

KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT

VERSLAGEN
V-210 (III-305)

Dr. C. Levert
Enige aselectheidstoetsen

De Bilt, 1968

Publikationsnummer: K.N.M.I. V-210 (III-305)

Enige aseletheids-toetsen^{*})

door

Dr. C. Levert

Motto: "...the statistical method is, or should be, a working tool of science, just as is the microscope or the kymograph..." (R. Pearl Intr. to medical biometry and statistics. 1941)

Inhoud

	blz.
1. Inleiding	1
2. Doelstelling	2
3. Enkele definities van aselekt	3
4. Aseletheids-toetsen, overzicht, keuze	4, 4a, 30
4.1 Statistische begrippen bij toetsingstheorie	4, 56
4.2 Indeling der aseletheids-toetsen	4
5. Numerieke voorbeelden	40
6. Appendix	56
7. Literatuur	64,
8. Index	68

1. Inleiding

Alle statistische toetsings- en schattingstechnieken berusten op de onderstelling, dat de elementen in een steekproef, waaraan de "waarnemingen" verricht zijn, aselekt uit de bestudeerde populatie getrokken zijn. Als men een onderzoek grondig over- en doordenkt vóór tot uitvoering over te gaan, is het meestal wel mogelijk zulke voorzorgen te nemen, dat aan de gestelde eis voldaan wordt. Lang niet altijd echter komen de beschikbare gegevens uit zulk een experiment. Zo kan men beschikken over een (door anderen nagelaten) reeks waarnemingen, waarvan de aselektiviteit op zijn minst twijfelachtig is. Of men beschikt over een tijdreeks en men wil nagaan of daarin

* Dit verslag is niet geheel in overeenstemming met wat op het colloquium 23-3-1968 behandeld werd. Er wordt nu minder aandacht gegeven aan de definities van "random" en aan de "filosofie rond random". Geen woord wordt verteld over de tabellen van lotings- en toevalscijfers en- getallen en hun klassieke en moderne, niet en wel- deterministische productiewijzen. Er wordt thans echter veel meer aandacht besteed aan de toetsen zelf, hun formules, hun draagwijdten enz., terwijl aan numerieke voorbeelden een ruime plaats gegeven wordt.

een of ander verloop (trend; oscillatie; plotselinge niveauverandering; cycliciteit, enz.) in de tijd optreedt. In beide gevallen kan men gebruik maken van een aantal technieken ter toetsing van de nulhypothese H_0 , luidende: de beschouwde waarnemingen zijn aselect, d.i. onderling onafhankelijk. Onder H_0 vertonen de waarnemingen in de regel een onregelmatig verloop. Onder de alternatieve hypothese H_a , luidende dat de waarnemingen niet aselect gespreid zijn, kunnen verschillende typen van "verloop" optreden ("verlooppatronen"). Zie fig. 1 en 2.

Eenvoudige en algemene criteria voor zulk een toetsing kunnen gebaseerd worden op de aantallen en lengten van runs in een reeks waarden van een discontinue variabele, of op aantallen van toppen, dalen, fasen, lengten van fasen, enz. in een reeks waarden van een continue variabele. Deze aselectheids-toetsen vormen een nuttig en gemakkelijk instrument

- 1e voor signalering (=detectie) van niet-toevallige invloeden
- 2e voor het peilen van de bruikbaarheid van een waarnemingsreeks voor toetsings- en schattingsdoeleinden.

2. Doelstelling

Het huidige verslag beoogt de lezer een overzicht te geven van de meest gebruikte, ^{dusdanige} aselectheids-toetsen. Bij iedere toets wordt de toetsingsgrootheid, en van deze toetsingsgrootheid de verdeling, de gemiddelde waarde en de standaarddeviatie genoemd. Voor afleiding en gedetailleerde bespreking van de formules wordt naar de betreffende literatuur verwezen. Indien er tabellen of nomogrammen bestaan worden deze vermeld. Het asymptotisch gedrag bij onbepaald groter wordende steekproeven komt ook ter sprake. Bijzondere eigenschappen van de toets, zoals onderscheidend vermogen tegenover bepaalde alternatieve hypothesen, worden kort toegevoegd, indien althans bekend. De behandelde "randomness" beperkt zich tot die in één dimensie en wel die langs de rechte lijn (d.i. in open reeksen, waarbij de laatste term niet door de eerste term gevolgd wordt *)).

* Als x_N in x_1, x_2, \dots, x_N gevolgd wordt door x_1, x_2, \dots heet de reeks gesloten of circulair.

Ofschoon bij de bespreking der toetsen nu en dan een illustratief voorbeeld toegevoegd wordt, bevat in het bijzonder het vijfde hoofdstuk talrijke numerieke toepassingen op velerlei gebied.

Opmerking: het gaat bij al deze toetsen in de eerste plaats om het al of niet verwerpen van de nulhypothese, dat de waarnemingen aselekt liggen. De onderzoekingen, die natuurlijk moeten volgen, als deze nulhypothese inderdaad verworpen moet worden (zoals trend-, periodiciteiten-berekening), worden hier niet besproken.

3. Enkele definities van aselekt

- 3.1. Een keuze- of trekkingsmethode heet random = aselekt = willekeurig = onbevooroordeeld ten opzichte van een gegeven populatie U als zij, daarop toegepast, aan alle in U aanwezige elementen gelijke kans geeft te worden gekozen (getrokken).

Een voorbeeld ter verduidelijking: een trekkingsmethode, die bij toepassing op een populatie van A's en B's ($2/5$ A's tegen $3/5$ B's) steekproeven van grootte 5 geeft, die òf AABBB òf BBBA zijn, zal zeker niet aselekt genoemd mogen worden, ofschoon ze wel "representatieve" steekproeven geeft (immers in elke steekproef zijn de A- en B fracties exact gelijk aan die in de populatie). Een aselekte trekkingsmethode zou hebben moeten leveren ABAAA, BABBB, AAAAA, BBBBB, ABABA enz. Zie verder appendix 1^{*)}.

- 3.2. Een volgorde heet random als alle mogelijke volgorden even grote kans van optreden hebben.

Voorbeeld: de 5 cijfers 1, 2, 3, 4, 5 leveren $5! = 120$ verschillende volgorden = permutaties = "arrangements", o.a. 1, 2, 3, 4, 5 en 5, 4, 3, 2, 1 en 2, 1, 4, 3, 5. Een methode van volgorde - plaatsing, die, N keren toegepast, ieder van deze $5!$ permutaties laat optreden in aantallen, die met $N \rightarrow \infty$, minder en minder van elkaar verschillen, heet random. Anders gezegd: de volgorde 1, 2, 3, 4, 5 maakt evenveel kans als 5, 4, 3, 2, 1 of 3, 1, 5, 4, 2 of iedere andere. Lees ook o.a. Fisher (31).^{**) (}

^{*)} Voortaan afgekort tot app. 1, app. 2, enz.

^{**) Met (1), (2), enz. wordt verwezen naar de literatuurlijst, blz. 64.}

3.3. Een reeks getallen heet aselekt als alle autocorrelatiecoëfficiënten van de orden 1, 2, 3... met toenemende lengte van de reeks stochastisch naar nul tenderen (anders gezegd: als alle elementen in de reeks volkomen onafhankelijk zijn).

Voor aselekte productiewijze en "aselector", lees bij Hemelrijk, (44) en (52). Voor definitie van een productiemethode van random cijfers, lees (49).

4. Aseletheids-toetsen

4.1. Statistische begrippen bij toetsingstheorie.

Een noodzakelijke opsomming van statistische begrippen wordt gegeven in app. 2.

Er zijn zeer vele aseletheids-toetsen en nog steeds worden er nieuwe ontwikkeld. De toetsen gebruiken verschillende toetsingsgrootheden. De ene toets eist meer rekenwerk dan de ander. Van de ene toetsingsgrootheid is gemakkelijker de kansverdeling onder H_0 te berekenen dan van de andere. Van sommige toetsingsgrootheden is alleen de asymptotische kansverdeling bekend, d.i. bij "zeer grote" steekproef. De verschillende toetsen hebben verschillende onderscheidingsvermogens bij dezelfde H_0 en H_a . Dikwijls is het onderscheidingsvermogen (nog) niet bekend.

4.2. Indeling der aseletheids-toetsen

Wij kunnen de aseletheids-toetsen indelen a.v.

Groep A. De toetsen, waarbij de steekproef stamt uit een populatie met onbekende parameters. Deze toetsen zijn "parameterervrij", of "distributievrij".

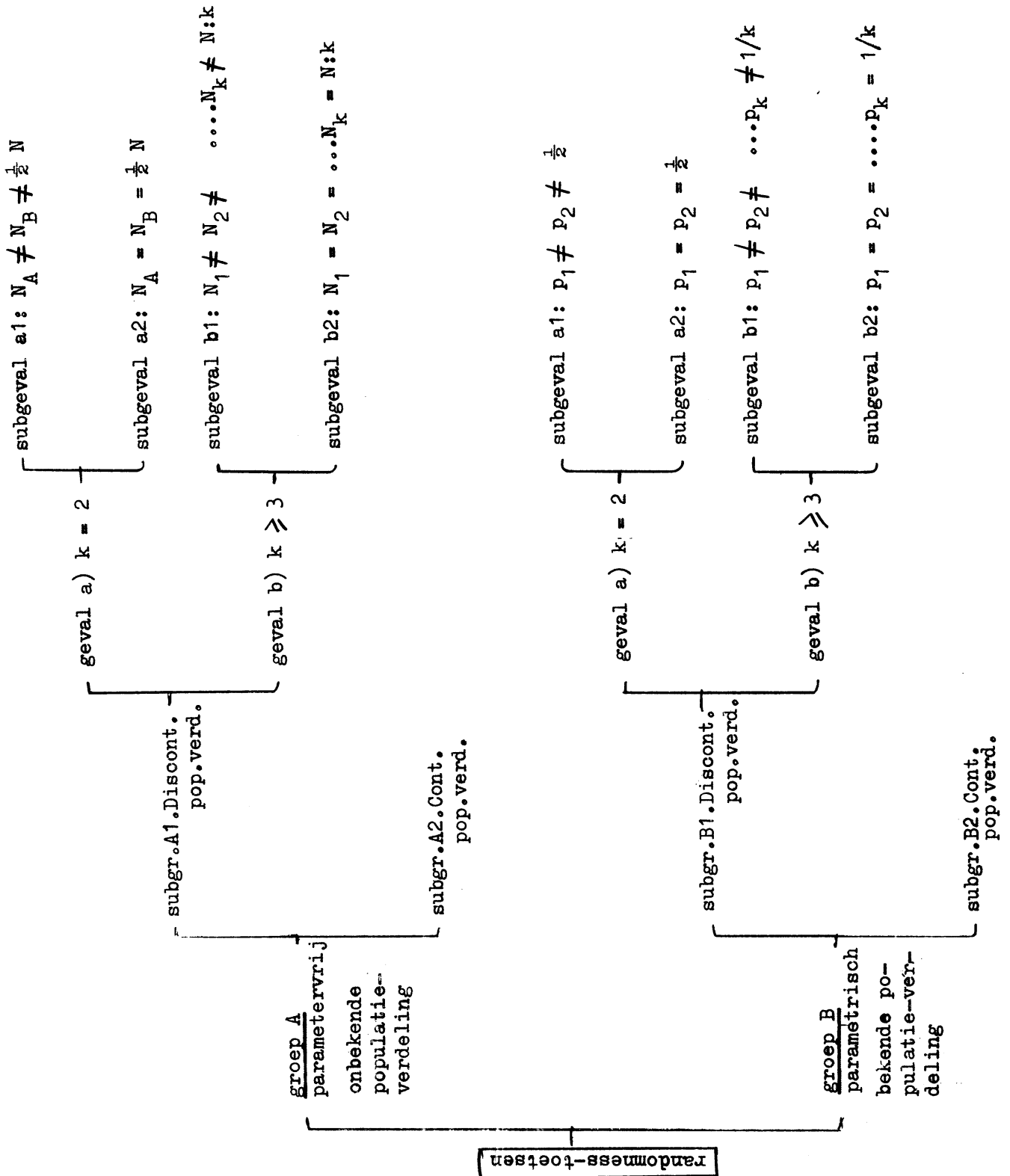
Groep B. De toetsen, waarbij de steekproef stamt uit een populatie met bekende parameters. Deze toetsen zijn "parametrisch" = niet-parameterervrij.

Groep A, parameterervrij, onbekende populatie-verdeling

Subgroep A1

De populatie-verdeling is discontinu

H_0 : de verkregen reeks alternatieven is een aselekte permutatie van deze alternatieven.



Eerste voorbeeld: elk der 92 dagen van zomer 1967 (1 juli t/m 31 augustus) was òf een droge dag (zegge A) òf een natte dag (B) te De Bilt. De reeks was bijv. ABAAAABAB.....B ($N_A + N_B = N = 92$). De nulhypothese H_0 luidt: de A's en B's liggen aseleect.

Tweede voorbeeld: het aantal regendagen in augustus, eerste week, is 0 of 1 of 2...7. De jaren 1901 t/m 1967 zouden gebracht kunnen hebben 3, 0, 4, 7, 7...2 (67 getallen). Thans zijn er 8 alternatieven. Liggen deze getallen aseleect?

Derde voorbeeld: de hoeveelheid neerslag in augustus I is een continu verdeelde variabele. De 67 hoeveelheden (1901-1967) waren: x_1, x_2, \dots, x_{67} . Wij kunnen er twee alternatieven van maken door elke $x_i < g$ met A en elke $x_i > g$ met B aan te duiden en bijv. $g = \bar{x}$ te kiezen. Aldus ontstaat een reeks AABAB...A (bijv. $N_A = 30, N_B = 37$, zodat $N_A + N_B = N = 67$). Liggen de A's en B's aseleect?

Definitie van runs, etc.

Beschouw de open A, B- reeks: AA B AA BBBB A B AA BBB ($N_A = 7, N_B = 9, N = 16$); A en B heten de "alternatieven". Een A-run (serie, iteratie) is een ononderbroken successie van A's, die òf begint met de eerste term van de A, B- reeks òf eindigt met de laatste term van de A, B- reeks òf ingesloten ligt tussen twee B's (resp. open, open, gesloten A-run). Analoog met B-run. De lengte van een A-run is $i = 1, 2, \dots$. Ook voor B-run. Zij r_{Ai} het aantal A-runs van lengte i en R_{Ai} het aantal A-runs van lengte $\geq i$; zo ook r_{Bi}, R_{Bi} . Zij $r_i = r_{Ai} + r_{Bi} =$ aantal runs van lengte i, ongeacht alternatief. Analoog $R_i = R_{Ai} + R_{Bi}$. Zij $R_A = R_{A1} =$ totale aantal A-runs; analoog $R_B = R_{B1}$. Zij $R = R_A + R_B =$ totale aantal runs, ongeacht alternatief en lengte (in voorbeeld: $R_A = 4, R_B = 4; R = 8$); $R_A - R_B = -1, 0, +1$. Zij $L_A =$ lengte van langste A-run (in voorbeeld: 2); L_B voor B-run (4) en $L =$ grootste van L_A en L_B (hier 4). Samengevat

	i	1	2	...		i	≥ 1	≥ 2	...
	r_{Ai}	r_{A1}	r_{A2}	...		R_{Ai}	$R_A = R_{A1}$	R_{A2}	...
	r_{Bi}	r_{B1}	r_{B2}	...		R_{Bi}	$R_B = R_{B1}$	R_{B2}	...
som	r_i	r_1	r_2	...		R_i	$R = R_1$	R_2	...
met	$N_A = \sum_{i=1}^{\infty} i r_{Ai};$				$R_{Ai} = \sum_{j=i}^{\infty} r_{Aj}$				

(de bovengrens in de sommaties is natuurlijk niet echt ∞);
analoog N_B en R_{Bi} ; $N_A + N_B = N$.

Al deze grootheden zijn stochastisch, d.w.z. als men talloos vele malen dezelfde aantallen N_A A's en N_B B's aselekt over de rechte lijn uitstrooit, dan zullen wel is waar alle "arrangements" der A's en B's even frequent zijn, doch elk der grootheden r_{Ai} , R_{Ai} , R enz. zal een kansverdeling volgen. Zo zal R waarden aannemen in het interval $2 \leq R \leq 2 N_A + 1$ (gesteld $N_A < N_B$), maar al deze waarden niet even waarschijnlijk. De grenzen komen overeen met de situaties AA...A BB...B en B A B A.... B A BBB...B.

De berekening, onder H_0 en bij gegeven N_A en N_B , van de kansverdelingen van deze grootheden is dikwijls zeer gecompliceerd. Soms kent men alleen $\mu = \bar{C} =$ gemiddelde en $\sigma^2 =$ variantie.

Evenzo bij 3 en meer alternatieven (een gesloten A-run ligt nu tussen twee alternatieven, die niet A zijn).

Toetsen op aantallen van runs van verschillende alternatieven en lengten

Geval a; k = 2, van subgroep A1

Subgeval a1 $N_A \neq N_B \neq \frac{1}{2} N^*$

Hoe met \underline{r}_{Ai} ? Zie app. 3 voor $\mathbb{P}[\underline{r}_{Ai} \mid N_A, N_B]$. Verder is

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{E}(\underline{r}_{Ai}) = \mu = N_B(N_B+1) \frac{N_A!(N-i-1)!}{N!(N_A-i)!} = (N_B + 1) \frac{\binom{N-i-1}{N_A-i}}{\binom{N}{N_A}} \quad \text{en}$$

$$\sigma^2 = \mu \left[1 - \mu + N_B \frac{\binom{N-2i-2}{N_A-2i}}{\binom{N-i-1}{N_A-i}} \right]$$

Analoog voor \underline{r}_{Bi} .

Voor \underline{R}_{Ai} geldt:

$$\mathbb{P}[\underline{R}_{Ai} = a] \text{ is gecompliceerd; } \mathcal{E}(\underline{R}_{Ai}) = \mu = (N_B + 1) \frac{\binom{N-i}{N_A-i}}{\binom{N}{N_A}}$$

$$\text{en } \sigma^2 = \mu \left[1 - \mu + N_B \frac{\binom{N-2i}{N_A-2i}}{\binom{N-i}{N_A-i}} \right]$$

Verder is

$$\mathcal{E}(\underline{r}_i) = \mathcal{E}(\underline{r}_{Ai}) + \mathcal{E}(\underline{r}_{Bi}) \quad \text{en} \quad \mathcal{E}(\underline{R}_i) = \mathcal{E}(\underline{R}_{Ai}) + \mathcal{E}(\underline{R}_{Bi}), \quad \text{elke } i,$$

maar

$$\sigma^2(\underline{r}_i) \neq \sigma^2(\underline{r}_{Ai}) + \sigma^2(\underline{r}_{Bi}) \quad \text{en} \quad \sigma^2(\underline{R}_i) \neq \sigma^2(\underline{R}_{Ai}) + \sigma^2(\underline{R}_{Bi}), \quad \text{daar}$$

\underline{r}_{Ai} met \underline{r}_{Bi} , en \underline{R}_{Ai} met \underline{R}_{Bi} gecorreleerd is (moeilijk!)

* Men kan bijv. eerst het gemiddelde \bar{x} van de waarden x_1, x_2, \dots, x_N uit de steekproef berekenen en dan elke $x_i > \bar{x}$ met A en elke $x_i < \bar{x}$ met B aanduiden. Zie ook David (32)

Deze formules hebben ten doel het navolgend schema op te stellen.

aantallen en standaarddeviaties									
A- runs				idem B			beide		
i	geteld r_{Ai}	theor. μ	σ	r_{Bi}	μ	σ	r_i	μ	σ
1									
2									
3									
<i>enz.</i>									
alle	R_A			R_B			R		

② Hoe met R_A ?

$$P[R_A = a] = \frac{\binom{N_A}{a} \binom{N_B}{a-1}}{\binom{N}{N_B+1}}, \text{ hypergeom. verd.}; \mu = \frac{N_A(N_B+1)}{N}$$

$$\text{en } \sigma^2 = \frac{N_A N_B (N_A - 1)(N_B + 1)}{N^2(N - 1)}$$

Analoog voor R_B

Opm.: 1) $R_A = 1, 2, \dots, \min(N_A, N_B + 1)$ en 2) $E(R_A) \neq E(R_B)$ als $N_A \neq N_B$.

Nu de R = totale aantal runs van beide soorten en alle lengten ("R-toets")
Er zijn twee gevallen

$$\textcircled{3} \begin{cases} 1e) R = \text{even}; P[R = R] = \frac{\binom{N_A-1}{\frac{1}{2}R-1} \binom{N_B-1}{\frac{1}{2}R-1}}{\binom{N}{N_A}} \\ 2e) R = \text{oneven}; P[R = R] = \frac{\binom{N_A-1}{\frac{1}{2}(R-1)} \binom{N_B-1}{\frac{1}{2}(R-3)} + \binom{N_B-1}{\frac{1}{2}(R-1)} \binom{N_A-1}{\frac{1}{2}(R-3)}}{\binom{N}{N_A}} \end{cases}$$

Daarbij geldt:

$$E(R) = \mu = 2 \frac{N_A \cdot N_B}{N} + 1 \text{ met } \sigma^2 = \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{N-1} = \frac{2N_A N_B (2N_A N_B - N)}{N^2(N-1)}$$

De \underline{R} -verdeling nadert met $N \rightarrow \infty$ (en vlugger bij minder verschillende N_A en N_B) meer en meer tot de normale, zie ook (46). Men telt R en toetst deze tegen \underline{ER} , onder H_0 . Heeft men een vermoeden van te veel runs (grote R), toets dan éénzijdig rechts, doch maak eerst $|R - \mu|$ een $\frac{1}{2}$ kleiner. Vermoedt men te weinig runs (kleine R), toets dan links-éénzijdig en maak eerst $|R - \mu|$ met $3/2$ kleiner. De toets is het meest onderscheidend als men de reeks x_1, x_2, \dots, x_N t.o.v. de mediaan me van de reeks in alternatieven A en B indeelt (zodat $N_A = N_B = \frac{1}{2}N$), volgens $x_i < me$, dan A en $x_i > me$, dan B. Voor "mediaanruns", zie formules (4a), (4b) etc.

Sved and Eisenhart (12) noemen fraaie tabellen met onderschrijdingskansen. De ene groep tabellen levert $\mathbb{P}[\underline{R} \leq R | N_A, N_B]$ in 7 decimalen voor $N_A \leq N_B, N_A, N_B = 2(1)20$ en $R = 2(1) 2N_A + 1$.

Bijv. $\mathbb{P}[\underline{R} \leq 9 | 6, 19] = 0.3664596$. De andere groep tabellen levert de waarde van R , waarbij γ of $1 - \gamma = 0.005, 0.01, 0.05$ in

$\gamma = \mathbb{P}[\underline{R} \leq R | N_A, N_B]$. Als $\gamma < 0.50$, dan is R het grootste gehele getal, waarvoor de ongelijkheid geldt; is $\gamma > 0.50$, dan het kleinste gehele getal.

De Jonge (46) geeft vier tabellen met linker en rechter kritieke waarden van \underline{R} bij tweezijdige toetsing, als $N_A \neq N_B$, bij drempels $\alpha = 0.10, 0.05, 0.02, 0.01$ en $N_A, N_B = 5(1) 20$.

Bijv. $\mathbb{P}[\underline{R} \leq 7 | 10, 15] = \mathbb{P}[\underline{R} \geq 18 | 10, 15] = 0.025 = \frac{1}{2} 0.05 = \frac{1}{2} \alpha$.

Een soortgelijke tabel staat bij Crow, Davis, Maxfield (39), maar dan alleen voor $\alpha = 0.05$ en 0.10 ; $N_A, N_B = 2(1) 20$.

Ook bij Geigy (40) vindt men een fraaie tabel. Nu is $\alpha = 0.05, 0.025, 0.01, 0.005, N_A, N_B = 1(1) 20$. Zo leest men, dat de H_0 , tweezijdig op $\alpha = 0.05$, moet verworpen worden, bij $N_A = 12, N_B = 18$ als $\delta f R \leq 9$ $\delta f R \geq 21$ en dus niet als bijv. $R = 6$, zoals in AAAAAAAA BB AAA BBB A
BBBBBBBBBBBBBB .
 1 2 3 4 5
 6

De tabellen bij Strik (37) kunnen vergeleken worden met die in De Jonge (46), bovengenoemd.

Zie ook de tabel bij Dixon and Massey (35 p. 421). Deze tabel geeft een volledige kansverdeling, te weten $\mathbb{P} [R \leq R | N_A, N_B]$ voor $N_A = 2(1) 10$, $N_B = N_A + 1 (1) 10$ en $R = 2, 3, \dots$. Bijv. $\mathbb{P} [R \leq 6 | 8, 10] = 0.048$ en $\mathbb{P} [R \leq 13 | 8, 19] = 0.964$.

Een nomogram vindt men bij Morice en Chartier (34). Het geeft de linker een rechterkritieke R-waarden, bij tweezijdige toetsing, bij $\alpha=0.05$, voor $N_A, N_B = 5(1) 20$.

- ④ Voor een tweestekproeven-toets, gebaseerd op de R-toets, lees app. 4. Deze toets is bekend onder de naam: Toets van Wald-Wolfowitz (ook wel Toets van Mann).

Het asymptotisch gedrag van al deze formules, d.w.z. het gedrag bij zeer grote steekproeven ($N \rightarrow \infty$) is, a.v.

①a $N \rightarrow \infty$, dan $\mu = E(\underline{r}_{Ai}) \rightarrow N p_1^i p_2^2$ en $\sigma^2 \rightarrow \mu \left[1 - \frac{i}{N} \left\{ \frac{i^2}{p_1} + \frac{2}{p_2} - (i+1)^2 \right\} \right]$

waarin $p_1 = N_A/N$ en $p_2 = 1 - p_1 = N_B/N$.

Verder

$\mu = E(\underline{r}_{Ai}) \rightarrow N p_1^i p_2$ met $\sigma^2 \rightarrow \mu \left[1 - \frac{i}{N} \left(\frac{i^2 p_2}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right) \right]$

en

②a $\mu = E(\underline{r}_A) \rightarrow N p_1 p_2$ met $\sigma^2 \rightarrow N \frac{2}{p_1 p_2} = \mu^2 / N$

en

③a $\mu = E(\underline{r}) \rightarrow 2 N p_1 p_2$ met $\sigma^2 \rightarrow \mu^2 / N = 4 N p_1^2 p_2^2$

Subgeval a2, $N_A = N_B = \frac{1}{2}N$. Mediaanruns*

De formules worden iets eenvoudiger. Men substituere $m = N_A = N_B = \frac{1}{2}N$ in (1), (2), (3).

* Men spreekt van mediaan-runs om de volgende reden. Indien de steekproef bestaat uit x_1, x_2, \dots, x_N (al of niet continu verdeeld) en men elke $x_i < m$ met A en elke $x_i > m$ met B aanduidt (waarbij $m =$ steekproef - mediaan) dan is $N_A = N_B = \frac{1}{2}N$ (als $N =$ even)

Er komt

$$E(\underline{r}_{Ai}) = E(\underline{r}_{Bi}) = \mu = m \frac{\binom{m+1}{m-i} (N-i-1)!}{N!} = m \frac{\binom{m+1}{i+1}}{\binom{N}{i+1}}$$

⑤

$$\text{en } \sigma^2(\underline{r}_{Ai}) = \sigma^2(\underline{r}_{Bi}) = \mu \left[1 - \mu + m \frac{\binom{N-2i-2}{m-2i}}{\binom{N-i-1}{m-i}} \right]$$

en

$$E(\underline{R}_{Ai}) = E(\underline{R}_{Bi}) = \mu = (m+1) \frac{\binom{m}{i}}{\binom{N}{i}} \text{ met } \sigma^2 = \mu \left[1 - \mu + m \frac{\binom{N-2i}{m-2i}}{\binom{N-i}{m-i}} \right]$$

en

$$\textcircled{6} \quad E(\underline{R}_A) = E(\underline{R}_B) = \mu = \frac{m(m+1)}{N} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}N + 1) \text{ met } \sigma^2 = \frac{1}{4} \frac{m^2-1}{2m-1} = \frac{N^2-4}{16(N-1)} ;$$

en

$$\textcircled{7} \quad E(\underline{R}) = 2E(\underline{R}_A) = \frac{1}{2} N+1 = m+1 \text{ met } \sigma^2 = \frac{m(m-1)}{2m-1} = \frac{N(N-2)}{4(N-1)}$$

De kansverdeling van \underline{R} wordt

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) als } R = \text{even} \quad \mathcal{P}[\underline{R} = R] = 2 \frac{\binom{m-1}{\frac{1}{2}R-1}^2}{\binom{N}{m}} \\ \text{b) als } R = \text{oneven} \quad \mathcal{P} = 2 \frac{\binom{m-1}{\frac{1}{2}(R-1)} \binom{m-1}{\frac{1}{2}(R-3)}}{\binom{N}{m}} \end{array} \right.$$

Heeft men een vermoeden van een plotseling of geleidelijk stijgend of wel dalend niveau of een cyclisch verloop, waardoor het totale aantal R van mediaanruns (onder en boven me) zal afnemen, dan toetse men links-éénzijdig. Wil men nagaan of er snelle periodieke fluctuaties (zonder ander verloop) zijn, dan toetse men rechts-éénzijdig (grote R). De toets is helaas weinig gevoelig voor oscillaties, die in combinatie met een dalende of stijgende of cyclische trend voorkomen.

In Geigy (40; pg.129) vindt men een tabel voor \underline{R} . De tabel geeft de linker- en rechterkritieke waarden (R_L en R_R) voor $\alpha = 0.05, 0.025, 0.01, 0.005$ bij $N_A = N_B = \frac{1}{2}N = 4(1) 100$. Bijv.

$$0.025 = \mathbb{P}[\underline{R} \leq R_L = 31 \mid N_A = N_B = 40] = \mathbb{P}[\underline{R} \geq R_R = 51 \mid 40]$$

Een analoge tabel ziet men bij de Jonge (46, pg.377) en wel voor $\alpha = 0.10, 0.05, 0.02, 0.01$, voor $N_A = N_B = \frac{1}{2}N = 4(1) 45$.

Zie ook tabel 10 bij Crow, David, Maxfield (39) bij $\alpha = 0.05$ en 0.10 voor $\frac{1}{2}N = 21(1) 30 (2) 50 (5) 100$.

Dixon and Massey (35) geven een tabel, op pg. 421, met de volledige kansverdeling, t.w. $\mathbb{P}[\underline{R} \leq R \mid N_A, N_B]$ voor $N_A = N_B = 3(1) 20(5) 100$ en $R = 2, 3 \dots N$. Bijv. $\mathbb{P}[\underline{R} \leq 6 \mid 8, 8] = 0.100$ en $\mathbb{P}[\underline{R} \leq 13] = 0.991$

Het asymptotisch gedrag ($N \rightarrow \infty$) is a.v.

$$(5a) \quad N \rightarrow \infty, \text{ dan } \mathcal{E}(\underline{R}_{Ai}) = \mathcal{E}(\underline{R}_{Bi}) = \mu \rightarrow N \cdot 2^{-(i+2)} \text{ met } \sigma^2 \rightarrow \frac{N}{2^{i+2}} \left[1 - \frac{i^2 - 2i + 3}{2^{i+2}} \right]$$

en

$$\mathcal{E}(\underline{R}_{Ai}) = \mathcal{E}(\underline{R}_{Bi}) = \mu \rightarrow N \cdot 2^{-(i+1)} \text{ met } \sigma^2 \rightarrow \mu \left[1 - \frac{i^2 + 2}{2^{i+1}} \right]$$

De \underline{R}_{Ai} -verdeling wordt normaal als $N \rightarrow \infty$ (zegge $N > 20$), terwijl $\sigma^2 \cong \mu$ met toenemende i . Dit impliceert: voor $i \rightarrow \infty$ wordt de verdeling poisson's en als ook $N \rightarrow \infty$, dan gaat deze poisson-verdeling in de normale over. Verder $\mathcal{E}\underline{R}_i \rightarrow N/2^i$

$$(6a) \quad \mathcal{E}(\underline{R}_A) = \mathcal{E}(\underline{R}_B) = \mu \rightarrow \frac{1}{4}N \text{ met } \sigma^2 \rightarrow N/16 \text{ en}$$

voorts

$$(7a) \quad \mathcal{E}(\underline{R}) = \mu \rightarrow \frac{1}{2}N \text{ met } \sigma^2 \rightarrow \frac{\mu^2}{N} = \frac{1}{4}N$$

Lange mediaan-runs

(8a) Twee stellingen m.b.t. me-runs verdienen de aandacht

a) Een aselekt uit een continu verdeelde populatie getrokken steekproef ter grootte N , moet $N = 2^k - 2$ termen bevatten, opdat daarin het

gemiddeld aantal mediaan-runs van lengte $\geq k$ precies 1 is. (mediaan-runs maakt men door eerst de me van de reeks te berekenen en daarna iedere term $< me$ door A en iedere term $> me$ door B te vervangen. Aldus is immers $N_A = N_B = \frac{1}{2}N$). Bijv. $N = 128$ bij $k = 7$. Telt men dus een langste me-run van lengte 7, terwijl $N = 95$, dan is dat "verdacht" ($95 < 128$) en doet men goed de randomness nader te onderzoeken.

- b) Er is een kans γ , dat een N-reeks (getrokken als onder a) tenminste één A-run van lengte $\geq k$ bezit, waarbij γ , N, k gelieerd zijn door
- (86) $\gamma = 1 - \exp. (-N/2^{k+1})$ (als k voldoende groot is, zegge $k \geq 8$, bij matig grote N). Natuurlijk geldt hetzelfde voor B-runs. Kiest men γ klein, dan $k \approx \frac{3.32 \log N - (1 + 3.32 \log \gamma)}{\gamma}$.

En is $\gamma = 0.05$, dan $k \approx 3.3 (\log N + 1)$

Voorbeeld: er is 5% kans om in een randomreeks van 15 A's en 15 B's tenminste één A-run van lengte ≥ 8 te krijgen.

In Hald (22) vindt men een tabel, die N geeft bij $k = 5(1) 12$ en $\gamma = 0.05$.

In Geigy (40, pg.130) vindt men de volgende twee tabellen:

De eerste tabel geeft de steekproefgrootte N bij $\alpha = 0.01, 0.10, 0.50, 0.90, 0.95$ en bij $L_A = 1(1) 20$ ($L_A =$ lengte van langste boven me-runs).

Voorbeeld 1): $\mathbb{P}[L_A > 10 | N = 56] \leq 0.01$, wat betekent $\mathbb{P}[L_A \geq 11 | 56] < 0.01$ en $\mathbb{P}[L_A \geq 9 | 56] > 0.01$.

Voorbeeld 2): Men telt $L_A = 4$ bij $N_A = N_B = 14$. Daar de tabel leert

$\mathbb{P}[L_A \geq 4 | 22] = 0.50$ en $\mathbb{P}[L_A \geq 4 | 54] = 0.90$, ligt $\mathbb{P}[L_A \geq 4 | 28]$

tussen 0.50 en 0.90 (dus zeker > 0.05) en moet H_0 (= aselechte volgorde der 14 A's en 14 B's) niet verworpen worden, op drempel 0.05. De tabel geldt natuurlijk ook voor L_B .

De tweede tabel heeft betrekking op $L, d.i.$ de grootste van L_A en L_B (dus $L =$ langste me-runs). Nu geeft de tabel de N, waarbij

$\mathbb{P}[L > L | N] \leq \alpha = 0.01, 0.10, 0.50, 0.90, 0.95$. Bijv.

$\mathbb{P}[L > 10 | 42] \leq 0.01$. De lezer vergelijk dit met

$\mathbb{P}[L_A > 10 | 56] \leq 0.01$ en verklare zelf het verschil.

Zeer korte niet-mediaan-runs

Burr and Cane (43) berekenden de kansen op korte L_A 's in A, B-reeksen ($N_A \neq N_B$), omdat vooral een zeer korte, langste A-run een indicatie is, dat de A's en B's niet random door elkaar liggen. De formules zijn ingewikkeld.

*) Deze behoren eigenlijk onder subgeval a1 behandeld te worden

Zeer simpel is alleen de formule voor $L_A = 1$:

$$\textcircled{8c} \quad \mathbb{P}[L_A = 1 \mid N_A, N_B] = \frac{N_B!(N_B+1)!}{N!(N_B-N_A+1)!}, \quad \text{"geïsoleerde A's."}$$

($E(L_A)$ en $\sigma^2(L_A)$ worden niet vermeld)

Men heeft uiteraard vooral interesse voor die A- of B- runs, waarvan zelfs de langste kort is (zegge 1, 2, 3). Zij dit een A-run.

De exacte uitdrukking is

$$\mathbb{P}[L_A < k] = 1 - \binom{u}{1} \frac{N_A^{(k)}}{N^{(k)}} + \binom{u}{2} \frac{N_A^{(2k)}}{N^{(2k)}} - \text{etc.}$$

waarin p.d. $a^{(b)} = a(a-1) \dots a-(b-1)$ als $a \geq b$, en $= 0$ als $a < b$;
 $u = N_B + 1$.

Het rekenwerk aan deze formule valt soms mee, daar de reeks vrij snel geëindigd is. In bijv. $N_A = 10$, $N_B = 30$ en wenst men $\mathbb{P}[L_A \leq 3]$, dan is $N_A^{(3)} = 10.9.8$; $N_A^{(6)} = 10.9.8 \dots 5$; $N_A^{(9)} = 10.9 \dots 2$.

Heeft men interesse voor kleine k en zijn én N_A én N_B groot (bijv. $k \leq 3$; $N_A > 20$, $N_B > 20$), dan is een goede benadering

$$\textcircled{8d} \quad \mathbb{P}[L_A < k \mid N_A, N_B] \cong (1-b)^{N_B+1} \quad \text{met } b = (N_A/N)^k; \quad N_A + N_B = N$$

Bij Burr and Cane (43) vinden we de volgende tabel.

Bij $N_A = 4$ (2) 80, $\alpha = 0.05$ en 0.01 , en $k_0 = 1, 2, 3$, wordt die N_B genoemd, waarvoor $\mathbb{P}[L_A \leq k_0 \mid N_A, N_B] \leq \alpha$, hetgeen inhoudt, dat

$$\mathbb{P}[L_A \leq k_0 \mid N_A, N_B+1] > \alpha \quad \text{en} \quad \mathbb{P}[L_A \leq k_0 \mid N_A, N_B-1] < \alpha$$

Voorbeeld 1): $N_A = 38$; $k_0 = 3$; $\alpha = 0.05$; $N_B = 79.2$. Telt men dus onder 38 A's en 60 (d.i. < 79.2) B's een langste A-run van lengte 3, dan moet, op 0.05, H_0 verworpen worden, maar niet bij 38 A's en 85 (d.i. > 79.2) B's. Men bedenke, dat een zeer korte, langste A-run vooral in korte reeksen minder waarschijnlijk wordt.

Voorbeeld 2): $\mathbb{P}[L_A = 1 \mid N_A = 10, N_B = 39.6] = 0.05$.

N.B.: Ligging der A's "geïsoleerd" tussen de B's, wordt waarschijnlijker naarmate er meer B's zijn (leuk voorbeeld in hoofdstuk 5, voorbeeld 14).

Strik (37) geeft een tabel voor lengte L van de langste me-run. De tabel noemt $N_A (=N_B = \frac{1}{2}N)$, waardoor $P[L \geq L | N_A] = 0.05$ of 0.01 .
 Bijv. $L = 9; N_A = 27; 0.05; L = 5(1) 13$

Geval b; $k \geq 3$, van subgroep A1

Subgeval b1) $N_1 + N_2 + N_3 = \dots + N_k + N/k$, als $N = \sum_1^k N_i$ (alternatieven heten 1, 2, ..., k)

Uitdrukkingen voor $E(\underline{r}_{1i})$ en $\sigma^2(\underline{r}_{1i})$ zag ik nergens.

Wel voor \underline{R}_1 en \underline{R} . Er geldt:

⑨
$$\mu = E(\underline{R}_1) = \frac{N_1(N - N_1 + 1)}{N} = P_1 q_1 N + p_1 \text{ met } \sigma^2 = \mu \frac{(\mu - 1)}{N - 1}, \text{ met } p_1 = N_1/N; q_1 = 1 - p_1$$

 (alleen alt. A_1) en

⑩
$$\mu = E(\underline{R}) = 2 \frac{c}{N} + 1 = \frac{N(N+1) - \sum N_i^2}{N}, \text{ met } \sigma^2 = \frac{2c(2c-N) - 6Nd}{N^2(N-1)}, \text{ als } c = \sum_{i \neq j} N_i N_j$$

en $d = \sum_{i \neq j \neq k} N_i N_j N_k$ (alle alternatieven)

Hoe groter N en hoe minder N_1, N_2, \dots, N_k onderling verschillen, hoe meer nadert de \underline{R} -verdeling tot de normale.

Als men op theoretische gronden oscillaties of alterneringen verwacht, waardoor R groot zal worden, toets H_0 dan rechts-éénzijdig. Verwacht men echter lange oscillaties, een trend, een verschuiving van het gemiddelde of een neiging tot groepsvorming (clustering tendency), waardoor R klein zal worden, toets H_0 dan links-éénzijdig.

Voorbeeld 1) $k = 11$; aug. I De Bilt kan 0, 1, ..., 10 regendagen bevatten, dus 11 alternatieven. De jaren 1901-1950 hebben wellicht gegeven 3, 8, 1, 10, 10, 0, 0, 0, 5, ..., 7, 6. Liggen deze getallen aselekt?

Voorbeeld 2) de zomer 1967 heeft 92 dagen. Gelet op de daghoeveelheid neerslag, kan de dag genoemd worden A (= droog), B (matig nat) of C (zeer nat). Liggen de A's, B's, C's aselekt?

Het asymptotisch gedrag (als $N \rightarrow \infty$) levert

⑨a
$$E(\underline{R}_1) \rightarrow N p_1 q_1 \text{ met } \sigma^2 \rightarrow \frac{E^2}{N} = N p_1^2 q_1^2$$

$$(10a) \mathcal{E}(\underline{R}) \rightarrow N(1 - \sum p_i^2) \text{ met } \sigma^2 \rightarrow N \left[\sum p_i^2 - 2 \sum p_i^3 + (\sum p_i^2)^2 \right]$$

Subgeval b2) $N_1 = N_2 = N_3 = \dots = N_k = N/k$, zegge p . ($q = 1-p$)

Er geldt:

$$(11) \mathcal{E}(\underline{R}_1) = \mu = pq N + p = \frac{k-1}{k^2} N + \frac{1}{k} \text{ met } \sigma^2 = \mu \frac{(\mu-1)}{N-1}$$

Natuurlijk is $\mathcal{E}(\underline{R}_1) = \mathcal{E}(\underline{R}_2) = \dots = \mathcal{E}(\underline{R}_k)$, doch $\sigma^2(\underline{R}) \neq k \cdot \sigma^2(\underline{R}_1)$
 Ook

$$(12) \mathcal{E}(\underline{R}) = \frac{k-1}{k} \cdot N + 1 \text{ met } \sigma^2 = \frac{k-1}{k} \frac{N}{N-1} (N-k)$$

Nu weer $N \rightarrow \infty$, dan geldt:

$$(11a) \mathcal{E}(\underline{R}) \rightarrow pq N \text{ en } \sigma^2 \rightarrow p^2 q^2 N$$

en

$$(12a) \mathcal{E}(\underline{R}) \rightarrow qN \text{ met } \sigma^2 \rightarrow pq N$$

Als ook $k \rightarrow \infty$, dan $\mathcal{E}(\underline{R}) \rightarrow N$ en $\sigma^2 \rightarrow pN \rightarrow 0$.

Nemen N en k toe, dan volgt \underline{R} in benadering een normale verdeling met gemiddelde $N(1 - \frac{1}{k})$ en variantie N/k .

(13) Er bestaat een k-steekproeven toets van Wald-Wolfowitz, die de generalisatie is van de gelijknamige 2 steekproeven-toets, genummerd (4), Zie app. 5.



Subgroep A2

De populatie-verdeling is continu

H_0 : de verkregen "waarnemingen" staan in aselechte volgorde

Voorbeeld: beschouw de 92 etmaaltemperaturen van de zomer 1967 (1 juli - 31 aug.) en neem even aan, dat ze zo nauwkeurig gemeten zouden zijn, dat geen twee of meer van deze temperaturen dezelfde zouden zijn. Algemeen: x_1, x_2, \dots, x_N ; $x_i \neq x_j, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, N$

Definieer: als $x_{i-1} < x_i > x_{i+1}$, dan heet x_i een top T ($1 < i < N$);
 als $x_{i-1} > x_i < x_{i+1}$, dan heet x_i een dal D ($1 < i < N$).

Toppen en dalen heten samen keerpunten K (zij vallen per definitie nimmer in de eerste of laatste waarneming). N_T, N_D, N_K stellen voor het aantal toppen, dalen, keerpunten. $N_K = N_T + N_D$; $N_T - N_D = -1, 0, +1$.

Zij de tussentermdifferenties ("eerste differenties") $\Delta_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \dots, N-1$; daar $x_i \neq x_j$, is $\Delta_i \neq 0$. (nooit nul)

Een opwaartse run^{*)} = onafgebroken successie van pos. Δ 's, die òf open òf gesloten is. Gesloten heet de opwaartse run als hij wordt voorafgegaan en gevolgd door een neg. Δ . In andere gevallen heet de opwaartse run open (analoog voor neerwaartse run^{**)}. Zij $r(+i)$ het totale aantal opwaartse runs van lengte i . Analoog $r(-i)$. Zij $R(+i)$ het totale aantal opwaartse runs van lengte $\geq i$. Analoog $R(-i)$. Ongeacht teken: $r(i) = r(+i) + r(-i)$, $R(i) = R(+i) + R(-i)$; $R(i=1) \equiv R$.

Een plus-fase is een gesloten opwaartse run van Δ 's. (van dal naar top); lengte 1, 2, ... Een min-fase is een gesloten neerwaartse run van Δ 's (van top naar dal); lengte 1, 2, ...

Aantallen $m(+f), m(-f), m(f)$; cumulatieve aantallen $M(+f), M(-f), M(f)$; $M(f=1) \equiv M$, met $M(f) = m(f) + m(f+1) + \dots$.

Er geldt $M = N_K - 1$. Een golflengte $\lambda = (\text{plus-fase}) + (\text{min-fase})$; lengte 2, 3, ... Aantal $r(\lambda)$.

Zij L_+ de lengte van de langste (al of niet gesloten) opwaartse run van Δ 's; analoog L_- ; $L = \max(L_+, L_-)$.

Zij a_+ = aantal pos. Δ 's; a_- = aantal neg. Δ 's; $a_+ + a_- = N-1$;

zij $v = a_+ - a_-$.

Nemen we de verkregen waarnemingen x_1, x_2, \dots, x_N op en strooien we die talloos vele keren aselekt over de rechte lijn uit, dan zullen, ofschoon we alle $N!$ schikkingen even waarschijnlijk denken, alle genoemde grootheden kansverdelingen volgen. Deze kansverdelingen, hun gemiddelden, hun varianties, hun asymptotisch gedrag bij $N \rightarrow \infty$, zijn door velen onderzocht. Wij verwijzen weer voor afleidingen etc. naar de oorspronkelijke literatuur.

Essentieel is, dat het alleen gaat om de grootte-verhoudingen: we mogen de waarnemingen vervangen door hun rangnummers en ook die aselekt uitstrooien.

Voorbeeld: $x = 39, \overline{42}, \underline{38}, \overline{53}, 51, \underline{30}, \overline{40}, \underline{28}, 43, 46, \overline{52}, 29, \underline{24}, 34,$
 rangno. : 7, 9, 6, 14, 12, 4, 8, 2, 10, 11, 13, 15, 3, 1, 5
Tekens van Δ : + - + - - + - + + + + - - +

* plus-run; E: up-run; D: Aufiteration

** min-run; E: down-run; D: Abiteration

Top bijv. 42; dal bijv. 38

$$N = 15$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} r(+1) = 4 & r(-1) = 2 & m(+1) = 2 & m(-1) = 2 & N_T = 4, \text{ in } 42, 53, 40, 55 \\ r(+4) = 1 & r(-2) = 2 & m(+4) = 1 & m(-2) = 2 & N_D = 4, \text{ in } 38, 30, 28, 24 \\ \hline R(+1) = 5 & R(-1) = 4 & M(+1) = 3 & M(-1) = 4 & N_K = 8 \end{array}$$

$$R = 9$$

$$M = 7 = 8 - 1$$

$$r(\lambda) = 4; \bar{\lambda} = (2+3+2+6)/4 = 3\frac{1}{4}$$

$$L_+ = 4; L_- = 2; L = 4$$

$$a_+ = 8; a_- = 6; a_+ + a_- = 14 = N-1$$

Opm.: Door van de reeks x_1, x_2, \dots, x_N (N ongelijke getallen) over te gaan op de reeks der tussentermdifferenties $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{N-1}$ ($N-1$ getallen, niet perse ongelijk) en van deze slechts de tekens $+$ of $-$ te beschouwen, hebben we een twee-alternatieven reeks gemaakt. Toch moge we daarop niet de toetsen uit subgroep A1 toepassen, daar, zelfs als de reeks x_1, x_2, \dots, x_N aselekt is, toch niet de $+$, $-$ reeks dat ook is (de "differentiëring" heeft autocorrelatie verwekt doordat Δ_{i+2} en Δ_{i+1} de term x_{i+1} "gemeen" hebben (we gaan er niet verder op in)). Vandaar de ontwikkeling van geheel nieuwe toetsen, die wel samengenomen worden als differentie-, toppen, dalen, fasen-toetsen, die nu behandeld zullen worden.

(14a) Toets van Moore en Wallis (8), (9), (13). Plus, min-toets

De toets baseert zich op a_+ = aantal positieve tussentermverschillen. De a_+ ligt in het interval $0 \leq a_+ \leq N-1$ en heeft daarin een discontinue symmetrische verdeling. Onder H_0 is $E(a_+) = E(a_-) = \mu = \frac{1}{2}(N-1)$ en $\sigma_+^2 = \sigma_-^2 = 1/12 (N+1)$. Voor $N \rightarrow \infty$ nadert de a_+ verdeling tot een normale. Moore en Wallis geven een exacte tabel voor $N = 2(1)2$.

Er zijn twee gevallen

a) $N =$ oneven. Zij $c = \frac{1}{2}(N-1)$. De tabel geeft de kans (in 6 dec.)

$$\mathbb{P}[a_+ \leq d_1] + \mathbb{P}[a_+ \geq d_2] = 2 \mathbb{P}[a_+ \leq d_1], \text{ waarin } c-d_1 = d_2 - c; d_1 < c < d_2, \text{ met } d_1 = 0, 1, \dots, c-1, \text{ dus } d_2 = N-1, N-2, \dots, c+1, \text{ terwijl achter } a_+ = c \text{ een kans } 1.000000 \text{ staat.}$$

b) $N =$ even. Zij $c = \frac{1}{2}(N-2)$. De tabel geeft de kans (in 6 dec.)

$$\mathbb{P}[a_+ \leq d_1] + \mathbb{P}[a_+ \geq d_2] = 2 \mathbb{P}[a_+ \leq d_1], \text{ met } c-d_1 = d_2 - (c+1),$$

$d_1 < c$ en $c+1 < d_2$, met $d_1 = 0, 1, \dots, c-1$, dus $d_2 = N-1, N-2 \dots, c+2$,

terwijl achter zowel $a_+ = c$ als $a_+ = c+1$ een kans 1.000000 staat.

Voorbeeld 1): bij $N = 7$ is de symmetrische kansverdeling ééntoppig met top bij $a_+ = c = 3$; de tabel geeft $\mathbb{P}[\leq 2] + \mathbb{P}[\geq 4] = 0.520635$; $\mathbb{P}[\leq 1] + \mathbb{P}[\geq 5] = 0.048016$; $\mathbb{P}[0] + \mathbb{P}[6] = 0.000397$ en $\mathbb{P}[3] = 1 - 0.520635 = 0.479365$; $a_+ = 0, 1, \dots, 6$.

Voorbeeld 2): bij $N = 8$ is de symmetrische kansverdeling tweetoppig met even hoge toppen boven $a_+ = c = 3$ en $a_+ = c+1 = 4$. De tabel geeft $\mathbb{P}[\leq 2] + \mathbb{P}[\geq 5] = 0.225248$, $\mathbb{P}[\leq 1] + \mathbb{P}[\geq 6] = 0.012302$ en $\mathbb{P}[0] + \mathbb{P}[7] = 0.000050$, zodat $\mathbb{P}[3] = \mathbb{P}[4] = \frac{1}{2} (1 - 0.225248) = 0.387376$; $a_+ = 0, 1 \dots, 7$.

Voorbeeld 3): als de reeks x_1, x_2, \dots, x_8 leidt tot $-+--+$, waarin $N = 8$, $a_+ = 3$, dan behoeft, daar $\mathbb{P}[\leq 3] = \mathbb{P}[\geq 3] > 0.05$ is, H_0 niet verworpen te worden, althans tweezijdig op 0.05 toetsend. Men moet H_0 pas verwerpen bij $a_+ \leq 1$ (bijv. $-----+$) of bij $a_+ \geq 6$ (bijv. $+-----$).

N.B. De tabel stelt in staat de exacte distributieve kansverdeling $\mathbb{P}[a_+ = j | N]$ te berekenen voor $N = 2(1) 12$ en $j = 0(1) N-1$.

(14b) Men kan ook een toets op $\underline{v} = a_+ - a_-$ baseren.

Onder H_0 geldt: $\mu = \mathbb{E} \underline{v} = 0$ met $\sigma^2 = 1/3 (N+1)$.

Er is een tabel bij Strik (37). Deze tabel levert

$\mathbb{P}[\underline{v} \geq d] = \mathbb{P}[\underline{v} \leq -d]$ bij $N = 11(2) 41$ en $d = 4(2) 12$ en bij $N = 10(2) 40$ en $d = 3(2) 11$. Zo is bij $N = 14$ en $v = 5$ (als bijv. $a_+ = 9$ en $a_- = 4$) de $\mathbb{P}[\underline{v} \geq 5] = \mathbb{P}[\underline{v} \leq -5] = 0.037$.

Enkele opmerkingen:

Bij een (geleidelijk) stijgend verloop (positieve en in het bijzonder lineaire trend) zal men overwegend plussen aantreffen. In de regel zal men dan ééNZijdig rechts toetsen (op grote a_+), als althans dit stijgend verloop op theoretische gronden te verwachten is. De toets is dan superieur boven de keerpunten-toets. Andere toetsen (o.a. de rangcorrelatie-toetsen (25) en (26)) hebben dan echter een groter onderscheidingsvermogen. Tegenover een symmetrische oscillatie als alternatieve hypothese is de toets zeer weinig onderscheidend.

De toets vindt haar generalisatie in die van MANN, toets (24).

- 14c) De plus-min-toets wordt verwerkt in de correlatie-toets van Moore en Wallis. Zie app. 6

Toppen-, dalen-, keerpunten-toets

- 15) De kansverdelingen $\mathbb{P}[\underline{N}_T = a | N]$, $\mathbb{P}[\underline{N}_D = a | N]$, $\mathbb{P}[\underline{N}_K = a | N]$

zijn mij niet bekend. Wel leest men

$$\mu = \mathcal{E}(\underline{N}_K) = 2/3 (N-2) \text{ en } \sigma^2 = (16N-29)/90; \mu_3, \mu_4 = N\text{-functie}$$

Als $N \rightarrow \infty$, dan $\mu \rightarrow 2/3 N$ en $\sigma^2 \rightarrow \frac{8}{45} N$, en de \underline{N}_K -verdeling wordt normaal.

Verder $\mu = \mathcal{E}(\underline{N}_T) = 1/3 (N-2)$ en $\sigma^2 = \frac{16N-29}{360}$ Als $N \rightarrow \infty$, dan $\mu \rightarrow 1/3 N$ met $\sigma^2 \rightarrow N/22.5$.

$$\text{Natuurlijk is } \mathcal{E}(\underline{N}_T) = \mathcal{E}(\underline{N}_D) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(\underline{N}_K) = 1/3 (N-2) \text{ en } \sigma^2(\underline{N}_T) = \sigma^2(\underline{N}_D) = \frac{1}{4} \sigma^2(\underline{N}_K) = \frac{16N-29}{360}$$

Volgens Kendall and Stuart (51) is de keerpuntentoeets tegen trend als alternatieve hypothese nietswaard. Tegen een cyclisch gedrag wel. Zoodra in een reeks van $N > 10$ termen de gemiddelde faselengte (zie verderop) tenminste 2 is, zal de reeks wel niet aselekt zijn en verdient het de moeite de non-randomness verder te onderzoeken.

Toets op aantallen fasen van Wallis en Moore

- 16) Tel in de reeks x_1, x_2, \dots, x_N het aantal fasen, dalend en stijgend, van lengten $\underbrace{1, 2, 3, \dots}_f$, d.i. $m(f)$. Ook deze \underline{m} 's volgen onder H_0 zekere kansverdeling. Dit behoeft enige toelichting. Als men talloosvele malen dezelfde x_1, \dots, x_N zou uitstrooien over de rechte lijn, dan zou $m(f)$ vele waarden aannemen, doch niet alle even frequent. Voor elke f -waarde is, bij vaste N , $\underline{m}(f)$ een stochastische grootheid. Er geldt

$$\mathcal{E}(\underline{m}(f)) = 2 \frac{(f^2 + 3f + 1)(N - f - 2)}{(f + 3)!} \quad (\sigma^2 \text{ mij onbekend) en}$$

$$\mathcal{E}(\underline{m}(f > 1)) = \mathcal{E}(\underline{M}) = 1/3 \left[(2N-7) + \frac{1}{N!} \right] \approx 1/3(2N-7) \text{ en } \sigma^2 = \frac{16N-29}{60}$$

De $\underline{m}(f)$ -verdeling nadert voor $N \rightarrow \infty$ voor geen enkele f tot een normale! Wel de \underline{M} -verdeling (aantal van alle fasen)

De bedoeling is het getelde aantal $m(f)$ met het theoretische aantal

$E(m(f))$ te vergelijken, voor $f = 1, 2, 3, \dots$. Is de overeenkomst visueel al goed, dan behoeft niets te worden getoetst. Is de overeenkomst twijfelachtig, dan toetse men met de X^2 -toets. Wallis en Moore raden aan^{*)} alleen de theoretische aantallen voor $f = 1, 2, \geq 3$ te berekenen, terwijl $E(m(f \geq 3)) = E(M) - [E(m(f=1)) + E(m(f=2))]$

Er komt aldus een tabel

aantal + en - fasen			
lengte	geteld g	theor. t	$X^2 = (g - t)^2/t$
f = 1	m_1
2	m_2
≥ 3	M_3
alle	M	...	X^2 som

Wallis en Moore kwamen tot de conclusie: Als $X^2 < 6.3$ toets dan $6/7 X^2$ op 2 graden van vrijheid (5% drempel = 5.99). Als $X^2 \geq 6.3$ toets dan X^2 op $2\frac{1}{2}$ graden van vrijheid. (5% drempel = 6.90). Wordt de 5% drempel overschreden, verwerp dan H_0 . Zij geven een empirisch gevonden, tabel $P[X^2 \geq X^2 | N]$, bij $N = 6(1) 12$, lees app. 7. Deze X^2 -toets op aantallen fasen is gevoeliger dan die op de gemiddelde faselengte f , zie toets (17).

Toets op gemiddelde faselengte \bar{f}

(17) Ook de in een reeks x_1, x_2, \dots, x_N berekende gemiddelde faselengte \bar{f} is stochastisch. De kansverdeling onder H_0 van \bar{f} is natuurlijk van N afhankelijk. Men kan berekenen

$$E(\bar{f}) = \frac{N+7-4e}{(2N-7):3} \approx 3/2 \text{ als } N \rightarrow \infty, \text{ terwijl}$$

$$\sigma^2 \approx 3 \frac{(8e^* - 21)N^2 + (4e^* - 17)N - (48e^{*2} - 140e^* + 14)}{(2N-7)^2} \rightarrow 0.560 \text{ als } N \rightarrow \infty,$$

waarin $e^* = \sum_{u=1}^N \frac{1}{u}$

Bijgevolg $E(\bar{f}) \rightarrow 3$ en $\sigma^2 \rightarrow 1.12$ als $N \rightarrow \infty$.

* Daar de fasenlengten afhankelijk verdeeld zijn, is toepassing van de aanpassings X^2 -toets zonder meer niet geoorloofd.

Zowel \mathcal{E} als σ is voor grote N zo goed als onafhankelijk van N .
 N.B. De verdeling van \bar{f} nadert niet tot een normale als $N \rightarrow \infty$.
 Dit is wel te begrijpen, als we bedenken, dat $\mu \rightarrow 3/2$ en $\sigma \rightarrow 0.75$,
 terwijl bovendien $1 \leq \bar{f} < \infty$. De verdeling van \bar{f} moet dus scheef
 zijn.

Voor de gemiddelde afstand van keerpunt tot keerpunt in vereffende reeksen, die vóór de vereffening aselekt waren, en in reeksen van het Markoff-type en voor de gemiddelde afstand tussen een opwaartse en neerwaartse passage van de basislijn (up- and downcrosses), zie app.9.

(18) De runtoets of serietoets (heet óók toets van Wallis-Moore)

De uit de gegeven getallenreeks of steekproef x_1, x_2, \dots, x_N ($x_i \neq x_j$) afgeleide Δ reeks $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{N-1}$ geeft aanleiding tot een +, -reeks $+---+....$, waarin zich + en - runs bevinden (zie blz. 18). Alle grootheden $r(+i), r(-i), R(+i), R(-i)$ etc. zijn stochastisch verdeeld. De exacte kansverdelingen zijn onbekend of zeer moeilijk. Afleiding o.a. bij David and Barton (45).

Er geldt voor runs, onverschillig het teken (op- en neerwaartse runs), van lengte i (open en gesloten runstezamen).

$$\mathcal{E}[\underline{r}(i)] = 2 \frac{N-i-2}{(i+3)!} \frac{(i^2+3i+1)}{(i+3)!} + \frac{4}{(i+2)i!} = \mathcal{E}(\underline{m}(i)) + \text{randeffect} =$$

$$2 \frac{N(i^2+3i+1)-(i^3+3i^2-i-4)}{(i+3)!} ; \text{ de } \sigma^2 \text{ is mij onbekend.}$$

$\mathbb{P}[\underline{r}(i) \leq a]$ is zeer lastig, zie in (45).

Geigy (40, pg.170.25) heeft \mathcal{E} en σ^2 getabelleerd. De tabel schrijft $\mathcal{E}(\underline{r}(i)) = aN-b$ en $\sigma^2 = d\mathcal{E} + e$ en noemt a, b, d, e , alsmede $\mathcal{E}(\underline{R}(i)) = AN-B$ met $\sigma^2 = D\mathcal{E} + E$ en noemt A, B, D, E , voor $i = 1(1)10$, en grote N .

Beschouwen we alle lengten $i = 1, 2, \dots$ tezamen, dan geldt $\mathcal{E}(\underline{R}) = (2N-1)/3$ met $\sigma^2 = (16N-29)/90$. De \underline{R} is als $N > 40$ ongeveer normaal verdeeld. Dit is de toets van Wallis en Moore op de aantallen runs, van alle lengten, terwijl (16) pg. 20 de toets van Wallis en Moore op de aantallen fasen van alle lengten behandelt.

Men bedenke dat $E(\underline{R}) = \frac{2N-1}{3}$ en $E(\underline{M}) = \frac{2N-7+1/N!}{3}$, zodat $E(\underline{M}) \approx E(\underline{R}) - 2$ (de 2 vanwege randeffect).

(19) Strik (37) publiceerde een tabel met de linker en rechter kritieke waarden R_L en R_R bij drempels 0.05, 0.025, 0.01, 0.005 en $N = 10(1) 40$.

Zo is $P[\underline{R} \leq 5 | 14] = P[\underline{R} \geq 13 | 14] = 0.025$.

Enkele opmerkingen:

- 1) men toetst linkséénzijdig tegen een alternatieve toets, waaronder R afneemt (de richting van de beweging neigt tot persisteren).
- 2) de toets is niet gevoelig voor plotselinge niveauverschuiving.

Olmstead (16) geeft een tabel van de volledige kansverdeling van \underline{R} (+i) = aantal opwaartse runs van lengte $\geq i$.

De tabel noemt $P = P[\underline{R} (+i) \geq 1 | N]$, onder H_0 = aselechte ligging der N ongelijke getallen x_1, x_2, \dots, x_N , in 8 decimalen, bij $N = 2(1) 14$ en $i = 1(1) N$. Een voorbeeld: als $N = 12$ is $P = 1.000000000$ bij $i = 1$; voorts 0.98871501 bij 2; 0.51200152 bij 3; 0.11134204 bij 4; 0.01703439 bij 5; 0.00213291 bij 6; 0.00022597 bij 7; 0.00002039 bij 8; 0.00000155 bij 9; 0.00000010 bij 10 en 0.00000000 bij 11. De situatie $i = 10$ kan alleen òf ++++++++ òf ++++++---- zijn. (12 termen, dus 11 tekens) Die bij $i = 4$ is bijv. --++++-++++- of --++++-++++ of -++++-++++ of -+---+---++++ enz. Zou men reden hebben om rechtséénzijdig te toetsen ("te grote $R(+i)$ "), dan moet men dus, op 0.05, de H_0 verwerpen als men tenminste één opwaartse run van lengte 5 of meer telt (immers bij $i = 4$ is $P > 0.05$ en bij $i = 5$ is $P < 0.05$).

Edgington (42) geeft een kanstabel voor de $P = P[\underline{R} \leq a | N]$, onder H_0 , in 4 decimalen, voor $N = 1(1) 25$ en $a = 1(1) N-1$.

Bijv. $P[\underline{R} \leq 6 | 15] = 0.0186 < 0.05$ en $P[\underline{R} \leq 7] = 0.0782 > 0.05$, zodat men, linkséénzijdig op 0.05 toetsend, de H_0 verwerpen moet als $R \leq 6$.

Verder $P[\underline{R} \geq 12] = 1 - P[\underline{R} \leq 11] = 0.1134 > 0.05$ en $P[\underline{R} \geq 13] = 1 - P[\underline{R} \leq 12] = 0.0267 < 0.05$. Dus moet men, rechtséénzijdig op 0.05 toetsende, de H_0 verwerpen bij $R \geq 12$. Toetst men dubbelzijdig op 0.05, dan moet H_0 verworpen worden bij $R \leq 6$ en $R \geq 14$.

Edgington merkt nog op:

- 1) is $x_{i+1} = x_i$, waardoor $\Delta_i = 0$ (en kan men die 0 "niet wegwerken")

laat zulke nullen dan weg in de $f,-$ reeks

- 2) is de alternatieve hypothese H_a identiek met trend of lange "cykel", toets dan linkséénzijdig
- 3) toetst men tegen oscillatie of korte cyclen, toets dan rechtséénzijdig.
- 4) heeft men geen bepaalde H_a , toets dan dubbelzijdig.

Het aantal $r(i)$ der op- en neerwaartse runs der lengte i , zowel als het aantal $R(i)$ der op- en neerwaartse runs ter lengte $\geq i$ mag voor $N > 20$ normaal verdeeld geacht worden. Hoe groter i , hoe minder het verschil tussen \bar{E} en σ^2 , hetgeen inhoudt, dat voor $i \geq 5$ de $r(i)$ ong. poissonverdeeld is, d.i.

$$P[r(i) = a] = e^{-\mu} \cdot \mu^a / a! \text{ met } \mu = \bar{E}[r(i)]$$

Met behulp van bovenstaande formules kan men het getelde aantal op- en neerwaartse runs $r(i)$ van lengte i met het theoretisch te verwachten aantal $\bar{E}[r(i)]$, via de χ^2 , vergelijken, voor elke i apart of "voor alle i 's tezamen", in één tableau met de χ^2 -toets.

Op bovengenoemde poissonbenadering berust formule (20).

Lange runs (opwaarts of neerwaarts)

De reeks x_1, x_2, \dots, x_N (met $x_i \neq x_j$) moet een lengte N hebben, met

$$(20) \quad N = j - \frac{1}{j+1} - \frac{(j+2)j!}{2} \lg(1-P),$$

opdat hij een kans P maakt tenminste één op- of neerwaartse run van lengte $\geq j$ te bezitten.

Voorbeeld: $P = 0.05, j = 4, N = 7; P = 0.05, j = 10, N = 102382$

Vindt men dus bijv. een reeks $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, die levert $-++++$ of $+----$, waarin één $+$ run van lengte 4 zit, dan moet, op 0.05, de aseleetheid der ligging der x 'en worden verworpen, want als

$P[R(4) \geq 1 | N = 7] = 0.05$, dan moet $P[R(4) \geq 1 | N = 6] < 0.05$ zijn. Doch H_0 hoeft niet verworpen te worden, op 0.05, als de langste $+$ run een lengte 4 heeft bij $N \geq 8$, zoals bij $-+----$, bij $N = 8$, Nomogram bij Olmstead (16)

Tabel in Geigy (40, pg. 130), die N geeft bij $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10, 0.90, 0.95, 0.99$ voor $j = 2(1) 10$. Bijv. $\alpha = 0.05; j = 7; N = 1170$

Strik (37) geeft een tabel, ontleend aan Olmstead (16). De tabel noemt de bovengrens N van een aantal ongelijke waarnemingen, waarbij de kans (onder de hypothese, dat deze aselekt liggen) op één of meer op- of neerwaartse runs ter lengte i niet groter is dan de bijbehorende onbetrouwbaarheidsdrempel α . Voor $\alpha = 0.05$ en 0.01 en $i = 4(1) 8$.

Bijv. $\alpha = 0.05$, $i = 6$, $N = 153$.

Is dus bij $N = 130$ (< 153) de langste op- of neerwaartse run 6 lang, dan moet, op 0.05 , H_0 verworpen worden. Maar niet als $N = 160$ (> 153).

Trend-toets van Von Neumann

- (21) Deze toets hoort eigenlijk niet thuis in deze groep, 1e omdat hij eist, dat de populatie, waaruit de steekproef x_1, \dots, x_N stamt, normaal verdeeld is (voor deze eis is de toets echter niet zeer gevoelig, vooral bij grote steekproeven) en ten 2e omdat met de waarden zelf van

$$d_i = x_{i+1} - x_i \text{ gerekend wordt en niet met de tekens van } \Delta_i.$$

We noemen hem hier echter toch, daar het een gevoelige aseletheids-toets is (met groot onderscheidend vermogen), die scherp discrimineert tussen de alternatieven trend(persistentie) en oscillaties.

Gegeven de reeks x_1, x_2, \dots, x_N , met $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum x$. Bereken $K = \sum_{i=1}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)^2$:

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \text{ (quotient van Von Neumann). Men kan bewijzen dat}$$

$0 \leq K \leq 4$. Onder H_0 (= aselechte ligging der x 'en) is $C^E(K) = 2^{**}$ en

$$\sigma^2(K) = 4 \frac{N-2}{N^2-1} \approx \frac{4}{N} \quad **$$

$N \rightarrow \infty$

Voor exacte behandeling zie (7), (41). K is symmetrisch verdeeld voor alle N en zo goed als normaal verdeeld voor $N > 20$.

Daar de strooing der Δ_i 's minder gevoelig is voor geleidelijke verschuiving van het niveau en meer gevoelig is voor snelle cyclische beïnvloeding van het niveau dan de strooing der x 'en zelf, is K een goede indicator voor niet toevallige beïnvloeding van het niveau; $K \rightarrow 0$ tengevolge van langzame trend (lineaire en niet lineaire invloeden op niveau) en $K \rightarrow 4$ tengevolge van korte cyclen.

* deze eigenschap geldt algemeen, d.i. de \underline{x} -verdeling doet er niet toe.
 ** deze eigenschap eist, dat \underline{x} normaal verdeeld is.

Een fraaie tabel vindt men bij Geigy (40, pg.58). De tabel noemt K_L en K_R in $\mathbb{P}[K_L < \underline{K} < K_R | N] = 0.10$ of 0.02 bij $N = 4(1) 100$, zodat $\mathbb{P}[K_L < \underline{K}] = \mathbb{P}[\underline{K} < K_R] = 0.05$ en 0.01 . Met deze tabel kan men dus dubbelzijdig en enkelzijdig (links of rechts) toetsen.

Neumann (7) geeft een tabel, die K_L^* en K_R^* noemt in

$\mathbb{P}[K_L^* < \underline{K}^* < K_R^* | N] = 0.10$ of 0.02 bij $N = 4(1) 60$, waarbij

$$K^* = \frac{N}{N-1} K$$

De Jonge (46, pg.670) geeft een tabel voor K_R bij $N = 4(1) 20$ en $\alpha = 0.05, 0.01$ en 0.001 .

Circulaire autocorrelatietoets van Wald-Wolfowitz

22. Gegeven de steekproef x_1, x_2, \dots, x_N . De cyclische autocorrelatie coëfficiënt van de orde h , zegge r_h , wordt gedefinieerd als de correlatiecoëfficiënt tussen de paren x_i, x_{i+h} ($i = 1, 2, 3 \dots N$); $h = 1, 2 \dots$. De steekproef wordt circulair gedacht, d.i. $x_{N+1} = x_1; x_{N+2} = x_2$, etc. Onder H_0 (= aselechte ligging der N x 'en) geldt

$$E r_h \approx \frac{-1}{N-1} \text{ en } \sigma^2 \approx \frac{N-2}{(N-1)^2}, \text{ elke } h, \text{ voor } N > 75.$$

Alleen als \underline{x} normaal verdeeld is, kan men de exacte linker- en rechter kritieke waarden voor $h = 1$, zegge r_L en r_R , berekenen.

Voor een tabel, zie in Geigy (40, pg.58). De tabel noemt r_L en r_R , waarvoor $\mathbb{P}[r_L < \underline{r} < r_R] = 0.10$ en 0.05 bij $N = 5(1) 100$. Deze kritieke grenzen zijn exact voor $N < 75$ en benaderd voor $N \geq 75$ (\underline{r}_1 volgt dan een ongeveer normale verdeling).

Geigy vermeldt nog, dat dezelfde tabel gebruikt mag worden voor $h > 1$, mits h en N onderling ondeelbaar zijn (dus elke h bij $N =$ priem).

De toets is niet parametervrij. Voor de cyclische autocorrelatie van W.-W. op r_1 , gebaseerd op de rangnummers van de x_1, \dots, x_N , zie app. 8.

Niet-cyclische autocorrelatie toets

23. Gegeven de steekproef x_1, x_2, \dots, x_N , die nu niet-cyclisch genomen wordt (de reeks eindigt met x_N). Bereken weer de autocorrelatiecoëfficiënten r_h op zoveel paren als dat kan ($h = 1, 2 \dots$).

Thans is $E(\underline{r}_h) = \frac{-1}{N-1}$ (onafhankelijk van h) en $\sigma^2(\underline{r}_h) = \frac{1}{N-h}$

Zie o.a. bij

Kendall and Stuart (51; deel III pg.362). De kansverdeling is zeer ingewikkeld. Men beschouwe \underline{r}_h als normaal verdeeld voor grote N en h niet te dicht bij N (zegge $N > 30$ en wel zo groot, dat het aantal paren, waarmee r_h berekend werd, > 20)

Toetsen (22) en (23) zijn gevoelig tegenover periodieke cyclische beïnvloeding van een populatie.

Trend-toets van Mann

(24) Gegeven de steekproef x_1, x_2, \dots, x_N

Tel bij elke x_i ($i = 1, \dots, N$) het aantal c_i der x 'en, die $< x_i$ zijn.

Zij $T = \sum_{i=1}^N c_i$. Onder $H_0 =$ aselechte ligging der x 'en, is T symmetrisch verdeeld tussen 0 en $\frac{1}{2}N(N-1)$ met $E(T) = \frac{1}{4}N(N-1)$ en $\sigma^2(T) = \frac{N(N-1)(2N+5)}{72}$

72

Voor $N \geq 10$ is T ongeveer normaal verdeeld.

Voor $N < 10$ is de verdeling getabelleerd. Zie (14). De tabel noemt de kansen $P[T \leq T | N]$ in 3 decimalen voor $N = 3(1) 10$ en $T = 0(1) 21$.

Met behulp van deze tabel laten zich de linker en rechter kritieke waarden T_L en T_R bij elke α vinden, zodanig, dat $P[T \leq T_L] =$

$$P[T \geq T_R] = \frac{1}{2}\alpha$$

De toets is gevoelig voor een trend (waardoor nl. T afneemt of toeneemt al naar gelang de trend neer- of opwaarts is) en niet gevoelig voor plotselinge niveau-verschuivingen (eventueel in de trend).

De toets kan gezien worden als een uitbreiding van de toets van Moore en Wallis, zie toets (14a).

(25) Trendtoets van Kendall = rangordecorrelatietoets

In wezen is dit de toets van Mann, waarbij de x_1, x_2, \dots, x_N door hun rangnummers vervangen worden, hetgeen de c 's in (24) niet van waarde verandert. Uit T leidt men af de Kendall-"correlatiecoëfficiënt"

$r_k = \frac{4T}{N(N-1)} - 1$, waarvoor $-1 < r_k < +1$. Er geldt, onder H_0 , $E(r_k) = 0$ en $\sigma^2(r_k) = \frac{2}{9} \frac{2N+5}{N(N-1)}$. Zie verder de literatuur over de Kendallse $(r_k = \text{schatting van } \rho_k)$ correlatiecoëfficiënt.

26 Toets van Spearman

Gegeven een reeks $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$, in de volgorde van verkrijging, genummerd $u_i = 1, 2, 3, \dots, N$. Gesteld, dat de rangnummers naar grootte zijn $r_i = 5, 1, 4, \dots, 3$ (als elke $x_i \neq x_j$, zijn dat weer de getallen $1, 2, \dots, N$).

Zij $d_i = u_i - r_i$; $i = 1, 2, \dots, N$.

Bereken $D = \sum d^2$. Onder H_0 (= aselechte steekproef) is

$$E(D) = 1/6 N(N^2-1) \text{ en } \sigma^2 = \frac{1}{36} N^2(N^2-1)(N+1), \text{ terwijl } 0 \leq D \leq 1/3 N(N^2-1), \text{ waarbij } D \text{ een symmetrische verdeling volgt.}$$

In Geigy (40, pg.66) vindt men een tabel. De tabel noemt de linker en rechter kritieke waarden D_L en D_R , waarvoor, onder H_0 ,

$IP[D \leq D_L] = IP[D \geq D_R] = 0.05, 0.025, 0.01, 0.005, 0.0005$ bij $N = 5(1) 199$. De waarden zijn exact voor $N \leq 10$, ook benaderd voor $N > 10$, als nl. D "beter normaal verdeeld is" (evenals de aanstonds te noemen r_s) voor toenemende N .

Uit D wordt de "Spearmanse rangcorrelatiecoëfficiënt" r_s afgeleid:

$$r_s = 1 - \frac{D}{1/6 N(N^2-1)}, \text{ waarvoor } -1 < r_s < +1. \text{ Er geldt:}$$

$$E(r_s) = 0 \text{ met } \sigma^2 = 1/(N-1)$$

Genoemde tabel noemt tevens het betrouwbaarheidsinterval van de theoretische ρ_s , begrensd door de linker- en rechter kritieke waarden $(r_s)_L$ en $(r_s)_R = -(r_s)_L$.

Getallenvoorbeeld $x = 18.2, 7.0, 4.5, 6.3, 10.8$; $N = 5$

$u =$	1	2	3	4	5
$r =$	5	3	1	2	4
$c =$		0	0	1	3, dus $T = 4$
$d =$	-4	-1	2	2	1, dus $D = 26$

Tabel geeft bij $\alpha = 0.05$ $D_L = 0, D_R = 40, \dots, 0 < 26 < 40$.

Verder $r_k = -0.20$ en $r_s = -0.30$; D, r_k en r_s zijn, tweezijdig

getoetst op 0.05, niet significant, en dus behoeft $H_0 =$ aselechte

ligging der 5 x'en, niet verworpen te worden.

Opm.: Als r_s berekend wordt uit een, uit een binormale verdeling getrokken, steekproef (waarin de populatiecorrelatiecoëfficiënt ρ is), dan geldt

$$\rho_s = \frac{6}{\pi} \text{bg} \sin \frac{1}{2} \rho$$

Men neemt daarom dikwijls ook de $\hat{\rho} = 2 \sin (1/6 \pi r_s)$.

Als $N \rightarrow \infty$, dan $r_s : r_k \rightarrow 3/2$, als ρ_s en ρ_k beide $\neq 0$ en niet te dicht bij 1 liggen. (lees in 48)

Keuze van verdelingsvrije aseletheids-toetsen, die met runs werken

Hoe meer men meent te weten van de alternatieve toets H_a tegen welke men de aseletheids nulhypothese H_0 toetst, hoe belangrijker is het de juiste toets te kiezen. Deze kennis mag daarbij niet voortgekomen zijn uitsluitend uit het materiaal, dat men aan de toets wil onderwerpen. Zo dit wel het geval is, is het oude materiaal voor detectie gebruikt en moet nieuw materiaal verzameld worden voor een nieuwe toetsing. Het is niet gemakkelijk richtlijnen voor de keuze van een aseletheids-toets op te stellen: het aantal randomness-toetsen is zo groot en van vele is het onderscheidend vermogen nog niet bekend. Voor een overzichtstabel, zie volgende blz.

Opmerkingen:

- 1) Cyclisch verloop: de runtoetsen op de waarnemingen zelf (alternatieven-indeling) verdienen de voorkeur boven die op de verschillen (op- en neerwaartse runs in de oorspronkelijke waarnemingen), omdat, als er een cyclische trend optreedt, met daarop nog een oscillatie, de eerste toetsen vrij ongevoelig zijn voor deze oscillatie.
- 2) Oscillerend verloop: als echter een oscillatie op een geleidelijke daling of stijging of op een cyclische trend gesuperponeerd is, dan is het beter de toetsen, die werken met o. en n. runs, toe te passen, want deze signaleren oscillaties goed.
- 3) Zoals gezegd: in de praktijk krijgt men vaak te maken met een typisch detectie probleem, d.w.z. met een waarnemingsreeks, waarvan men onderzoeken wil of er enig verloop (en zo ja, welk) optreedt. Als men de toets kiest op grond van het verloop, dat men waarneemt (of meent te zien) en dan deze uitvoert op een drempel α , dan is de werkelijke onbetrouwbaarheid (vanwege de in de keuze verborgen selectie) niet meer α . Wat dan wel?

Hier stuiten we op een mathematisch-statistisch zeer moeilijk probleem. De Jonge (46) raadt aan in zulke situaties zoveel mogelijk dezelfde toetsen (een drietal bijv.) in dezelfde volgorde toe te passen, ieder bij dezelfde α (zegge 0.05). Doordat er afhankelijkheid is tussen de drie toetsen, hoewel die afhankelijkheid "numeriek onbekend" is, is de simultane onbetrouwbaarheid onbekend, ofschoon gelegen tussen α en 3α .

Voor de praktijk is dit echter vaak voldoende, omdat de toetsing meestal dient om te komen tot een rationele beslissing inzake de geschiktheid van het waarnemingsmateriaal voor verdere bewerking.

Het volgende overzicht is uit De Jonge (46, pg.330).

27. Verdelingsvrije aseletheids-toetsen; $H_0 = \text{randomness}$; de nummers hebben betrekking op de toetsen.

H_a : er is „verloop” d.w.z. randomness is afwezig	toets			
	rangcorrelatie-toetsen	runtoetsen op waarna alternatieve indeling	runtoetsen op verschillen; op- en neerw.runs	plus-min-toets
	21, 22, 23, 24, 25, 26	1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, (21)	16, 17, 18, 19, 20	14
{ stijgend { dalend	pos. corr. neg. corr.	{ te { weinig { runs	{ te weinig o. { en n. — { runs	te veel plussen te weinig plussen
sprong { omhoog { omlaag	pos. corr. neg. corr.	{ te { weinig { runs		
cyclisch (lange cykels)		te weinig runs	te weinig o. en n. runs	
oscillatie (korte cykels)		te veel runs	te veel o. en n. runs	

Groep B, parametrisch, bekende populatie-verdeling

Subgroep B1

De populatie-verdeling is discontinu

Subgroep B2

De populatie-verdeling is continu

Bij subgroep B2 kunnen we denken aan een rechthoekige verdeling, normale verdeling, goodrich -verdeling etc. Bijna altijd worden deze verdelingen, terwille van de randomness-toetsen, in discontinu omgezet. Voorbeeld: kennen we μ en σ van de normale verdeling, dan kunnen we er een binomiale verdeling van maken door elke $x < \mu$ met A en elke $x > \mu$ met B aan te duiden ($p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$), maar ook bijv. door iedere $x < \mu + \sigma$ met A en iedere $x > \mu + \sigma$ met B aan te geven ($p_1 = 0.84$, $p_2 = 0.16$). Een trinomiaale verdeling laat zich maken a.v. iedere $x < \mu - \sigma$ heet A, elke $\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma$ heet B en elke $x > \mu + \sigma$ heet C. (nu $p_1 = p_3 = 0.16$ en $p_2 = 0.68$).

Het is duidelijk, dat daarom alleen subgroep B1 uitvoerig behandeld wordt. Voorbeelden:

- 1) elk der 92 dagen van de zomer 1967 was òf droog (zegge A) òf nat (B), te De Bilt. Gesteld, dat we uit een zeer groot grondmateriaal van vele jaren weten dat de kans op een droge dag (zegge < 1 mm) $p_1 = 0.33$ is en dus op een natte dag $p_2 = 1 - p_1 = 0.67$. H_0 : de A's en B's liggen at random.
- 2) gesteld, dat we weten, dat in zekere rij van cijfers 0,1, ...,9, indien onbeperkt groeiende, op de lange duur alle cijfers even frequent zijn. Nu hebben we met een 10-nomiale verdeling te doen, nl. $p_1 = p_2 = \dots p_{10} = 0,1$; H_0 : de 10 alternatieven 0,1 ...9 liggen aselect.

De nulhypothese H_0 , getoetst met de bij deze groep B behorende aselectheids-toetsen, luidt: de verkregen steekproef is het resultaat van een aselecte trekking uit een populatie met bekende parameters.

Zoals gezegd: de waarnemingen in de steekproef x_1, x_2, \dots, x_N worden eerst in alternatieven A, B of A, B, C enz. omgezet.

Dus verdelen we subgroep B1 in twee gevallen

geval a) $k = 2$, met òf $p_1 \neq p_2 \neq \frac{1}{2}$ òf $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$

geval b) $k \geq 3$, met òf $p_1 \neq p_2 = \dots \neq p_k = 1/k$ òf $p_1 = p_2 = \dots = p_k = 1/k$.

In elk dezer gevallen is òf $N =$ eindig òf $N \rightarrow$ oneindig.

Voor de definities van runs etc. zij verwezen naar subgroep A1.

Aantallen runs

geval a van subgroep B1; $k = 2$

Subgeval a1. $p_1 \neq p_2 \neq \frac{1}{2}$. (zegge p en q , met $p+q = 1$)

Voor formules zie bij Geigy (40, blz. 170.26) en Baur (26).

Eerst r_{Ai} = totale aantal A-runs ter lengte i .

$\mathbb{P}[r_{Ai} = a]$ = mij onbekend.

(28) $\mathcal{E}(r_{Ai}) = \mu = p^i q [(N-i-1)q+2]$ als $i < N$ en p^i als $i = N$
en

$$\sigma^2 = p^i q \left[N-i-1-(N-i-1)p \right] - \left[2Ni+N-3i^2+1 \right] \left[p^{2i}(1+p^4) \right] + 2 \left[4Ni+3N-6i^2-4i \right] \cdot p^{2i+1}(1+p^2) - 2(6Ni+6N-qi^2-12i-4) p^{2i+2} + 2(N-4i-3)p^{2i+3}(2-3p+p^2)/q$$

(voor $2 \leq i \leq 1/3N-1$; voor andere i mij onbekend).

Benaderd, als $p \ll \frac{1}{2}$, door $\sigma^2 \approx p^i q \left[N-i+1-(N-i-1)p \right] = p^i q \left[(N-i-1)q+2 \right]$

N.B. als $p \ll \frac{1}{2}$, dus $q \approx 1$, dan is r_{Ai} ongeveer poissons verdeeld.

Voor $r_i = r_{Ai} + r_{Bi}$ geldt:

$\mathbb{P}[r_i = a]$ = mij onbekend; $\mathcal{E}(r_i) = \mu = (N-i+1)p^2 q^2 (p^{i-2} + q^{i-2}) + 2pq(p^i + q^i)$.

Als bovendien $i \gg 1$ en $N \gg 1$, dan $\mu \approx N p^2 q^2 (p^{i-2} + q^{i-2})$.

Verder

$$\sigma^2 = (N-i+1) p^2 q^2 (p^{i-2} + q^{i-2}) + 2pq(p^i + q^i) - 2(N-2i-2)p^3 q^3 (p^{2i-3} + q^{2i-3}) - 6p^2 q^2 (p^{2i-3} + q^{2i-3}) - 4(N-i-1)p^3 q^3 (p^{i-2} + q^{i-2})(p^{i-1} + q^{i-1}) + (N-2Ni+3i^2-1)p^4 q^4 (p^{i-2} + q^{i-2})^2 - 4pq^2 (p^{i-1} + q^{i-1})^2 + \text{enz. Bij Baur (26).$$

Ook nu geldt: hoe groter de i en hoe groter N t.o.v. i , hoe meer is \underline{r}_i poissons verdeeld.

Vervolgens \underline{R}_{Ai}

(29) $\mathcal{P}[\underline{R}_{Ai} = a]$ mij onbekend. $\mathcal{E}(\underline{R}_{Ai}) = p^i [(N-i)q+1] = (N-i)p^i q + p^i$

Als $i \gg 1$, dan $(N-i)p^i q$.

Bovendien $\sigma^2 = (N-i)p^i q + p^i - (2Ni + N - 3i^2)p^{2i} q^2 - p^{2i} (1 + 2ipq)$,

als $2 \leq i \leq 1/3 N$ (voor andere i 's onbekend).

Voor $p \ll \frac{1}{2}$, dan $\mu \approx (N-i)p^i$ met $\sigma^2 = (N-i)p^i$.

Nemen we in het bijzonder $i = 1$, dus $\underline{R}_{A1} = \underline{R}_A$, dan geldt:

$\mathcal{P}[\underline{R}_A = a]$ = recursie formule, zie app. 9. Voor grote N is \underline{R}_A asymptotisch normaal verdeeld. Met $\mathcal{E}(\underline{R}_A) = \mu = p [(N-1)q+1]$
 $= Npq + p^2$ met $\sigma^2 = \mu(1-\mu) + (N-2)p^2 q [(N-3)q+2]$ *, zie (39), (36), (4).

Altijd: $0 \leq \underline{R}_A \leq \frac{1}{2}N(N = \text{even})$ of $0 \leq \underline{R}_A \leq \frac{1}{2}(N+1)(N = \text{oneven})$. Bijv. $N=6$

$\underline{R}_A = 0$ bij BBBBBB; $\underline{R}_A = 1$ bij AAAAAA; ... $\underline{R}_A = 3$ bij ABABAB

Nu de $\underline{R}_i = \underline{R}_{Ai} + \underline{R}_{Bi}$. \mathcal{P} onbekend.

$\mathcal{E}(\underline{R}_i) = (N-i)pq(p^{i-1} + q^{i-1}) + p^i + q^i$ met

$\sigma^2 = (N-i)pq(p^{i-1} + q^{i-1}) + p^i + q^i - 2(p^{2i-1} + q^{2i-1}) - 2(N-2i)pq(p^{2i-1} + q^{2i-1}) -$
 $(2Ni - 3i^2 + N - 2i)p^2 q^2 (p^{i-1} + q^{i-1})^2 + (p^i + q^i)^2 + 2(N-3i)pq(p^{i-1} + q^{i-1})(p^i + q^i)$
 als $2 \leq i \leq N/3$

In het bijzonder $\underline{R} = \underline{R}_1 =$ totale aantal A- en B runs, alle lengten i .

\mathcal{P} onbekend; $\mathcal{E}(\underline{R}) = \mu = 2(N-1)pq + 1 = 2Npq + (p^2 + q^2)$ met

$\sigma^2 = 2pq [2\{N - (3N-5)pq\} - 3] = 2pq [2N(1-3pq) - (3-10pq)]$ Zie Kuipers (36)

* In (36) wordt dit herleid tot $pq [2(N-2)p^2 - (N-3)pq + Nq^2]$, wat voor $N \rightarrow \infty$ overgaat in $Npq(p - pq + q) = Npq(1-3pq)$.

Al deze formules eisen, voor vele i -waarden ($i = 1, 2, 3, \dots$), veel rekenwerk, en voor μ en σ^2 .

Gelukkig worden ze eenvoudiger voor grote N (mits $N \gg i$)

Immers dan is:

$$(28a) \quad \mu = \mathcal{E}(\underline{r}_{Ai}) \rightarrow Np^i q^2 \text{ met } \sigma^2 \rightarrow \mu \left[1 - p^i q^2 \left\{ 2\left(i - \frac{p}{q}\right) + 1 \right\} \right]$$

en

$$(29a) \quad \mu = \mathcal{E}(\underline{R}_{Ai}) \rightarrow Np^i q \text{ met } \sigma^2 \rightarrow \mu \left[1 - p^i q (2i+1) \right]$$

en

$$\mu = \mathcal{E}(\underline{R}_A) \rightarrow Npq \text{ met } \sigma^2 \rightarrow \mu [1 - 3pq]$$

Verder

$$\mu = \mathcal{E}(\underline{r}_i) \rightarrow N(p^i q^2 + p^2 q^i) \text{ met } \sigma^2 \rightarrow ?$$

en

$$\mu = \mathcal{E}(\underline{R}_i) \rightarrow Npq(p^{i-1} + q^{i-1}) + p^i + q^i$$

met

$$\sigma^2 \rightarrow ?$$

en, in het bijzonder,

$$\mu = \mathcal{E}(\underline{R}_1) = \mathcal{E}(\underline{R}) \rightarrow 2Npq + 1 \rightarrow Npq \text{ met } \sigma^2 \rightarrow 2\mu(1 - 3pq).$$

Zie ook (11a)

subgeval a2, d.i. $p = q = \frac{1}{2}$.

Er komt

$$(30) \quad \mathcal{E}(\underline{r}_{Ai}) = \frac{N-i+3}{2^{i+2}}; \text{ heet wel: formule van Gold, lees (29); d.i.}$$

als $N \rightarrow \infty$, dan $\mathcal{E} \rightarrow N/2^{i+2}$ en

$$\sigma^2 = \frac{N}{2^{i+2}} \left(1 - \frac{2i-1}{2^{i+2}} \right), \text{ d.i. als } N \rightarrow \infty, \text{ dan } \sigma^2 \rightarrow N/2^{i+2}$$

Verder

$$\mathcal{E}(\underline{r}_i) = \frac{N-i+3}{2^{i+1}}, \text{ d.i. als } N \rightarrow \infty, \text{ dan } \mathcal{E} \rightarrow N/2^{i+1},$$

met

$$\sigma^2 = \text{substitueer } p = q = \frac{1}{2} \text{ in (29)}$$

Verder

$$(31) \quad \mathcal{E}(\underline{R}_{Ai}) = \frac{N-i+2}{2^{i+1}}, \text{ d.i. als } N \rightarrow \infty, \text{ dan } \mathcal{E} \rightarrow N/2^{i+1}$$

met

$$\sigma^2 = \frac{N(1-2i)-4i+3i^2}{2^{i+2}}, \text{ d.i. als } N \rightarrow \infty, \text{ dan } \sigma^2 \rightarrow N/2^{i+2}$$

En als $i = 1$, dus $\underline{R}_{Ai} = R_A$, dan

$$(32) \quad \mathcal{E}(\underline{R}_A) = \frac{N+1}{4}, \text{ d.i. als } N \rightarrow \infty, \text{ dan } \mathcal{E} \rightarrow \frac{1}{4} N.$$

met

$$\sigma^2 = \frac{N+1}{16}, \text{ d.i. als } N \rightarrow \infty, \text{ dan } \sigma^2 \rightarrow (1/16) N$$

Voorts

$$(33) \quad \mathcal{E}(\underline{R}) = \frac{1}{2}(N+1), \text{ d.i. als } N \rightarrow \infty, \text{ dan } \mathcal{E} \rightarrow \frac{1}{2}N, \text{ met}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{4}(N-1), \text{ d.i. als } N \rightarrow \infty, \text{ dan } \sigma^2 \rightarrow \frac{1}{4}N$$

Let wel: 1) $\mathcal{E}(\underline{R}) = \mathcal{E}(\underline{R}_A) + \mathcal{E}(\underline{R}_B) = 2 \mathcal{E}(\underline{R}_A)$, doch

$$\sigma^2(\underline{R}) \neq \sigma^2(\underline{R}_A) + \sigma^2(\underline{R}_B) = 2 \sigma^2(\underline{R}_A), \text{ daar } \underline{R}_A \text{ en } \underline{R}_B$$

gecorrleerd zijn!

2) \underline{R} is binomiaal verdeeld: $\binom{N-1}{R} (\frac{1}{2})^{N-1}$ Zie ook Ludwig (33).

De formules hebben tot doel om de in de waarnemingsreeks gevonden frequentieverdeling der runs, naar alternatief (A, B) en naar lengte ($i = 1, 2, \dots$), te vergelijken met die welke men theoretisch gemiddeld verwachten kan, gesteld dat men p en $q = 1-p$ zou kennen en dat de steekproef aselekt is.

Men telt r_{Ai} , $i = 1, 2, \dots$ en berekent $\mathcal{E}(\underline{r}_{Ai})$, en $\sigma(\underline{r}_{Ai})$, zie (28) of (28a).

Ook R_A en $\mathcal{E}(\underline{R}_A)$, zie (29) en (29a).

Twee procedures:

a) $\chi^2 = (\text{geteld} - \mathcal{E})^2 : \mathcal{E}$, in elk der k klassen. Vervolgens wordt $\sum \chi^2$ (sommatie over k klassen) op bijv. 0.05 getoetst bij k g.v.v. (N.B. hier niet k-1 nemen).

Zorg, dat iedere klasse een theoretisch aantal $\mathcal{E}(r_{Ai}) \geq 5$ heeft.

b) Vergelijk elke r_{Ai} met \mathcal{E} via σ en de R_A met \mathcal{E} via σ

Maak een tabel a.v.

i	aantal A-runs				B-runs	alle runs
	geteld G		theor. T	$\chi^2 = (G-T)^2 : T$		
1	$r_1 =$	$1 \times r_1 =$	$\mathcal{E}_1 =$	$\sigma_1 =$	$1 \times \mathcal{E}_1 =$	
2	$r_2 =$	$2 \times r_2 =$	$\mathcal{E}_2 =$	$\sigma_2 =$	$2 \times \mathcal{E}_2 =$	
3	$r_3 =$	$3 \times r_3 =$	$\mathcal{E}_3 =$	$\sigma_3 =$	$3 \times \mathcal{E}_3 =$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
k	$r_k =$	$k \cdot r_k =$	$\mathcal{E}_k =$	$\sigma_k =$	$k \cdot \mathcal{E}_k =$	
alle	$R_A =$	N_A	\mathcal{E}	σ	$N \cdot p$	$\sum \chi^2$

De bestudeerde steekproef bevat N_A A's, N_B B's; $N = N_A + N_B$. De bij de formules voor \mathcal{E} en σ gebruikte p kent men op theoretische gronden (d.i. volgt niet enkel uit de steekproef), zodat meestal $R_A \neq \mathcal{E}(R_A)$ en $N_A \neq Np$.

N.B. Indien p geschat wordt uit de steekproef zelf, zegge \hat{p} , gebruik dan deze \hat{p} in de formules voor \mathcal{E} en σ^2 en toets $\sum \chi^2$ op 0.05 bij k-1 g.v.v. Er zijn verschillende schattingen. De "maximum likelihood"-

schatting is $\hat{p}_1 = 1 - \frac{R_A}{N_A}$; een tweede is $\hat{p}_2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{R_A}{N}}$, volgende

uit $R_A = N\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)$, een derde is $\hat{p}_3 = N_A/N$, volgende uit $N_A = \hat{p}_3 \cdot N$.

Alleen voor \hat{p}_2 geldt $\sum (\mathcal{E}_{r_{Ai}}) = N\hat{p}_2(1-\hat{p}_2) = R_A$, zodat dan de kolomsommen in G en T gelijk zijn. Voor \hat{p}_1 en \hat{p}_3 zijn deze kolomsommen ongelijk. De \hat{p}_1 en \hat{p}_3 zijn zuivere schattingen van p; \hat{p}_2 niet. (de onzuiverheid is echter gering als p klein is).

Stelling: gemiddeld liggen er in een N-reeks (een aselechte steekproef getrokken uit een binomiale verdeling, waarin p de kans op A en $q = 1-p$ de kans op B is) $\mu_i = N p^i q^2$ A-runs van lengte i. Dus $\log \mu_i = \log(N q^2) + i \log p$, zijnde van de vorm $y = \alpha + \beta x$.

Zet $\log G_i$ uit tegen i. Indien de punten "redelijk lineair" liggen (dit toetsen, zo nodig), schat dan $\hat{\alpha}$ en $\hat{\beta}$ en daarmee \hat{p} uit $\hat{\beta} = \log \hat{p}$ en \hat{q} uit $\hat{\alpha} = \log N \hat{q}^2$; ga na of $\hat{p} + \hat{q} = 1$ is.

Runlengten zelf

De N-reeks bevatte N_A A's en N_B B's (bekende trekkingskansen p en $q = 1-p$). Er zijn r_{Ai} A-runs van lengte i; in totaal R_A A-runs.

Analoog r_{Bi} en R_B . Zij $f_{Ai} = r_{Ai}/R_A$. Voor gegeven p, N zijn $r_{Ai}, R_A, r_{Bi}, R_B, f_{Ai}, f_{Bi}$ alle stochastisch. Er geldt

$E(R_A) = \sum E(r_{Ai})$, maar $\sigma^2(R_A) \neq \sum \sigma^2(r_{Ai})$. Als $N \rightarrow \infty$ dan $\lim E(f_{Ai}) \rightarrow \lim E(r_{Ai})$: $\lim E(r_{Ai}) = p^{i-1} q$. Dit betekent dat de kans op een A-run van lengte i gelijk aan $\mathbb{P}[i = i] = p^{i-1} q$ is.

(34) Naar behoren is $\sum \mathbb{P} = 1$. Verder $E(i) = 1/q$ en

$$\sigma^2(i) = p/q^2, \mu_3(i) = p/q^2 \text{ etc. Altijd } E(i_A) + E(i_B) = \frac{1}{pq} \gg 4.$$

Indien $p = q = \frac{1}{2}$, dan $\mathbb{P}[i = i] = 2^{-i}$; $E(i) = 2$; $\sigma^2(i) = 2$; $\mu_3 = 2$.

Geval b van subgroep B1; $k \geq 3$

subgeval b1

$p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq \dots p_k \neq 1/k$ (alternatieven A_1, A_2, \dots, A_k met optreekansen p_1, p_2, \dots). $\sum p_i = 1$. Zij $q_i = 1-p_i, i = 1, \dots, k$

Eerst r_{Ai} = aantal A_1 -runs van lengte i.

(35) $\mathbb{P}[r_{Ai} = a] = \text{mij onbekend}; \mu = E = p_1^i q_1 [(N-i-1)q_1 + 2]$

met $\sigma^2 =$ zie onder 2 alternatieven, waar men p en q vervange door p_1 en q_1 .

Voor $N \rightarrow \infty$ gaat $E \rightarrow N p_1^i q_1^2$ en $\sigma^2 \rightarrow N p_1^i q_1^2 [1 - p_1^i q_1 \{ 2(i - \frac{p_1}{q_1}) + 1 \}]$

Voorts

voor \underline{R}_{Ai}

\underline{IP} = onbekend; $\underline{E} = (N-1)p_1^i q_1 + p_1^i$ en σ^2 , zie onder 2 alternatieven.

Verder voor $\underline{R}_{A_1} = \underline{R}_{A_1,1}$

$$(36) \quad \underline{E}(\underline{R}_{A_1}) = p_1 q_1 (N-1) + p_1 \text{ met } \sigma^2 = N p_1 (1-4p_1+6p_1^2-3p_1^3) + p_1^2(3-8p_1+5p_1^2)$$

$$(36a) \text{ Als } N \rightarrow \infty, \text{ dan } \underline{E}(\underline{R}_{A_1,i}) \rightarrow N p_1^i q_1, \text{ met } \sigma^2 \rightarrow \underline{E} \cdot [1 - p_1^i q_1 (2i+1)]$$

en

$$\underline{E}(\underline{R}_{A_1}) \rightarrow N p_1 q_1 \text{ met } \sigma^2 \rightarrow \underline{E} \cdot [1 - 3p_1 q_1]$$

Nu nog voor $\underline{R} = \underline{R}_{A_1} + \underline{R}_{A_2} + \dots + \underline{R}_{A_k}$

$$(37) \quad \underline{E}(\underline{R}) = (N-1) \sum_{j=1}^k p_j q_j + 1, \text{ met } \sigma^2 = \text{onbekend.}$$

$$(37a) \text{ Als } N \rightarrow \infty, \text{ dan } \underline{E}(\underline{R}) \rightarrow N(1 - \sum p_j^2) \text{ en } \sigma^2 \rightarrow N \left[\sum p_j^2 + 2 \sum p_j^3 - 3(\sum p_j^2)^2 \right]$$

Zie (35) en (11a).

Subgeval b2

$p_1 = p_2 = \dots = p_k = \frac{1}{k}$, zegge p ; $q = 1-p$

Voor \underline{r}_{Ai} (de index 1 in A_1 gemakshalve weglatende)

$$(38) \quad \underline{E}(\underline{r}_{Ai}) = \frac{(N-i)(k-1)^2 + (k^2-1)}{k^{i+2}}; \sigma^2 \text{ zeer lastig.}$$

$$(39) \quad \underline{E}(\underline{R}_{Ai}) = \frac{(N-i)(k-1)}{k^{i+1}} + \frac{1}{k^i}; \sigma^2 \text{ lastig.}$$

$$(40) \quad \underline{E}(\underline{R}_A) = \frac{(N-1)(k-1)}{k^2} + \frac{1}{k}; \sigma^2 \text{ lastig.}$$

$$(38a) \text{ Als } N \rightarrow \infty, \text{ dan } \mathcal{E}(\underline{R}_{Ai}) \rightarrow \frac{N(k-1)^2}{k^{i+2}}; \text{ als } k \rightarrow \infty, \text{ dan } \mathcal{E} \rightarrow \frac{N}{k^i}$$

$$(39a) \mathcal{E}(\underline{R}_{Ai}) \rightarrow \frac{N(k-1)}{k^{i+1}}; \text{ als } k \rightarrow \infty, \text{ dan } \mathcal{E} \rightarrow N/k^i \text{ en } \sigma^2 \rightarrow \frac{N(k-1)}{k^{i+1}} \rightarrow N/k^i$$

en

$$(40a) \mathcal{E}(\underline{R}_A) \rightarrow \frac{N(k-1)}{k^2} = Npq \text{ en } \sigma^2 \rightarrow \frac{N(k-1)}{k^2} = Npq$$

Tenslotte voor $\underline{R} = \underline{R}_{A_1} + \underline{R}_{A_2} + \dots + \underline{R}_{A_k}$

$$IP[\underline{R} = R] = \binom{N-1}{R-1} \left(\frac{1}{k}\right)^{R-1} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{N-R} \text{ met}$$

$$(41) \mathcal{E}(\underline{R}) = (N-1)\left(1 - \frac{1}{k}\right) + 1 \text{ met } \sigma^2(\underline{R}) = (N-1) \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Als $N \rightarrow \infty$, dan

$$(41a) \mathcal{E}(\underline{R}) \rightarrow N\left(1 - \frac{1}{k}\right) = Nq \text{ met } \sigma^2(\underline{R}) \rightarrow \frac{N}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = Npq$$

Als nu ook nog $k \rightarrow \infty$, dan

$$\mathcal{E}(\underline{R}) \rightarrow Nq \approx N \text{ met } \sigma^2(\underline{R}) \rightarrow Nq \approx N.$$

Voorbeeld: men onderzoekt het totale aantal runs van de cijfers 0,1, 2, ..., 9 in de decimale ontwikkeling van π , bijv. in de eerste 10.000 decimalen. Hier $k = 10$ en zij $p_1 = \dots p_{10} = 0,1$; $N = 10.000$;

$$\mathcal{E}(\underline{R}) = 0,9 N = 9000; \sigma^2(\underline{R}) = 0,1 \cdot 0,9 N = 900. \sigma \approx 30.$$

Onder de nulhypothese (aselecte ligging der cijfers) zal met 95% betrouwbaarheid R moeten liggen in $9000 \pm 2 \times 30$, d.i. $8940 \leq R \leq 9060$.

Subgroep B2. Deze wordt teruggebracht tot subgroep B1, zie blz. 31.

5. Numerieke toepassingen

Wij geven in dit hoofdstuk vele numerieke voorbeelden van toepassing der behandelde toetsen. De voorbeelden zijn gedeeltelijk uit de praktijk, gedeeltelijk pure fantasie. Zij hebben betrekking op allerlei gebieden.

1. Fantasie: de droge dagen (A) en natte dagen (B) in de zomer 1967 lagen a.v. AAABBBAAA.....B, waarin $N_A = 32$ en $N_B = 60$, $N = 92$. Men telt in totaal $R = 25$ runs. Is dat te rijmen met $H_0 =$ aselechte ligging van deze A's en B's? Gebruik toets (3). Daar N hier groot is, mag, onder H_0 , de R als normaal verdeeld beschouwd worden, om een gemiddelde

$$\mu = 2 N_A N_B / N + 1 = 42.7 \text{ en met } \sigma = \sqrt{(\mu-1)(\mu-2)/(N-1)} = 4.3.$$

Daar we door persistentie te weinig runs mogen verwachten, toetsen we linkszijdig op 0.05 en verwerpen we H_0 als $[|R - \mu| - \frac{3}{2}] : \sigma > 1.645$. Hier is dit quotient $16.2 : 4.3 = 3.8 > 1.645$. Concl.: H_0 verwerpen tegen persistentie.

2. Overgenomen uit Hald (22)

In zeker experiment werden twee hoeveelheden van dezelfde vloeistof in een mengapparaat gedaan; de lager liggende hoeveelheid bevatte zekere component in een hoge concentratie; de andere hoeveelheid bevatte deze component in een lage concentratie. Na een lange tijd van menging werd de vloeistof afgetapt door een kraan in de bodem van het toestel en werden er $N = 58$ monsters na gelijke tijdsintervallen afgenomen, die alle op de concentratie van bedoelde component geanalyseerd werden. De concentraties (in een of andere eenheid) waren 38, 33, 29, 16, 44, 21, 16, 17, 19, 1, 22, 28, 22, 14, 7, 13, 21, 15, 34, 23, 15, 19, 32, 24, 14, 13, 22, 8, 30, 11, 15, 24, 26, 14, 11, 25, 17, 10, 19, 5, 6, 16, 7, 10, 1, 5, 2, 8, 14, 14, 15, 16, 13, 11, 9, 11, 19, 21. Het probleem is te onderzoeken of de menging volledig was (nulhypothese H_0). De alternatieve hypothese H_a houdt in dat de menging onvolledig was, waardoor in de reeks der monsteranalyses in het begin de concentraties hoger zullen zijn dan tegen het einde (een dalende trend met daarop onregelmatigheden o.a. wegens meetfouten). We passen de mediaan-run-toets toe, zie formules (5), (6), (7) en vergelijken de r_{Ai} met $C(r_{Ai})$, via $\sigma(r_{Ai})$, bijv. voor $i = 1, 2, 3, 4, \geq 5$.

De m_e = mediaan ligt tussen 15 en 16. Een concentratie $> m_e$ heet A en $< m_e$ heet B (resp. b_o - en b_e -mediaan). We krijgen de volgende tabel

$N = 58$; $m = \frac{1}{2} N = 29$; aantallen mediaanruns

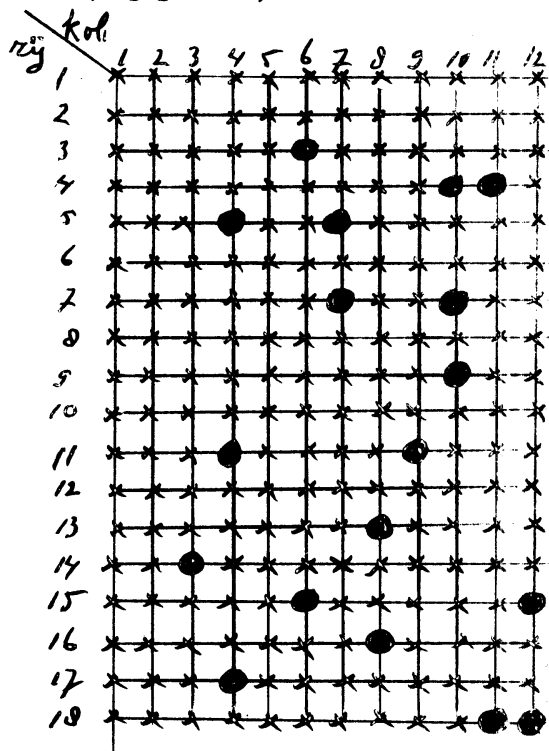
run lengte i	r = geteld			ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ
	b_o	b_e	beide	b_o		b_e		beide	
1	5	6	11	7.6	2.48	7.6	2.48	15.2	
2	4	4	8	3.8	1.79	3.8	1.79	7.6	
3	1	2	3	1.9	1.14	1.9	1.14	3.8	
4	1	0	1	0.9	0.85	0.9	0.85	1.8	
≥ 5	1	1	2	0.8	0.71	0.8	0.71	1.6	
alle	12	13	25	15.0	1.92	15.0	1.92	30.0	3.8
	A	B		A		B		A, B	

Het blijkt dat N niet voldoende groot is om zinnig per i een vergelijking tussen r_i en $E(r_i)$ te kunnen maken; de $\sigma(r_i)$ zijn te groot. (De exacte kansverdelingen van r_i zijn moeilijk; zij zijn zeker niet normaal!). Dus kijken wij naar het totale aantal R_A b_o -runs (12) en het totale aantal R_B b_e -runs (13) en $R = R_A + R_B = 25$. Zou de bovengencemde alternatieve hypothese waar zijn, dan mag men een R kleiner dan die onder H_0 verwachten. Wij constateren inderdaad, dat $R_A = 12 < E(R_A) = 15$ en $R_B = 13 < E(R_B) = 15$ en $R = R_A + R_B = 25 < E(R) = 30$.

Daar $\sigma(R_A) = 1.92$, is $|R_A - E(R_A)| : \sigma_A = 3 : 1.92 = 1.57 < 1.64$, en evenzo $|R - E(R)| : \sigma_R = 5 : 3.8 = 1.32$, waarin 1.64 de 5% significantiedrempel voorstelt. Zodat de afwijkingen niet significant zijn en H_0 niet verworpen behoeft te worden.

De twee m_e -runs, beide langer dan 4, hebben lengte 9. Formule (8b) leert, invullende $N = 58$, dat $k_{0.05} \cong 3.3 (\log 58 + 1) = 9.1$. Derhalve moet op grond van de lengte van de langste run toch "bijna de H_0 worden verworpen" (op 0.05 basis). De eindconclusie moge derhalve luiden, dat waarschijnlijk het mengapparaat niet volledig mengt. Aanvullende metingen zijn dus zeer gewenst.

3. Oostwijn Botjes (2) publiceerde een figuur, waarin we $N_A = 18$ gezonde planten zien liggen tussen $N_B = 198$ zieke in het volgende patroon (x ziek; ● gezond) van $18 \times 12 = 216$ plaatsen³⁾.



Vraag: liggen de gezonden planten aselekt? (een vraag, die Oostwijn Botjes niet stelde). Hoewel we hier een randomness-toets in twee dimensies behoren te kiezen, willen we, louter illustratief, volstaan met 7 keer een aseletheids-toets langs de rechte lijn (kolommen in de figuur) toe te passen.

Zie de toets (3), waarbij in elke kolom het aantal R x - en ●-runs geteld wordt. Toepassing is natuurlijk slechts zinvol in die kolommen, waarin het aantal gezonde planten tenminste 2 is (kol. 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12). We behoeven de kansen zelf niet met de formules in (3) te berekenen. Uit de tabel bij o.a. de Jonge (45) lezen we R^* af (enkelzijdig werkende bij 0.05), betekende, dat H_0 moet verworpen worden als $R = 2, 3, \dots, R^*$.

Conclusie: in alle kolommen liggen de gezonde planten volkomen aselekt. We kunnen ook de kolommen achter elkaar leggen, d.w.z. de 2e kolom achter de 1e, de 3e achter de 2e, etc., waardoor een reeks van 216 planten ontstaat, waaronder er $N_A = 18$ gezond en $N_B = N - N_A = 198$

³⁾ Geen vergissing! Men leze bij Botjes hoe het komt dat hier merendeels zieke planten in het veld lagen.

ziek zijn. Men telt $R = 37$ A- en B- runs.

Onder H_0 is $ER = 2 \frac{N_A N_B}{N} + 1 = 34.0$ met $\sigma = 2.15$. Clustering = groepjesvorming (de alternatieve hypothese) zou tot kleine R leiden (kleinst: $R = 1$). Hier is echter $37 > 34.0$. Er blijkt ook aldus niets van "clustering"[‡]).

kol.	N_A	N_B	R	ER	$\sigma(R)$	$R^{\#}$
1	18	0	-	-	-	
2	18	0	-	-	-	
3	17	1	3	-	-	
4	15	2	7	6.0	1.08	3
5	18	0	-	-	-	
6	16	2	5	4.6	0.74	2
7	16	2	5	4.6	0.74	2
8	16	2	5	4.6	0.74	2
9	17	1	3	-	-	
10	15	3	7	6.0	1.08	3
11	16	2	4	4.6	0.74	2
12	16	2	4	4.6	0.74	2

4. Voorbeeld uit Crow, David, Maxfield (39).

Vijf mengsels, alle glucose bevattende, worden aan zichzelf overgelaten gedurende in totaal 36 weken. Iedere 4e week meet men in elk dezer 5 mengsels de glucose-concentratie. Het gemiddelde heet x . Aldus beschikt men over de reeks $x_1 = 43.14$ $x_2 = 42.16$ $x_3 = 45.00$
 $x_4 = 44.0$ $x_5 = 47.86$ $x_6 = 48.15$ $x_7 = 50.10$ $x_8 = 49.05$ en
 $x_9 = 50.15$; $N = 9$. Men wenst op 0.05 basis te toetsen of de glucose (hyp. H_a) concentratie in de tijd toeneemt. Dit kan o.a. met de toets van Neumann, zie formule (21). H_0 luidt: de getallen liggen aselekt. Er komt $\bar{x} = 46.6$, zodat $K = \frac{\sum_{i=1}^9 (x_{i+1} - x_i)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{311247}{758454} = 0.41$.

‡ Ons betoog is natuurlijk zwak: men mag randomness in twee dimensies niet equivalent zien aan randomness-situatieslangs evenwijdige dwarsdoorsneden. Intussen is in dit voorbeeld ook aseleetheid langs de rijen aanwezig, zodat daarmee de randomness in twee dimensies toch "verzekerd" is. Omgekeerd wijst men randompunten in twee dimensies aan door de coördinaten ervan random te kiezen. Het is hier niet de plaats om dieper in te gaan op de relatie tussen randomness in een ruimte van n dimensies tot "randomnesses" in deelruimten van minder dan n dimensies.

Voorts is, onder H_0 , $E(\underline{K}) = 2$ en $\sigma(\underline{K}) = 2 \left[\frac{N-2}{N^2-1} \right]^{\frac{1}{2}} = 0.67$. Daar N hier nog niet zo groot is, dat \underline{K} ongeveer normaal verdeeld is, moet de exacte tabel geraadpleegd worden, zie o.a. (11) en (39, pg. 250).

Deze leert: $\mathbb{P}[\underline{K} < 1.02] = 0.05$ (éénzijdig toetsend!), zodat $\mathbb{P}[\underline{K} < 0.41] \ll 0.05$ en H_0 moet worden verworpen tegen H_a , dat de glucose concentratie in de loop van de tijd stijgt. Voor meer voorbeelden, zie bij Mosteller (6).

5. Voor elke maand uit een tijdvak van 100 jaren te De Bilt werd de gemiddelde etmaaltemperatuur T berekend. Aldus ontstonden 100 T -waarden voor januari met gemiddeld \bar{T}_1 en standaarddeviatie s_1 ; 100 T 's voor februari met \bar{T}_2 en s_2 , etc. Elk der 100 T_i -waarden voor januari werd gestandaardiseerd tot $(T_i - \bar{T}_1) : s_1$; zo ook voor februari, maart etc. Zo ontstonden $100 \times 12 = 1200$ y 's : $y_1, y_2, \dots, y_{1200}$; iedere y stamt aldus uit een (in benadering normale) verdeling met gemiddelde 0 en standaarddeviatie 1; de reeks heet dus stationair. Men zoekt de toppen en dalen op en berekent de gemiddelde golflengte: $\bar{L} = 3.1$. Volgens de theorie, zie toets (17), is, onder H_0 (aselecte ligging der y 's), $E(\bar{L}) \cong 3.0$, met $\sigma(\bar{L}) = 0.75$. De gemeten $\bar{L} = 3.1$ verschilt zo weinig van $E(\bar{L}) \cong 3.0$, dat H_0 niet verworpen behoeft te worden: de reeks gestandaardiseerde T 's is prachtig random. Standaardisatie vooraf was hier een essentiële eis. Zie Levert (47)

6. Drs. van Galen bedacht een methode om met de computer een naar believen lange reeks getallen te maken, die aselecte stekingen uit een standaardnormale verdeling zouden voorstellen. Er vallen dus twee dingen te toetsen: 1e komen de getallen inderdaad uit $N(0; 1)$? 2e liggen ze in aselecte volgorde? Alleen de tweede vraag wordt hier besproken; de beantwoording mag geen gebruik maken van de uitkomst van de eerste vraag. Wij verkeren in ons schema (blz.4a) dus in het geval groep A, subgroep A2 en passen toe de toetsen (14a), (23), (15), (16), (17). De reeks onderzochte getallen was $x_1 = -0.35, x_2 = -0.62, \dots, x_{5000} = +0.37; N = 5000$.

Toets (14a) telt 4999 tussentermverschillen en wel $a_+ = 2486$ positieve en $a_- = 2513$ negatieve. Onder H_0 is a_+ ongeveer normaal verdeeld, rondom een gemiddelde $\mu = \frac{1}{2}(N+1) = 2499.5$ met $\sigma = \sqrt{\frac{1}{12}(N+1)} = 20.4$.

Aangezien het quotient $|a_+ - \mu|/\sigma = 0.66$ beneden de 5% significantiedrempel 2 ligt, behoeven we H_0 niet te verwerpen.

Toets (23)

We lieten de autocorrelatiecoëfficiënten van de orden 1 t/m 10 berekenen.

Er kwam $r_1 = -0.0034$, $r_2 = +0.0055$, $r_3 = +0.0058$, $r_4 = +0.0047$,
 $r_5 = +0.0057$, $r_6 = +0.0208$, $r_7 = +0.0012$, $r_8 = +0.0049$, $r_9 = -0.0087$,
 $r_{10} = -0.0024$. Onder H_0 heeft elke r_j ($j = 1, 2, \dots$) een verwachtings-
 waarde $\frac{-1}{N-1} = -0.0002$ en ligt r_j met 95% kans tussen $\frac{-1}{N-1} \pm 2 \frac{1}{N-1}$,
 d.i. in het interval -0.0285 tot $+0.0281$. Dit blijkt inderdaad elke ge-
 meten r te doen. Bijgevolg behoeft H_0 niet verworpen te worden.

Toets (15) Toppen, dalen

Er waren $N_K = 3306$ keerpunten, verdeeld over $N_T = 1653$ toppen en
 $N_D = 1653$ dalen. Onder H_0 geldt $\mu = E(N_T) = E(N_D) = 1/3 (N-2) = 1666$
 met $\sigma \approx \sqrt{N}/4.8 = 14.7$. Aangezien het quotient $|1653 - 1666| : 14.7 =$
 0.88 kleiner dan 2, d.i. de 0.05 significantiedrempel, is, behoeven wij
 H_0 niet te verwerpen.

Toets (16) Wallis en Moore

We maakten eerst een tabel van de aantallen plus- en min- fasen van
 alle voorgekomen lengten, waarna deze werd ingekort tot fasen, plus en
 min, van lengten 1, 2, ≥ 3 , om de X^2 -toets te kunnen toepassen.

aantal fasen						X^2
m = geteld					$\mu =$ theorie	$(m - \mu)^2 / \mu$
lengte f	plus	min	beide	f = beide		
1	1036	1025	2061	1 2061	2082.06	0.21
2	442	446	888	2 888	915.93	0.85
3	138	137	275	3 356	332.98	1.59
4	33	38	71			
5	4	5	9			
6	0	1	1			
alle	1653	1653	3305	alle 3305	3331.00	2.66

Ook zonder een numerieke toets valt de overeenkomst tussen m en μ op. In overeenstemming met het feit, dat $N_T < E(N_T)$, zie vorige toets, is natuurlijk het feit, dat de korte fasen minder voorkwamen dan gemiddeld onder H_0 het geval is (zie $2061 < 2082.06$ en $888 < 915.93$) en de lange meer. Daar de formule voor $\sigma^2(m(f))$ voor $f = 1, 2, \dots$ mij niet bekend is, zijn de verschillen niet per f op significantie te onderzoeken^{*)}, zodat we op de X^2 -toets over de gehele tabel aangewezen zijn. Er komt $X^2 = 2.66$, zodat $6/9 X^2 < 5.99$ (= 5% drempel). Conclusie: H_0 niet verwerpen, d.i. de x 'en liggen aselekt.

Toets (17) Gemiddelde \bar{f}

Het gemiddelde der 3305 faselengten was $\bar{f} = 1.51$. Onder H_0 is dit $E(\bar{f}) = 1.50$, terwijl $\sigma(\bar{f}) = 0.75$. De overeenkomst tussen \bar{f} en E is schitterend: H_0 niet verwerpen.

Mediaanrun-toets (5a), (6), (8b)

Tenslotte hebben we ook de mediaanrun-toets toegepast. Daarvoor werd een waarde g gekozen, die geen deel uitmaakte der 5000 x 'en, en wel zo, dat $N_A \cong N_B$ was, waarbij elke $x > g$ een A en elke $x < g$ een B heet; kies $g = 0.025$; $N_A = 2501$; $N_B = 2499$. Daar $N_A \neq N_B$ hebben we hier in strikte zin niet met mediaanruns te doen. Toch werden de formules voor aantallen me-runs gebruikt. Zie de toetsen (5a) en (6a). Geteld werden de aantallen r_{Ai} bovenmediaanruns (bo) van lengten $i = 1, 2, \dots, 10$; evenzo benedenmediaanruns (be).

i	aantal me-runs van lengte i				theorie		$X^2 = (r - \mu)^2 : \mu$
	r = geteld			$\mu =$ aantal		σ	
	A bo	B be	beide	A bo			
1	600	643	1243	600	624.8	17.7	0.99
2	321	322	643	321	312.5	12.5	0.23
3	171	151	322	171	156.3	9.9	1.37
4	74	77	151	74	78.2	8.3	0.23
5	38	39	77	38	39.1	6.7	0.03
6	23	16	39	23	19.6	5.2	0.59
7	10	6	16	10	9.8	4.0	0.00
8	3	3	6	3	4.9	2.9	0.74
9	2	1	3	2	2.4	2.1	0.07
10	1	0	1	1	1.2	1.5	0.03
alle	1243	1258	2501	1243	1248.8	17.7	4.28

^{*} Wel voor $f \geq 1$; dan $\sigma = \sqrt{(16N-29):60} = 36.5$, zodat 3305 niet significant van 3331.00 verschilt.

In de eerste plaats vergelijken we $R_A = 1243$ met $\mathcal{E}(R_A) = 1248.8$ in het licht van $\sigma = 17.7$. Daar $|1243 - 1248.8| : 17.7 = 0.40$ beneden de 5% significantie drempel 2 ligt, behoeven we H_0 niet te verwerpen. In de tweede plaats kunnen we bij elke i de r_{Ai} met $\mathcal{E}(r_{Ai})$ vergelijken, met $\sigma(r_{Ai})$ als maatstaf. Bijv. 600 met $\mathcal{E} = 624.8$ en $\sigma = 17.7$ of 321 met $\mathcal{E} = 312.5$ en $\sigma = 12.5$. Geen enkele r_{Ai} wijkt dan significant van $\mathcal{E}(r_{Ai})$ af.

In de derde plaats vergelijken we $X^2 = 4.28$ met de 5% X^2 -drempel bij 10 g.v.v., te weten 18.3. Daar $4.3 < 18.3$ behoeft men H_0 niet te verwerpen.

In de vierde plaats letten we op de lengte van de langste me-run; deze is 10. De run was een A-run. Toets (8b) zegt dat $1 - \exp(-N/2^{k+1}) = 1 - \exp(-5000/2^{11}) = 0.93$ de kans is om puur toevallig (d.i. onder H_0) een reeks van 5000 ongelijke getallen te trekken, waarin tenminste één bo-me-run is ter lengte ≥ 10 . Aangezien $0.93 \gg 0.05$ behoeft ook op basis van de lengte van de langste mediaanrun H_0 niet verworpen te worden (Dat zou pas nodig geweest zijn bij een lengte 3.3 ($\log 5000+1$) = 15.5, dus 16, althans op de 0.05 drempel).

7. De jaarlijkse landgemiddelden van de hoeveelheid neerslag in Nederland vormen een aselechte getallenreeks. We telden in een reeks van 103 successieve jaren een gemiddelde golflengte $\bar{L} = 3.1$ jaren, schitterend in overeenstemming van wat onder H_0 te verwachten is, te weten 3.0 ; toets (17). Zie Levert (47).

8. De jaarlijkse gemiddelde overdagtemperaturen te De Bilt (verkregen door ieder jaar het gemiddelde der 365 gemiddelde overdagtemperaturen te berekenen) vormen evenzo een aselechte reeks. We berekenden $\bar{L} = 2.9$. Zie Levert (47).

9. De kans om onder H_0 een reeks ^(van N) ongelijke getallen te verkrijgen, zodanig dat $x_1 > x_2 > \dots > x_N$ of $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ (d.i. dalend of stijgend), is $P_N = 2 \times \frac{1}{N!}$ (en niet $2 \times (\frac{1}{2})^N$).

Bij $N = 3$ is $P_N = 2 \times 0.107 = 0.334 > 0.05$

Bij $N = 4$ is $P_N = 2 \times 0.042 = 0.084 > 0.05$

Bij $N = 5$ is $P_N = 2 \times 0.0083 = 0.0176 < 0.05$

Men moet dus H_0 (= aselechte volgorde) verwerpen op 0.05 drempel in het geval men of een stijgende of dalende reeks krijgt, pas als $N \geq 5$.

En éénzijdig, dan bij $N \geq 4$.

10. Berlage (3) mat bij een aantal djatibomen (Java) de breedte der jaarlijkse ringen (411 jaren: 1519-1929). De trend in de jaarlijkse gemiddelde ringbreedten werd eerst geëlimineerd via een lopend 11 jarig gemiddelde. Na deze eliminatie bleven er 411 getallen over, die op aselechte ligging werden onderzocht door v.d. Bijl (27). Hij mat een gemiddelde top-top-afstand $\bar{L} = 3.32$. Deze waarde ligt meer dan $3\sigma = 3 \times 0.75$ verwijderd van $E(\bar{L}) = 3.0$, onder H_0 . Dus is de reeks niet random, doch bezit positieve correlatie = persistentie.

11. Het volgende voorbeeld is uit Crow, David, Maxfield (39).

Men wil de nulhypothese H_0 onderzoeken of de volgende gecodeerde gewichten van 20 kogels : 12, 14, 22, 21, 22, 23, 25, 27, 25, 38, 29, 10, 25, 30, 30, 28, 28, 30, 30, 28 in deze volgorde een random steekproef vormen, waarmee het gemiddelde gewicht in de populatie kan worden geschat.

Pas toetsen (6) en (7) toe door de metingen in twee alternatieven in te delen: elke meting < 26 heet A, elke > 26 heet B. $N_A = 10$; $N_B = 10$; $N = 20$. Tel het totale aantal me-runs: $R = R_A + R_B = 3 + 3 = 6$. We toetsen tweezijdig, omdat we niet aan een bepaalde alternatieve hypothese denken. De N is nog te klein om met een normale verdeling van R rondom een gemiddelde $\mu = \frac{1}{2} N + 1 = 11$, met $\sigma = \sqrt{\frac{N(N-2)}{4(N-1)}} = \sqrt{4.7} = 2.2$, te mogen rekenen. Raadpleeg dus een tabel, bijv. die in de Jonge (45; pg. 377). Deze tabel leert $IP[R \leq 6] = IP[R \geq 16] = 0.025 = \frac{1}{2} \cdot 0.05$. Daar de gemeten R juist buiten het interval 7 t/m 15 valt, moet H_0 , op 0.05 basis, verworpen worden.

12. Een voorbeeld over rivierafvoeren, bij Wemelsfelder (38),

De korte en lange runs van boven- en benedennormale natte maanden, ^{hoeveelheden neerslag} te Lobith (32 jaren = 384 maanden) bleken in overeenstemming met een random ligging der maandsommen te zijn. De reeks van boven- en ondernormale maandelijkse afvoeren van de Rijn bij Lobith echter niet (40 jr. = 482 maanden) ^{door Wemelsfelder}. Hier werden de toetsen (30) en (31) toegepast, zonder echter de E's en σ 's te berekenen en zonder de X^2 -toets uit te voeren. Voor de A en B-kansen werden gebruikt $p = 0.43$ resp. $q = 1-p = 0.57$, berekend uit een 41 jarig tijdvak, leverende $p = N_A : N = 214:492=0.444$ en

$q = N_B : N = 278 : 492 = \frac{10.564}{10.564 + 0.444 \cdot 10.564}$ Desal niettemin werden niet de toetsen (28) en (29), doch de toetsen (30) en (31) (met $N = \infty$) gebruikt, die op $p = q = \frac{1}{2}$ gebaseerd zijn*).

Aldus komt Wemelsfelder tot het volgende overzicht:

Aantal runs van boven- of ondernormale maandafvoeren te Lobith 1919-1950 ; $N_A = 213$ bovennormale en $N_B = 267$ benedennormale maanden		
runlengte	geteld	berekend ($p = q = \frac{1}{2}$; $N = 480$)
1	39	120
2	29	60
3	17	30
4	12	15
5	5	7.5
6	3	3.8
7	3	1.9
8	3	1.0
9	3	0.5
10	1	0.2
11	1	0.1
12	-	enz.
13	1	
14	-	
15	1	
16	1	
17	2	
18	1	
19	-	
20	-	
21	-	
22	-	
23	-	
24	-	
25	1	
26	-	
27	1	
alle	124	240 = 480/2

Wemelsfelder merkt op, dat de kolom "geteld" veel minder korte runs telt dan de kolom "berekend", terwijl omgekeerd lange runs meer optraden dan op grond van de nulhypothese $H_0 =$ aselechte ligging der maandafvoeren. Ook constateren we $124 < 240$. Beide feiten, mits "statistisch bewezen", indiceren een persistentie (in de woorden van Wemelsfelder: een "weerstand tegen verandering"). Een bewijs

* Met deze procedure kan ik het niet eens zijn en wel omdat p en q geschat zijn uit hetzelfde materiaal alsdat getoetst wordt en bovendien lijkt mij de vereenvoudiging tot $p = q \approx \frac{1}{2}$ te grof.

ontbreekt, doch is nauwelijks nodig. Hiertoe dient $R = 124$ vergeleken te worden met $E(R) = \frac{1}{2} N = 240$ op grond van $\sigma = \frac{1}{2} \sqrt{N} = 11.0$. De R is hier ongeveer normaal verdeeld, zodat R significant van $E R$ verschilt ($|124-240| : 11.0 = 10.6 \gg 2$).

Zoals gezegd: lange runs komen merkwaardig vaak voor. Hoe merkwaardig? Wij wijzen speciaal op de lengte 27 van de langste run, zijnde een run van ondernormale maanden. Is 27 "te lang" om met H_0 verenigbaar te zijn? Hier stuiten we op het probleem: gegeven $N_A = 213$ A's en $N_B = 267$ B's. Welke is de kans dat de reeks A's en B's, verkregen bij aselechte rangschikking van deze A's en B's, een constellatie levert met daarin tenminste één B-run ter lengte ≥ 27 ? Burr and Cane (43), zie blz 14, behandelden dit probleem voor langste B-runs ter lengte $L_B = 1, 2, 3, \dots$. De formules eisen ontzettend veel rekenwerk als L_B groot wordt (zegge ≥ 4).

Hoewel het strikt genomen verboden is, kunnen we nog formule (8b) toepassen en doen alsof we met mediaanruns te doen hebben ($N_A \cong N_B$; hier echter 214 resp. 278). Er is 5% kans op een reeks van $N^* = 10^{7.2}$ ongelijke getallen, zodanig gelegen, dat deze tenminste 1 B me-run bevat van lengte ≥ 27 . Dit enorme getal $10^{7.2}$ volgt uit $27 = 3.3 (\log N^* + 1)$. Dus kan de lengte 27 bij een $N = 480$ niet meer met H_0 begrepen worden.

13. De duitse "Lotto".

Iedere week komen 6 der 49 getallen 1, 2, ..., 49 uit. De deelnemer heeft dan al zijn 6-tal getallen, gekozen uit 1, 2, ..., 49, toegezonden. Zij worden vergeleken met die van Lotto zelf. Bij volledige overeenkomst der getallen (onverschillig de volgorde; bijv. 23, 7, 42, 5, 9 en 42, 9, 5, 23, 7): hoogste prijs. Komen 5 van de 6 getallen overeen: lagere prijs etc. De kans, dat a van de 6 getallen van de deelnemer met die van Lotto overeenkomen, is

$$K(a) = \binom{6}{a} \binom{43}{6-a} : \binom{49}{6} \text{ met } a = 0, 1, \dots, 6. \text{ We hebben}$$

$$K(0) = 0.430$$

$$K(1) = 0.413$$

$$K(2) = 0.133$$

$$K(3) = 0.018$$

$$K(4) = 0.00098$$

$$K(5) = 0.0000018$$

$$K(6) = 0.0000001$$

$$\text{som} = 1.0000000$$

$$\text{dus } K(\geq 1) = 0.570$$

$$K(\geq 2) = 0.157$$

$$K(\geq 3) = 0.024$$

$$K(\geq 4) = 0.006$$

$$K(\geq 5) = 0.0059$$

Let wel: $K(0)$ is bijna 50% !

Na afloop van ieder jaar worden de 52 (of 53) wekelijkse trekkingen bekend gemaakt. Wij bestudeerden de lijst van 1967. Eerste keer: 2,43,20,33,40,41;...; 53e keer 36,26,43,3,19,45. Deze lijst bevat dus 53 rijen (in eenzelfde rij verschillende getallen uit het interval $1 \leq x \leq 49$) en 5 kolommen (in eenzelfde kolom niet noodzakelijk verschillende getallen uit het interval $1 \leq x \leq 49$). We gaan hierop enige randomness toetsen toepassen.

Keerpunten en fasentoets (15) en (16)

In elk der 53 reeksen kan men toppen en dalen aanwijzen. Het aantal N_K keerpunten ligt in het interval $0 \leq N_K \leq 4$. Bij $N_K = 0$ en 1 zijn er geen fasen. Dit kwam 7 keer voor, d.w.z. er waren $53-7 = 46$ reeksen met $N_K \geq 2$. In elk dezer reeksen werd het aantal $m(f = 1)$ van fasen ter lengte 1 geteld; het schommelde tussen 0 en 3, om een gemiddelde 1.65. Onder H_0 (aselectiviteit) is dit 1.25. Er is geen significant verschil tussen 1.65 en 1.25.

We telden ook in alle reeksen het aantal $m(f = 2)$ fasen van lengte 2. Deze aantallen liepen uiteen tussen 0 en 1, met een gemiddelde 0.35, dat niet significant verschilt van het theoretisch gemiddelde 0.37. Daarna volgden de $m(f = 3)$'s. Deze waren er niet in 1967 (een voorbeeld met $m(f = 3) = 1$ zou zijn 14,45,22,21,15,17). Theoretisch is de verwachtingswaarde 0.44. De 0 verschilt niet significant van 0.44. Fasen, langer dan 3, kunnen er niet zijn. Letten we niet op de fase-lengten, dan liepen de 46 aantallen fase-^{lengten} uiteen tussen 0 en 3, rond een gemiddelde 1.58; theoretisch 1.67, met standaarddeviatie 0.86. Dan verschillen 1.98 en 1.67 niet significant.

Conclusie: in ieder der 53 reeksen is de volgorde aselect.

Alternatieven-toets (9), (10), (11), (12)

Nu de 6 kolommen. Alle kolommen zullen (kunnen) vele getallen in meervoud bevatten. Onze nulhypothese H_0 luidt nu, dat ieder der 7 kolommen het resultaat is van een aselecte trekking van 53 getallen, met teruglegging, uit een doos gevuld met de getallen 1 t/m 49 (elk in enkelvoud). We delen de getallen in $k = 7$ alternatieven in door te nummeren een getal met 1, als het deel uitmaakt van 1 t/m 7; met 2 bij 8 t/m 14, etc. Aldus gaat iedere kolom over in een reeks cijfers 1, 2, ..., 7. In ieder der ^{nieuwe} kolommen tellen we het totale aantal 1-runs, het totale aantal 2-runs, etc.

Toetsen (9), (10), (11), (12). Nummer de kolommen $j = 1, 2, \dots, 6$; het alternatief $i = 1, 2, \dots, 7$

Aantal i-runs

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	gem.
1	7	13	8	7	4	7	7.7
2	6	7	2	4	5	8	5.3
3	6	3	6	9	9	7	6.7
4	6	9	5	5	6	3	5.7
5	3	4	9	9	6	7	6.3
6	8	3	4	6	8	8	6.2
7	8	5	9	6	6	8	7.0
alle	44	44	43	46	44	48	44.8

Onder H_0 is de verwachtingswaarde van het totale aantal runs $E(R) = N(1 - \frac{1}{k}) + 1 = 53(1 - \frac{1}{7}) + 1 = 46.4$, met een $\sigma = \sqrt{\frac{k-1}{k} \frac{N(N-k)}{N-1}}$ d.w.i. 44.8
 $= 6.3$. We berekenden $\bar{R} = (44 + 44 + \dots + 48) / 6$. Het is duidelijk dat 44.8 niet significant van 46.4 verschilt.

Deze berekening kunnen we ook opzetten voor R_1 (1-runs),

R_2 (2-runs) etc. Dan is

$$E(R_i) = \frac{k-1}{k} N + \frac{1}{k} = 6.6, \text{ voor } i = 1, 2, \dots, 6, \text{ terwijl } \sigma = \sqrt{\frac{E(E-1)}{N-1}}$$

het getal
 $= 0.84$. We moeten nu bijv. voor $i=1$ (7.7 (gem.)) vergelijken met het interval $6.6 \pm 2 \frac{0.84}{6} = 5.7 \text{ à } 7.3$. Derhalve valt deze 7.7 buiten dit interval. Doch het gemiddeld aantal voor cijfer $i = 2$, zijnde 5.3, valt er wel in; zo ook 6.7, 5.7, 6.3, 6.2 en 7.0. Conclusie: de aantallen i-runs schommelen geheel in overeenstemming met H_0 .

14. Paasloterij, K.N.M.I. 1968.

Op de 1000 blauwe loten, genummerd 1, 2...1000, vielen 33 prijzen en wel op de nummers 49, 147, 148, 192, 229, 230, 243, 255, 341, 363, 422, 436, 456, 539, 568, 573, 604, 653, 659, 695, 727, 745, 808, 830, 844, 889, 899, 908, 941, 942, 953, 962, 971. Nulhypothese H_0 : de prijsnummers liggen aselekt over 1 t/m 1000. Deze nulhypothese toetsen we langs twee wegen.

Langste A-run Toetsen (8c) en (8d)

Een prijsnummer heet A, elk ander heet B. ($N_A = 33$; $N_B = 1000 - 33 = 967$).

De A's waren "eenlingen" of "tweelingen" (te weten 147, 148; 229, 230; 941, 942). De langste A-run heeft dus lengte $L_A = 2$. Met formule (8d) berekenen we $P[L_A < 3 | 33; 967] \cong (1-b)^{N_B + 1} = 0.965^{\ast} \gg 0.05$, met $b = (N_A/N)^3 = 0.033$; ∴ H_0 behoeft niet verworpen te worden.

Aantallen runs Toetsen (1a) en (2a)

	Aantal A-runs		σ
	geteld	theoretisch	
lengte i = 1	27	30.8	1.98
i = 2	3	1.02	1.00
i ≥ 3	0	0.18	
alle	30	32.0	1.0

We constateren, dat 27 niet significant verschilt van 30.8, noch 3 van 1.02, noch 30 van 32.0.

Conclusie: H_0 niet verwerpen.

15. Voetbaltoto $N = 38$; op 24/3/68, van voetbalcompetitie in Nederland.

De 13 uitslagen (A = gewonnen; B = verloren; C = gelijkspel) waren

club tegen club	A	B	C
1.		x	
2.			x
3.			x
4.			x
5.			x
6.			x
7.	x		
8.	x		
9.	x		
10.	x		
11.			x
12.		x	
13.	x		

De T.V.-omroeper noemde dit een zeer merkwaardig kruisjes-constellatie.

Is deze statistisch gezien werkelijk "zeer merkwaardig"?

∗ 1) Waren alle A's éénlingen geweest, dan $L_A = 1$ en $P[L_A < 2] = (1-0.033^2)^{968} = 0.343$, ook > 0.05 .

2) Formule (8d) geldt alleen voor kleine k, dus zeker niet bijv. als $k = 33$ in het geval alle A's achter elkaar gelegen zouden zijn (één A-run). Doch dan leidt genoemd tabelletje zeker tot verwerping van H_0 .

We willen dit op twee wijzen beantwoorden.

- 1) De drie alternatieven-toets (10), uit groep A. Dit is een voorwaardelijke toets, want zij heeft te maken met de kansverdeling van R = totale aantal A-, B- en C-runs als men $N_A = 5$ A's, $N_B = 2$ B's en $N_C = 6$ C's talloos vele malen willekeurig zou uitstrooien. Thans kregen we: B CCCCC AAAA C B A met $R = 6$; $c = N_A \cdot N_B + N_A \cdot N_C + N_B \cdot N_C = 52$; $d = N_A \cdot N_B \cdot N_C = 60$, $N = 13$, dus, $E(\underline{R}) = \frac{2c}{N} + 1 = 9$;

$$\sigma^2(\underline{R}) = \frac{2c(2c-N) - 6Nd}{N^2(N-1)} = 2.7; \quad \sigma = 1.65$$

zodat $q = \frac{|R-E(\underline{R})|}{\sigma} = 1.8$. Aangezien \underline{R} bij deze betrekkelijk grote N vrijwel normaal verdeeld is, moeten we, tweezijdig op $\alpha = 0.05$ toetsend, de nulhypothese H_0 (aselecte ligging van 5 A's, 2 B's en 6 C's) pas verwerpen als $q > 2$ is. Hier H_0 dus niet verwerpen. Kennelijk was het kruisjes-beeld nog niet "voldoende merkwaardig". Bijdezelfde aantallen A's, B's, C's moet H_0 pas verworpen worden als $R \leq 5$, d.i. hier $R = 3, 4, 5$, dus bijv. bij B CCCCC AAAAA B of CCCCCC B AAAAA B of CCCCCC BB AAAAA.

- 2) De drie alternatieven toets (37), uit groep B. In rij 1 speelde "thuisclub $\sqrt{11}$ " tegen "uitclub $\sqrt{12}$ ". Uit een statistiek van de tussen deze clubs gespeelde wedstrijden zouden we misschien de kansen p_A, p_B, p_C (som 1) kunnen afleiden. Voor de clubs $\sqrt{21}$ en $\sqrt{22}$ in rij 2 idem: ander p_A, p_B, p_C etc. Zo blijkt al direct, dat de toets niet toepasbaar is, want geëist wordt dat p_A overal in de reeks dezelfde is; met p_B en p_C idem. Laten we dus, louter illustratief (praktische waarde heeft dit niet meer), een stel p_A, p_B, p_C invoeren. Welk? We stellen 3 stellen voor: $p_A = p_B = p_C = 1/3$; $p_A = p_B = 2/5, p_C = 1/5$; $p_A = 3/6, p_B = 2/6, p_C = 1/6$

- 1) Geval $p_A = p_B = p_C = 1/3$; toets (41), $k = 3$.

$E(\underline{R}) = (N-1)(1-\frac{1}{k}) + 1 = 9$ met $\sigma = \sqrt{(N-1)(\frac{1}{k})(1-\frac{1}{k})} = 1.64$. Geteld werd $R = 6$, zodat $|R-E(\underline{R})| : \sigma = 1.83$. Als we mogen aannemen, dat \underline{R} ongeveer normaal verdeeld is, behoeven we H_0 niet te verwerpen, tweezijdig toetsend op $\alpha = 0.05$, daar $1.83 < 2$.

- 2) Geval $p_A = p_B = 2/5; p_C = 1/5$; toets (37).

$$E(\underline{R}) = (13-1) \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \right) + 1 = 8.7.$$

Helaas is σ onbekend. Indien $N = 13$ als groot beschouwd mag worden is $\sigma^2 \cong N \left[\sum p^2 + 2 \sum p^3 - 3 (\sum p^2)^2 \right] = 3.16$, dus $\sigma = 1.78$. Derhalve is $|R-E(\underline{R})| : \sigma = |6-8.7| : 1.78 = 1.5$. Daar $1.5 < 2$, behoeft H_0 op 0.05 niet verworpen te worden.

3) Geval $p_A = 3/6$; $p_B = 2/6$; $p_C = 1/6$; toets (37).

$$E(\underline{R}) = (13-1) \left[\frac{3 \times 3}{36} + \frac{2 \times 4}{36} + \frac{1 \times 5}{36} \right] + 1 = 8.3; \sigma \approx N \left[\sum p^2 + 2 \sum p^3 - 3(\sum p^2)^2 \right] = 3.49; \sigma = 1.87, \text{ zodat } |R - ER| : \sigma = (6 - 8.3) : 1.87 = 1.23 < 2. \therefore H_0 \text{ niet verwerpen.}$$

Zoals gezegd, dé oplossing is het bovenstaande niet. Er rijst een interessant statistisch probleem (iets voor de lezer?): gesteld er zijn N trinomiale populaties U_i , ^{elk} bestaande uit de drie alternatieven A, B, C, met trekkingskansen: $p_i, q_i, r_i, i = 1, 2, \dots, N$; $p_i + q_i + r_i = 1$, elke i . Men doet N trekkingen; de eerste keer uit U_1 ; de tweede keer uit U_2 , etc. Aldus ontstaat een N -reeks bestaande uit A's, B's, C's met $R =$ totale aantal A-, B-, C-runs. Welke E en σ heeft deze R ? Toets (37) is een bijzonder geval, nl. $p_i = p$; $q_i = q$, elke i .

16. Een voorbeeld uit Dixon and Massey (35, pg. 288).

Tien korenveldjes werden behandeld met kunstmest A en tien andere met kunstmest B. De opbrengsten waren (in een of andere eenheid)

A 26.3 28.6 25.4 29.2 27.6 25.6 26.4 27.7 28.2 29.0

B 28.5 30.0 28.8 25.3 28.4 26.5 27.2 29.3 26.2 27.5

Vraag: hebben A en B verschillend effect? Stel nulhypothese H_0 : de twee randomsteekproeven komen uit dezelfde kansverdelingen en pas de

2 steekproeven-toets van Wald-Wolfowitz, toets (4), toe. De 2×10 uitkomsten, gerangschikt naar grootte, (waarbij de A-uitkomsten onderstreept) zijn:

25.3 25.4 25.6 26.2 26.3 26.4 26.5 27.2

27.5 27.6 27.7 28.2 28.4 28.5 28.6 28.8 29.0 29.2 29.3 en

30.0, waarin het totale aantal runs $R = 11$, verdeeld over $R_A = 5$ A-

en $R_B = 6$ B-runs; $N_A = N_B = \frac{1}{2} N = 10$. Hier is N nog niet zo groot,

dat R normaal verdeeld zou zijn. Dus gebruiken we de exacte tabel,

bijv. die bij Dixon and Massey (35, pg. 421). De tabel leert

$$IP[R \leq 6 \mid N_A = N_B = 10] = 0.019 \text{ en } IP[R \leq 7] = 0.051, \text{ zodat,}$$

daar we hier eenzijdig moeten toetsen, op grond van $R = 11$ (d.i. > 6)

de H_0 niet verworpen moet worden, op drempel 0.05.

VERLOOPPATTERNEN

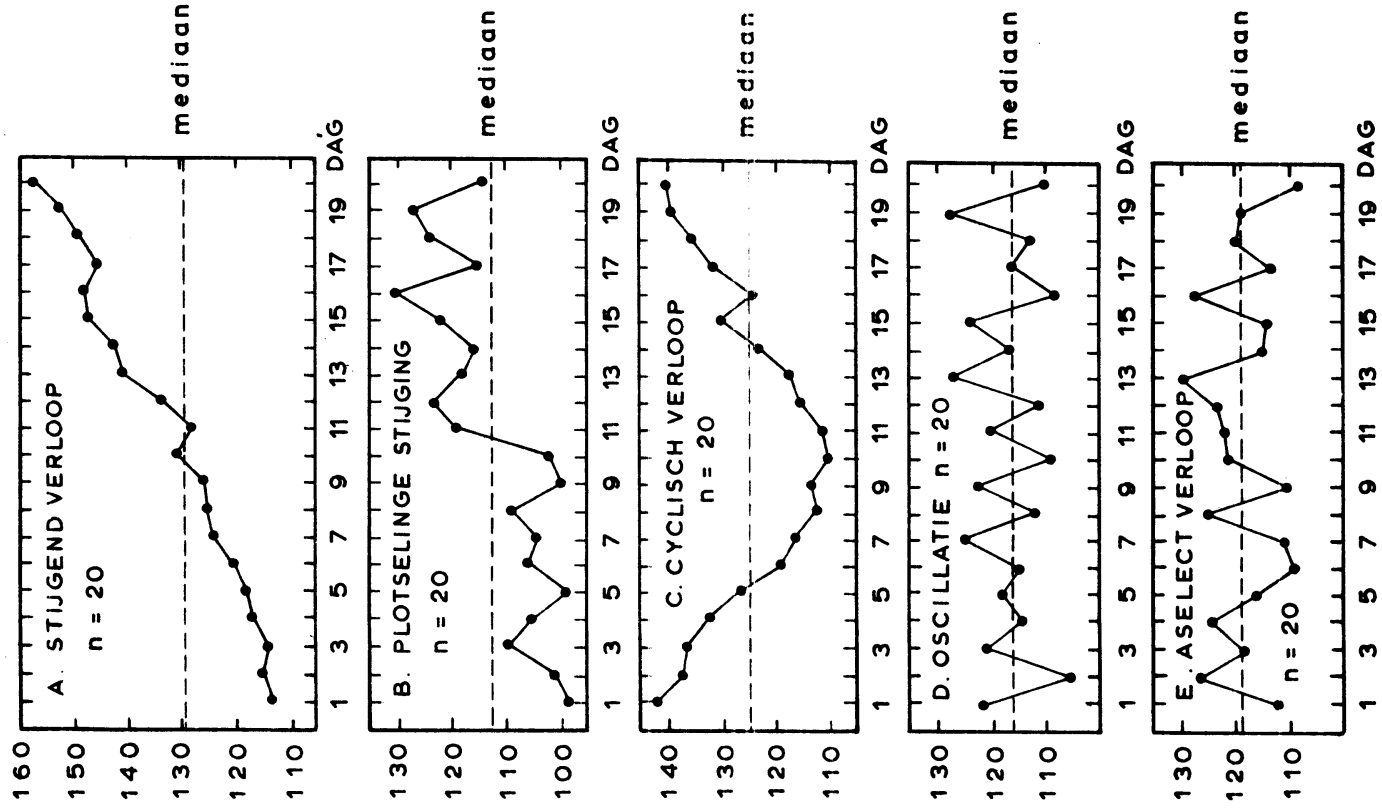


Fig. 1

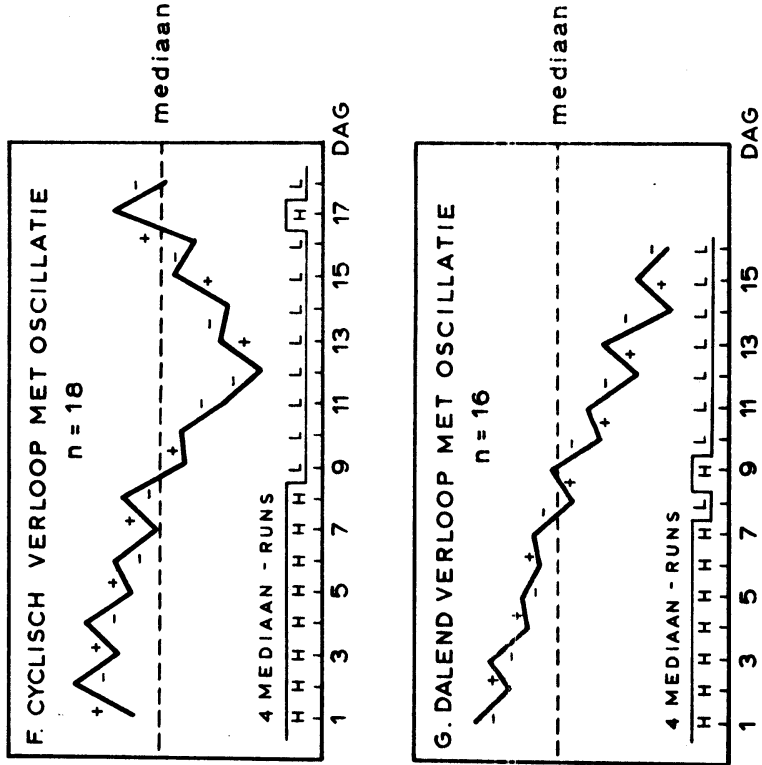


Fig. 2

Appendix

1. Aselect ≠ representatief.

Zij een populatie gegeven, bestaande uit A's, B's en C's (trekkingskansen 0.2, 0.3 en 0.5). Gesteld men trekt i keren een steekproef van omvang $N = 20$ (het gemakkelijkst is het om te denken aan een doos, gevuld met 4 A-ballen, 6 B-ballen en 10 C-ballen. De ballen zijn verder identiek. Men trekt met teruglegging). Men krijgt bijv. $N_A, N_B, N_C = 2, 5, 13; 1, 8, 11; 0, 0, 20$, ^{enz.} Over i steekproeven gesommeerd tellen wij S_A A-ballen, verder S_B en S_C , zodat $S_A + S_B + S_C = 20$ i. Aselectheid impliceert dat de benadering $S_A \cong S_B \cong S_C$ beter wordt voor $i \rightarrow \infty$. De eerste steekproef leverde de optree-fracties $(f_A)_1 = (N_A)_1 : 20$, $(f_B)_1 = (N_B)_1 : 20$ en $(f_C)_1 = (N_C)_1 : 20$. Analoog voor de 2e, 3e.... ie steekproef. Zij $\bar{f}_A = \bar{N}_A : 20$, analoog \bar{f}_B en \bar{f}_C , waarbij $\bar{N}_A = \sum_{j=1}^i (N_A)_j : i$, analoog \bar{N}_B en \bar{N}_C . De steekproef heet representatief (ofwel de trekkingsmethoden levert repr. steekpr.) als $\bar{f}_A \rightarrow 0.2$, $\bar{f}_B \rightarrow 0.3$ en $\bar{f}_C \rightarrow 0.5$ met $i \rightarrow \infty$. Maar men mag ook zeggen: als $f_{A_1} \rightarrow 0.2$, $f_{B_1} \rightarrow 0.3$ en $f_{C_1} \rightarrow 0.5$, in eerste steekproef, bij $N \rightarrow \infty$.

2. Statistische begrippen bij toetsingstheorie.

Een nulhypothese H_0 is een veronderstelling, die men toetsen wil. ("particular hypothesis under test"). Zij kan betrekking hebben op de populatie (vorm.; type; symmetrie; scheefheid; parameterwaarden; enz.). Of op zekere (nader te preciseren) overeenkomst tussen twee of meer populaties, uit elke waarvan een steekproef op tafel ligt. Of op de al of niet "constantheid" van de populatie tijdens het trekken van de steekproef. Of op de wijze, waarop de steekproef uit de populatie getrokken werd.

Een alternatieve hypothese H_a is een gepreciseerde, toegelaten hypothese, alternatief t.o.v. H_0 ("hypothesis under consideration").

Een toetsing is een statistisch onderzoek naar de juistheid van H_0 .
 Een toets is een voorschrift, dat de techniek der toetsing beschrijft.
 Een toetsingsgrootheid T is een bepaalde functie van de elementen in de steekproef, waarmee men H_0 toetst.

Op grond van H_0 volgt T een kansverdeling. T kan zijn het gemiddelde van de steekproef, de mediaan, maar ook het aantal toppen of het aantal mediaanruns, etc.

De kans α op een fout van de eerste soort (bijv. 0.05) is de kans om H_0 te verwerpen als H_0 waar is.

De kans β op een fout van de tweede soort (bijv. 0.80) is de kans om H_0 niet te verwerpen als H_0 niet waar is. (d.i. als H_a waar is).

Een toets heet zuiver ("unbiased") als $1 - \alpha \geq \beta$, d.i. $1 - \beta \geq \alpha$, d.w.z. als de kans om H_0 te verwerpen als niet H_0 doch H_a waar is tenminste zo groot is als de kans op verwerpen van H_0 als niet H_a , maar H_0 geldt.

Het onderscheidend vermogen, ook wel onderscheidingsvermogen of de macht van een toets, die H_a tegen H_0 toetst, is $1 - \beta$, d.i. de kans op terecht verwerpen van H_0 . Bij kleinere α , behoort grotere β (doch meestal $\beta \neq 1 - \alpha$); de β hangt samen met de toets, met N en met α . Van een aantal toetsen (zegge met T_1, T_2, \dots), alle dezelfde H_a tegen dezelfde H_0 toetsend, met dezelfde N en α , heeft er één de kleinste β , dus de grootste $1 - \beta$; deze toets heet meest onderscheidend (voor die α).

De kritieke zone = verwerpingsgebied is de verzameling van T -waarden, waarvoor H_0 verworpen wordt. De kans, dat T onder H_0 , daarin valt, is p.d. α . De niet-kritieke zone = aanvaardingsgebied is de verzameling van alle T -waarden, waarvoor H_0 niet verworpen wordt. T valt daarin, onder H_0 , met kans $1 - \alpha$. (op de theorie over de al of niet eenduidigheid van de ligging van de kritieke zone bij gegeven α , N en H_0 kunnen we niet ingaan). Men onderscheidt tweezijdige (symmetrische) toetsing en éénzijdige (asymmetrische) toetsing, die weer in links-éénzijdig en rechtseenzijdig verdeeld wordt. Tweezijdige (symm.) toetsing houdt in, dat de kritieke zone uit twee subzones bestaat, te weten $T \leq T_L$ en $T \geq T_R$, in elk waarvan T onder H_0 met kans $\frac{1}{2}\alpha$ terecht komt (als $\alpha = 0.050$, dan $\frac{1}{2}\alpha = 0.025$). Linkséénzijdige toetsing impliceert, dat men H_0 verwerpt als $T \leq T_L^*$, in welk gebied T onder H_0 valt met kans α (rechts: $T \geq T_R^*$). Let wel: $T_L^* > T_L$ en $T_R^* < T_R$. Of men tweezijdig toetst of links; danwel rechtseenzijdig, hangt af van de alternatieve hypothese H_a . Weet men niets van H_a , dan kiest men de tweezijdige toetsing.

3. Kansverdeling van r_{Ai} bij twee alternatieven-toets (vaste N_A en N_B)

Voor de ingewikkelde afleiding zie Burr and Cane (43). Strooit men N_A A's en N_B B's aselekt uit over de rechte, dan is de kans \mathbb{P} op een constellatie met gegeven r_{A1} , gegeven r_{A2}, \dots , gegeven R_A , waarbij natuurlijk voldaan moet zijn aan $N_A = \sum_i r_{Ai}$ en $R_A = \sum_i r_{Ai}$, gelijk aan:

$$\mathbb{P} [r_{A1}, r_{A2}, \dots \mid N_A, N_B, R_A] = \frac{(R_A)! \binom{N_A+1}{R_A}}{\prod_i (r_{Ai})! \binom{N}{N_A}} \quad \begin{matrix} \text{(variabelen} \\ r_{A1}, r_{A2}, \dots) \end{matrix}$$

Zo is, als $N_A = 10, N_B = 8, R_A = 6$: $\mathbb{P} [r_{A1} = 3, r_{A2} = 2, r_{A3} = 1]$
 $= \frac{6! \binom{9}{6}}{(3!)(2!)(1!) \binom{18}{10}} = 1.8 \cdot 10^{-6}$. Zulk een constellatie is bijv.

BB A B AA B AAA B AA B A B A B

Via een ingewikkelde combinatoriek volgt daaruit $\mathbb{P} [r_{Ai} = a \mid N_A, N_B]$, waarin r_{Aj} ($j \neq i$), R_A niet gegeven worden.

4. Twee steekproeven-toets van Wald-Wolfowitz (5), toets van Mann

Gegeven twee steekproeven x_1, x_2, \dots, x_m en y_1, y_2, \dots, y_n , uit continue verdelingen F_x en F_y . Is $F_x = F_y$? Rangschik de $m + n$ waarden naar grootte en duid daarna elke waarde met een A aan als zij een x is en anders met B. Er ontstaat aldus een A, B-reeks ($m = N_A$ A's en $n = N_B$ B's). Als $F_x = F_y$, dan liggen deze A's en B's aselekt door elkaar. Tel het totale aantal A- en B-runs, van alle lengten.

Hoe meer F en G verschillen, hoe kleiner deze R; $R \geq 2$. Toets links-éénzijdig. Gebruik bijv. de tabel bij Geigy (40). Krijgt men bijv.

$x = 15.4, 21.1, 12.1, 17.6, 14.3, 16.5$ en

$y = 18.7, 13.2, 23.2, 19.8, 25.4, 26.5, 20.9, 27.6, 22.1, 22.3$, dan

is de A, B-reeks: A B AAAA BBB A BBBB, waarin $m = 6, n = 10, R = 6$.

De tabel leert $\mathbb{P} [R \leq 5 \mid 6, 10] = 0.05$. Dus H_0 niet verwerpen

(op 0.05), d.w.z. men behoeft $F_x = F_y$ niet te verwerpen. Typisch is,

dat het onderscheidingsvermogen van de W-W-toets afneemt met toenemende m en n. Bovendien heeft men geconstateerd: als \underline{x} en \underline{y} beide

uit normale verdelingen komen, zegge $N(\mu_x, \sigma_x)$ en $N(\mu_y, \sigma_y)$, dan zal men, tenzij $|\mu_x - \mu_y|$ groot is, niet snel tot $\mu_x - \mu_y \neq 0$

besluiten, tenzij $|\mu_x - \mu_y| \gg \sigma_x$ en σ_y . Men gebruike deze toets het liefst slechts bij $m, n < 20$.

5. k-steekproeven-toets van W-W

Gegeven k steekproeven $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$ (aantal n_1 ; gem. \bar{x}_1),

$x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}$ (n_2 ; \bar{x}_2) $\dots x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn_k}$ (n_k ; \bar{x}_k).

Vraag: komen deze uit één populatie? Antwoord: rangschik de $N = \sum n_i$ waarnemingen in volgorde van toenemende grootte en ken daarna de letters A_1, A_2, \dots, A_k toe (iedere waarneming uit eerste steekproef heet A_1 , etc.). Er ontstaat aldus een reeks ^{van de} letters A_1, \dots, A_k . Tel het totale aantal R runs van alle alternatieven en alle lengten. Indien de steekproeven uit één populatie komen, liggen de A_i 's aselekt doorelkaar. Hoe meer ze dat niet doen, hoe meer liggen de ^{populaties} "uitelkaar". In het uiterste geval hebben we: $\underline{A_1}, \underline{A_1}, \dots, \underline{A_1}, \underline{A_2}, \dots, \underline{A_2}, \underline{A_k}, \dots, \underline{A_k}$ (met $R=k$).

Toets dus linkseenzijdig. Telt men $R > N(1 - \sum p_i^2)$, met $p_i = n_i/N$, $i = 1, 2, \dots, k$, en $N \rightarrow \infty$, dan behoeft H_0 (= aseleetheid = k identieke populaties) zeker niet verworpen te worden. Is $R < N(1 - \sum p_i^2)$, toets dan nader, bedenkende dat \underline{R} een normale verdeling volgt met grote N; zie toets (10a). Verwerp H_0 linkséénzijdig op $\alpha = 0.05$ zodra

$$\left| (R + \frac{1}{2}) - E(R) \right| : \sigma(R) > 1.64.$$

Indien N niet zeer groot is, volg dan toets (10).

Voorbeelds $x_1 = 14.3, 12.1, 21.0$; $x_2 = 17.6, 13.2, 18.7, 26.5, 19.8$; $x_3 = 20.9, 22.1, 15.4, 23.2$; $x_4 = 24.3, 25.4, 27.6, 16.5$, zodat de A-reeks wordt $\underline{A_1}, \underline{A_2}, \underline{A_1}, \underline{A_3}, \underline{A_4}, \underline{A_2}, \underline{A_2}, \underline{A_2}, \underline{A_3}, \underline{A_1}, \underline{A_3}, \underline{A_3}, \underline{A_4}, \underline{A_4}, \underline{A_2}, \underline{A_4}$, waarin $R = 12$, bij $n_1 = 3, n_2 = 5, n_3 = 4, n_4 = 4$, zodat, met (10), $c = 94, d = 200, \mu = 12.7, \sigma = 1.8$ en $\mu - 1.64\sigma = 9.8$; H_0 moet op 0.05 linkseenzijdig verworpen worden als $R < 9.8$. Hier dus niet, want $R = 12$.

6. Correlatie-toets van Moore en Wallis

Gegeven N paren simultane metingen $x_1, y_1; x_2, y_2, \dots, x_N, y_N$.

Rangschik de y's naar opklimmende grootte (als y het jaar voorstelt, bijv. 1901, 1902, ..., staan de y's al in opklimmende grootte). Bijv. y_7 (met x_7) $< y_2$ (met x_2) $< \dots$. De paren heten nu $u_1, v_1; u_2, v_2, \dots$. Bezie u_1, u_2, u_3, \dots . Stel nulhypothese H_0 : de u's liggen aselekt. Tel a_+ = aantal positieve tussenterm verschillen. Toets tegen de (wat vage) alternatieve hypothese, dat u geleidelijk toeneemt.

(positieve correlatie) of dat u daalt (negatieve correlatie). Heeft men (bijv. op theoretische gronden) een vermoeden, dat x en y positief gecorreleerd zijn als zij gecorreleerd zijn, toets dan in de u -reeks rechtséénzijdig met a_+ .

7. De X^2 -drempel bij de toets van Wallis-Moore.

De auteurs maakten 200 randomreeksen van $N = 25$ ongelijke getallen. In elk daarvan werden de aantallen fasen, naar lengten, geteld; aldus gaf elke tabel door vergelijking met de theoretisch onder H_0 te verwachten aantallen (alleen $f = 1, 2 \geq 3$) een X^2 . Ook 300 keren met $N = 50$ en 200 keren met $N = 75$. Zo kon de gehele X^2 -kansverdeling bestudeerd worden. Zij berekenden exact de X^2 -verdeling voor $N \leq 12$. Aldus, "wat spelende", ontstond de in de tekst genoemde conclusie

- 1) als $X^2 < 6.3$, neem dan $6/7 X^2$ en toets tegen significantie-waarden van X^2 bij 2 g.v.v. en
- 2) als $X^2 \geq 6.3$, toets dan X^2 tegen significantie-waarden bij $2\frac{1}{2}$ g.v.v.

Heeft men te doen met $N < 12$ (doch zulke kleine N 's vermijde men liever), raadpleeg dan de exacte X^2 -tabel van W and M in (8).

8. De circulaire autocorrelatie toets van Wald-Wolfowitz

Rangnummers Een stabiliteitstoets

Deze toets heeft alleen betrekking op r_1 , d.w.z. op $K = \sum_{i=1}^N x_i x_{i+1}$,

met $x_{N+1} = x_1$, in x_1, x_2, \dots, x_N .

Men kan bewijzen, dat, onder H_0 ,

$$\mu = E(K) = \frac{S_1^2 - S_2}{N-1} \quad \text{met} \quad \sigma^2 = \frac{S_2^2 - S_4}{N-1} + \frac{S_4 - 4S_1^2 S_2 + 4S_1 S_3 + S_2^2 - 2S_4}{(N-1)(N-2)} - \mu^2$$

waarin $S_j = \sum_{i=1}^N x_i^j$; $j = 1, 2, 3, 4$.

Ook al weet men dat K ongeveer normaal verdeeld is met toenemende N , de berekeningen van μ en σ blijven moeizaam.

De "parameter-vrije" gedachte^{*}) ontstond: vervang de x 'en door hun rangnummers (gesteld $x_i \neq x_j$). Dan gaat K over in K^* en

$$E(K^*) = \frac{3}{4} \frac{N+2}{N+2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 3/4 \text{ en } \sigma^2(K^*) = \frac{5}{20} \frac{N^2 - 9N - 18}{(N+1)(2N+1)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{4\sqrt{N}}.$$

Let wel: deze toets is parameter-vrij: over de x -verdeling wordt niets ondersteld (wel continu). Toets (22) daarentegen onderstelde een normale verdeling!

9. a) Vereffenen en golflengte

Als men een randomreeks x_1, x_2, \dots, x_N (gesteld $\bar{x} = 0$) lineair vereffent door voortlopend over b termen te middelen, ontstaat er een niet meer random zijnde reeks (met theoretische autocorrelatie-coëfficiënten

$$\rho_1 = \frac{b-1}{b}, \rho_2 = \frac{b-2}{b}, \dots, \rho_{b-1} = \frac{1}{b}; \rho_b = \rho_{b+1} = \dots = 0), \text{ waarin}$$

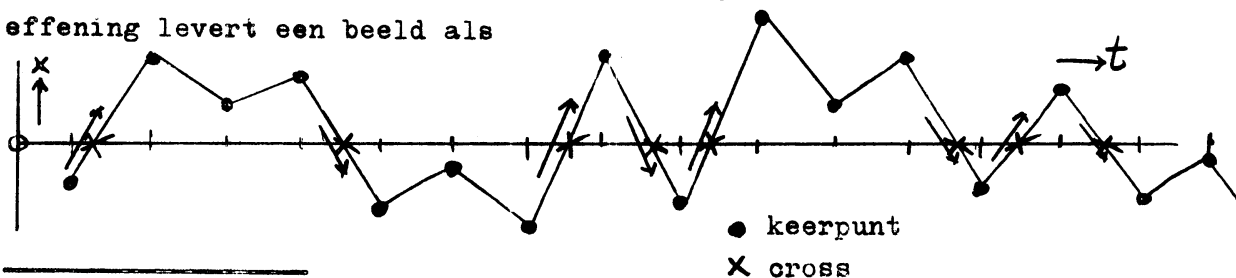
$E(\bar{\lambda}) = 4$, ongeacht b . Daarin is λ = afstand tussen twee successieve toppen (of dalen) en $\bar{\lambda}$ = gemiddelde dezer afstanden in de reeks.

In een randomreeks is dat 3. Zie Kendall-Stuart (51, deel III pg.379). Dit feit (de onafhankelijkheid van b) is op het eerste gezicht merkwaardig.

b) Vereffenen en doorgangen-afstand

De gemiddelde afstand tussen twee opeenvolgende doorgangen ("crosses") χ van de t as is in dezelfde vereffende reeks $\pi \sqrt{2b}$, althans voor grote b (zie bij Theil (20)). Deze neemt dus toe met \sqrt{b} . In een randomreeks is deze afstand 2.

Bovengenoemde uitspraken zijn niet in strijd met elkaar want de vereffening levert een beeld als



* Dr. R. Sneijders: "Sur la détermination de la stabilité des séries climatologiques". Bijdr. No 81, 1963, Kon.Met.Inst.België. In zijn artikel wordt geen vergelijking tussen K en K^* gemaakt, noch wordt het onderscheidingsvermogen van K^* onderzocht.

Hoe groter b hoe langer blijft de curve aan één zijde van de t -as, maar zij heeft daarbij toch vele toppen en dalen. De algemene formule voor de kans op een opwaartse- of neerwaartse run van lengte $n \geq mb + s$ in een randomreeks, na daarin lopend over b termen te hebben gemiddeld, luidt:

$$\mathbb{P} [n \geq mb + s] = \frac{2(m+1)}{[(m+1)!] b^{(m+2)^{s+1}}, \text{ waarin}$$

$b = 1, 2, 3, \dots; s = 0, 1, 2, \dots, b-1; m = 0, 1, 2, \dots, s-1.$

De kans op een keerpunt vindt men door $n \geq 1$ te beschouwen.

Men ziet $\mathbb{P}[n \geq 1] = \frac{2(0+1)}{[(0+1)!] b^{(0+2)^2}} = \frac{1}{2}$, dus $E_f^b = 2; E_\lambda^b = 4$,

ongeacht b .

Voortlopend middelen over b termen:

- 1) verhoogt de kansen op lange runs ten koste van die op korte
- 2) geeft de runs van lengte b een kans, die groter is dan die voor lengten $b-1$ en $b+1$, en wel markanter met toenemende b
- 3) geeft aan de lange runs amplitudines (amplitudo is verschil tussen top- en dalwaarde), die groter zijn dan die der korte runs, en markanter groter bij toenemende b .

N.B. De $\sigma^2(\bar{\lambda})$ in de vereffende reeksen ken ik niet.

Lees bij Grant (23).

c) Golflengten in Markoff-reeksen

Een Markoff I-reeks y_1, y_2, \dots wordt geregeerd door de lineaire autoregressie $y_i = ay_{i-1} + \underline{\varepsilon}$, met $\underline{\varepsilon} \equiv N(0; 1)$, met $-1 < a < 1$.

De theoretisch gemiddelde afstand $E(\bar{\lambda})$ tussen twee successieve toppen ligt in het interval $2 \leq E(\bar{\lambda}) \leq 3$, als $a = -1 \rightarrow 0 \rightarrow +1$.

De autocorrelatiecoëfficiënten in deze reeks zijn; $\rho_j = \rho^j$, $j = 1, 2, \dots$ met $\rho = a$.

Een Markoff II-reeks y_1, y_2, \dots wordt geregeerd door de lineaire autogressie $y_i = ay_{i-1} + by_{i-2} + \underline{\varepsilon}$, met $\underline{\varepsilon} \equiv N(0; 1)$, voor

$-1 < \rho_1 < +1$ en $\rho_2 > 2\rho_1^2 - 1$, waarbij $\rho_1 = \frac{a}{1-b}$; $\rho_2 = \frac{a}{1-b} + b$.

De $E(\bar{\lambda})$ ligt in $2 < E(\bar{\lambda}) < \infty$.

Voor meer details over Markoff-reeksen van orden 1, 2 en hoger zie het artikel van Levert en van Galen (53)

d) Algemene formule voor $E(\bar{\lambda})$

In elke stabiele reeks is $E(\bar{\lambda}) = \frac{\Pi}{\theta}$ met $\cos \theta = -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{1 - \rho_1} \right]$

als ρ_1 en ρ_2 de autocorrelatiecoëfficiënten der orden 1 en 2 in de reeks zijn, (ongeacht $\rho_3, \rho_4 \dots$). Lees bij Kendall (15).

10. Recursieformule voor $IP [R_A = R | N, p, q]$
(A-runs in een reeks van grootte N)

De kans, op R | reeks A's en B's, getrokken uit een populatie, waarin de kans om A te trekken p en de kans om B te trekken $q = 1-p$ is, wordt gegeven door de coëfficiënt van x^R in het polynoom, gedefinieerd door

$$P_N(x) = P_{N-1}(x) - pq(1-x)P_{N-2}(x) ; N = 0, 1, 2, \dots$$

waarin $P_0(x) = 1$ en $P_1 = q + px$. Zo is

$$P_2(x) = a_0^{(2)} + a_1^{(2)} x \text{ met } a_0^{(2)} = q^2 \text{ en } a_1^{(2)} = p(2-p). \text{ En}$$

$$P_3(x) = a_0^{(3)} + a_1^{(3)} x + a_2^{(3)} x^2. \text{ De laatste } P_3(x) \text{ leert, dat}$$

$$IP [R_A = 0 | 3, p, q] = q^3; IP[1] = p(1+2q^2) \text{ en } IP[2] = p^2q;$$

zoals behoort is $\sum IP = 1$.

$IP[0]$ bij BBB; $IP[1]$ bij AAA, AAB, ABB, BAA, BAB, BBA en $IP[2]$ bij ABA; $R \geq 3$ is er niet bij $N = 3$.

Enz.

Het is zeer moeilijk om $IP [R_A = R | N, p, q]$ als expliciete functie van N, p en q te schrijven.

7 Literatuur

- | | | | |
|------|----------------------------|---|--|
| (1) | L.v. Bortkiewicz | Die Iterationen | Berlin 1917 |
| (2) | J.G. Oostwijn-Botjes | De bladrolziekte van de aardappelplant | Diss.1920 Landbouw Hs. |
| (3) | H.P. Berlage | Over het verband tussen de dikte der jaarringen van djatibomen en de regenval op Java. | Bosbk.Ts.Tectona
<u>24</u> 939 1931 |
| (4) | A.M. Mood | The distribution of runs | A.M.S.
<u>11</u> 367 1940 |
| (5) | A. Wald and J.Wolfowitz | On a test whether two samples are from the same population | A.M.S.
<u>11</u> 147 1940 |
| (6) | F. Mosteller | Note on an application of runs to quality control charts | A.M.S.
<u>12</u> 228 1941 |
| (7) | J.v. Neumann | Distribution of the ratio of the mean square deviation of successive differences to the variance | A.M.S.
<u>12</u> 367 1941 |
| (8) | W.A. Wallis and G.H. Moore | Sign tests for time series analysis | J.Am.Stat.Ass
<u>36</u> 401 1941 |
| (9) | W.A. Wallis and G.H. Moore | A sign test for time series | Techn.Paper
N ^o 1 Nat.Bur.
Ec.Res. 1941 |
| (10) | G. Schultz | Über die Häufigkeit der Iterationen in einer Beobachtungsfolge | Deuts.Math.
<u>7</u> 22 1942 |
| (11) | B.J. Hart | Significance levels for the ratio of the mean square deviation of successive differences to the variance. | A.M.S.
<u>13</u> 445 1942 |
| (12) | F.J. Sved and C. Eisenhart | Tables for testing randomness of grouping in a sequence of alternatives | A.M.S.
<u>14</u> 66 1943 |
| (13) | G.H. Moore and W.A. Wallis | Time series based upon signs of differences | J.Am.Stat.Ass.
<u>38</u> 154 1943 |
| (14) | H.B. Mann | Nonparametric test against trend | Econometrics
<u>13</u> 245 1945 |
| (15) | M.G. Kendall | On the analysis of oscillatory time series | J.Roy.Stat.Soc.
<u>108</u> 93 1945 |
| (16) | P.S. Olmstead | Distribution of sample arrangements for runs up and down | A.M.S.
<u>17</u> 24 1946 |

- | | | | |
|------|-------------------------------|---|--|
| (17) | P.G. Hoell | Introduction to Mathematical Statistics p.187 | 1947 |
| (18) | S.S. Wilks | Elementary statistical analysis Ch. 12 | 1949 |
| (19) | A.M. Mood | Introduction to the theory of statistics ch.16 | 1950 |
| (20) | H. Theil | Over upcrosses en downcrosses in tijdreeksen | M.C. Rapport ZW-010 1950 |
| (21) | velen | Monte Carlo-methoden | Nat.Bur.Stand. Appl.Math. Series 12 1951 |
| (22) | A. Hald | Statistical theory with engineering applications | 1952 |
| (23) | A.M. Grant | Some properties of runs in smoothed random series | Biometrika <u>39</u> 198 1952 |
| (24) | P. de Munter | Application de tests statistiques paramétriques et non-paramétriques à quelques problèmes de climatologie | Bull.Inst. Agrom.et Stat. Recherches Gembloux <u>20</u> 372 1952 |
| (25) | W.A. Wallis | Rough and ready statistical tests | Industrial Quality Control <u>8</u> 35 1952 |
| (26) | F. Baur | Iterationen S.244-251 | Linkes Taschenbuch, Hilfsmittel des rechnenden Meteorologen 1953 |
| (27) | S.W. Visser en W.v.d. Bijl | Een experiment met toevalsreeksen | Statistica <u>6</u> 101 1953 |
| (28) | H. Weiler | The use of runs to control the mean in quality control | J.Am.Stat.Ass. <u>48</u> 816 1953 |
| (29) | C.E. Brooks and N. Carruthers | Handbook of statistical methods in meteorology | 1953 |
| (30) | N. Takashina | Tables for testing of randomness by means of lengths of runs | Bull.Math. Meteor.(Tokyo) <u>6</u> 17 1955 |
| (31) | R.A. Fisher | On the random sequence | Quart J. Roy Met.Soc. <u>52</u> 250 1956 |
| (32) | H.T. David | Runs above the sample mean | A.M.S. <u>27</u> 548 1956 |
| (33) | O. Ludwig | Über die stochastische Theorie der Merkmalsiterationen | Mitt.bl.der Math.Stat. <u>8</u> 49 1956 |

- | | | | |
|------|---|---|--|
| (34) | E. Morice | Quelques tests non-paramétriques | Revue de Stat. Appliquée
4 75 1956 |
| (35) | W.J. Dixon and
F.J. Massey | Introduction to statistical analysis | 1957 |
| (36) | H.A. Kuipers | Over de verdeling van het aantal runs in reeksen van alternatieven | M.C. Rapp.
S 219 1957 |
| (37) | R.v. Strik | Toepassing van toetsen gebaseerd op runs | Med. Medische Biol. Sectie
V.V.S. No =
1959 |
| (38) | P.J. Wemelsfelder | The persistence of river discharges | Intern. Ass. Scient. Hydr.;
Publ. 51, 1960;
Comm. of Surface Waters
pp. 141-150 |
| (39) | E.L. Crow,
F.A. David and
M.W. Maxfield | Statistics manual | 1960 |
| (40) | ? | Documenta Geigy, Wissenschaftliche Tabellen; Mathematik und Statistik | 1960? |
| (41) | ? | Het quotient van Von Neumann | Stat. Neerl.
14 51 1960 |
| (42) | E.S.E. Edgington | Probability tables for the number of runs of signs of differences in ordered series | J. Am. Stat. Ass.
56 156 1961 |
| (43) | E.J. Burr and
G. Cane | Longest run of consecutive observations having a specified attribute | Biometrika
48 461 1961 |
| (44) | J. Hemelrijk | Aselect | Rede 24-4-61 |
| (45) | F.N. David and
D.E. Barton | Combinatorial chance | 1962 |
| (46) | H. de Jonge | Inleiding tot de Medische Statistiek; I en II | 1963, '64 |
| (47) | C. Levert | Deux modèles statistiques de persistance des séries chronologiques climatologiques | Biometrie
Praximetrie
5 63 1964 |
| (48) | G.U. Yule and
M.G. Kendall | An introduction to the theory of statistics | 1965 |
| (49) | U. Abramowitz and
I.A. Stegun | Handbook of mathematical functions | 1965 |
| (50) | velen | Statistische Tabellen en Nomogrammen | V.V.S.
19...-1966 |

- | | | | |
|------|-------------------------------|---|----------------------------------|
| (51) | M.G. Kendall and
A. Stuart | Advanced theory of statis-
tics I, II, III | 1966 |
| (52) | J. Hemelrijk | Back to Laplace definition | Stat.Neerl.
<u>22</u> 13 1968 |
| (53) | C. Levert and
J.v. Galen | Mathematical and statis-
tical details on the si-
mulation of Markoff-type
stochastic processes on
an electronic computer | Computing
3 65 1968 |
| (54) | Working Group
of C.Cl. | Technical Note 79
"Climatic change"
Randomness tests p. 58 | W.M.O.-no 195.
T.P. 100 1966 |

De referenties 1, 4, 17, 18, 19, 21, 24, 25, 28, 30, 50 en 54
vindt men niet in de tekst, doch worden ten sterkste ter lezing
aanbevolen.

Slotopmerking: van zeer vele tabellen, nomogrammen en artikelen
bezit ik fotocopieën.

3. Index

blz.

A

aanvaardingsgebied = niet kritieke zone	57
afdalende reeks getallen; toevalskans?	47
alternatieve hypothese	56
aselect	3
aselecte reeks getallen	4
aselectheid in twee dimensies	42
aselectiviteit = aselectheid = randomness	3
asymptotische formules, kansverdelingen	2,4
autocorrelatie toets, niet circulair	26
autocorrelatie toets, wel circulair, Wald-Wolfowitz	26

B

boomringenbreedten-onderzoek	48
Burr en Cane, toets	14

C

circulaire autocorrelatie toets	26
circulaire reeks, gesloten reeks	2
cyclisch verloop, toetsen	11, 20, 24, 29, 30
clustering	15, 30

D

dalen, toppen en dalen	16
dalend, geleidelijk dalend verloop	11, 19
decimale ontwikkeling van π ; toetsen op aselecte volgorde der cijfers	39
detectie-problemen	2, 29
droge en natte dagen, randomvolgorde?	40
dubbelzijdig = tweezijdig toetsen	57

E

eenzijdig (links, rechts) toetsen	57
-----------------------------------	----

F

fasen, op- en neerwaartse	17
fasentoets van Wallis - Moore	20
fout van eerste soort (kans α)	57
fout van tweede soort (kans β)	57

	blz.
<u>G</u>	
gemiddelde faselengte-toets	21
gesloten reeks	2
gestandaardiseerde gemiddelde maandelijkse overdag- temperatuur; aselechte ligging?	44
glucosegehalte; afnemend in de tijd?	43
Gold, formule	34
golflengte	17,21
golflengte in Markoff-reeks, orde 1 en 2	62
golflengte in een randomreeks	21,61
groepsvorming, toets	15,30
<u>I</u>	
iteratie, serie, run	5
<u>K</u>	
keerpunten (toppen en dalen)	17
Kendallse rangordecorrelatiecoëfficiënt	27
keuze methode, aselechte	3,30
keuze van runtoetsen op aselechteid	30
klassieke correlatiecoëfficiënt, verband met rangordecorrelatie- coëfficiënt van Kendall en van Spearman	29
korte langste run. Toets van Burr en Cane	14
kritieke zone = verwerpingsgebied	57
k steekproeven-toets van Wald-Wolfowitz	59
kunstmest en korenoogst; heeft kunstmest effect?	55
<u>L</u>	
lange mediaanrun-toets	12
lange op- of neerwaartse run-toets	24,30
Lotto; aselechteid der prijsgetallen?	50
<u>M</u>	
macht = onderscheidingsvermogen van een toets	57
Mann, toets van Mann; trendtoets	10,19,27,58
Markoff-reeksen, definitie, golflengte	62
mediaanrun	10
meest-onderscheidend, toets	57
mengapparaat, aselektiviteitstoetsen op mengen	40
Moore-Wallis, correlatietoets	20,59
Moore-Wallis, plus-min-toets	18

N

neerslagsommen per jaar; aselechte ligging?	47
neerwaartse run	17
Neumann, toets van	25
niveau-verschuivingen, sprongen; toetsen	27, 30
nulhypothese	56

O

onderscheidings- of onderscheidend vermogen van een toets	57
open reeks	2
opwaartse run	17
oscillatie-toets	15, 25, 29, 30
plus- en min fasen	17
plus- en min runs	17

P

paasloterij, K.N.M.I.; liggen prijsnummers at random?	52
parametervrije aselektiviteits-toetsen	4
parametrische aselektiviteits-toetsen	4
periodieke (cyclische) beïnvloeding	11, 27, 29
persistentie, opwaartse trend, toets	23, 25, 30
plus, min toets van Moore-Wallis	18

Q

quotient van Neumann; toets van Neumann	25
---	----

R

random, randomness	3
recursieformule voor aantal A-runs bij bekende kansen op alternatieven A en B	63
reeks getallen, aselechte	4
reeks, open en gesloten	2
representatief	56
rivier afvoeren, jaar voor jaar; aselechte volgorde?	48
run, serie, iteratie; open, gesloten	5
run van alternatieven	6
run, opwaarts, neerwaarts	17
runtoets op aantallen en lengten	7, 8, 22, 36

run-toets op lengten-verdeling, bekende alternatieven-kansen
 runtoets van Wallis-Moore

36
 22

S

serie, run, iteratie
 Spearmanse rangcorrelatietoets
 stabiliteitstoets van Wald-Wolfowitz
 stijgende reeks getallen, toevalskans?
 stijgend, geleidelijk stijgend verloop

17
 28
 60
 47
 11,19

T

toets, toetsing, toetsingsgrootheid

56

A 1 toetsen op reeksen met twee of meer alternatieven uit één
 onbekende verdeling.

4 - 16

alternatieven A en B;

7

aantal A-runs, lengte i , bij gegeven N_A en N_B ;

$$N_A \neq N_B \neq \frac{1}{2} N$$

7

$$N_A = N_B = \frac{1}{2} N \text{ (mediaanruns)}$$

11

alternatieven A en B;

aantal A-runs, lengte $\geq i$, bij gegeven N_A en N_B ;

$$N_A \neq N_B \neq \frac{1}{2} N$$

7

$$N_A = N_B = \frac{1}{2} N \text{ (mediaanruns)}$$

11

alternatieven A en B;

aantal A- en B- runs, lengte i , bij gegeven N_A en N_B ;

$$N_A \neq N_B \neq \frac{1}{2} N$$

7

$$N_A = N_B = \frac{1}{2} N \text{ (mediaanruns)}$$

11

alternatieven A en B;

aantal A- en B- runs, lengte $\geq i$, bij gegeven N_A en N_B ;

$$N_A \neq N_B \neq \frac{1}{2} N$$

8

$$N_A = N_B = \frac{1}{2} N \text{ (mediaanruns)}$$

11

alternatieven A en B;

totale aantal A- en B- runs, alle lengten, bij gegeven N_A en N_B ;

$$N_A \neq N_B \neq \frac{1}{2} N$$

10

$$N_A = N_B = \frac{1}{2} N \text{ (mediaanruns)}$$

11

alternatieven A en B;
 $N_A = N_B = \frac{1}{2} N$ (mediaanruns);
 langste me-run van A of B, bij gegeven $N_A = N_B$

12

alternatieven A en B
 $N_A \neq N_B \neq \frac{1}{2} N$
 korte langste A-run (als langste A-run < langste B-run)
 bij gegeven N_A en N_B

14

alternatieven A_1, A_2, \dots, A_k ;
 aantal A_1 -runs, alle lengten, bij gegeven $N_{A_1}, N_{A_2}, \dots, N_{A_k}$
 $N_{A_1} \neq N_{A_2} \neq \dots \neq N_{A_k} \neq N/k$
 $N_{A_1} = N_{A_2} = \dots = N_{A_k} = N/k$

15

16

alternatieven A_1, \dots, A_k ;
 aantal runs van alle alternatieven en alle lengten, bij gegeven
 N_{A_1}, \dots, N_{A_k} ;
 $N_{A_1} \neq \dots \neq N_{A_k} \neq N/k$
 $N_{A_1} = \dots = N_{A_k} = N/k$

15

16

A2	<u>toetsen op reeksen van een continu verdeelde variabele uit één onbekende verdeling</u>	16-30
	toets van Moore-Wallis; plus, min-toets	18
	aantal plus-tussentermdifferenties	18
	aantal toppen, dalen, keerpunten	20
	gemiddelde faselengte in de reeks	21
	aantal op- en neerwaartse fasen van lengte i	21
	toets van Wallis-Moore; $i = 1, 2, \geq 3$ en ≥ 1 .	21
	aantal op- of neerwaartse runs, lengte i.	22
	aantal op- of neerwaartse runs, lengte $\geq i$.	22
	aantal op- of neerwaartse runs, alle lengten	22
	minimale lengte van een reeks, opdat deze een gegeven kans maakt	
	tenminste een op- danwel neerwaartse run van lengte $\geq j$ te hebben	24
	trendtoets van Neumann; van Mann	25,27
	verhouding van standaarddeviatie <u>van de termen</u> in de reeks tot standaarddeviatie der successieve tussentermdifferenties.	

	autocorrelatie in circulaire reeks; Wald-Wolfowitz	26
	autocorrelatie in open reeks	26
	trendtoets van Mann	27
	rangcorrelatiecoëfficiënt van Kendall	27
	rangcorrelatie - coëfficiënt van Spearman	28
	<u>toetsen op reeksen ^{van} twee of meer alternatieven met bekende kansen</u>	
B1	<u>twee alternatieven A en B;</u>	31-39
	aantal A-runs, van lengte i	
	$p_A \neq p_B \neq \frac{1}{2}$	32
	$p_A = p_B = \frac{1}{2}$	34
	<u>twee alternatieven A en B</u>	
	aantal A-runs van lengte $\geq i$	
	$p_A \neq p_B \neq \frac{1}{2}$	33
	$p_A = p_B = \frac{1}{2}$	35
	<u>twee alternatieven A en B;</u>	
	aantal A- runs van alle lengten	
	$p_A \neq p_B \neq \frac{1}{2}$	34
	$p_A = p_B = \frac{1}{2}$	35
	<u>twee alternatieven A en B</u>	
	aantal A- en B- runs, lengte i	
	$p_A \neq p_B \neq \frac{1}{2}$	33
	$p_A = p_B = \frac{1}{2}$	35
	<u>aantal A- en B- runs, lengte $\geq i$</u>	
	$p_A \neq p_B \neq \frac{1}{2}$	34
	$p_A = p_B = \frac{1}{2}$	35
	<u>aantal runs, beide alternatieven, alle lengten</u>	
	$p_A \neq p_B \neq \frac{1}{2}$	34
	$p_A = p_B = \frac{1}{2}$	35
	<u>op frequentieverdeling van A- en B- runs naar lengten</u>	36
	<u>alternatieven A_1, A_2, \dots, A_k;</u>	
	aantal A_1 -runs, lengte i	
	$p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_k \neq 1/k$	37
	$p_1 = p_2 = \dots = p_k = 1/k$	38

alternatieven A_1, A_2, \dots, A_k ; aantal A_1 - runs, lengte $\geq i$; $p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_k \neq 1/k$	38
$p_1 = p_2 = \dots = p_k = 1/k$	38
<hr/>	
alternatieven A_1, A_2, \dots, A_k ; aantal A_1 - runs, alle lengten $p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_k \neq 1/k$	38
$p_1 = p_2 = \dots = p_k = 1/k$	38
<hr/>	
alternatieven A_1, A_2, \dots, A_k ; aantal runs van alle alternatieven en alle lengte $p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_k \neq 1/k$	38
$p_1 = p_2 = \dots = p_k = 1/k$	39
<hr/>	
toppen, dalen	16
toppen, dalen, keerpunten-toets	20
trekkingen, aselechte	3
trekkingen uit standaardnormale verdeling; aselechte?	44
trendtoets van Kendall	27
trendtoets van Mann	10, 27, 58
trendtoets van Neumann	25
trendtoets met plus-min-differenties	18
twee steekproeven-toets van Wald-Wolfowitz	10, 58
tweezijdig toetsen	57
<u>V</u>	
vereffenen en cross-cross-afstand in randomreeksen	61
vereffenen en golflengte in randomreeksen	61
verlooppatronen	2, 30
voetbaltoto; vertonen de uitkomsten toevalspatroon?	53
volgorde, aselechte, random	3

	blz.
<u>W</u>	
Wallis-Moore fasentoets, runtoets	20,22
Wald-Wolfowitz twee steekproeven toets	50
k steekproeven toets	59
<u>Z</u>	
zieke en gezonde planten; is ligging in het veld aselekt?	42
zuivere toets	57