uitgestraalde warmte niet doorlaten.

Inmiddels is bekend dat de concentratie ozon in de troposfeer inderdaad toeneemt, en wel met ongeveer 1% per jaar. De vraag is wat de precieze oorzaken zijn van deze verhoging, en of verhoogd ozontransport van stratosfeer naar troposfeer hierbij een rol speelt of dat de verhoging verklaarbaar is door een verhoogde ozonproductie in de troposfeer zelf.

Een van de mogelijke mechanismen die een rol spelen bij het transport van (bijvoorbeeld) ozon van stratosfeer naar troposfeer is de circulatie rond de zogenaamde 'straalstroom' (eng: jetstream).

De rol van de straalstroom in de stratosfeer-troposfeer uitwisseling van ozon wordt als volgt voorgesteld.

Stel dat in het straalstroomprofiel een zeer kleine verstoring wordt aangebracht. Zo'n verstoring kan onder bepaalde voorwaarden instabiel blijken te zijn, d.w.z. met de tijd groeiend in amplitude. Deze groeiende instabiliteit kan op zijn beurt een inversie van de locale temperatuurgradient tot gevolg hebben, waardoor er turbulentie ontstaat. Deze turbulenties zorgen voor het transport van ozon van stratosfeer naar troposfeer en omgekeerd.

In hoofdstuk 3 vindt de lezer een korte inleiding over de straalstroom, terwijl hoofdstuk 4 gewijd is aan de theorie van instabiliteiten rond een gegeven windprofiel (bij ons steeds de straalstroom).

In hoofdstuk 5 staat het door ons gebruikte model van de straalstroom beschreven, alsmede de numerieke methoden voor het bepalen van instabiele verstoringen. Tevens bevat dit hoofdstuk enkele suggesties t.b.v. een eventueel vervolgonderzoek.

## 2. OZON IN DE ATMOSFEER

### 2.1 De indeling van de atmosfeer

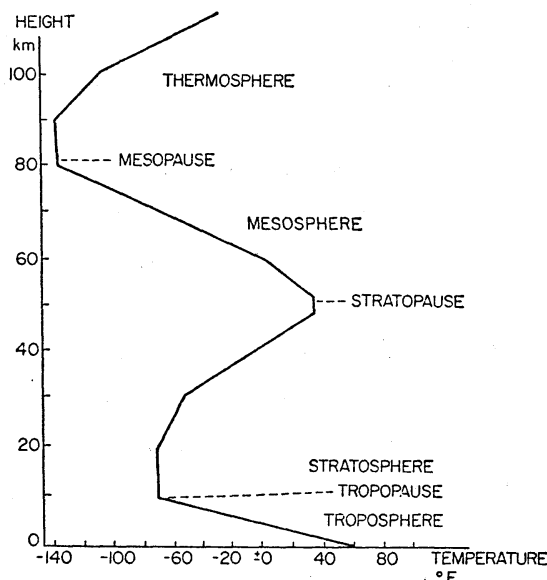
In figuur 1 is het verticale temperatuurverloop in de atmosfeer weergegeven. Op dit temperatuurverloop is de indeling van de atmosfeer meestal gebaseerd.

De onderste laag van de atmosfeer, de troposfeer, wordt gekenmerkt door een afname van de temperatuur met de hoogte. In de laag daarboven, de stratosfeer, vindt een toename in temperatuur plaats, veroorzaakt door de absorptie van ultraviolet zonlicht door ozon.

Boven de stratosfeer bevindt zich de mesosfeer met weer een afname in temperatuur. In de thermosfeer tenslotte zien we een zeer sterke toename van de temperatuur met de hoogte. Afhankelijk van de zonneactiviteit kunnen hier temperaturen optreden tot 2500 K. De druk is dan minder dan een miljoenste van die aan het aardoppervlak. Deze hoge temperaturen worden veroorzaakt door de absorptie van ioniserende zonnestraling. Hierdoor is de thermosfeer gedeeltelijk geïoniseerd en wordt daarom ook wel ionosfeer genoemd.

In de troposfeer maakt men nog onderscheid tussen de planetaire grenslaag (tussen het aardoppervlak en een hoogte van 500 m tot 2 km) en de vrije troposfeer. De grenslaag wordt gekenmerkt door sterke turbulenties waardoor deze laag zeer goed gemengd is.

De troposfeer wordt begrensd door de tropopause, de stratosfeer door de stratopause en de mesosfeer door de mesopause.



- figuur 1: het verticale temperatuurverloop  
in de atmosfeer -

Overigens zijn deze grenzen niet star. Het kan bijvoorbeeld voorkomen dat lucht uit de stratosfeer uitstulpt in een soort tong die tot aan het aardoppervlak kan uitzakken, een zogenaamde intrusie.

Tenslotte zij nog opgemerkt dat er ook andere manieren in gebruik zijn om de grens tussen troposfeer en stratosfeer vast te stellen. Een ervan maakt gebruik van het begrip potentiële vorticheit<sup>1)</sup>. De karakteristieke waarde van deze potentiële vorticheit is in de stratosfeer in het algemeen een of twee ordes van grootte hoger dan in de troposfeer.

1) potentiële vorticheit:  $= \rho^{-1} \xi_a \nabla \theta$ , met  $\rho$  = dichtheid,  $\theta$  = potentiële temperatuur,  $\xi_a = \xi + 2\Omega$ ,  $\xi = \nabla \times \mathbf{u}$

$\mathbf{u}$  = windsnelheidsvector,  $\Omega$  = hoeksnelheid van de aarde.

Dit maakt het mogelijk een drempelwaarde te kiezen en op die manier een grens tussen stratosfeer en troposfeer te markeren.

## 2.2 Fysische en chemische eigenschappen van ozon

Ozon werd voor het eerst waargenomen in 1786 door de Nederlandse geleerde Martinus van Marum, de eerste directeur van het Teylers museum in Haarlem, die experimenteerde met een electriseermachine. Van Marum merkte op dat bij elektrische ontladingen in zuurstof een speciale geur ontstaat. In 1840 werd de stof die voor deze geur verantwoordelijk zou zijn door de chemicus Schönberg geïdentificeerd als hetzelfde gas dat vrijkomt bij de electrolyse van water. Hij was ook degene die voorstelde om de stof "ozon" te noemen (het Griekse woord ozon betekent ruiken).

Soret tenslotte is waarschijnlijk de eerste die (omstreeks 1863) een chemische identificatie verrichtte, en de molecuulformule van ozon vaststelde op  $O_3$ .

De atomen in dit molecuul zijn hoogstwaarschijnlijk gesitueerd in de hoekpunten van een gelijkbenige driehoek, met zijden van 1,278 Å en een tophoek van  $116^{\circ}49'$  (zie figuur 2).

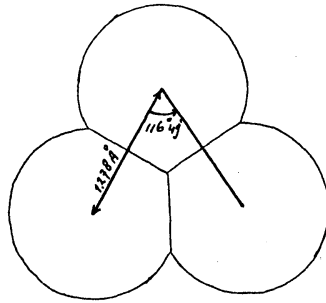
Enkele fysische eigenschappen van ozon zijn neergelegd in tabel 1. Ter vergelijking zijn de waarden voor zuurstof bijgevoegd.

Het ozonmolecuul kan ook een atoom zwaar zuurstof  $O^{18}$  bevatten. Atmosferisch ozon bevat ongeveer 0,21%  $O^{16}O^{18}O^{16}$  en ongeveer 0,41%  $O^{16}O^{16}O^{18}$  moleculen.

De karakteristieke geur van ozon, door van Marum in 1786 waargenomen, is al merkbaar bij een concentratie van ozon in de lucht van 1 ppm (part per million). Gasvormig ozon heeft een blauwachtige tint, die zichtbaar wordt bij 15 tot 20 % ozon in de lucht. Vloeibaar ozon is donkerblauw van kleur. Vast ozon bestaat uit donker violette kristallen.

<u>Eigenschap:</u>	<u>Ozon (<math>O_3</math>)</u>	<u>Zuurstof (<math>O_2</math>)</u>
Molecuulgewicht	47,998 g/g-mol	31,998 g/g-mol
Kookpunt (1 atm)	- 111,9 °C	- 182,97 °C
Smeltpunt	- 192,7 °C	- 218,4 °C
Dichtheid (1 atm, 0°C)	2,144 g/l	1,429 g/l
Kritieke temperatuur	- 12,1 °C	- 118,574 °C
Kritieke druk	54,6 atm	49,77 atm
Oplosbaarheid ( per 100 g $H_2O$ )	$3,9 \cdot 10^{-3}$ g	$6,945 \cdot 10^{-3}$ g

- Tabel 1 : enkele fysische eigenschappen van ozon en zuurstof -



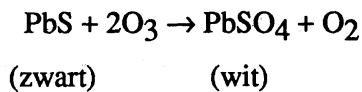
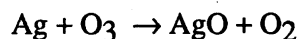
- Figuur 2 : het ozonmolecuul -

Van de chemische eigenschappen van ozon zijn de instabiliteit en het sterke oxiderende vermogen de belangrijkste.

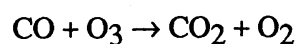
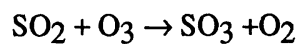
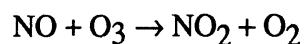
Wanneer zuiver ozon in kleine hoeveelheden aan lucht wordt toegevoegd dissocieert het relatief langzaam. Wanneer de temperatuur wordt verhoogd verloopt het uiteenvallen aanmerkelijk sneller. Bij temperaturen boven 372 K dissocieert ozon zelfs bijzonder snel. Ook de aanwezigheid van  $\text{NO}_2$ ,  $\text{Cl}_2$  en van metaaloxiden als  $\text{AgO}$ ,  $\text{CuO}$ ,  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  en  $\text{MnO}_2$  versnellen het uiteenvallen van ozon aanzienlijk.

Ozon is een sterke oxidant omdat de zuurstofatomen gemakkelijk loslaten uit het molecuul .

Bij kamertemperatuur oxideert ozon de meeste metalen met uitzondering van goud (Au) en metalen uit de platinareeks (Pd, Ni en Pt ). Zilver kleurt zwart onder invloed van ozon en het zwarte loodsulfide wordt door ozon omgezet in het witte loodsulfaat:

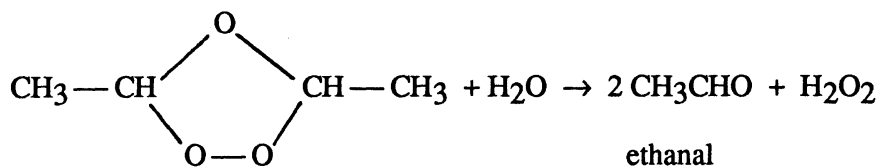
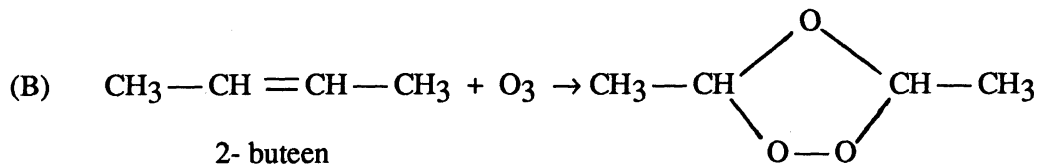
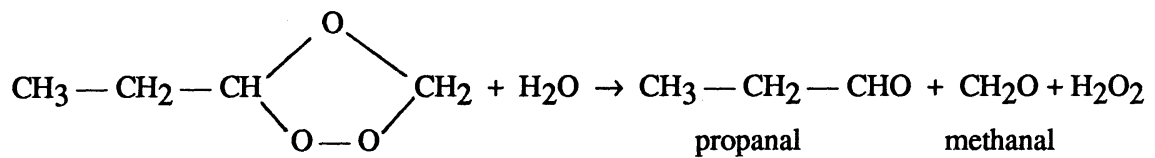
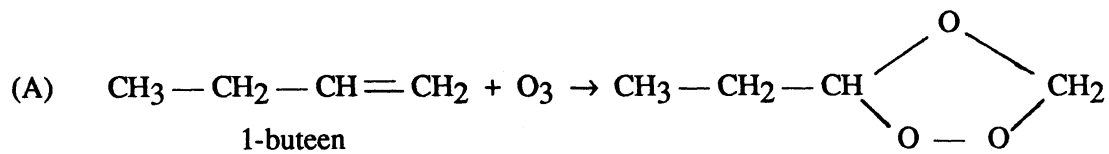


Ozon reageert ook met atmosferische gassen, bijvoorbeeld:



Vele organische materialen, zoals verzadigde, onverzadigde en cyclische koolwaterstoffen, worden eveneens geoxideerd door ozon. Hiervan kan soms met vrucht gebruik gemaakt worden bij het bepalen van de plaats van een dubbele koolstofbinding in organische moleculen. Wanneer zulke stoffen met ozon reageren wordt een zogenaamd ozonide gevormd, dat op zijn beurt na hydrolyse een aldehyde en een keton oplevert :





Ozon ontkleurt indigo en vele andere natuurlijke verfstoffen en wordt om die reden wel gebruikt als bleekmiddel voor stoffen. Sommige organische stoffen beginnen te fluoresceren in de aanwezigheid van ozon, deze stoffen worden daarom wel toegepast in ozon-detectie apparatuur. Voorbeelden van zulke stoffen zijn euchrysine, rhodamine-B en rhodamine-C. Ook is bekend dat ozon natuurlijk rubber afbreekt. Tenslotte wordt ozon toegepast bij het zuiveren van drinkwater en voor het zuiveren van afvalwater in de glastuinbouw.

### 2.3 Ozonmetingen

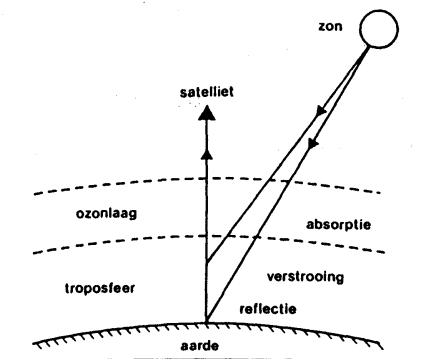
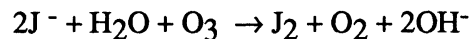
Er zijn in de loop der jaren verschillende methoden en technieken ontwikkeld om kwantitatieve ozonmetingen in de atmosfeer te verrichten, zowel voor het bepalen van de totale hoeveelheid ozon in een luchtkolom als voor het bepalen van het ozonprofiel (de ozonconcentratie als functie van de hoogte).

De absorptie van ultraviolet zonlicht door ozon is een veel gebruikt hulpmiddel bij deze methoden. In de zogenaamde "Higgins-band" (300-340 nm.) verandert deze absorptie zeer sterk. Door de intensiteit van twee of meer banden met 20 nm. verschil te vergelijken verkrijgt men een maat voor het totale aantal ozonmoleculen tussen de waarnemer en de zon. Het hiervoor gebruikte instrument is meestal een Dobson-spectrofotometer, die metingen mogelijk maakt met een precisie van  $\pm 2\%$ .

Een andere manier om ozon te meten is om vanuit een satelliet de totale hoeveelheid door de aarde teruggekaatst zonlicht te bepalen. Hieruit kan dan de dikte van de ozonkolom berekend worden; zie figuur 3.

We noemen tenslotte nog twee chemische methoden om de hoeveelheid ozon in een luchtmonster te bepalen. Zo'n luchtmonster kan bijvoorbeeld verkregen worden door een ballon op te laten en op bepaalde hoogte(n) een luchtmonster te nemen. Deze methode kan een idee geven van de ozonconcentratie ter plaatse.

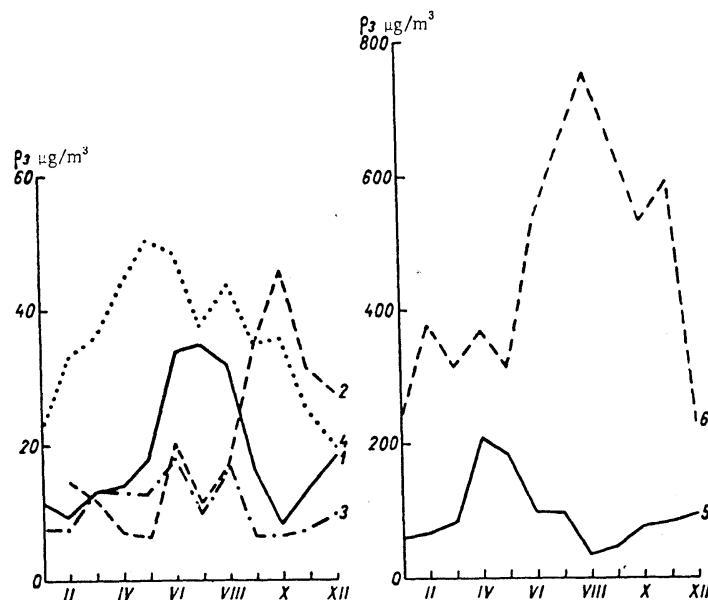
Lucht die ozon bevat wordt door een aangezuurde kaliumjodide oplossing geleid, waarin zich een platina kathode en een zilveren anode bevinden. De ozon reageert met het jodide en er ontstaat vrij jodium:



- figuur 3 : schematische voorstelling van ozonmeting m.b.v. een satelliet -

Het aanzuren van de KJ oplossing is nodig om de OH<sup>-</sup> ionen te verwijderen.

Als een potentiaalverschil wordt aangelegd zal er een stroom gaan lopen die evenredig is met de hoeveelheid jodium en dus met de hoeveelheid ozon in het luchtmonster. Een tweede mogelijkheid is om de verkregen oplossing te titreren met een gestelde oplossing van natriumthiosulfaat Na<sub>2</sub>S<sub>2</sub>O<sub>3</sub> · 5 H<sub>2</sub>O.

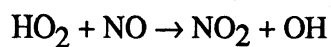
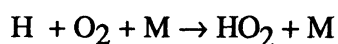
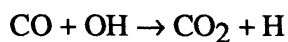


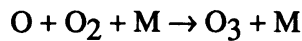
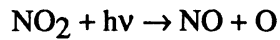
- figuur 4 : jaarlijkse variatie in ozonconcentratie voor 1) Moskou; 2) Dumont D'Urvile; 3) Val Joyeux; 4) Arosa; 5) Fairbanks; 6) Los Angeles. Romeinse cijfers geven de maanden aan -

## 2.4 Ozon in de troposfeer

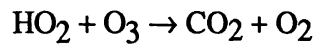
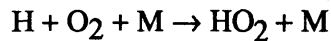
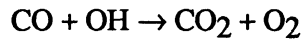
De ozonconcentratie aan het aardoppervlak is niet constant, figuur 4 laat de jaarlijkse ozonvariatie zien voor vier verschillende locaties. Uit deze figuur blijkt ook dat de cycli per locatie sterk verschillen, dit als gevolg van de verschillen in geografie, luchtcirculatie en luchtsamenstelling.

De productie van ozon in de troposfeer vindt voornamelijk plaats door de oxidatie van koolmonoxide en methaan in aanwezigheid van stikstofmonoxide. Het reactieschema voor de oxidatie van CO ziet er als volgt uit:





Indien er te weinig NO aanwezig is verloopt de reactie heel anders:



Dit leidt niet tot productie van ozon maar tot verlies! De laatste reactiecyclus vindt echter alleen plaats indien de verhouding  $[\text{NO}]:[\text{O}_3]$  kleiner is dan 1:4000. In dit laatste geval is er dus verlies van ozon. Is de genoemde verhouding groter dan 1:4000 dan is er productie van ozon.

Het zal duidelijk zijn dat in stedelijke gebieden met veel industrie en verkeer, en dus veel uitwerp van stikstofoxiden en koolmonoxide, de ozonconcentratie hoger zal zijn dan in landelijke gebieden. Dit vormt vooral een probleem op warme, zomerse dagen als een inversie laag wordt gevormd; de luchtverontreiniging blijft in de grenslaag hangen en er ontstaat zogenaamde foto-chemische smog, waarin voor de mens schadelijke hoeveelheden ozon kunnen voorkomen.

Tenslotte zij nog opgemerkt dat de hoeveelheid ozon op het noordelijk halfrond groter is dan op het zuidelijk halfrond. Een van de verklaringen hiervoor is dat op het noordelijk halfrond de uitstoot van stikstofoxiden beduidend hoger ligt door het grotere aantal industriële centra op dit halfrond.

## 2.5 Ozon in de stratosfeer

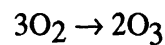
Van de totale hoeveelheid ozon in de atmosfeer (met een totale massa van  $3,3 \cdot 10^{12}$  kg. De totale massa van de atmosfeer is ongeveer  $5,13 \cdot 10^{18}$  kg.) bevindt zich 90% in de stratosfeer. Figuur 5 op pagina 10 geeft een beeld van het ozonprofiel zoals dat in het algemeen voorkomt.

Het was de engelse fysicus Chapman die omstreeks 1930 als eerste een bevredigend model opstelde voor de ozonlaag. Zijn model maakte gebruik van een reactiecyclus die bekend staat als het Chapman-mechanisme. Deze cyclus kan als volgt beschreven worden:



J is de snelheidscoëfficiënt van de betreffende fotolyse, k de reactiesnelheidsconstante. O(<sup>1</sup>D) is een zuurstofatoom in aangeslagen toestand. M is een deeltje dat nodig is om overtollige energie op te nemen.

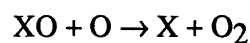
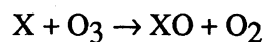
Het netto resultaat van (1) en (2) is:



Dus de reacties (1) en (2) beheersen de productie van ozon.

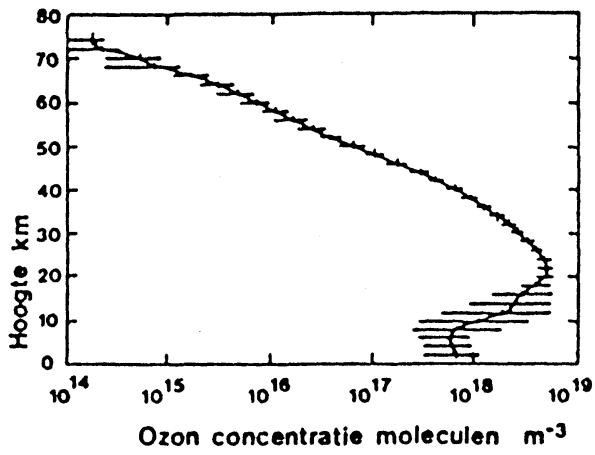
We merken nog op dat reactie (4) de enige is die werkelijk ozon vernietigt. De door reactie (3) geproduceerde atomaire zuurstof wordt in (2) omgezet in O<sub>3</sub>; het reactiepaar (2) en (3) leidt tot een verdeling van O en O<sub>3</sub>.

Tegenwoordig is bekend dat nog vele andere stoffen en reactiecycli een rol spelen bij de vorming en vernietiging van ozon in de stratosfeer. Vooral katalytische cycli blijken een rol te spelen, in het bijzonder bij de vernietiging van ozon. De eenvoudigste voorstelling van zo'n cyclus is:

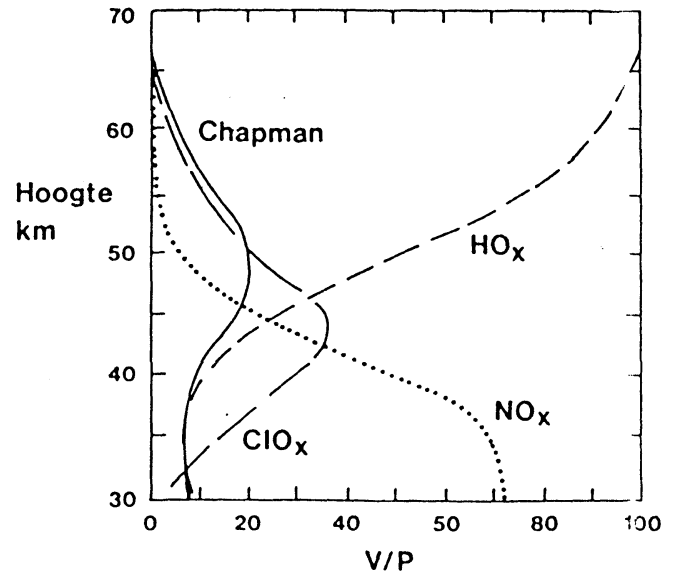


X is hierbij een katalysator. De belangrijkste in de stratosfeer voorkomende katalysatoren zijn Cl<sub>x</sub>, NO<sub>x</sub> en HO<sub>x</sub> (x oneven of nul).

Deze laatste reactiecyclus ligt aan de basis van de "spuitbusproblematiek". Spuitbussen bevatten gechloreerde/gefluoriseerde koolwaterstoffen (CFK's). In de stratosfeer worden hieruit onder invloed van ultraviolet licht chloorradicalen vrijgemaakt. Dit radicaal verzorgt de rol van X in bovenstaande cyclus en veroorzaakt op die manier een extra afname van ozon in de stratosfeer. Figuur 6 geeft een overzicht van de bijdrage van verschillende componenten aan de verhouding verlies/productie van ozon in de stratosfeer.



- figuur 5 : ozonprofiel -



- figuur 6 : bijdrage van verschillende componenten aan de verhouding verlies/productie van ozon -

3

De straalstroom

3.1 De Coriolis-kracht

We stellen ons een deeltje voor met eenheidsmassa dat zich bevindt op breedte  $\phi$  (op het noordelijk halfrond) en oorspronkelijk in rust is.

We kiezen een lokaal coördinatenstelsel  $xyz$ , waarin  $x$  staat voor de oostelijke richting (i.e. langs een breedtecirkel),  $y$  voor de noordelijke richting (i.e. langs een meridiaan) en  $z$  voor de verticale richting (i.e. loodrecht op het aardoppervlak). Het deeltje ondervindt een middelpuntvliedende (centrifugale) kracht  $F_c$  als gevolg van de rotatie van de aarde. Deze kracht wordt gegeven door :

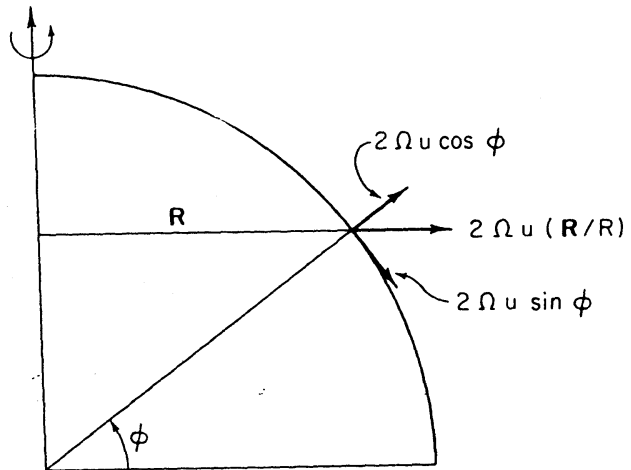
$$F_c = \Omega^2 \cdot R$$

Hierin is  $\Omega$  de grootte van hoeksnelheid van de aarde en  $R$  de afstand van het deeltje tot de rotatieas.

We veronderstellen nu dat het deeltje gaat bewegen met snelheid  $U = (u,v,w)$ . De totale centrifugaalkracht die op het deeltje werkt is dan:

$$F_c = \left( \Omega + \frac{u}{R} \right)^2 \cdot R = \Omega^2 R + 2\Omega u \cdot \frac{R}{R} + u^2 \cdot \frac{R}{R^2}$$

De eerste term in het rechterlid is niets anders dan de centrifugaalkracht als gevolg van de rotatie van de aarde. De twee andere termen zijn extra krachten, beiden van de aarde af gericht in de richting van  $R$  ( zie figuur 7 ). Omdat in het algemeen  $u \ll R$  kunnen we de laatste term verwaarlozen. De overblijvende term kan worden ontbonden in een component langs de  $x$ -as en een component langs de  $z$ -as:



- figuur 7: krachten op een bewegend deeltje -

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\Omega v \sin\varphi \\ 2\Omega v \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Tevens verandert als gevolg van de verplaatsing in de y-richting het oorspronkelijke hoekmoment  $\Omega R^2$  omdat de afstand van het deeltje tot de rotatieas verandert. Omdat het totale hoekmoment behouden moet blijven zal de hoeksnelheid van het deeltje moeten veranderen, d.w.z. het deeltje zal zich ten opzichte van de aarde in oostelijke dan wel westelijke richting gaan verplaatsen.

Zij  $\Delta R$  de verandering in afstand van het deeltje tot de rotatieas,  $\Delta u$  de snelheidsverandering langs de x-as en zij  $\varphi$  de oorspronkelijke breedte en  $\Delta\varphi$  het breedteverschil. Dan geeft de wet van behoud van hoekmoment:

$$\Omega R^2 = \left( \Omega + \frac{\Delta u}{R + \Delta R} \right) (R + \Delta R)^2$$

We werken het rechterlid uit, verwaarlozen de tweede orde termen in  $\Delta$  en lossen op voor  $\Delta u$ . Dit levert:

$$\Delta u = -2 \Omega \Delta R = 2 \Omega r \Delta\varphi \sin\varphi$$

Delen we nu door  $\Delta t$  en nemen we de limiet voor  $\Delta t \rightarrow 0$  dan komt er:

$$\left( \frac{du}{dt} \right) = 2 \Omega r \frac{d\varphi}{dt} \sin\varphi = 2 \Omega v \sin\varphi$$

Het deeltje ondervindt dus een kracht in de x-richting ter grootte  $F_x = 2 \Omega v \sin\varphi$ .

Geheel analoog volgt dat het deeltje als gevolg van de verticale snelheid  $w$  een kracht ondervindt in de x-richting ter grootte  $F_x = -2 \Omega w \sin\varphi$ .



Samenvattend: een deeltje met eenheidsmassa dat met snelheid  $U = (u,v,w)$  op het noordelijk halfrond beweegt ondervindt op breedte  $\varphi$  een kracht  $F$ , gegeven door:

$$F_{C_o} = \begin{bmatrix} 2 \Omega v \sin\varphi - 2 \Omega w \cos\varphi \\ -2 \Omega u \sin\varphi \\ 2 \Omega u \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Deze kracht heet Coriolis-kracht.

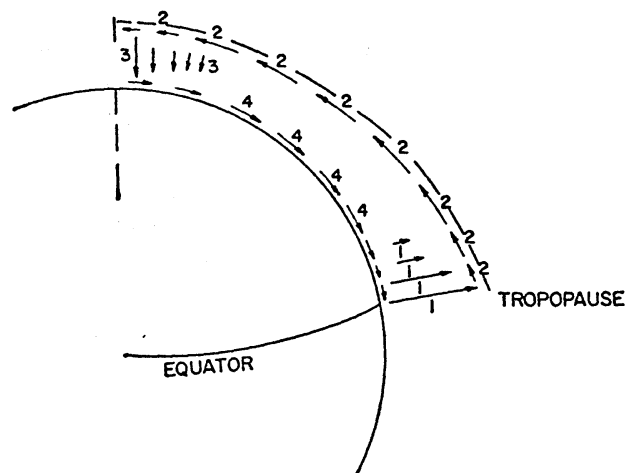
### 3.2 De straalstroom

Aan de hand van figuur 8 zullen we enkele aspecten van de globale luchtcirculatie bekijken die een verklaring kunnen geven voor het bestaan van de straalstroom.

We nemen voor het moment even aan dat de aarde stilstaat en dat de zon om de aarde draait. De evenaar zal sterker verwarmd worden dan andere gebieden. Deze verwarming veroorzaakt convectieve luchtstijging (thermiek): (1). Aangezien de tropopauze een natuurlijke barrière vormt voor zulke verticale bewegingen (door de inversie van de temperatuurgradient) zal dit resulteren in een noordwaartse resp.

zuidwaartse beweging: (2).

De opgestegen lucht wordt aan het aardoppervlak aangevuld met (koudere) lucht van hogere breedtes: (4). De naar de polen stromende lucht koelt af en zal gaan dalen tot aan het aardoppervlak: (3).



-figuur 8: Hadley-circulatie-

Dit globale luchtcirculatiemodel heet Hadley-circulatie, genoemd naar de engelsman George Hadley, die dit model in de vorige eeuw bedacht.

Wat gebeurt er nu als we aannemen dat de aarde draait ?

Als gevolg van de Coriolis-kracht zullen de deeltjes die naar de noordpool stromen een snelheidscomponent in oostelijke richting krijgen, er ontstaat dus een westenwind. Deze westenwind kan een aanzienlijke snelheid bereiken; een oorspronkelijk in rust zijnde eenheidsmassa die zich van 0° naar 30° NB verplaatst heeft een eindsnelheid in oostelijke richting van ongeveer 100 m/s (als we alleen uitgaan van behoud van hoekmoment en wrijvingseffecten e.d. verwaarlozen).

Figuur 9 geeft een schematische voorstelling van de zogenaamde sub-tropische straalstroom die het gevolg is van de Hadley-circulatie. Deze straalstroom omcirkelt het gehele noordelijk halfrond en is vrij stabiel. De windsnelheden zijn het grootst in de winter als de temperatuurverschillen tussen evenaar en noordpool het grootst zijn.

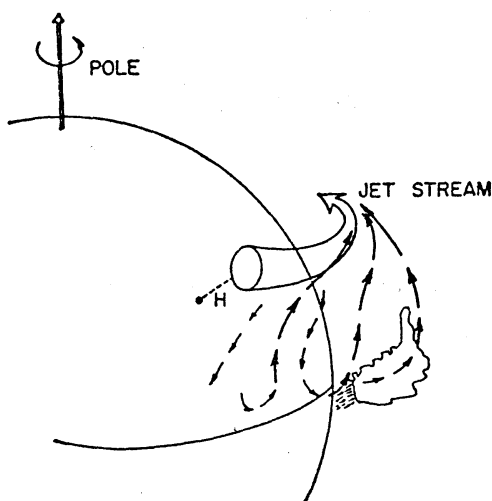
De subtropische straalstroom is niet de enige straalstroom die op aarde voorkomt. Er moeten dus nog andere mechanismen dan de Hadley-circulatie een rol spelen bij het ontstaan van straalstromen. We volstaan met het noemen van een van die mechanismen.

Tussen de evenaar en de (noord)pool vindt een afname in temperatuur plaats met toenemende breedte. Deze temperatuurafname vindt echter niet geleidelijk plaats maar concentreert zich in smalle gebieden, fronten genoemd. Deze plotselinge temperatuurafname veroorzaakt op zijn beurt een sterke verandering in de luchtdruk. Een front is dus een smal gebied met een sterke temperatuur- en drukgradient. De sterke drukgradient in een front veroorzaakt een sterke wind; de polaire straalstroom.

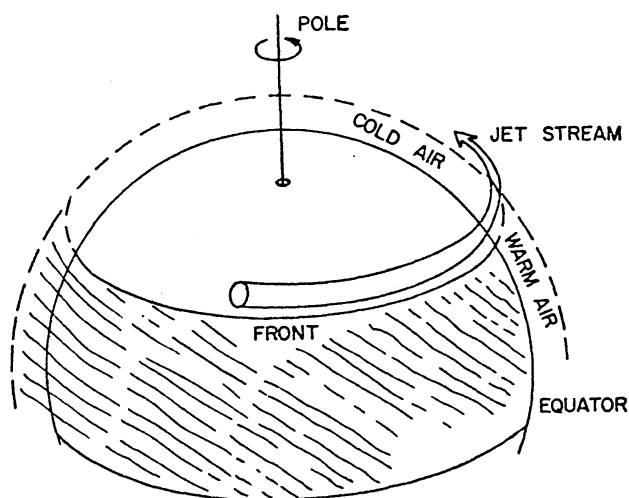
Deze straalstroom heeft een maximale windsnelheid rond de tropopauze.

Een schematische voorstelling van deze situatie is te zien in figuur 10.

In werkelijkheid vormt een polaire straalstroom geen gladde ring rond de aarde maar slingert heen en weer, als een zich voortbewegende slang.



- figuur 9: de subtropische straalstroom -



- figuur 10: de polaire straalstroom -

## 4 INSTABILITEITEN ROND DE STRAALSTROOM

### 4.1 Voorbereiding

In dit hoofdstuk worden enkele aspecten besproken van de theorie van de stabiliteit van zogenaamde gelaagde scherende stromingen (eng: stratified shear flows). We maken daarbij gebruik van het in §3.1 gedefinieerde coördinatenstelsel.

Een stroming heet *gelaagd* indien de voor de stroming relevante grootheden slechts afhangen van de verticale coördinaat  $z$ . We spreken van een *scherende stroming* als voor het snelheidsveld

$U=(u,v,w)$  van de stroming geldt :  $\partial U/\partial z \neq 0$ .

In ons geval zullen we ons nog verder beperken en slechts *parallele stromingen* bekijken, d.w.z. stromingen met  $v = w = 0$ . Tevens veronderstellen we dat de stroming adiabatisch, niet-visceus en incompressibel is.

Onder de *stabiliteit* van een stroming verstaan we de manier waarop de stroming reageert op kleine verstoringen. Wordt een verstoring op den duur uitgedoofd (damping) dan heet de stroming stabiel. Wanneer een verstoring niet uitdooft maar steeds groter wordt spreken we van een instabiele stroming.

Een veel gebruikte grootheid (in de meteorologie en de geofysica) om de stabiliteit van een stroming weer te geven is de zgn. *Brunt - Väisälä frequentie*, gedefinieerd als :

$$N = \left( \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1.1)$$

met  $\theta(z)$  de potentiële temperatuur.<sup>1)</sup>

De Brunt - Väisälä frequentie geeft de frequentie waarmee een deeltje gaat trillen als het een verticale uitwijking uit de evenwichtsstand krijgt. Als het rechterlid van 4.1.1 positief is is  $N$  goed gedefinieerd, we spreken in dat geval van een statisch stabiele atmosfeer of ook van *statische stabiliteit*. Is het rechterlid van 4.1.1 negatief of nul dan treedt geen trilling op; het deeltje behoudt z'n verkregen uitwijking of zal zich rechthoekig blijven voortbewegen in verticale richting. In ons model zullen we steeds uitgaan van een statisch stabiele atmosfeer.

1) de potentiële temperatuur van een pakketje lucht is de temperatuur die dat pakketje zou hebben wanneer het adiabatisch op een druk van 1 atmosfeer zou worden gebracht .

In het gelaagde incompressibele model met dichtheid  $\rho(z)$  is de Brunt-Väisälä frequentie te schrijven als :

$$N^2 = - \frac{g}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad 1) \quad (4.1.1)$$

In dat geval is de eis voor statische stabiliteit dus:  $\partial\rho/\partial z < 0$ .

We definiëren nog de *statische stabiliteitsparameter*  $\beta$  door:

$$\beta = \rho^{-1} \partial\rho/\partial z.$$

Men kan bewijzen dat een scherende stroming in een niet visceuse incompressibele atmosfeer altijd instabiel is <sup>2)</sup>.

We definiëren nu het *Richardsongetal*  $J$  als:

$$J = \frac{N^2}{\left(\frac{du}{dz}\right)^2} \quad (4.1.2)$$

Het Richardsongetal geeft een maat voor het stabiliserende effect van de statische stabiliteit in vergelijking met het versturende effect van windschering.

#### 4.2 De Taylor-Goldsteinvergelijking

We zullen nu een differentiaalvergelijking afleiden die het gedrag beschrijft van een infinitesimaal kleine verstoring op een gegeven stroming  $U=(U,0,0)$ , in een medium met dichtheidsprofiel  $\rho_0(z)$  en drukprofiel  $p_0(z)$ .

De vergelijkingen die we in het model gebruiken zijn :

$$\text{impulsvergelijking (Euler) :} \quad \mathbf{q}_t + (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q} = - \rho^{-1} \cdot \nabla p \quad (4.2.1)$$

$$\text{continuïteitsvergelijking :} \quad \rho_t + (\mathbf{q} \cdot \nabla) \rho = 0 \quad (4.2.2)$$

$$\text{incompressibiliteit :} \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (4.2.3)$$

met  $\mathbf{q}$  de windvector,  $p$  de druk en  $\rho$  de dichtheid. Indices geven partiele differentiaties aan.

1) Zie Pedlosky ,pag.354

2) Zie Landau en Lifschitz,pag. 114

Beschouwen we nu een 2-dimensionale verstoring met snelheidscomponenten  $u$  en  $w$  in de  $x$ - resp.  $z$ - richting. Dan wordt  $q$ :

$$q = (U + u, 0, w) \quad (4.2.4)$$

Voor de dichtheid  $\rho$  nemen we:

$$\rho = \rho_0 - \rho_0' \eta \quad (4.2.5)$$

Hierin is  $\eta$  de verticale verplaatsing van een deeltje uit de begintoestand.

Vergelijking 4.2.5 drukt uit dat een deeltje dat zich op zeker tijdstip op hoogte  $z$  bevindt dezelfde dichtheid heeft als het had op hoogte  $z - \eta$  op tijdstip  $t = 0$ . Immers:  $\rho_0(z - \eta) \approx \rho_0(z) - \eta \rho_0'(z)$  en het rechterlid is gedefinieerd als  $\rho(z)$ .

Invullen van (4.2.4) en (4.2.5) in (4.2.1), (4.2.2) en (4.2.3) levert (met verwaarlozing van tweede orde termen in  $u, w$  en  $\eta$ ):

$$\rho_0 \left( \frac{Du}{Dt} + U'w \right) = - (p - p_0)_x \quad (4.2.6)$$

$$\rho_0 \left( \frac{Dw}{Dt} + \beta g \eta \right) = - (p - p_0)_z \quad (4.2.7)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = w \quad (4.2.8)$$

$$u_x + w_z = 0 \quad (4.2.9)$$

waarin  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}$ ; de materiele afgeleide.

We veronderstellen nu een periodieke verstoring van de vorm:

$$\eta(x, z, t) = F(z) e^{ik(x-ct)} \quad (4.2.10)$$

Hierin is  $k$  het (reel veronderstelde) golfgetal en  $c$  de complexe fasesnelheid.

Overigens zullen we in alle berekeningen bij het eindantwoord alleen het reële deel van de oplossing beschouwen.

Vullen we (4.2.10) in in (4.2.6) t/m (4.2.9) dan vinden we:

$$u = - [(U - c) \eta]', \quad w = ik(U - c) \eta, \quad p - p_0 = \rho_0 (U - c)^2 \eta', \quad (4.2.11.a,b,c)$$

en 
$$[\rho_0(U-c)^2 F]' + \rho_0[\beta g - k^2(U-c)^2] F = 0 \quad (4.2.12)$$

Uit 4.2.11.b volgt dan dat we kunnen schrijven:

$$w(z) = ik(U(z) - c)\eta = ik(U(z) - c)F(z) e^{ik(x - ct)} = \phi(z) \cdot ik e^{ik(x - ct)} \quad (4.2.13)$$

ofwel:

$$F(z) = w(z)(U(z) - c) (ik)^{-1} e^{ik(x - ct)} \quad (4.2.14)$$

Vullen we 4.2.13 in in 4.2.12 dan volgt:

$$w''(z) + w(z) \left[ \frac{\beta g}{(U(z) - c)^2} - \frac{U''(z)}{(U(z) - c)} - k^2 + \frac{\beta U'(z)}{(U(z) - c)^3} \right] - \beta w'(z) = 0 \quad (4.2.15)$$

Indien we de traagheidseffecten van de dichtheidsvariaties verwaarlozen (de zgn. Boussinesq-benadering) gaat 4.2.15 over in:

$$w''(z) + [\beta g(U(z) - c)^{-2} - U''(z)(U(z) - c)^{-1} - k^2] w(z) = 0 \quad (4.2.16)$$

Merk nu op dat dit impliceert (vanwege het rechterlid van 4.2.13):

$$\phi''(z) + [\beta g(U(z) - c)^{-2} - U''(z)(U(z) - c)^{-1} - k^2] \phi(z) = 0 \quad (4.2.17)$$

Met behulp van de definitie van  $\beta$  op pagina 16 en formule 4.1.1 krijgen we uiteindelijk:

$$\phi''(z) + \left[ \frac{N^2}{(U - c)^2} - \frac{U''}{(U - c)} - k^2 \right] \phi(z) = 0 \quad (4.2.18)$$

Vergelijking (4.2.18) staat bekend als de Taylor-Goldstein vergelijking.

Uiteraard is de Taylor-Goldstein vergelijking pas zinvol wanneer er randvoorwaarden worden gegeven waaraan een eventuele oplossing moet voldoen. Deze randvoorwaarden kunnen verschillende vormen aannemen, bijvoorbeeld :

1.  $\phi$  is voorgeschreven voor  $z = z_1$  en  $z = z_2$ , de oplossing wordt gevraagd voor  $z \in [z_1, z_2]$
2. als bij 1, met  $z_1 = \pm\infty$  en/of  $z_2 = \pm\infty$
3.  $\phi$  is voorgeschreven voor  $z = z_1$ ,  $\phi'$  is voorgeschreven voor  $z = z_2$ .

Merk op dat voor reële  $c$  ( $\text{Im}(c) = 0$ ) de T-G vergelijking een singulariteit heeft voor  $U(z)=c$ . De waarde van  $z$  waarvoor dit geldt heet de kritieke waarde (ook: het kritieke punt of de kritieke laag), notatie :  $z_c$ .

De stroming is instabiel voor kleine verstoringen wanneer de T-G vergelijking (met gegeven randvoorwaarden ) een niet triviale oplossing heeft met  $\text{Im}(c) > 0$ .

#### 4.3 Een criterium voor instabiliteit

We gaan uit van vergelijking (12) en leiden een criterium af voor het bestaan van een instabiele oplossing van deze vergelijking (en dus van de T-G vergelijking ). Als randvoorwaarden nemen we voorwaarde 1. uit de vorige paragraaf.

Zij  $c = c_r + ic_i$ , en zij  $F$  een instabiele oplossing, dan is dus  $c_i > 0$ . Zij vervolgens  $W = U - c$ .

Omdat  $c_i > 0$  is  $W(z) \neq 0$  voor alle  $z$ . We kunnen dus een tak van  $W^{1/2}$  definiëren die consistent is voor alle  $z \in [z_1, z_2]$ . Tevens heeft  $W$  dezelfde differentieerbaarheidseigenschappen als  $U$ , zeg  $W$  is minstens tweemaal continu differentieerbaar ( $W \in C^2$ ). Zij nu  $G = W^{1/2}\psi$  en vervang de variabele  $\psi$  in vergelijking (12) door  $G$ . Dit levert :

$$(\rho W G')' - \left[ \frac{1}{2} (\rho U)' + k^2 \rho W + \rho W^{-1} \left( \frac{1}{4} U^2 - g\beta \right) \right] G = 0 \quad (4.3.1)$$

met  $G(z_1) = G(z_2) = 0$ .

Vermenigvuldigen we (3.1) met de complex geconjugeerde  $G^*$  van  $G$  en integreren we vervolgens over  $[z_1, z_2]$  dan vinden we :

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho W \left[ |G'|^2 + k^2 |G|^2 \right] + \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{2} (\rho U)' |G|^2 + \int_{z_1}^{z_2} \rho \left[ \frac{1}{4} U^2 - g\beta \right] W^* \left| \frac{G}{W} \right|^2 = 0 \quad (4.3.2)$$

( de index 0 in  $\rho_0$  speelt geen enkele rol en wordt steeds weggelaten ).

Vanwege  $c_i > 0$  impliceert het imaginaire deel van (3.2) :

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho [ |G'|^2 + k^2 |G|^2 ] + \int_{z_1}^{z_2} \rho [ g\beta - \frac{1}{4} U^2 ] | \frac{G}{W} |^2 = 0 \quad (4.3.3)$$

Dit is echter onmogelijk als  $g\beta - 1/4 U^2$  overal niet-negatief is. Een noodzakelijke voorwaarde voor instabiliteit is dus :  $g\beta - 1/4 U^2 < 0$  voor tenminste één  $z \in [z_1, z_2]$ .

Met behulp van de definitie van het Richardsongetal  $J$  (zie § 4.1) vinden we dus als noodzakelijke voorwaarde voor instabiliteit :  $J(z) \leq 0,25$  voor tenminste één  $z \in [z_1, z_2]$ .

Hierbij dient nog opgemerkt te worden dat  $J$  niet overal gedefinieerd is als  $U(z)$  niet strict monotoon is op  $[z_1, z_2]$ . In dat geval is er een  $z_c \in [z_1, z_2]$  waarvoor  $U(z_c) = 0$  en definiëren we  $J$  in het punt  $z_c$  door:

$$J(z_c) = \lim_{z \rightarrow z_c} J(z)$$

waarbij de waarde  $\infty$  is toegestaan.

#### 4.4 De halfcirkelstelling

Ondanks het in de vorige paragraaf afgeleide instabiliteitscriterium lijkt het vooralsnog onbegonnen werk de eigenwaarden  $(c_r, c_i)$  van de T-G vergelijking numeriek te bepalen. Het criterium  $J \leq 0,25$  geeft ons alleen de mogelijkheid op voorhand te bepalen of de gegeven stroming instabiel kan zijn, maar op geen enkele manier is duidelijk waar de bijbehorende eigenwaarde(n) van zo'n instabiele stroming in het  $(c_r, c_i)$ -vlak gelocaliseerd kunnen worden.

De halfcirkelstelling (Miles, 1961) levert echter een geschikt criterium voor de localisatie van de gezochte eigenwaarden.

We gaan weer uit van vergelijking (12), vermenigvuldigen met  $F^*$  en integreren van  $z_1$  naar  $z_2$ . Dit levert (we laten de integratiegrenzen weg):

$$\int \rho W^2 [ |F'|^2 + k^2 |F|^2 ] - \int g\beta |F|^2 = 0 \quad (4.4.1)$$

Als we reëel en imaginair deel splitsen krijgen we :

$$\int \rho [ (U - c_r)^2 - c_i^2 ] [ |F'|^2 + k^2 |F|^2 ] - \int g\beta \rho |F|^2 = 0 \quad (4.4.2)$$



$$2ic_i \int \rho (U - c_r) [ |F'|^2 + k^2 |F|^2 ] = 0 \quad (4.4.3)$$

Zij nu  $Q = [ |F'|^2 + k^2 |F|^2 ]$ , dan kunnen (4.2) en (4.3) geschreven worden als :

$$\int UQ = c_r \int Q \quad (4.4.4)$$

$$\int U^2 Q = (c_r^2 + c_i^2) \int Q + \int g\rho\beta |F|^2 \quad (4.4.5)$$

Onderstel nu dat  $\max \{U(z)\} = a$ ,  $\min \{U(z)\} = b$ . Dan:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int (U - a)(U - b) Q = \int U^2 Q - (a + b) \int UQ + ab \int Q \\ &= [c_r^2 + c_i^2 - (a+b)c_r + ab] \int Q + \int g\rho\beta |F|^2 \\ &= \left\{ \left[ c_r - \frac{1}{2}(a+b) \right]^2 + c_i^2 - \left[ \frac{1}{2}(a-b) \right]^2 \right\} \int Q + \int g\rho\beta |F|^2. \end{aligned}$$

Omdat  $\beta \geq 0$  en  $Q > 0$  volgt hieruit :

$$\left[ c_r - \frac{1}{2}(a+b) \right]^2 + c_i^2 \leq \left[ \frac{1}{2}(a-b) \right]^2 \quad (4.4.6)$$

Vergelijking (4.4.6) staat bekend als de halfcirkelstelling. In woorden luidt de stelling:

*De complexe golfsnelheid  $c$  voor een instabiele mode ligt binnen de halfcirkel in het complexe bovenhalfvlak met middelpunt  $(1/2(a+b), 0)$  en straal  $1/2(a-b)$ . Hierin zijn  $a$  en  $b$  het maximum resp. minimum van  $U(z)$  op het interval  $[z_1, z_2]$ .*

4.5

De groeisnelheid

De conditie  $J \geq 0,25$  (§ 4.4) en de halfcirkelstelling (§ 4.5) leggen beperkingen op aan de waarden van het Richardsongetal  $J$  en de complexe golfsnelheid  $c$  van een instabiele stroming. Voor praktische toepassingen is het van belang ook een dergelijke beperking te hebben voor de groeisnelheid  $kc_i$  van een instabiele golf. Met behulp van vergelijking (4.3.3) kunnen we een bovengrens voor deze groeisnelheid afleiden.

We merken op dat  $|W|^{-2} \leq c_i^{-2}$ , dan geeft (4.3.3):

$$\begin{aligned} k^2 \int \rho |G|^2 &= \int \rho \left[ \frac{1}{4} U^2 - g\beta \right] \left| \frac{G}{W} \right|^2 - \int \rho |G'|^2 \\ &\leq c_i^{-2} \max \left\{ \frac{1}{4} U^2 - g\beta \right\} \int \rho |G|^2 \end{aligned}$$

en dus  $k^2 c_i^2 \leq \max \left\{ \frac{1}{4} U^2 - g\beta \right\}$  (4.5.1)

5

EEN MODEL VOOR DE STRAALSTROOM

5.1 Het randwaardeprobleem

Zoals in §4.2 opgemerkt heeft de Taylor-Goldstein vergelijking pas betekenis indien er randvoorwaarden bij gegeven worden. In deze paragraaf zullen we die randvoorwaarden geven. Voor de overzichtelijkheid noemen we nogmaals de Taylor-Goldstein vergelijking:

$$\phi''(z) + \Lambda(z)\phi(z) = 0 \quad (5.1.1)$$

$$\text{met } \Lambda(z) = \left[ \frac{N^2}{(U-c)^2} - \frac{U'}{(U-c)} - k^2 \right] \quad (5.1.2)$$

We stellen nu de volgende eisen:

$$(1) \quad \phi(z=0) = 0 \quad (5.1.3)$$

- (2) boven een zekere hoogte  $z = z_u$  veronderstellen we  $U(z)$  en  $N^2(z)$  constant. Dan is ook  $\Lambda(z)$  constant en 5.1.1 heeft een asymptotische oplossing van de vorm:

$\phi(z) \sim e^{inz}$ , met:

$$n = (n_r + in_i) = \pm \{ \Lambda(z) \}^{1/2} = \pm \left( \frac{N^2}{(U-c)^2} - k^2 \right) \quad (5.1.4)$$

$$\text{Voor } z \geq z_u \text{ voldoet } w \text{ dus aan de voorwaarde: } \phi' = in\phi. \quad (5.1.5)$$

We eisen nu :  $n_i > 0$ , d.w.z.: we nemen de oplossing met de exponentieel gedempte amplitude.

De vergelijkingen 5.1.1 en 5.1.3 t/m 5.1.5 leveren tesamen een randwaardeprobleem. Aangezien we geïnteresseerd zijn in die waarden van  $c$  waarvoor dit probleem een oplossing heeft hebben we te maken met een eigenwaardeprobleem: voor welke waarden van  $c$  (met  $c_i > 0$ ) bestaat er een oplossing van de Taylor-Goldstein vergelijking die aan de gegeven randvoorwaarden voldoet (bij gegeven golfgetal  $k$ )?

## 5.2 Numerieke oplossingsmethode

In deze paragraaf bespreken we een methode voor het numeriek oplossen van het in §5.1 gestelde probleem.

We merken om te beginnen nogmaals op dat de halfcirkelstelling (§4.4) een beperking oplegt aan de mogelijke waarden van  $c$  behorend bij een instabiele oplossing. We maken daar op de volgende manier gebruik van.

Eerst wordt een grid gelegd op de genoemde halfcirkel in het complexe bovenhalfvlak. Voor elk gridpunt wordt de T-G vergelijking numeriek geïntegreerd van  $z = z_u$  naar  $z = 0$ . Dit levert  $g(z=0) = \phi(0) + i\psi(0)$ . Vervolgens gebruiken we deze waarden van  $g(0)$  om een iteratie uit te voeren naar die waarden van  $c$  waarvoor  $g(0) = 0$ .

Alvorens de integratie uit te kunnen voeren lineariseren we de Taylor-Goldstein vergelijking (4.2.19), waarbij we het gedeelte tussen rechte haken noteren als  $\Lambda(z)$ .

Stel  $\psi = \phi'$ , dan  $\psi' = \phi''$  en de T-G is te splitsen in twee eerste orde differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \psi' + \Lambda \phi = 0 \\ \phi' - \psi = 0 \end{cases} \quad \text{ofwel;} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi' \\ \psi' \end{bmatrix}$$

De door ons gebruikte integratieprocedure is de methode van Merson (zie Lambert, 1973). Dit is een éénstapsmethode van orde 4, en is als volgt gedefinieerd:

Zij  $y' = f(y, z; h)$  met  $y(z=z_0) = y_0$ . Zij tevens:  $z_n = z_0 + h \cdot n$ . Noteren we de benadering van  $y(z_n)$  met  $\eta_n$ , dan:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= y_0 \\ \eta_{n+1} &= \eta_n + \frac{h}{6} (k_1 + 4k_4 + k_5) \end{aligned}$$

met:

$$k_1 = f(z_n, \eta_n)$$

$$k_2 = f\left(z_n + \frac{1}{3}h, \eta_n + \frac{1}{3}hk_1\right)$$

$$k_3 = f(z_n + \frac{1}{3}h, \eta_n + \frac{1}{6}hk_1 + \frac{1}{6}hk_2)$$

$$k_4 = f(z_n + \frac{1}{2}h, \eta_n + \frac{1}{8}hk_1 + \frac{3}{8}hk_3)$$

$$k_5 = f(z_n + h, \eta_n + \frac{1}{2}hk_1 - \frac{3}{2}hk_3 + 2hk_4)$$

De stapgrootte  $h$  is variabel en steeds zo gekozen dat de lokale discretisatiefout  $\epsilon$  kleiner is dan  $10^{-6}$ . De genoemde iteratieprocedure is een zogenaamde twee-dimensionale secant methode. Deze methode werkt als volgt.

Er wordt gezocht naar vierkanten in het grid waarvoor geldt dat zowel  $\phi_r(0)$  als  $\phi_i(0)$  niet op alle vier de hoekpunten hetzelfde teken hebben. Met behulp van drie van deze hoekpunten worden twee vlakken gedefinieerd; één door de drie waarden van  $\phi_r(0)$  en één door de drie waarden van  $\phi_i(0)$ . Deze twee vlakken snijden het vlak  $z = 0$  in twee lijnen. Het snijpunt van deze twee lijnen is het nieuwe punt  $(c_r, c_i)$  in de iteratieprocedure. In dit nieuwe punt wordt opnieuw  $g(0)$  berekent, en samen met twee oude waarden van  $g(0)$  uit de vorige iteratiestap worden weer twee vlakken gedefinieerd die samen met  $z = 0$  het volgende punt  $(c_r, c_i)$  bepalen.

De iteratie wordt gestopt indien: 1. het nieuwe punt buiten de halfcirkel ligt  
of 2. de iteratie steeds hetzelfde rijtje punten oplevert  
of 3. wanneer  $|| c_{n+1} - c_n || \leq \delta$ , met  $\delta$  een van tevoren gegeven tolerantie.<sup>1)</sup>

In de eerste twee gevallen is de iteratie mislukt en wordt verder gegaan met het volgende vierkant met bovengenoemde eigenschap. In het laatste geval is de iteratie gelukt en wordt  $c_{n+1}$  als juiste waarde van de gezochte  $c$  genomen.

Opgemerkt dient nog te worden dat deze methode, evenals de "gewone" secant-methode, niet hoeft te convergeren. Anderzijds is de methode in principe in staat om meerdere waarden van  $c$  te localiseren waarvoor  $g(0) = 0$ , dit in tegenstelling tot de meer gebruikelijke "shooting methode".

1)  $|| \cdot ||$  is de Euclidische norm op het  $(c_r, c_i)$ -vlak.

5.3 Het model

Als model voor de straalstroom gebruiken we de volgende formule:

$$U(z) = A + B \cosh^{-2}\left(\frac{z-h}{d}\right)$$

In figuur 12 is zo'n profiel weergegeven. De parameter d is een maat voor de "dikte" van de straalstroom. Voor z=h bereikt U z'n maximale waarde.

Vooralsnog veronderstellen we een constante temperatuur en een constante Brunt-Väisälä frequentie van achtereenvolgens 200K en  $(2\pi/300)^2 \text{ s}^{-2}$ .

Het Richardsongetal in de stroming wordt dan gegeven door:

$$J = \frac{N^2 \cosh^4\left(\frac{z-h}{d}\right)}{\frac{4B^2}{d^2} \tanh^2\left(\frac{z-h}{d}\right)} \tag{5.3.1}$$

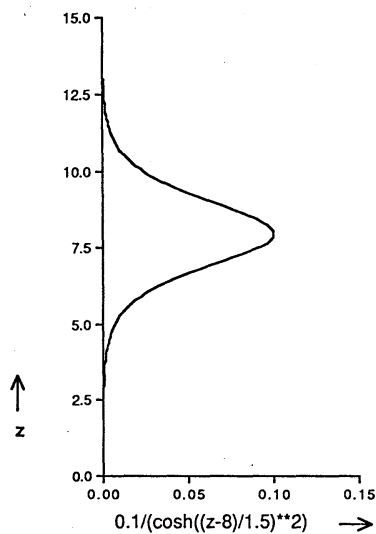
Teneinde het minimale Richardsongetal in de stroming te bepalen stellen we  $d/dz\{J(z)\}=0$ .

Hieruit volgt na enig rekenwerk:

$$\tanh^2\left(\frac{z-h}{d}\right) = \frac{1}{3} \quad \text{en} \quad \cosh^2\left(\frac{z-h}{d}\right) = \frac{3}{2}. \tag{5.1.2}$$

Ingevuld in 5.3.1 levert dit:

$$J_{\min} = \frac{27}{16} \frac{N^2 d^2}{B^2} \approx 1,69 \frac{N^2 d^2}{B^2} \tag{5.3.3}$$



- figuur 11: cosh<sup>-2</sup> profiel -

Naar aanleiding van wat in hoofdstuk 3 is gezegd over de straalstroom ligt het voor de hand de volgende aannamen te maken:

- U heeft een maximum van 100 m/s op een hoogte van h km
- U(0) = 0.

Dit betekent dat A en B zo gekozen moeten worden dat  $U(h)=0,1$  en  $U(0)=0$ . Tevens eisen we:  $J \leq 0.25$ .

Dus:

$$\begin{cases} U(0) = A + B \cosh^{-2}\left(\frac{-h}{d}\right) = 0 \\ U(h) = A + B = 0.1 \end{cases}$$

Hieruit volgt:  $A = \frac{0.1}{1 - \cosh^2\left(\frac{h}{d}\right)}$  en  $B = 0.1 \tanh^{-2}\left(\frac{h}{d}\right)$ .

De tropopauze bevindt zich over het algemeen op een hoogte van ongeveer 9 km. In het vervolg zullen we daarom steeds nemen:  $h \in \{8,9,10\}$ .

Figuur 13 geeft het minimale Richardsongetal  $J_{\min}$  als functie van de parameter  $d$ , met  $h=8$  km.

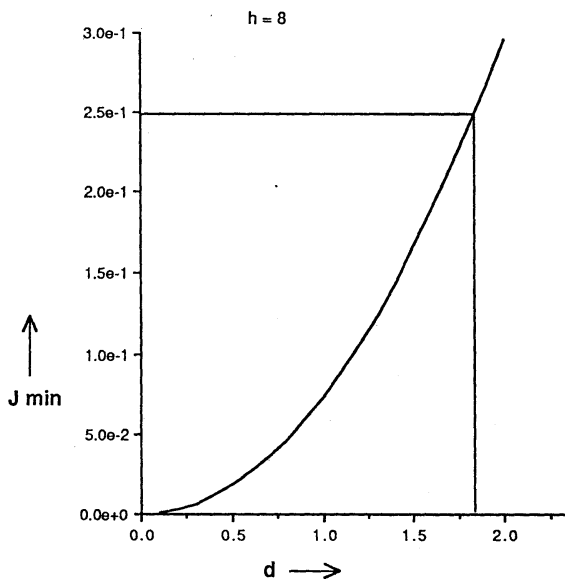
We lezen uit de grafiek af dat we voor het bestaan van instabiele modes moeten eisen:  $d \leq 1,85$ . Analoog zijn de maximale waarden van  $d$  bepaald voor  $h=9$  en  $10$  km, ook dan moeten we nemen  $d \leq 1,85$ .

De bovengrens  $z_u$  voor de integratie van de T-G vergelijking bepalen we door te kijken voor welke waarden van  $z$  de functie  $U(z)$  ongeveer constant is, d.w.z.  $U'(z) \approx 0$ . We kiezen  $z_u$  zó dat voor  $z \geq z_u$  geldt:  $U'(z) \leq \delta$ .

Tabel 2 geeft de verschillende waarden van  $z_u$  voor  $d = 1$  en  $1.5$  en  $\delta = 0,01$  en  $0.001$  (met  $h=8$ ).

Tenslotte bepalen we met behulp van de halfcirkelstelling en formule 4.5.1 een bovengrens voor het golfgetal  $k$ .

Stel  $0 < \epsilon \leq c_i$ . Uit de halfcirkelstelling volgt:  $0 < \epsilon \leq c_i \leq 0.5(0.1 - 0) = 0.05$



-figuur 12:  $J_{\min}$  als functie van  $d$  -

	d:	1,0	1,5
δ:			
0.01		10,2	11,0
0.001		11,4	12,8

- tabel 2 : waarden van  $z_u$  voor verschillende waarden van  $d$  en  $\delta$  -

Uit 4.1.5 volgt dan:

$$\begin{aligned} k^2 &\leq c_i^{-2} \cdot \max \left\{ \frac{1}{4} U^2 - N^2 \right\} \\ &\leq \varepsilon^{-2} \cdot \max \left\{ \frac{1}{4} U^2 - N^2 \right\} \\ &= \varepsilon^{-2} \left[ \frac{1}{4} \max \{ U^2 \} - N^2 \right]. \end{aligned}$$

Voor het bepalen van  $\max\{U^2(z)\}$  maken we gebruik van formule 5.3.2. Invullen in de uitdrukking voor  $U'(z)$  levert:

$$\max\{U^2\} = \left\{ \frac{-2B}{d} \cosh^{-3} \left( \frac{z-h}{d} \right) \sinh \left( \frac{z-h}{d} \right) \right\}^2 \Big|_{\substack{\cosh^2 0 = 3/2 \\ \sinh^2 0 = 1/2}} = \frac{4B^2}{d^2} \cdot \frac{16}{27}$$

$$\text{Dus } 0 < k^2 \leq \varepsilon^{-2} \left[ \frac{B^2}{d^2} \cdot \frac{16}{27} - N^2 \right].$$

Nemen we  $\varepsilon = 0,01$  dan vinden we (met  $h = 8$  en  $d = 1$ ):  $0 < k \leq 3,26$ .

Overigens vinden we voor andere waarden van de parameters  $h$  en  $d$  dezelfde bovengrens voor  $k$ ; voor elke combinatie van  $h$  en  $d$  geldt:  $B \approx 0,1$ .

#### 5.4 Conclusie

In dit rapport zijn algoritmen ontwikkeld voor het opsporen van instabiele modes van kleine verstoringen rond een gegeven windprofiel. Tevens zijn deze algoritmen geïmplementeerd in een FORTRAN-77 programma (zie de appendix). Voor het windprofiel is steeds een eenvoudige analytische uitdrukking voor de straalstroom genomen.

Bij het ontwikkelen van de genoemde algoritmen is gebruik gemaakt van de uitgebreide literatuur die over het onderwerp beschikbaar is, in het bijzonder van het artikel van John Miles (zie literaturopgave). Een analyse van de resultaten heeft nog niet plaatsgevonden omdat er tot nu toe te weinig aan het model is gerekend.

Tevens dient opgemerkt te worden dat het in dit verslag gehanteerde model van de straalstroom een geïdealiseerd beeld van de werkelijkheid geeft. Teneinde een wat meer realistische beschrijving te geven van de werkelijkheid zouden in een eventueel vervolgonderzoek enkele verbeteringen van het model aangebracht moeten worden. Te denken valt in de eerste plaats aan het gebruiken van een temperatuurprofiel dat overeenstemt met de temperatuuropbouw in de atmosfeer (zie § 2.1) in plaats van de veronderstelling van een constante temperatuur in de gehele atmosfeer. In de tweede plaats



zou dan ook de Brünt-Väisälä frequentie gegeven moeten worden als functie van de hoogte  $z$ . Bovendien zou in het model een meer gecompliceerd straalstroomprofiel gebruikt kunnen worden. Tenslotte is het zinvol om naast lineaire verstoringen het gedrag van niet-lineaire verstoringen op een gegeven straalstroomprofiel te bestuderen. Dit laatste verschaft ons dan de mogelijkheid het gedrag van de verstoringen op langere termijn te bestuderen.

APPENDIX: Het FORTRAN-77 programma.

```
C *****
C * THIS PROGRAM CALCULATES EIGENVALUES C(RE) AND C(IM) FOR GIVEN *
C * REAL WAVE-NUMBER ALFA FOR TAYLOR-GOLDSTEIN EQUATION: *
C * *
C *          W''(Z) + LABDA(Z)*W(Z) = 0 *
C * *
C * WITH BOUNDARY CONDITIONS W=0 AT Z=0 AND DW/DZ=IKW FOR Z=UB *
C * ( UPPER BOUND). *
C * THE PROGRAM FOLLOWS THE FOLLOWING STRATEGY: *
C * *
C * 1.THE SEMI-CIRCLE IN THE UPPER HALFPLANE (IN WHICH THE (CR,CI) *
C * ARE LOCATED ACCORDING TO THE SEMI-CIRCLE THEOREM) IS FILLED *
C * WITH A GRID *
C * 2.FOR EACH GRIDPOINT THE T-G EQUATION IS INTEGRATED USING A *
C * MERSON INTEGRATION TECHNIQUE WITH VARIABLE STEPLENGTH (SEE *
C * LAMBERT, 1973).THE RESULTS ARE STORED IN THE 3-DIMENSIONAL *
C * ARRAY "SEARCH". *
C * 3.THE PROGRAM LOOKS FOR SO CALLED "RELEVANT SQUARES" INSIDE *
C * THE SEMI-CIRCLE, I.E. SQUARES FOR WHICH BOTH THE REAL *
C * REAL AND THE IMAGINARY PART OF W(0) CHANGE SIGN ON AT LEAST *
C * OF THE CORNERS OF THE GRID SQUARE. *
C * 4.ONCE A RELEVANT SQUARE IS FOUND THE PROGRAM USES A *
C * 2-DIMENSIONAL SECANT-METHOD TO FIND THE DESIRED EIGENVALUES.*
C * A DESCRIPTION OF THIS METHOD CAN BE FOUND IN DE BAAS AND *
C * DRIEDONKS, 1984. *
C * WE USED THE FOLLOWING BACKGROUND WINDPROFILE: *
C * *
C *          U(Z) = U0 +U1 (COSH((Z-Z0)/H)**-2) *
C * *
C * WITH U0 AND U1 SUCH THAT U(0)=0 AND U(Z0)=UMAX *
C * THE BRÜNT-VÄISÄLÄ FREQEUNCY IS TAKEN AS A CONSTANT THROUGHOUT *
C * THE PROGRAM. *
C * THE FOLLOWING ABBREVIATIONS AND VARIABLES WERE USED: *
C * *
C * VARIABLES: *
C * *
C * UMIN      = MINIMUM WIND SPEED *
C * UMAX      = MAXIMUM WIND SPEED *
C * INCR      = INCREMENT *
C * UB        = UPPER BOUND *
C * LB        = LOWER BOUND *
C * BV        = BRUNT-VAISALA FREQUENCY *
C * RI,RICH   = RICHARDSONNUMBER *
C * ALFA      = WAVENUMBER *
C * BDY       = BOUNDARY *
C * *
C * SUBROUTINES: *
C * *
C * COMPW = COMPUTE W(Z) *
C * SQRINC= SQUARE IN CIRCLE *
C * RELSQR= RELEVANT SQUARE *
C * STVAL = STARTING VALUE *
C * *
C *****
```

C

```

FILE 2 (KIND="PRINTER")
INTEGER BDY1, BDY2, TELLER
PARAMETER (BDY1=40, BDY2=16)
LOGICAL RELSQR, SQRINC, FULL
REAL UMIN, UMAX, INCR1, INCR2, C(2), RESULT(4), HULP1, HULP2
REAL SEARCH, RICH, UB, ALFA, Z0, H, RI, BV, U0, U1
DIMENSION SEARCH(4, 0:BDY1, 0:BDY2)

```

C  
C  
C  
C  
C  
C

```

*****
*   START INITIALISATION:   *
*****
PARAMETERS:

```

```

UB=14.0
Z0=8.0
H=1.0
BV=(8.0*ATAN(1.0)/300)**2
U0=-0.1/(COSH(Z0/H)**2-1.0)
U1=0.1*COSH(Z0/H)**2/(COSH(Z0/H)**2-1.0)
RI=(27.0*BV/16.0)*(H/U1)**2
ALFA=0.1
UMAX=0.1
UMIN=0.0
M1=40
M2=40
INCR1=(UMAX-UMIN)/M1
INCR2=(UMAX-UMIN)/M2
HULP1=(UMAX+UMIN)/2
HULP2=(UMAX-UMIN)/2

```

C  
C  
C

PROFIELGEGEVENS:

```

WRITE(2,*)"PROFIELGEGEVENS:"
WRITE(2,*)"
WRITE(2,*)"
WRITE(2,*)"WINDPROFIEL: U(Z)=U0+U1/COSH((Z-Z0)/H)**2 KM/SEC"
WRITE(2,*)"
WRITE(2,*)"           U0=0.0 KM/SEC"
WRITE(2,*)"
WRITE(2,*)"           U1=0.1 KM/SEC"
WRITE(2,*)"
WRITE(2,*)"           Z0=",Z0,"KM"
WRITE(2,*)"
WRITE(2,*)"           H=",H,"KM"
WRITE(2,*)"
WRITE(2,*)"           U(MAX)=U(",Z0,")=",UMAX," KM/SEC"
WRITE(2,*)"
WRITE(2,*)"           U(MIN)=U(0) =",UMIN," KM/SEC"
WRITE(2,*)"
WRITE(2,*)"BRUNT-VAISALA FREQUENTIE : N**2=",BV," 1/SEC**2"
WRITE(2,*)"
WRITE(2,*)"MINIMAAL RICHARDSON-GETAL:   J=",RI
WRITE(2,*)"
WRITE(2,*)"TEMPERATUURPROFIEL           :   T= 200 K"
WRITE(2,*)"

```

C  
C  
C

GRIDGEGEVENS:

```

WRITE(2,*)"GRIDGEGEVENS:"
WRITE(2,*)"
WRITE(2,*)"
WRITE(2,*)"MAASWIJDTE REEELE AS           : ",INCR1
WRITE(2,*)"

```

```

WRITE (2,*) "MAASWIJDTE IMAGINAIRE AS : ", INCR2
WRITE (2,*)
WRITE (2,*) "STRAAL HALVE CIRKEL : ", HULP2
WRITE (2,*)
WRITE (2,*) "MIDDELPUNT HALVE CIRKEL : (", HULP1, ", 0.0)"

```

C  
C  
C  
C  
C

INTEGRATIEGEGEVENS:

```

WRITE (2,*) "INTEGRATIEGEGEVENS:"
WRITE (2,*) "
WRITE (2,*)
WRITE (OUTFIL,*) "BOVENGRENS : ", UB, " KM."
WRITE (2,*)
WRITE (2,*) "ONDERGRENS : 0.0 KM."
WRITE (2,*)
WRITE (2,*) "STAPGROOTTE : VARIABEL, MET MAXI
*UM 0.25"
WRITE (2,*)
WRITE (2,*) "MAXIMALE LOCALE DISCRETISATIEFOUT : E-6"

```

C  
C  
C  
C

OVERIG:

```

WRITE (2,*)
WRITE (2,*) "OVERIG:"
WRITE (2,*) "
WRITE (2,*)
WRITE (2,*) "TOLERANTIE SECANT-ITERATIE : E-3"

```

C  
C

```

IF (RI.LT.0.25) THEN
  DO 10 N=1,5
    DO 40 I=1,4
      DO 50 L=0, BDY1
        DO 60 J=0, BDY2
          SEARCH(I, L, J)=999.0
60          CONTINUE
50          CONTINUE
40          CONTINUE

```

C  
C  
C  
C

```

*****
* END INITIALISATION, START COMPUTING: *
*****

```

```

WRITE (2,*)
WRITE (2,*) "-----"
WRITE (2,*) "GOLFGETAL=", ALFA
WRITE (2,*)
DO 30 J=0, BDY2
  C(2)=0.01+J*INCR2
  DO 20 L=0, BDY1
    C(1)=UMIN+L*INCR1
    IF (((HULP1-C(1))**2+C(2)**2).LE.(HULP2**2)) THEN
      CALL COMPW(C, ALFA, RESULT)
      SEARCH(1, L, J)=C(1)
      SEARCH(2, L, J)=C(2)
      SEARCH(3, L, J)=RESULT(1)
      SEARCH(4, L, J)=RESULT(2)
    END IF
20    CONTINUE
30    CONTINUE
DO 70 J=0, BDY2-1
  DO 80 L=0, BDY1-1
    IF (SQRINC(SEARCH, BDY1, BDY2, L, J)) THEN

```

```
      IF (RELSQR (SEARCH, BDY1, BDY2, L, J) )
*      CALL SECANT (SEARCH, BDY1, BDY2, L, J, HULP1, HULP2, ALFA)
      END IF
80     CONTINUE
70     CONTINUE
10     CONTINUE
      ELSE
*      WRITE (2, *) "RICHARDSONNUMBER GREATER THAN 0.25 EVERYWHERE;NO",
*      " UNSTABLE MODE EXISTS"
      END IF
      CLOSE (2)
      END

C
C
C *****
C * COMPUTE W(0)RE AND W(0)IM FOR GRIDPOINT (CRE,CIM): *
C * VARIABLES: *
C * Y = VALUE OF Z FOR WHICH NUMERICAL INTEGRATION IS PERFORMED *
C * H = STEPLENGTH *
C * EPS= LOCAL DISCRETISATION ERROR *
C * HULP1,HULP2 ARE USED TO DECIDE WHETHER A STEPLENGTH IS ACCEPTED*
C * OR NOT *
C * THE RESULT OF THE INTEGRATION IS PASSED TO THE MAIN PROGRAM *
C * VIA THE VARIABLE "RESULT" *
C *****
C
      SUBROUTINE COMPW(P,K,RESULT)
      REAL Y,P(2),W(4),K,RESULT(4),EPS,H,RES(4),START(4)
      REAL HULP1,HULP2
      EPS=1E-5
      Y=14.0
      CALL STVAL(Y,P,START,K)
10     IF (Y.LT.0.25) THEN
          H=-Y
        ELSE
          H=-0.25
        END IF
20     CALL MERSON(Y,H,P,RESULT,START,K)
          RES(1)=RESULT(1)
          RES(2)=RESULT(2)
          CALL MERSON(Y,H/2,P,RESULT,START,K)
          DO 30 I=1,4
            W(I)=RESULT(I)
30     CONTINUE
          CALL MERSON(Y+H/2,H/2,P,RESULT,W,K)
          RES(3)=RESULT(1)
          RES(4)=RESULT(2)
          HULP1=(16*ABS(RES(1)-RES(3)))/(15*EPS)**0.2
          HULP2=(16*ABS(RES(2)-RES(4)))/(15*EPS)**0.2
          IF (HULP1.GT.2.0) THEN
            H=2*H/HULP1
            GO TO 20
          ELSE
            IF (HULP2.GT.2.0) THEN
              H=2*H/HULP2
              GO TO 20
            END IF
          END IF
          Y=Y+H
          DO 40 I=1,4
            START(I)=RESULT(I)
40     CONTINUE
          IF (Y.GT.0.0) GO TO 10
      END
```

C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*  
\*           PERFORM ONE INTEGRATION STEP:           \*  
\*\*\*\*\*

```

SUBROUTINE MERSON(Y,H,P,RES,W,K)
REAL W(4),K1(4),K2(4),K3(4),K4(4),K5(4),Y,A,B,C,D
REAL H,K,P(2),RES(4)
K1(1)=W(3)
K1(2)=W(4)
CALL LABDA(Y,A,B,P,K)
K1(3)=W(2)*B-W(1)*A
K1(4)=- (W(1)*B+W(2)*A)
K2(1)=W(3)+H*K1(3)/3
K2(2)=W(4)+H*K1(4)/3
CALL LABDA(Y+H/3,A,B,P,K)
C=W(1)+H*K1(1)/3
D=W(2)+H*K1(2)/3
K2(3)=B*D-A*C
K2(4)=- (A*D+B*C)
K3(1)=W(3)+H*(K1(3)+K2(3))/6
K3(2)=W(4)+H*(K1(4)+K2(4))/6
C=W(1)+H*(K1(1)+K2(1))/6
D=W(2)+H*(K1(2)+K2(2))/6
K3(3)=B*D-A*C
K3(4)=- (A*D+B*C)
K4(1)=W(3)+H*K1(3)/8+3*H*K3(3)/8
K4(2)=W(4)+H*K1(4)/8+3*H*K3(4)/8
CALL LABDA(Y+H/2,A,B,P,K)
C=W(1)+(K1(1)+3*K3(1))*H/8
D=W(2)+(K1(2)+3*K3(2))*H/8
K4(3)=B*D-A*C
K4(4)=- (A*D+B*C)
K5(1)=W(3)+H*K1(3)/2-3*H*K3(3)/2+2*H*K4(3)
K5(2)=W(4)+H*K1(4)/2-3*H*K3(4)/2+2*H*K4(4)
CALL LABDA(Y+H,A,B,P,K)
C=W(1)+H*K1(1)/2-3*H*K3(1)/2+2*H*K4(1)
D=W(2)+H*K1(2)/2-3*H*K3(2)/2+2*H*K4(2)
K5(3)=B*D-A*C
K5(4)=- (A*D+B*C)
RES(1)=W(1)+H*(K1(1)+4*K4(1)+K5(1))/6
RES(2)=W(2)+H*(K1(2)+4*K4(2)+K5(2))/6
RES(3)=W(3)+H*(K1(3)+4*K4(3)+K5(3))/6
RES(4)=W(4)+H*(K1(4)+4*K4(4)+K5(4))/6
END

```

C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*  
\* COMPUTE WIND AND TEMPERATURE PROFILES AND THEIR DERIVATIVES.   \*  
\* UNULZ = WINDPROFILE   \*  
\* D2UDZ2 = SECOND DERIVATIVE OF WINDPROFILE                       \*  
\* TZ       = TEMPERATUREPROFILE                                       \*  
\* N2       = BRÜNT-VÄISÄLÄ FREQUENCY.                               \*  
\*\*\*\*\*

```

SUBROUTINE UNULT(Z,UNULZ,D2UDZ2,TZ,DTDZ,N2)
REAL D1,N2,Z,A,B,UNULZ,D2UDZ2,TZ,DTDZ
A=0.0
B=0.1
UNULZ=A+B/(COSH((Z-8.0)/1.0)**2)
D1=(1/COSH((Z-8)/1.0))**2
D2UDZ2=(2*D1*B*(3*TANH((Z-8.0)/1.0)**2-1.0))/1.0
TZ=200.0
N2=(8.0*ATAN(1.0)/300.0)**2

```

END

```

C *****
C * COMPUTE REAL AND IMAGINARY PART OF COEFFICIENT FUNCTION *
C * LABDA IN D.E. W'(Z)+LABDA(Z)*W(Z)=0 *
C * WN = WAVENUMBER *
C * DUMi = DUMMY VARIABLE (i=1,2,3,4,5) *
C * LABDAR= REAL PART OF LABDA *
C * LABDAI= IMAGINARY PART OF LABDA *
C *****

```

```

C SUBROUTINE LABDA(Z,LABDAR,LABDAI,PARAM,WN)
C REAL DUM1,DUM2,DUM3,DUM4,DUM5,PARAM(2),LABDAR,LABDAI,WN
C CALL UNULT(Z,DUM1,DUM5,TZ,DTDZ,DUM2)
C DUM3=(DUM1-PARAM(1))**2+PARAM(2)**2
C DUM4=DUM3**2
C LABDAR=(DUM2/DUM4)*((DUM1-PARAM(1))**2-PARAM(2)**2)-WN**2
* - (DUM5/DUM3)*(DUM1-PARAM(1))
C LABDAI=(DUM2/DUM4)*2*PARAM(2)*(DUM1-PARAM(1))
* - (DUM5/DUM3)*PARAM(2)
C END

```

```

C *****
C * CHECK IF GRID-SQUARE IS CONTAINED IN SEMI-CIRCLE: *
C *****

```

```

C LOGICAL FUNCTION SQRINC(A,N1,N2,L,J)
C INTEGER N1,N2
C REAL A
C DIMENSION A(4,0:N1,0:N2)
C IF (A(1,L,J).EQ.999.0) GO TO 10
C IF (A(1,L,J+1).EQ.999.0) GO TO 10
C IF (A(1,L+1,J+1).EQ.999.0) GO TO 10
C IF (A(1,L+1,J).EQ.999.0) GO TO 10
C SQRINC=.TRUE.
C GO TO 20
10 SQRINC=.FALSE.
20 CONTINUE
C END

```

```

C *****
C * CHECK IF BOTH RE(W(0)) AND IM(W(Y0)) CHANGE SIGN ON AT LEAST *
C * ONE OF THE CORNERS OF THE GRID SQUARE.IF SO:RELEVANT SQUARE *
C * FOUND. *
C *****

```

```

C LOGICAL FUNCTION RELSQR(A,N1,N2,L,J)
C INTEGER TELLER,N,N1,N2
C REAL A
C DIMENSION A(4,0:N1,0:N2)
C N=3
10 TELLER=0
C IF (A(N,L,J).GE.0.0) TELLER=TELLER+1
C IF (A(N,L+1,J).GE.0.0) TELLER=TELLER+1
C IF (A(N,L+1,J+1).GE.0.0) TELLER=TELLER+1
C IF (A(N,L,J+1).GE.0.0) TELLER=TELLER+1
C IF ((TELLER.EQ.0).OR.(TELLER.EQ.4)) THEN
C RELSQR=.FALSE.
C GO TO 20
C ELSE
C IF (N.EQ.3) THEN
C N=4
C GO TO 10
C END IF

```

```

END IF
RELSQR=. TRUE.
20 CONTINUE
END

```

C  
C  
C  
C  
C

```

*****
* SUBROUTINE FOR CONVERTING A COMPLEX NUMBER X+IY      *
* TO THE FORM R*EXP (I*FI) :                          *
*****

```

```

SUBROUTINE CONV1 (LR, LI, N, A)
REAL LR, LI, N, A, PI
PI=4*ATAN(1.0)
N=SQRT (LR**2+LI**2)
IF (LR.EQ.0.0) THEN
  IF (LI.GT.0.0) THEN
    A=PI/2
  ELSE
    IF (LI.LT.0.0) THEN
      A=3*PI/2
    ELSE
      A=0.0
    END IF
  END IF
ELSE
  A=ATAN (LI/LR)
  IF (LI.LT.0.0) THEN
    IF (LR.LT.0.0) THEN
      A=A+PI
    ELSE
      A=A+2*PI
    END IF
  ELSE
    IF (LR.LE.0.0) A=A+PI
  END IF
END IF
END

```

C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C

```

*****
* DETERMINE VALUE OF RE(K) AND IM(K) THAT MATCH BOUNDARY *
* CONDITIONS AS DESCRIBED IN PROGRAM HEADING:           *
* K = +/- SQRT (LABDA (UB))                             *
* THE SIGN OF K IS CHOSEN SUCH THAT (IMAGINARY PART OF K) > 0. *
*****

```

```

SUBROUTINE KA (Z, KARE, KAIM, PAR, K)
REAL KARE, KAIM, PAR (2), Z, UNUL, LRE, LIM, NORM, ARG, N2, K
CALL LABDA (Z, LRE, LIM, PAR, K)
CALL CONV1 (LRE, LIM, NORM, ARG)
NORM=SQRT (NORM)
ARG=ARG/2
LRE=NORM*COS (ARG)
LIM=NORM*SIN (ARG)
IF (LIM.LT.0.0) THEN
  KARE=-LRE
  KAIM=-LIM
ELSE
  KARE=LRE
  KAIM=LIM
END IF
END

```

C  
C  
C

```

*****
* COMPUTE UPPER BOUNDARY VALUES FOR W AND W' ,      *

```



C \* THESE ARE USED AS STARTING VALUES FOR MERSON INTEGRATION \*  
C \*\*\*\*\*  
C

```
SUBROUTINE STVAL (Z, PAR, COND, K)
REAL Z, PAR (2), COND (4), KARE, KAIM, K, HELP
CALL KA (Z, KARE, KAIM, PAR, K)
HELP=EXP (-KAIM*Z)
COND (1)=HELP*COS (KARE*Z)
COND (2)=HELP*SIN (KARE*Z)
COND (3)=-HELP*(KAIM*COS (KARE*Z)+KARE*SIN (KARE*Z))
COND (4)=HELP*(KARE*COS (KARE*Z)-KAIM*SIN (KARE*Z))
END
```

```
C
SUBROUTINE SHIFT (POINT1, POINT2, POINT3, POINT4)
REAL POINT1 (3), POINT2 (3), POINT3 (3), POINT4 (3)
DO 10 I=1, 3
  POINT1 (I)=POINT2 (I)
  POINT2 (I)=POINT3 (I)
  POINT3 (I)=POINT4 (I)
10 CONTINUE
END
```

```
C
SUBROUTINE SWITCH (POINT1, POINT2, POINT3, POINT4)
REAL POINT1 (3), POINT2 (3), POINT3 (3), POINT4 (3), HULP (3)
DO 10 I=1, 3
  HULP (I)=POINT1 (I)
  POINT1 (I)=POINT2 (I)
  POINT2 (I)=POINT3 (I)
  POINT3 (I)=POINT4 (I)
  POINT4 (I)=HULP (I)
10 CONTINUE
END
```

C \*\*\*\*\*  
C \* ITERATE TOWARDS POINT (CRE, CIM) FOR WHICH  $RE(W(0))=IM(W(0))=0$  \*  
C \* 2 PLANES ARE DEFINED, ONE THROUGH THE POINTS P1, P2 AND P3, \*  
C \* AND ONE THROUGH THE POINTS Q1, Q2 AND Q3. THIS POINTS ARE CHOSEN \*  
C \* SUCH THAT THE CHANGE OF SIGN IN  $RE(W(0))$  AND IN  $IM(W(0))$  OCCURS \*  
C \* AMONG THEM. THE NORMAL VECTORS OF THESE PLANES ARE \*  
C \*  $[A1, B1, C1]$  AND  $[A2, B2, C2]$  RESPECTIVELY. \*  
C \* THE EQUATIONS OF THE PLANES ARE: \*  
C \* \* \* \* \*  
C \*  $X*A1+Y*B1+Z*C1=D1$  AND  $X*A2*Y*B2+Z*C2=D2$ . \*  
C \* \* \* \* \*  
C \* CNEW=(CNEW(1), CNEW(2)) IS THE INTERSECTION OF THE TWO PLANES \*  
C \* WITH  $Z=0$ , AND IS TAKEN AS THE NEW VALUE OF THE DESIRED \*  
C \* EIGENVALUE. \*  
C \* ITERATION IS STOPPED IF: \*  
C \*1. CNEW IS OUTSIDE THE SEMI-CIRCLE \*  
C \*2. MORE THEN 20 ITERATIONS HAVE BEEN PERFORMED (IN WHICH CASE \*  
C \* THE PROCEDURE MOST LIKELY JUMPS BETWEEN 3 VALUES OF CNEW) \*  
C \*3. THE DIFFERENCE BETWEEN TWO CONSECUTIVE VALUES OF CNEW \*  
C \* BECOMES LESS THEN THE PARAMETER "TOL" (=TOLERANCE) \*  
C \*\*\*\*\*

```
SUBROUTINE SECANT (A, N1, N2, L, J, CENTRE, RADIUS, K)
REAL P1 (3), P2 (3), P3 (3), P4 (3), RESULT (4), CNEW (2), COLD (2)
REAL A1, A2, B1, B2, C1, C2, D1, D2, CENTRE, RADIUS, K
REAL Q1 (3), Q2 (3), Q3 (3), Q4 (3), TOL, DET1, DET2, DET3
INTEGER TELLER
REAL A
DIMENSION A (4, 0:N1, 0:N2)
WRITE (2, *) "RELEVANT SQUARE FOUND, GO ITERATING"
```

```

TOL=E-3
TELLER=1
DO 5 I=1,3
  P1(I)=A(I,L,J)
  P2(I)=A(I,L+1,J)
  P3(I)=A(I,L+1,J+1)
  P4(I)=A(I,L,J+1)
5 CONTINUE
DO 7 I=1,2
  Q1(I)=A(I,L,J)
  Q2(I)=A(I,L+1,J)
  Q3(I)=A(I,L+1,J+1)
  Q4(I)=A(I,L,J+1)
7 CONTINUE
Q1(3)=A(4,L,J)
Q2(3)=A(4,L+1,J)
Q3(3)=A(4,L+1,J+1)
Q4(3)=A(4,L,J+1)
8 IF (((P1(3).GT.0.0).AND.(P2(3).GT.0.0).AND.(P3(3).GT.0.0))
* .OR.((Q1(3).GT.0.0).AND.(Q2(3).GT.0.0).AND.(Q3(3).GT.0.0)))
* .OR.((P1(3).LT.0.0).AND.(P2(3).LT.0.0).AND.(P3(3).LT.0.0))
* .OR.((Q1(3).LT.0.0).AND.(Q2(3).LT.0.0).AND.(Q3(3).LT.0.0))))
* THEN
  CALL SWITCH(P1,P2,P3,P4)
  CALL SWITCH(Q1,Q2,Q3,Q4)
  GO TO 8
END IF
10 IF (TELLER.GE.20) THEN
  WRITE(2,*)"ITERATION TOOK TOO MANY STEPS"
  GO TO 30
END IF
DET1=(P1(3)-P3(3))* (P1(2)-P2(2))- (P1(2)-P3(2))* (P1(3)-P2(3))
DET2=(Q1(3)-Q3(3))* (Q1(2)-Q2(2))- (Q1(2)-Q3(2))* (Q1(3)-Q2(3))
A1=1.0
B1=((P1(1)-P3(1))* (P1(3)-P2(3))- (P1(1)-P2(1))* (P1(3)-P3(3)))/DET1
C1=-((P1(1)-P3(1))* (P1(2)-P2(2))- (P1(1)-P2(1))* (P1(2)-P3(2)))/DET1
D1=P1(1)*A1+P1(2)*B1+P1(3)*C1
A2=1.0
B2=((Q1(1)-Q3(1))* (Q1(3)-Q2(3))- (Q1(1)-Q2(1))* (Q1(3)-Q3(3)))/DET2
C2=-((Q1(1)-Q3(1))* (Q1(2)-Q2(2))- (Q1(1)-Q2(1))* (Q1(2)-Q3(2)))/DET2
D2=Q1(1)*A2+Q1(2)*B2+Q1(3)*C2
DET3=A1*B2-A2*B1
IF (DET3.NE.0.0) THEN
  CNEW(1)=(B2*D1-B1*D2)/DET3
  CNEW(2)=- (A2*D1-A1*D2)/DET3
  TELLER=TELLER+1
ELSE
  WRITE(2,*)"PLANES ARE PARALLEL"
  GO TO 30
END IF
IF ((CNEW(1).GE.0.0).AND.(CNEW(2).GE.0.01).AND.
* ((CENTRE-CNEW(1))**2+CNEW(2)**2).LE.(RADIUS**2)) THEN
  WRITE(2,*)"GO INTEGRATING"
  CALL COMPW(CNEW,K,RESULT)
  WRITE(2,' (" WRE(0)=" ,E12.6, " , WIM(0)=" ,E12.6) ')
* RESULT(1),RESULT(2)
  CALL SHIFT(P1,P2,P3,P3)
  CALL SHIFT(Q1,Q2,Q3,Q3)
  COLD(1)=P3(1)
  COLD(2)=P3(2)
  P3(1)=CNEW(1)
  P3(2)=CNEW(2)
  P3(3)=RESULT(1)
  Q3(1)=CNEW(1)

```

```
Q3(2)=CNEW(2)
Q3(3)=RESULT(2)
IF (SQRT((CNEW(1)-COLD(1))**2+(CNEW(2)-COLD(2))**2).GE.TOL) THEN
  GO TO 10
ELSE
  WRITE(2,*)"ITERATION SUCCEEDED,RESULT:",CNEW(1),CNEW(2)
  WRITE(2,*)"AANTAL BENODIGDE ITERATIES WAS: ",TELLER
  GO TO 30
END IF
ELSE
  WRITE(2,*)"NEW POINT IS OUTSIDE SEMI-CIRCLE"
  WRITE(2,',"CRE=",E12.6," , CIM=",E12.6')
*   CNEW(1),CNEW(2)
  GO TO 30
END IF
30 CONTINUE
WRITE(2,*)
END
```

## LITERATUUR

- de Baas, A.F., Driedonks, A., 1985: Internal Gravity Waves in a Stably Stratified Boundary Layer.  
*Boundary Layer Meteorology* , **31**, 303.
- Holton, J.R., 1972: An Introduction to Dynamic Meteorology.  
Academic Press, New York.
- Howard, L.N., 1961: Note on a paper of John W. Miles.  
*Journal of Fluid Mechanics* , **10**, 509.
- Khrgian, A.Kh., 1975: The Physics of Atmospheric Ozone.  
Keter Publishing House Ltd., Jeruzalem.
- Lalas, D.P., Einaudi, F., 1976: On the Characteristics of Gravity Waves Generated by Atmospheric Shear Layers.  
*Journal of the Atmospheric Sciences*, **33**, 1248.
- Lambert, J.D., 1973: Computational Methods in Ordinary Differential Equations.  
Wiley and Sons, New York.
- Landau, L.D., Lifshitz, E.M., 1966: Fluid Mechanics.  
Pergamon Press, Oxford.
- Liptrot, G.F., 1981: Modern Inorganic Chemistry.  
Bell & Hyman Ltd, Londen.
- Mastrantonio, G. et.al., 1976: Generation of Gravity Waves by Jet Streams in the Atmosphere.  
*Journal of the Atmospheric Sciences*, **33**, 1730.
- Miles, J.W., 1961: On the stability of heterogenous shear flows.  
*Journal of Fluid Mechanics* , **10**, 496.

- Pedlosky, J., 1987: Geophysical Fluid Dynamics.  
Springer -Verlag, New York.
  
- Reiter, E.R., 1967: Jet Streams.  
Doubleday & Company, New York.
  
- Stoer, J., Bulirsch, R., 1983: Introduction to Numerical Analysis.  
Springer -Verlag, New York.
  
- Weast, R.C.(ed.), 1981: Handbook of Chemistry and Physics.  
CRC Press, Inc., Boca Raton.
  
- Wei, M-Y., 1987: A New Formulation of the Exchange of Mass and Trace Constituents between  
the Stratosphere and Troposphere.  
*Journal of the Atmospheric Sciences* , **40**, 3079.