KONINKLIJK NEDERLANDS

METEOROLOGISCH INSTITUUT

De Bilt

Verslagen

V - 281

P.J. Rijkoort

Gemiddelden en standaard deviaties van vector grootheden en hun onderlinge relaties

De Bilt, 1976

Publikatienummer: K.N.M.I. V-281.

U.D.C.: 519.2

Gemiddelden en standaard deviaties van vector grootheden en hun onderlinge relaties

P.J.Rijkoort

Inleiding

Voor een aantal praktijkgrootheden is kennis van de variabiliteit van de windsnelheid nodig. Aangezien de windsnelheid een vectorgrootheid is kan men deze variabiliteit met diverse gemiddelden en standaard deviaties beschrijven, waarbij men hetzij van cartesische- hetzij van pool-coördinaten kan uitgaan. Welke van deze grootheden voor een bepaald probleem het belangrijkste is hangt van het probleem zelf af. In principe zou men dus over numerieke waarden van alle grootheden willen beschikken. Het is echter niet nodig om alle grootheden inderdaad te bepalen, althans on line, omdat er tussen de diverse grootheden onderlinge relaties bestaan, zodat men desgewenst achteraf alle ontbrekende grootheden met deze relaties kan berekenen.

Men kan dus de volgende vragen stellen:

1° Welke onderlinge relaties bestaan er tussen gemiddelden en standaard deviaties van vector grootheden?

2° Wat is de meest efficiënte wijze van registreren?

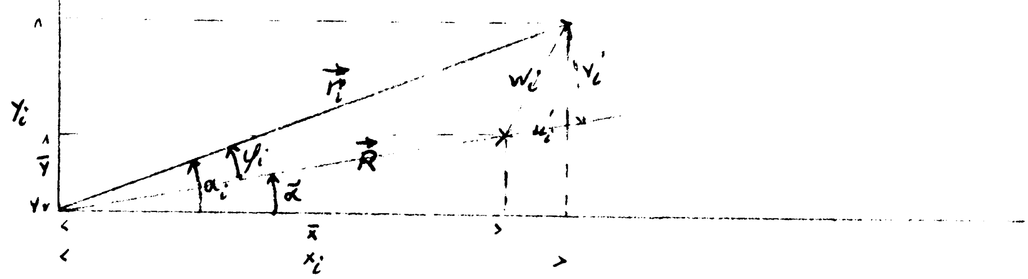
In dit rapport zal getracht worden deze vragen voorzover mogelijk te beantwoorden.

1 Algemene formulering van het probleem

Stel gegeven een 2-dimensionale vector grootheid r_i , die over een zeker tijdsinterval T fluctueert rondom een resultante R volgens een nader te bepalen verdelingsfunctie.

De volgende notatie wordt gebruikt:

fig. 1



De "random"vector wordt door r_i voorgesteld. In het uitgangs-assenstelsel zijn x_i en y_i de componenten van r_i.

De resultante van r_i, of in statistische termen de verwachtings-waarde van de vector r_i, is $Er_i = R$. De componenten van R kunnen worden bepaald als $Ex_i = \bar{x}$ en $Ey_i = \bar{y}$.

De vectoren $\vec{r}_i$ resp $\vec{R}$ maken hoeken α_i resp $\tilde{\alpha}$ met de x-as. Er wordt verder ingevoerd: $\varphi_i = \alpha_i - \tilde{\alpha}$ en $\vec{w}_i = \vec{r}_i - \vec{R}$. De componenten van de verschil vector $\vec{w}_i$ zijn, in een u,v assenstelsel waarvan de u-as met R samenvalt: u_i' en v_i'. Vervolgens wordt nog genoteerd: $|\vec{r}_i| = r_i$; $Er_i = \bar{r}$; $|\vec{w}_i| = w_i$; $|\vec{R}| = \bar{u}$ en $r_i' = r_i - \bar{r}$.

Als parameters van het "stochastische proces" treden naast $\bar{u}$ en $\bar{r}$ op de standaard deviaties σ_u, σ_v, σ_w, σ_r, gedefinieerd door $\sigma_u^2 = Eu'^2$ enz. Tenslotte zijn nog de correlaties $\rho_{u,v}$ en $\rho_{r,\varphi}$ bij het proces betrokken.

In principe is het proces door vier van de negen parameters bepaald , als althans hetzij u' en v' hetzij r' en φ' normaal verdeelde grootheden zijn. Het ligt dus voor de hand twee modellen te beschouwen n.l.:

I Gegeven: $\bar{u}$, σ_u, σ_v, en $\rho_{u,v}$ waarin u en v normaal verdeeld zijn met $Eu = \bar{u}$ en $Ev = 0$.

II Gegeven: $\bar{r}$, σ_r, σ_φ en $\rho_{r,\varphi}$ waarin r en φ normaal verdeeld zijn met $Er = \bar{r}$ en $E\varphi = 0$.

Gevraagd wordt nu voor beide modellen de overige parameters in de gegeven parameters uit te drukken.

Op te merken valt nog dat voor model I de verdelingsfuncties van r en φ zijn te bepalen (zie Frenkiel 1951 en Beckman 1962). In principe kan hieruit $\bar{r}$, σ_r en σ_φ worden bepaald. De verdelingsfuncties zijn echter zeer ingewikkeld en onhandelbaar, daarom wordt hier een directe afleiding gebruikt.

Uit fig 1 is tenslotte nog af te leiden dat er enkele relaties bestaan die altijd gelden dus zowel voor I als voor II.

Direct is duidelijk:

$$\sigma_w^2 = \sigma_v^2 + \sigma_u^2 \tag{1,1}$$

verder wegens $r_i^2 = v_i^2 + (\bar{u} + u_i')^2 = v_i'^2 + u_i'^2 + 2u_i'\bar{u} + \bar{u}^2$:

$$Er^2 = \sigma_v^2 + \sigma_u^2 + \bar{u}^2 \tag{1.2}$$

waaruit volgt:

$$\sigma_r^2 = \sigma_v^2 + \sigma_u^2 + \bar{u}^2 - \bar{r}^2 \tag{1.3}$$

dit is ook te schrijven als:

$$\sigma_w^2 - \sigma_r^2 = \bar{r}^2 - \bar{u}^2 \tag{1.4}$$

---

2 Afleiding van de formules voor model I

In de eerste plaats dient $\bar{r}$ bepaald te worden.

$$\bar{r} = Er = E(\,(\bar{u} + u')^2 + v'^2)^{\frac{1}{2}} = \bar{u}E(\,1 + 2\tilde{u} + \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2.0}$$

waarin $\tilde{u} = u'/\bar{u}$ en $\tilde{v} = v'/\bar{u}$.

Met reeksontwikkeling wordt dit:

$$\bar{r} = \bar{u}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\,\frac{(2k)!\,E(2\tilde{u}+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)^k}{2^{2k}\,(2k-1)\,k!k!}$$

$$= \bar{u}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{k+1}\,\frac{(2k)!\;E\,\tilde{u}^{2i-j}\tilde{v}^{2k-2i}}{2^{2k-j}(2k-1)k!(k-i)!j!(i-j)!}$$

Deze reeksontwikkeling geldt in feite alleen als $2\tilde{u}+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2 < 1$ is. Dit zal niet altijd het geval zijn. Nu kan men (2.0) vervangen door $\frac{u}{v}\,E(1+2c^2\tilde{u}+c^2\tilde{u}^2+c^2\tilde{v}^2+c^2-1)^{\frac{1}{2}}$ (2.0')

Voor $c = \frac{1}{2}$ voert dit tot de veel minder strenge eis $2\tilde{u}+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2 < 7$ enz.Het blijkt nu verder bij doorrekenen dat (2.0') tot dezelfde benadering leidt als (2.0) zodat met de afleiding uit (2,0) kan worden volstaan.

Met $t = 2i-j$ en $p = k-i$ ontstaat:

$$\bar{r}=\bar{u}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\frac{1}{2}t\leq i\leq t}(-1)^{p+i+1}\frac{(2p+2i)!\,E\,\tilde{u}^{t}\tilde{v}^{2p}}{2^{2p+t}(2p+2i-1)(p+i)!\,p!\,(2i-t)!\,(t-i)!} \qquad (2.1)$$

Hierin is $E\tilde{u}^{t}\tilde{v}^{2p} = Eu'^{t}v'^{2p}/\,\bar{u}^{t+2p} = \mu_{t,2p}\,/\,\bar{u}^{t+2p}$

Van een binormale verdeling is bekend dat de momenten $\mu_{r,s}$ de coëfficienten zijn van de termen $t_1^r t_2^s/r!s!$ in:

$M(t_1,t_2) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\left(t_1^2\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + t_2^2\sigma_2^2\right)\right)$; zie b.v. Kendall I blz 82-83.

Hierin ligt opgesloten dat de momenten waarvoor $r+s$ oneven is, nul zijn; in de ontwikkeling van de e-macht komen n.l. alleen termen met een even totaal aantal grootheden t_1 en t_2 voor.

Men kan schrijven:

$$\mu_{rs} = \sum_{\mathrm{Max}(0,\frac{1}{2}(r-s))\leq m\leq\frac{1}{2}r}\frac{r!\,s!\,\rho^{r-2m}\sigma_1^r\sigma_2^s}{2^{\frac{1}{2}(s-r)+2m}(r-2m)!\,m!\,(\frac{1}{2}(s-r)+m)!} \qquad (2.2)$$

waarin $r+s$ dus even moet zijn.

In (2.1) kan t door $2q$ worden vervangen waarna ontstaat:

$$\bar{r}=\bar{u}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{i=q}^{2q}(-1)^{p+i+1}\frac{(2p+2i)!\,E\,u'^{2q}v'^{2p}}{2^{2p+2q}(2p+2i-1)\,(p+i)!\,p!\,(2i-2q)!\,(2q-i)!\,\bar{u}^{2p+2q}}$$

Uit (2.2) volgt:

$$E\,u'^{2q}v'^{2p} = \sum_{\mathrm{Max}(0,q-p)\leq m\leq q}\frac{(2q)!\,(2p)!\,\rho^{2q-2m}\sigma_u^{2q}\sigma_v^{2p}}{2^{p-q+2m}(2q-2m)!\,m!\,(p-q+m)!}$$

Bij benadering geldt dan:

$$\bar{r}\approx\bar{u} + \tfrac{1}{2}\sigma_v^2\bar{u}^{-1} - \tfrac{3}{8}\sigma_v^4\,\bar{u}^{-3} + \tfrac{1}{2}(1+2\rho_{uv}^2)\,\sigma_v^2\sigma_u^2\,\bar{u}^{-3} \qquad (2.3)$$

Vervolgens kan σ_r^2 berekend worden met de algemene formule (1.3); uit (2.3) volgt n.l.:

$$\bar{r}^2\approx\bar{u}^2 + \sigma_v^2 - \tfrac{1}{2}\sigma_v^4\,\bar{u}^{-2} + (1+2\rho_{uv}^2)\,\sigma_u^2\sigma_v^2\,\bar{u}^{-2}$$

zodat bij benadering geldt:

$$\sigma_r^2\approx\sigma_u^2 + \tfrac{1}{2}\sigma_v^4\,\bar{u}^{-2} - (1+2\rho_{uv}^2)\,\sigma_u^2\sigma_v^2\,\bar{u}^{-2} \qquad (2.4)$$

Gemiddelde waarde en standaard deviatie van φ kunnen als volgt berekend worden:

$$E\varphi = E \text{ bg tg } v'(\bar{u} + u')^{-1} = \text{bg tg } \tilde{v}\,(1 + \tilde{u})^{-1} =$$

$$E \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\tilde{v}^{2k+1}(1+\tilde{u})^{-(2k+1)}}{2k+1} =$$

$$E \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\tilde{v}^{2k+1}(-1)^p \frac{(2k+p)!}{p!(2k)!}\tilde{u}^p}{2k+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{k+p} \frac{(2k+p)!}{p!(2k+1)!} E\, \tilde{v}^{2k+1}\tilde{u}^p$$

Aangezien $E\,\tilde{v}^{2k+1}\tilde{u}^p$ nul is als p even is, kan p vervangen worden door 2p+1 zodat:

$$E\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(2k+2p+1)!}{(2p+1)!(2k+1)!} \frac{E v'^{2k+1} u'^{2p+1}}{\bar{u}^{2k+2p+2}}$$

Bij benadering geldt nu:

$$\bar{\varphi} \approx -\rho\sigma_u\sigma_v\,\bar{u}^{-2} - 3\rho\sigma_u^3\sigma_v\,\bar{u}^{-4} + 3\rho\sigma_{\bar{u}}\,\sigma_v^3\,\bar{u}^{-4} \qquad (2.5)$$

De standaard deviatie van φ is als volgt te vinden:

$$\sigma_\varphi^2 = E(\varphi - \bar{\varphi})^2 = E\varphi^2 - \bar{\varphi}^2.$$

Nu is :

$$E\varphi^2 = E \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{k+m} \frac{\tilde{v}^{2k+2m+2}\,(1+\tilde{u})^{-(2k+2m+2)}}{(2k+1)(2m+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{k+m+t} \frac{(2k+2m+t+1)!\; E\,\tilde{v}^{2k+2m+2}\tilde{u}^t}{(2k+1)(2m+1)(2k+2m+1)!\,(t)!}$$

Ook nu weer $E\,\tilde{v}^{2k+2m+2}\tilde{u}^t$ is nul als de som der exponenten ~~oneven is dus moet t~~ even zijn en kan derhalve door 2t vervangen worden zodat:

$$E\varphi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{k+m} \frac{(2k+2m+2t+1)!\; E\,\tilde{v}^{2k+2m+2}\tilde{u}^{2t}}{(2k+1)(2m+1)(2k+2m+1)!\,(2t)!}$$

Nu nog invoeren k+m = q dan:

$$E\varphi^2 = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{q} (-1)^q \frac{(2q+2t+1)!\; E\, v^{2q+2}u^{2t}}{(2k+1)(2q-2k+1)(2q+1)!\,(2t)!}$$

Bij benadering:

$$E(\varphi^2-\bar{\varphi}^2) \approx \sigma_v^2\,\bar{u}^{-2} - 2\sigma_v^4\,\bar{u}^{-4} + 3\sigma_u^2\sigma_v^2\,\bar{u}^{-4} + 5\rho_{uv}^2\,\sigma_u^2\sigma_v^2\,\bar{u}^{-4} \qquad (2.6)$$

De correlatie coefficient tussen r en φ kan als volgt bepaald worden:

$$\rho_{r\varphi}\sigma_r\sigma_\varphi = E(r-\bar{r})(\varphi-\bar{\varphi}) = E\,r\varphi - \bar{r}\,\bar{\varphi}$$

Nu is:

$$Er\varphi = \bar{u}E\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{k+1}\frac{(2k)!\ \tilde{u}^{2i-j}\ \tilde{v}^{2k-2i}}{2^{2k-j}(2k-1)k!(k-i)!j!(i-j)!}\ \times$$

$$\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^{t+p}\frac{(2t+p)!\ \tilde{v}^{2t+1}\tilde{u}^{p}}{p!(2t+1)!}$$

$$= \bar{u}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{k+p+t+1}\frac{(2k)!(2t+p)!\,E\tilde{u}^{2i-j+p}\tilde{v}^{2k-2i+2t+1}}{2^{2k-j}(2k-1)(2t+1)!k!(k-i)!j!(i-j)!p!}$$

Nu $p+2i-j = 2m+1$ stellen omdat de som van de exponenten van $\tilde{u}$ èn $\tilde{v}$ even moet zijn en verder $k-i+t = n$ en $2i-j = s$ zodat ontstaat:

$$Er\varphi = \bar{u}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{n}\sum_{s=0}^{2m+1}\sum_{j}(-1)^{\frac{1}{2}(j-s)+n+1}\frac{E\tilde{u}^{2m+1}\tilde{v}^{2n+1}}{\bar{u}^{2m+2n+2}}\ \times$$

$$\frac{(s+j+2n-2t)!(2t+2m+1-s)!}{2^{s+2n-2t}(s+j+2n-2t-1)(2t+1)!(\frac{1}{2}(s+j)+n-t)!(n-t)!j!(\frac{1}{2}(s-j))!(2m+1-s)!}$$

met $j = 0,2$ -----s als s even is en $j = 1,3$ --- s als s oneven is.

bij benadering :

$$Er\varphi \approx -\tfrac{3}{2}\rho\sigma_u^3\sigma_v\,\bar{u}^{-3} + 3\rho\sigma_u\sigma_v^3\,\bar{u}^{-3}$$

en

$$\bar{r}\,\bar{\varphi} = -\rho\sigma_u\sigma_v\,\bar{u}^{-1} - 3\rho\sigma_u^3\sigma_v\,\bar{u}^{-3} + 3\rho\sigma_u\sigma_v^3\,\bar{u}^{-3} - \tfrac{1}{2}\rho\sigma_u\sigma_v^3\,\bar{u}^{-3}$$

zodat tenslotte :

$$\rho_{r\varphi}\sigma_r\sigma_\varphi \approx \rho\sigma_u\sigma_v\,\bar{u}^{-1} + \tfrac{1}{2}\rho\sigma_u\sigma_v^3\,\bar{u}^{-3} \qquad (2.7)$$

De vector standaard deviatie wordt in dit geval direct door (1.1) gegeven.

3 Afleiding van de formules voor model II

Er geldt in de eerste plaats:

$$\bar{u} = E(r\cos\varphi) = E\,\bar{r}\cos\varphi + E(r'\cos\varphi) =$$
$$\bar{r}\,E\cos\varphi + E\,r'\cos\varphi.$$

Nu is $\cos\varphi = \sum_{k=0} (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!}$ terwijl volgens (2.2):

$$E\,\varphi^{2k} = \frac{(2k)!\,\sigma_\varphi^{2k}}{2^k\,k!}$$ dus:

$$E\cos\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\sigma_\varphi^{2k}}{2^k\,k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2}\sigma_\varphi^2)^k}{k!} = e^{-\frac{1}{2}\sigma_\varphi^2}$$

verder is:

$$E\,r'\cos\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{E\,r'\varphi^{2k}}{(2k)!} = 0\ ,\ \text{wegens}\ E\,r'\varphi^{2k} = 0.$$

derhalve :

$$\bar{u} = \bar{r}\,e^{-\frac{1}{2}\sigma_\varphi^2} \tag{3.1}$$

Vervolgens:

$$\bar{v} = E\,r\sin\varphi = \bar{r}\,E\sin\varphi + E\,r'\sin\varphi$$

hierin is:

$$E\sin\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{E\,\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0 \quad \text{en}$$

$$E\,r'\sin\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{E\,r'\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}\,\frac{(2k+1)!\,\rho\sigma_r\sigma_\varphi^{2k+1}}{2^k\,k!} = \rho\sigma_r\sigma_\varphi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2}\sigma_\varphi^2)^k}{k!}$$

Dus:

$$\bar{v} = \rho\sigma_r\sigma_\varphi e^{-\frac{1}{2}\sigma_\varphi^2} \tag{3.2}$$

Nu wordt eerst de standaard deviatie van v bepaald.

$$\sigma_v^2 = E\,(v - E\,v)^2 = E\,v^2 - (Ev)^2$$

en

$$E\,v^2 = E(\bar{r}+r')^2\sin^2\varphi = \bar{r}^2\,E\sin^2\varphi + 2\bar{r}\,E\,r'\sin^2\varphi + E\,r'^2\sin^2\varphi$$

achtereenvolgens vindt men:

$$E \sin^2\varphi = E\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{k+t}\frac{\varphi^{2k+2t+2}}{(2k+1)!(2t+1)!} =$$

met k+t = p:

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}(-1)^p\frac{E\,\varphi^{2p+2}}{(2k+1)!(2p-2k+1)!} = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{2^{2p+1}}{(2p+1)!}\;\frac{(2p+2)!\,\sigma_\varphi^{2p+2}}{2^{p+1}\;(p+1)!}$$

$$\tfrac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{(2\sigma_\varphi^2)^{p+1}}{(p+1)!} = -\tfrac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-2\sigma_\varphi^2)^p}{p!} = \tfrac{1}{2}(1-e^{-2\sigma_\varphi^2}) .$$

$$E\, r'\sin^2\varphi = \sum_{k=0}\sum_{t=0}(-1)^{k+t}\frac{E r'\varphi^{2k+2t+2}}{(2k+1)!(2t+1)!} = 0$$

Hierbij is gebruikt:

$$\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{(2k+1)!(2p-2k+1)!} = \frac{1}{(2p+2)!}\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+2}{2k+1} =$$

$$\frac{1}{(2p+2)!}\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{2k+1} + \frac{2p+1}{2k} = \frac{1}{(2p+2)!}\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p+1}{k} = \frac{2^{2p+1}}{(2p+2)!}$$

Tenslotte:

$$E\, r'^2\sin^2 = E\, r'^2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{k+t}\frac{\varphi^{2k+2t+2}}{(2k+1)!(2t+1)!} =$$

met k+t = p :

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}(-1)^p\frac{E\, r'^2\varphi^{2p+2}}{(2k+1)!(2p-2k+1)!} = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{2^{2p+1}E\, r'^2\varphi^{2p+2}}{(2p+2)!} =$$

$$\sum_{p=0}(-1)^p\frac{2^{2p+1}}{(2p+2)!}\left\{\frac{2!(2p+2)!\,\rho^2\sigma_r^2\sigma_\varphi^{2p+2}}{2^p\;2!\;p!} + \frac{2!(2p+2)!\,\sigma_r^2\sigma_\varphi^{2p+2}}{2^{p+2}\;(p+1)!}\right\} =$$

$$\sum_{p=0}(-1)^p\left\{\frac{2^{p+1}\rho^2\sigma_r^2\sigma_\varphi^{2p+2}}{p!} + \frac{2^p\sigma_r^2\sigma_\varphi^{2p+2}}{(p+1)!}\right\} =$$

$$2\rho^2\sigma_r^2\sigma_\varphi^2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-2\sigma_\varphi^2)^p}{p!} - \tfrac{1}{2}\sigma_r^2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-2\sigma_\varphi^2)^{p+1}}{(p+1)!} =$$

$$2\rho^2\sigma_r^2\sigma_\varphi^2\, e^{-2\sigma_\varphi^2} - \tfrac{1}{2}\sigma_\varphi^2(e^{-2\sigma_\varphi^2} - 1) =$$
$$\tfrac{1}{2}\sigma_r^2\,(1 - e^{-2\sigma_\varphi^2}) + 2\rho^2\sigma_r^2\sigma_\varphi^2\, e^{-2\sigma_\varphi^2}$$

derhalve:

$$\sigma_v^2 = \tfrac{1}{2}\bar{r}^2\,(1 - e^{-2\sigma_\varphi^2}) + \tfrac{1}{2}\sigma_r^2\,(1 - e^{-2\sigma_\varphi^2}) + 2\rho^2\sigma_r^2\sigma_\varphi^2\, e^{-2\sigma_\varphi^2} - \rho^2\sigma_r^2\sigma_\varphi^2\, e^{-\sigma_\varphi^2}\,.$$

of

$$\sigma_v^2 = \tfrac{1}{2}(\bar{r}^2 + \sigma_r^2)(1 - e^{-2\sigma_\varphi^2}) + \rho^2\sigma_r^2\sigma_\varphi^2\, e^{-\sigma_\varphi^2}(2e^{-\sigma_\varphi^2} - 1) \qquad (3.3)$$

Vervolgens is:

$$\sigma_u^2 = E\,(u - Eu)^2 = Eu^2 - (Eu)^2$$

en

$$Eu^2 = E\,(\bar{r} + r')^2\cos\varphi = E\,(\bar{r} + r')^2(1 - \sin^2\varphi) =$$
$$E\,(\bar{r} + r')^2 - E\,v^2 =$$
$$\bar{r}^2 + \sigma_r^2 - \tfrac{1}{2}(\bar{r}^2 + \sigma_r^2)(1 - e^{-2\sigma_\varphi^2}) - 2\rho^2\sigma_r^2\sigma_\varphi^2 e^{-2\sigma_\varphi^2}$$

zodat:

$$\sigma_u^2 = \tfrac{1}{2}(\bar{r}^2 + \sigma_r^2)(1 + e^{-2\sigma_\varphi^2}) - 2\rho^2\sigma_r^2\sigma_\varphi^2\, e^{-2\sigma_\varphi^2} - \bar{r}^2 e^{-\sigma_\varphi^2} \qquad (3.4)$$

De vector standaard deviatie σ_w^2 wordt nu:

$$\sigma_w^2 = \bar{r}^2 + \sigma_r^2 - (\rho^2\sigma_r^2\sigma_\varphi^2 + \bar{r}^2)\, e^{-\sigma_\varphi^2}$$

of:

$$\sigma_w^2 = \bar{r}^2(1 - e^{-\sigma_\varphi^2}) + \sigma_r^2(1 - \rho^2\sigma_\varphi^2 e^{-\sigma_\varphi^2}) \qquad (3.5)$$

Tenslotte nog de correlatie tussen u en **v** :

$$E\,uv = E(\bar{r} + r')^2\sin\varphi\cos\varphi =$$
$$\bar{r}^2 E\,\sin\varphi\cos\varphi + 2\bar{r}\,E\,r'\sin\varphi\cos\varphi + E\,r'^2\sin\varphi\cos\varphi\,.$$

Nu is: $E\,\sin\varphi\cos\varphi = \tfrac{1}{2}E\,\sin 2\varphi = \tfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}(-1)^k\,\dfrac{E(2\varphi)^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0$.

en $E\,r'^2\sin\varphi\cos\varphi = \tfrac{1}{2}E\,r'^2\sin 2\varphi = \tfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}(-1)^k\,\dfrac{2^{2k+1}\,E\,r'^2\,\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0$

Tenslotte

$$E\, r' \sin\varphi \cos\varphi = \tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k+1}\, E\, r' \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}(2k+1)!\, \rho \sigma_r \sigma_\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!\; 2^k\; k!} = \rho \sigma_r \sigma_\varphi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2\sigma_\varphi^2)^k}{k!} = \rho \sigma_r \sigma_\varphi e^{-2\sigma_\varphi^2}$$

zodat:

$$\rho_{uv} \sigma_u \sigma_v = 2\bar{r} \rho \sigma_r \sigma_\varphi e^{-2\sigma_\varphi^2} - \bar{r} \rho \sigma_r \sigma_\varphi e^{-\sigma_\varphi^2}$$

of

$$\rho_{uv} \sigma_u \sigma_v = \bar{r} \rho \sigma_r \sigma_\varphi\, e^{-\sigma_\varphi^2} \left(2e^{-\sigma_\varphi^2} - 1 \right) \qquad (3.6)$$

4 Overzicht van de formules

Model I Gegeven: $\bar{u}$, σ_u, σ_v en ρ_{uv}.

$$\bar{r} \approx \bar{u} + \frac{{}^{2}_{v}}{2\bar{u}} - \frac{3\,{}^{4}_{v}}{8\bar{u}^3} + \frac{(1 + 2\,{}^{2}_{uv})\,{}^{2}_{u}\,{}^{2}_{v}}{2\bar{u}^3}$$

$$\sigma_r^2 \approx \sigma_u^2 + \frac{\sigma_v^2}{2\bar{u}^2} - \frac{(1 + 2\rho_{uv}^2)\sigma_u^2\sigma_v^2}{\bar{u}^2}$$

$$\bar{\varphi} \approx - \frac{\rho_{uv}\sigma_u\sigma_v}{\bar{u}^2} - \frac{3\rho_{uv}\sigma_u^3\sigma_v}{\bar{u}^4} + \frac{3\rho_{uv}\sigma_u\sigma_v^3}{\bar{u}^4}$$

$$\sigma_\varphi^2 \approx \frac{\sigma_v^2}{\bar{u}^2} - \frac{2\sigma_v^4}{\bar{u}^4} + \frac{3\sigma_u^2\sigma_v^2}{\bar{u}^4} + \frac{5\rho_{uv}^2\sigma_u^2\sigma_v^2}{\bar{u}^4}$$

$$\sigma_w^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$$

$$\rho_{r\varphi}\sigma_r\sigma_\varphi \approx \frac{\rho_{uv}\sigma_u\sigma_v}{\bar{u}} + \frac{\rho_{uv}\sigma_u\sigma_v^3}{2\bar{u}^3}$$

Model II Gegeven: $\bar{r}$, σ_r, σ_φ en $\rho_{r\varphi}$

$$\bar{u} = \bar{r}\, e^{-\frac{1}{2}\sigma_\varphi^2}$$

$$\sigma_u^2 = \tfrac{1}{2}(\bar{r}^2 + \sigma_r^2)(1 + e^{-2\sigma_\varphi^2}) - 2\rho_{r\varphi}^2\sigma_r^2\sigma_\varphi^2 e^{-2\sigma_\varphi^2} - \bar{r}^2 e^{-\sigma_\varphi^2}$$

$$\bar{v} = \rho_{r\varphi}\sigma_r\sigma_\varphi\, e^{-\frac{1}{2}\sigma_\varphi^2}$$

$$\sigma_v^2 = \tfrac{1}{2}(\bar{r}^2 + \sigma_r^2)(1 - e^{-2\sigma_\varphi^2}) + 2\rho_{r\varphi}^2\sigma_r^2\sigma_\varphi^2 e^{-2\sigma_\varphi^2} - \rho_{r\varphi}^2\sigma_r^2\sigma_\varphi^2 e^{-\sigma_\varphi^2}$$

$$\sigma_w^2 = \bar{r}^2(1 - e^{-\sigma_\varphi^2}) + \sigma_r^2(1 - \rho_{r\varphi}^2\sigma_\varphi^2 e^{-\sigma_\varphi^2})$$

$$\rho_{uv}\sigma_u\sigma_v = \bar{r}\rho_{r\varphi}\sigma_r\sigma_\varphi\, e^{-\sigma_\varphi^2}(2e^{-\sigma_\varphi^2} - 1)$$

5 Numerieke resultaten betreffende de toetsing van de formules en de variatie van de diverse grootheden.

De vraag is nu in hoeverre de formules nauwkeurig zijn en in hoeverre de formules voor het ene model nog bruikbaar zijn als in feite het andere model geldt. Dit laatste in verband met het feit dat de zeer eenvoudige formule (3.1) wel gebruikt wordt om σ_y uit $\bar{u}$ en $\bar{r}$ te bepalen, ook als mogelijk model I geldt. Hiervoor is (3.1) omgezet in: $\sigma_y = \sqrt{2 \ln(\bar{r}/ \bar{u})}$ (3.1')

Voor het verkrijgen van numerieke resultaten zijn uitgaande van de model I resp. model II m.b.v. de computer steekproeven gesimuleerd voor een aantal waarden van de basisgrootheden. Hierbij is eenvoudigheidshalve $\bar{u}$ resp. $\bar{r}$ gelijk aan 1 gesteld. Dit kan zonder bezwaar omdat $\bar{u}$ en $\bar{r}$ in feite schaalgrootheden zijn.

Uit deze steekproeven zijn zowel de waarden van de basisgrootheden van het gebruikte model als die van het andere model bepald.

In de tabellen 1 en 2 zijn voor resp. model I en model II de uitgangsgrootheden en de steekproefwaarden van deze grootheden vermeld

Vervolgens zijn genoteerd de waarden van de grootheden van het andere model; en wel op drie verschillende wijzen verkregen n.l.: 1°: direct uit de steekproeven; 2°: via de formules met gebruik van de steekproefgrootheden van het uitgangsmodel; 3°: via de formules met gebruik van de basisgrootheden van het uitgangsmodel. Voor het geval van model I zijn onder 5 en 6 nog de resultaten weergegeven van de berekening van σ_y volgens (3.1') uitgaande resp. van steekproefwaarden en van basisgegevens als ingangswaarden.

In de eerste plaats blijkt nu dat de steekproefschattingen van de basisgrootheden binnen de theoretische betrouwbaarheidsmarges overeenstemmen met de uitgangswaarden van deze basisgrootheden; dit is gemakkelijk na te gaan.(N.B. de numerieke resultaten zijn hier voor de beide modellen aan elkaar gelijk omdat voor de computer hetzelfde programma met dezelfde "random"simulatie is gebruikt)

In de tweede plaats blijkt uit de overeenstemming tussen de gegevens die met 1 en 2 zijn genoteerd dat de formules wel correct zijn. Verder is het zo dat de waarden volgens de formules met de basisgrootheden als ingangsgegevens, die onder 3 zijn genoteerd, meer afwijken van de steekproefwaarden dan die onder 2; maar dat is in overeenstemming met de afwijking tussen de steekproefwaarden van de basisgrootheden en de uitgangswaarden van deze grootheden zelf.

Hoe de grootheden van model II varieren met de basisgrootheden van model I als dit geldt, en omgekeerd is uit de onder 3 genoteerde gegevens af te leiden. Ter verduidelijking zijn deze gegevens nog in de figuren 1 en 2 in beeld gebracht.

Bij figuur 1 is bovendien een figuur 1.0 opgenomen die het verloop weergeeft van de verhouding van σ_φ volgens (3.1') tot die volgens (2.6) op grond van de basisgegevens. In alle figuren is het verloop van de betrokken grootheid weergegeven als functie van voor de vier mogelijke combinaties van σ_u, σ_v .

De belangrijkste conclusies zijn de volgende:

Uit fig 1.0 blijkt dat als σ_φ wordt berekend met (3.1') een fout wordt gemaakt die groter wordt met toenemende ρ_{uv} en met toenemende σ_u maar kleiner bij toenemende σ_v , althans mits ρ_{uv} en σ_u niet te klein zijn. Bij ρ_{uv} waarden van ca 0,6 kan de fout tot ca 10 % oplopen.

Afgezien van het effect van de schaalgrootheden $\bar{r}$ resp. $\bar{u}$ geldt verder:

Als $\rho \neq 0$ dan $\bar{\varphi} \neq 0$ indien I geldt en $\bar{v} \neq 0$ indien II geldt.

$\bar{r}$ varieert nauwelijks met ρ_{uv} en hangt hoofdzakelijk van σ_v af (neemt toe met toenemende σ_v)

$\bar{u}$ hangt in het geheel niet van $\rho_{r\varphi}$ af maar alleen van (neemt af met toenemende σ_φ)

σ_r resp σ_u nemen enigszins af met toenemende ρ maar zijn verder wederzijds afhankelijk van σ_u resp σ_r d.w.z. ze zijn van dezelfde grootte orde.

σ_φ resp σ_v nemen toe met toenemende ρ ; σ_φ vrij sterk, σ_v slechts weinig. Verder zijn ze hoofdzakelijk wederzijds afhankelijk.

Tenslotte zijn de correlatiecoëfficienten $\rho_{r\varphi}$ resp ρ_{uv} vrijwel lineair wederzijds afhankelijk van elkaar en van nagenoeg dezelfde grootte.

Als I geldt is $\rho_{r\varphi}$ praktisch identiek met ρ_{uv} indien $\sigma_u = \sigma_v$, iets groter dan ρ_{uv} als $\sigma_v > {}_u$ en kleiner als $\sigma_v < \sigma_u$.

Als II geldt is ρ_{uv} kleiner dan $\rho_{r\varphi}$ waarbij σ_r nauwelijks in vloed heeft, maar het verschil tussen $\rho_{r\varphi}$ en ρ_{uv} toeneemt als σ_φ toeneemt.

6 Bepaling van de karakteristieke grootheden uit de basisgegevens r_i en α_i.

Bij de berekening van de diverse grootheden uit een aantal waarnemingen r_i , α_i is het niet wenselijk om alle waarnemingen van de reeks op te slaan om na de beeindiging van de reeks de gewenste grootheden te berekenen. Het is veel efficienter alle nodige informatie uit r_i en α_i direct na de waarneming te bepalen en tijdens de voortgang van het proces te sommeren, waarna achteraf alle gewenste grootheden kunnen worden bepaald.

Uiteraard is dit voor de bepaling van $\bar{r}$ en σ_r geen probleem wegens $\bar{r} = \frac{1}{N}\Sigma r_i$ en $\sigma_r^2 = \frac{1}{N-1}(\Sigma r_i^2 - \bar{r}^2)$. Voldoende is hiertoe r_i en r_i^2 doorlopend te sommeren.

In verband met het feit dat α_i een sprong van 0° naar 360° of omgekeerd kan maken wat moeilijkheden bij de bepaling van gemiddelde en spreiding geeft, is het handig om over te gaan op het cartesische stelsel x_i en y_i volgens : $x_i = r_i \cos \alpha_i$ en $y_i = r_i \sin \alpha_i$.

$\bar{u}$ en $\bar{\alpha}$ zijn dan te bepalen uit:

$\bar{u} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$ en $\bar{\alpha} = \mathrm{bg\ tg}\ \bar{y}/\bar{x}$.

De grootheden σ_u , σ_v en $\rho_{u,v}$ kunnen vervolgens bepaald worden met de formules:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{\bar{u}^2}\left\{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)\bar{x}^2 + 2(\overline{xy} - \bar{x}\bar{y})\bar{x}\bar{y} + (\overline{y^2} - \bar{y}^2)\bar{y}^2\right\}$$

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{\bar{u}^2}(\bar{x}^2\overline{y^2} - 2\bar{x}\bar{y}\overline{xy} + \bar{y}^2\overline{x^2})$$

$$\rho_{u,v} = \frac{1}{\bar{u}\sigma_u\sigma_v}\left\{(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)\overline{xy} - (\overline{x^2} - \overline{y^2})\bar{x}\bar{y}\right\}$$

De afleiding van deze formules volgt direct uit $v_i = r_i \sin{}_i = r_i \sin(\alpha_i - \bar{\alpha}) = r_i \sin\alpha_i \cos\bar{\alpha} - r_i \cos\alpha_i \sin\bar{\alpha} = y_i \cos\bar{\alpha} - x_i \sin\bar{\alpha} = \frac{1}{\bar{u}}(y_i\bar{x} - x_i\bar{y})$ en evenzo berekend ; $u_i = \frac{1}{\bar{u}}(x_i\bar{x} - y_i\bar{y}) - \bar{u}$.

De berekening van σ_γ is niet op overeenkomstige wijze mogelijk. Men moet daarvoor van (2.6) of (3.1') gebruik maken, waarvoor men in feite zou moeten weten of model I dan wel model II het beste bruikbaar is.

Fig 1.0

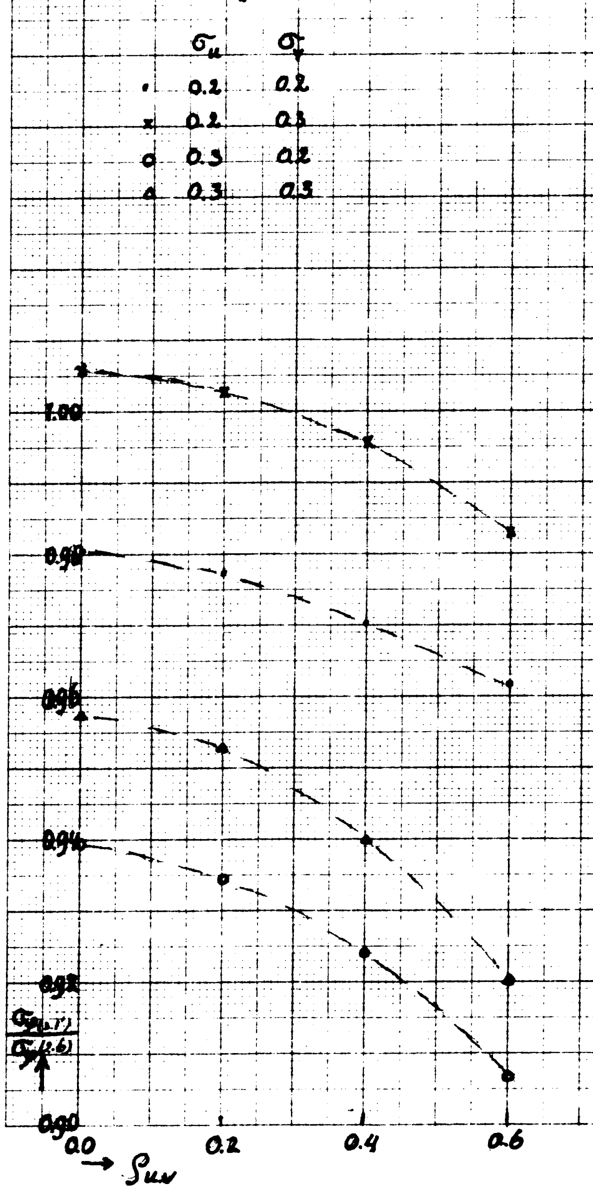


Fig 1.1

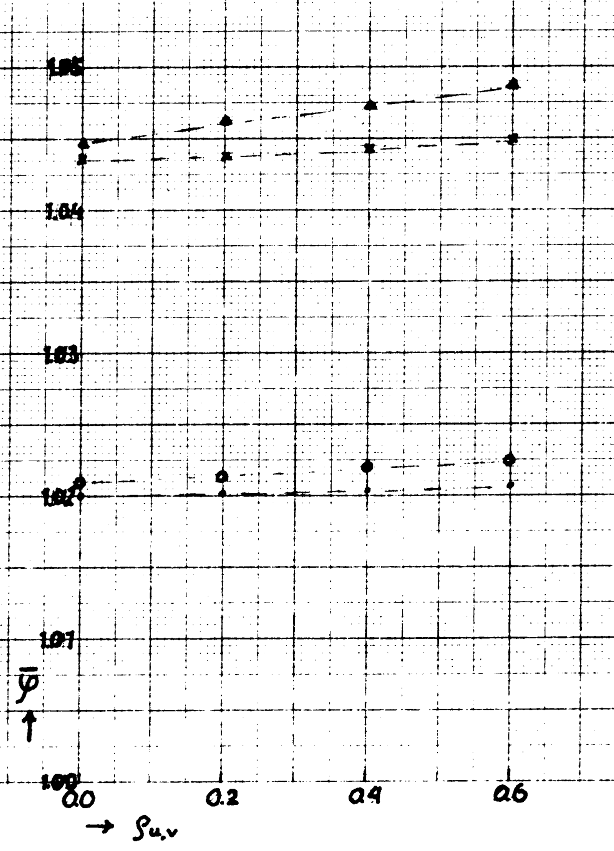
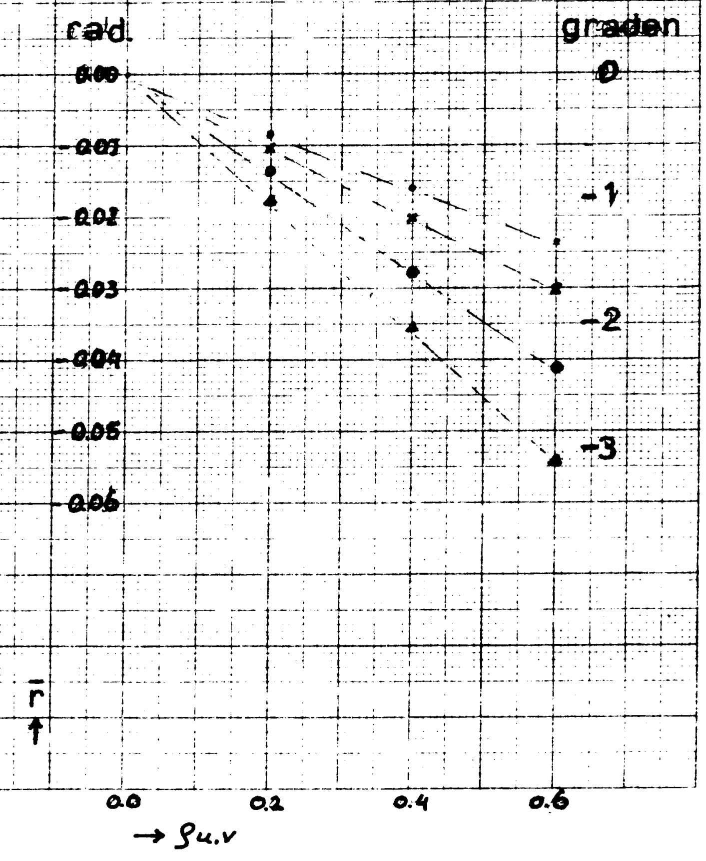


Fig 1.2



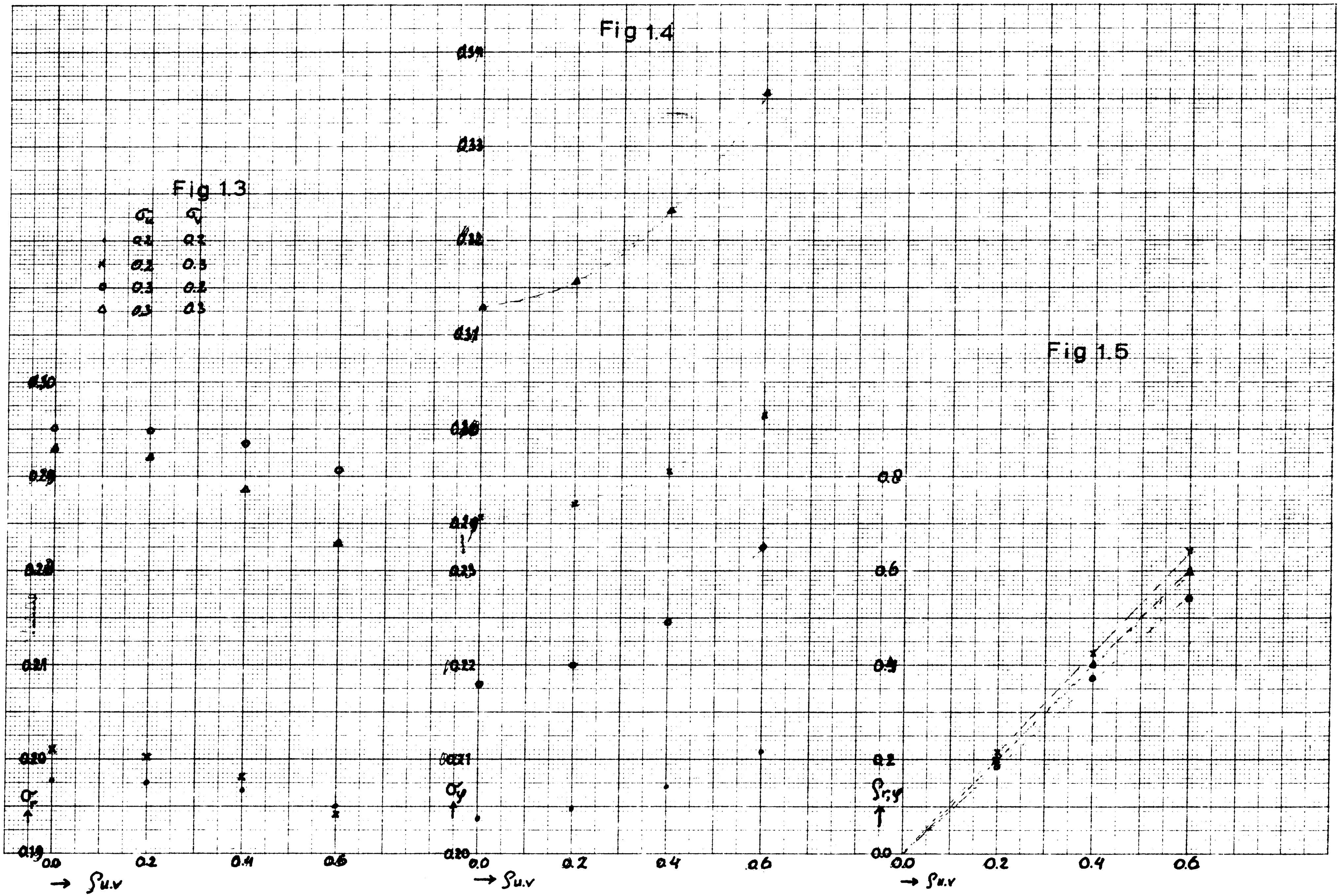


Fig 1.3
σ_u σ_v
0.2 0.2
0.2 0.3
0.3 0.2
0.3 0.3
0.0
0.2
0.4
0.6
$\to \rho_{u,v}$
σ_r
Fig 1.4
0.22
0.0
0.2
0.4
0.6
$\to \rho_{u,v}$
σ_y
Fig 1.5
0.8
0.6
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
$\to \rho_{u,v}$
$\rho_{r,y}$

Fig 2.1

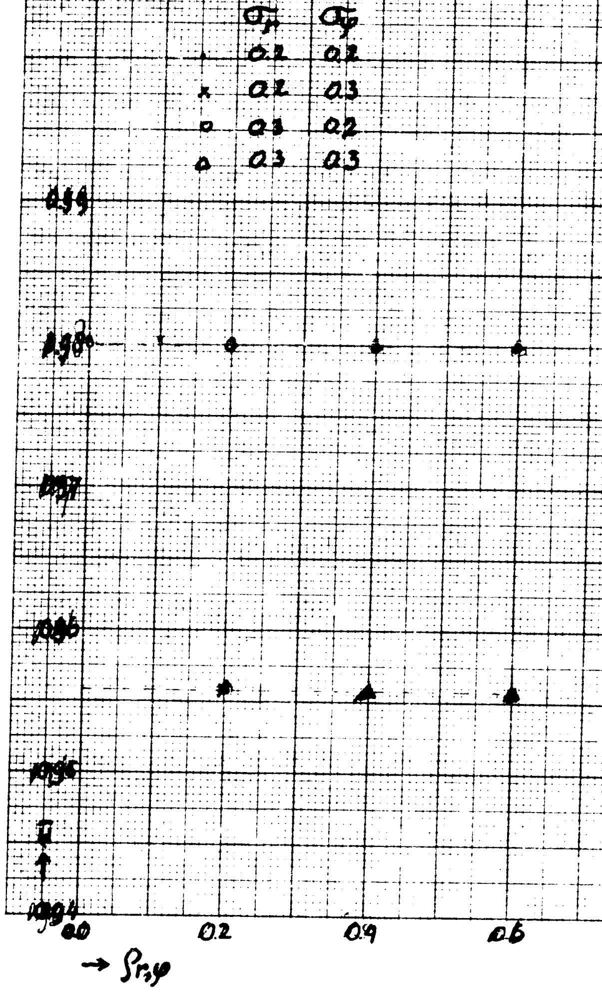
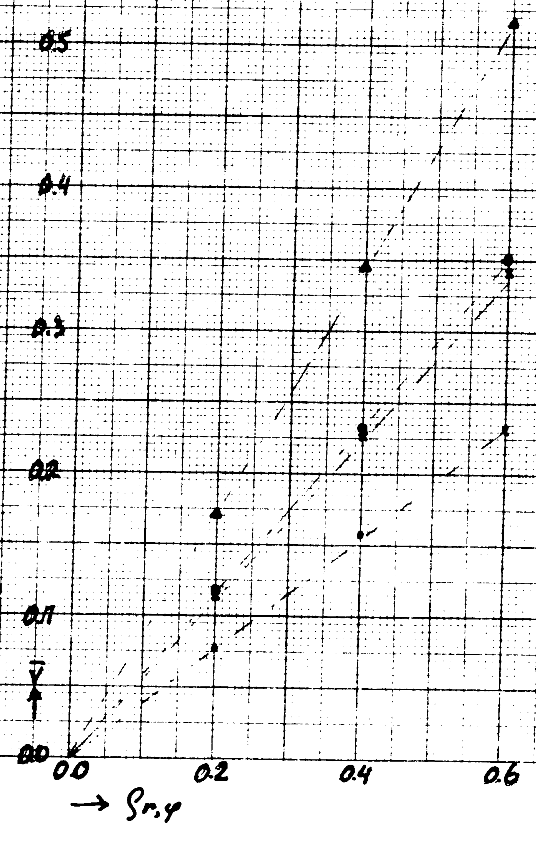

σ_μ σ_φ
0.2 0.2
0.2 0.3
0.3 0.2
0.3 0.3
0.2
0.4
0.6
$\rightarrow \rho_{r,\varphi}$

Fig 2.2


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
$\rightarrow \rho_{r,\varphi}$

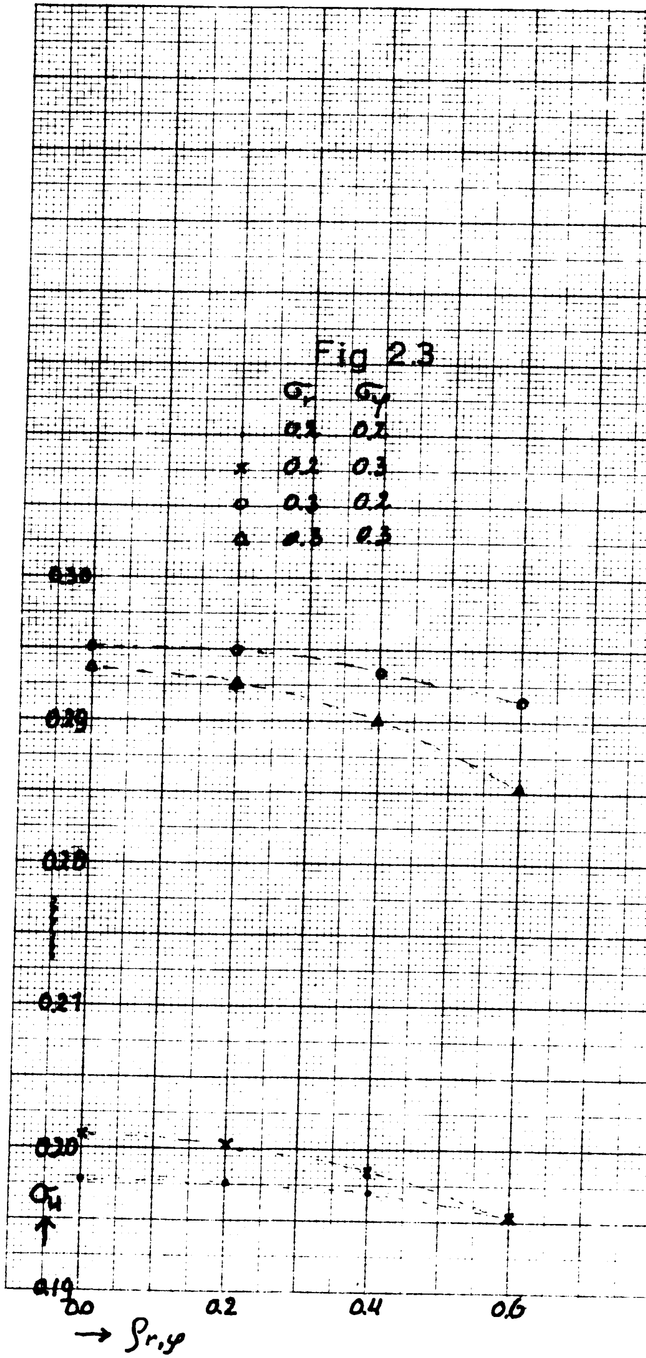


Fig 2.3

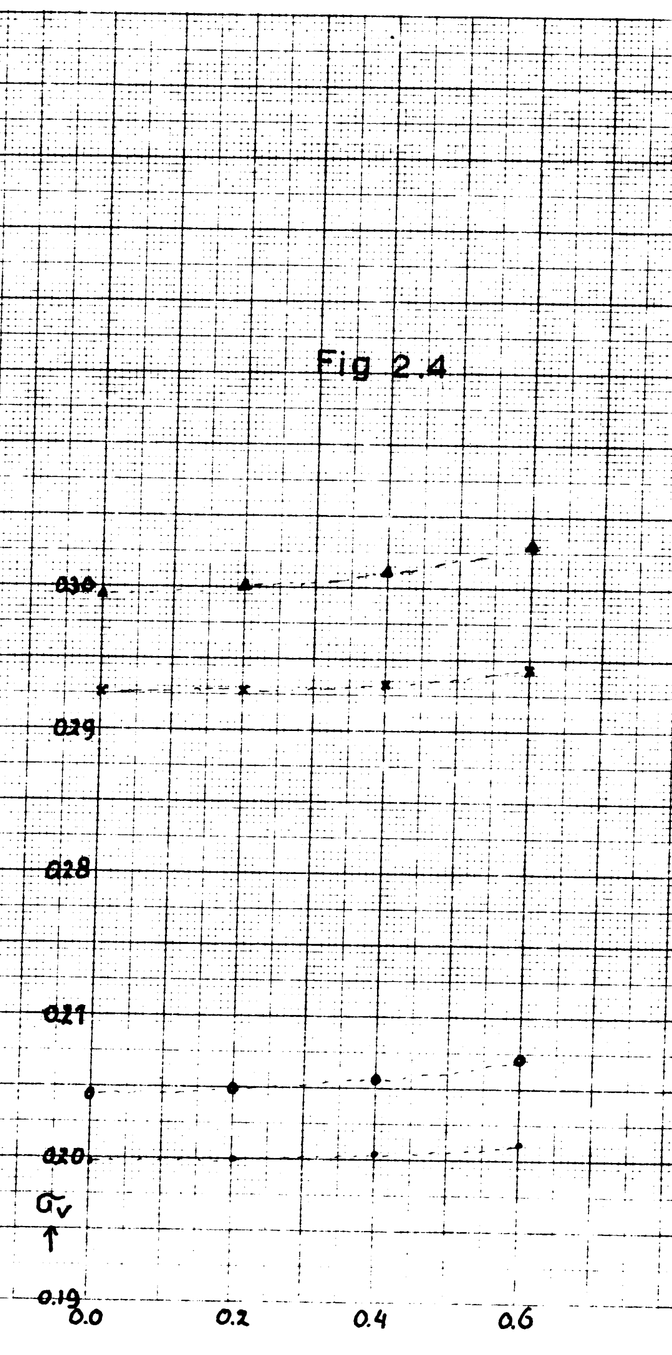


Fig 2.4

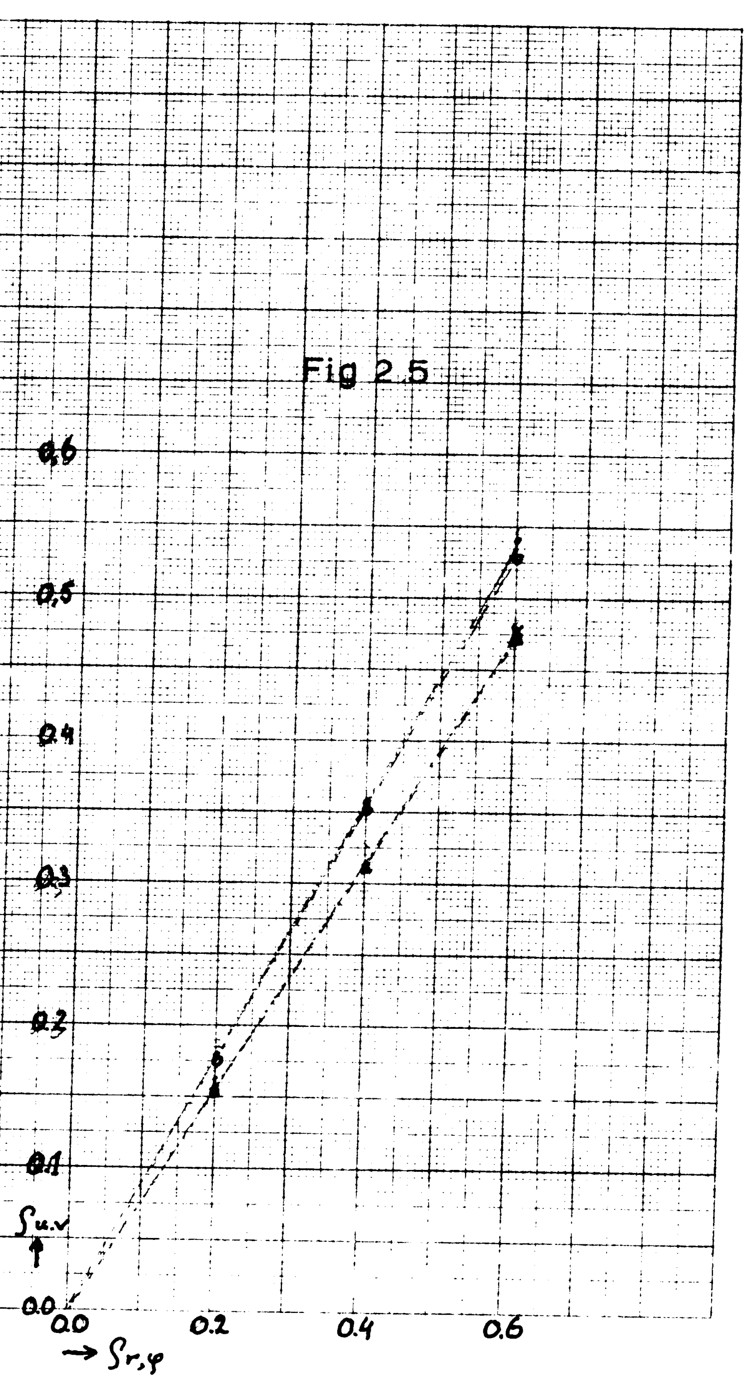


Fig 2.5