K O N I N K L IJ K N E D E R L A N D S
M E T E O R O L O G I S C H I N S T I T U U T

D e B i l t

Verslagen

V - 287

S. Kruizinga

Aanpassen van kwadratische stroomfuncties aan stroomwaarnemingen

De Bilt, 1977

Publikatienummer: K.N.M.I. V-287 (S.B.)

U.D.C.: 551.465.556 :
518.5

1. Inleiding.

Door de afdeling Oceanografisch Onderzoek wordt een onderzoek verricht naar detail variaties van reststromen rondom bepaalde posities in het zuidelijke gedeelte van de Noordzee. Bij dit onderzoek wordt een aantal stroommeters in een relatief klein gebied (grootte orde 200 km^2) op een aantal posities uitgezet. De metingen van deze stroommmeters worden door middeling over een getijperiode omgezet in reststromen. Het Statistisch Bureau werd gevraagd om een methode te ontwikkelen waarmee op een objectieve manier de beste stroomfunctie behorend bij een gegeven stel waarnemingen kan worden berekend.

2. Beschrijving van het probleem en het statistisch model.

Gegeven is een aantal punten $(x_1,y_1/x_2,y_2/ \quad /x_n,y_n)$ in een tweedimensionaal horizontaal liggend vlak. In deze punten zijn de x- en y-componenten van de stroming, $(u_1,v_1/u_2,v_2/ \quad /u_n,v_n)$, gemeten. Verondersteld wordt dat deze stroming beschreven kan worden met een kwadratische stroomfunctie:

$$\phi(x,y) = b_1x + b_2y + C_{11}x^2 + C_{12}xy + C_{22}y^2 \tag{2.1}$$

waarin aangenomen is dat de stroomfunctie ϕ nul is in de oorsprong. Een stroomfunctie verdeling volgens 2.1 zal dus altijd relatief zijn. Dit is voor het onderzoek van OO niet zo'n groot bezwaar daar gebruik van de stroomfunctie gepaard gaat met differentiaties waardoor een constante verdwijnt. De metingen van de stromingen echter zijn behept met toevallige fouten zodat het niet mogelijk is om rechtstreeks uit de stroomwaarnemingen de coëfficienten van $\phi(x,y)$ te berekenen. De coëfficienten van $\phi(x,y)$ zullen via een of andere kleinste kwadraten geschat moeten worden.

Het statistisch model kan nu als volgt geschreven worden,

$$\begin{aligned} u_n &= u_n^w + \delta u_n \\ v_n &= v_n^w + \delta v_n \end{aligned} \tag{2.2}$$

waarin (u_n,v_n) de gemeten snelheidscomponenten op plaats n, (u_n^w,v_n^w) de werkelijke snelheidscomponenten op plaats n en $(\delta u_n,\delta v_n)$ de randomcomponenten ten gevolge van storingen. Door de relaties tussen de stroomfunctie en de componenten van de stroming te gebruiken kan men (2.2) ook schrijven als,

$$\begin{aligned} u_n &= -b_2 - C_{12}x_n - 2C_{22}y_n + \delta v_n \\ v_n &= b_1 + 2C_{11}x_n + C_{12}y_n + \delta w_n \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dit stelsel kan beschouwd worden als een stelsel van twee gekoppelde lineaire regressie vergelijkingen. Voor de interpretatie van de stroommetingen is men geinterresseerd in zo goed mogelijke schattingen van de coëfficienten b_1, b_2, c_{11}, c_{12} en c_{22}. Daarnaast dient echter ook de zin van het regressie model getoetst te worden.

3. Schatting van de coëfficienten.

Om de waarde van de coëfficienten bij een gegeven set waarnemingen te kunnen schatten wordt de volgende functie ingevoerd,

$$\Delta(b_1, b_2, c_{11}, c_{12}, c_{22}) = \Delta_1 + \Delta_2 \qquad (3.1)$$

waarin,

$$\Delta_1 = \sum_{n=1}^{N} (u_n + b_2 + c_{12}x_n + 2c_{22}y_n)^2$$
$$\Delta_2 = \sum_{n=1}^{N} (v_n - b_1 - 2c_{11}x_n - c_{12}y_n)^2 \qquad (3.2)$$

Als beste schatting van de parameters b_1 t/m c_{22} worden nu die waarden geaccepteerd welke deze functie Δ minimaal maken. In feite betekent dit dat de coëfficienten zo worden gekozen dat het gemiddelde van het kwadraat van de lengte van de geschatte stroomvector minus de waargenomen stroomvector zo klein mogelijk wordt gemaakt. De schattingen voor de parameters kunnen gevonden worden door de partiele afgeleiden van Δ naar de parameters gelijk aan nul te stellen (dus $\frac{\partial\Delta}{\partial b_1} = 0$, enz.).

Indien men deze vijf partiele afgeleiden uitwerkt dan geeft dit aanleiding tot een stelsel van vijf lineaire vgl met vijf onbekenden dat als volgt genoteerd kan worden

$$\vec{M} \cdot \vec{\theta} = \vec{D} \qquad (3.3)$$

Hierin is θ de vector van de te schatten coëfficienten ($\theta = b_1, b_2, c_{11}, c_{12}, c_{22}$), $\vec{M}$ is een matrix welke uit de posities x_n, y_n wordt berekend en $\vec{D}$ een vector welke uit de waarnemingen en de posities wordt berekend. In bijlage I worden deze grootheden in uitgeschreven vorm gegeven.

Bij gunstige keuze van $(x_n y_n)$ is $\vec{M}$ niet singulier zodat dan geldt

$$\vec{\theta} = \vec{M}^{-1} \cdot \vec{D} \qquad (3.4)$$

4. Betrouwbaarheid van de coëfficienten.

Indien men de coëfficienten schat met behulp van vgl (3.4) zal men niet de ware coëfficienten vinden. De randomtermen δu en δv zullen invloed uitoefenen op de vector $\vec{D}$ welke invloed via (3.4) merkbaar wordt in $\vec{\Theta}$. Door bepaalde veronderstellingen te doen ten aanzien van de randomtermen δu en δv kan men een schatting maken van de mate waarin $\vec{\Theta}$ kan afwijken van de "ware" Θ

De vector $\vec{D}$ kan men schrijven als

$$\vec{D} = \vec{D}_o + \delta\vec{D} \tag{4.1}$$

waarin $\vec{D}$ de vector berekend uit de waarnemingen, $\vec{D}_o$ de vector berekend uit de "ware" stromen en $\delta\vec{D}$ een storingsvector. Indien men nu ten aanzien van de meetfouten de volgende veronderstellingen doet;

a. De meetfouten van u en v zijn gemiddeld nul, hebben even grote variantie en zijn onafhankelijk van elkaar

b. De meetfouten zijn onafhankelijk van de plaats en van ware stroming.

dan kan men aantonen dat de stochastische eigenschappen van $\delta\vec{D}$ alleen van de meetposities en de meetfouten afhangt maar niet meer van de werkelijke stromen. Verder geldt natuurlijk

$$\vec{\Theta} = \vec{M}^{-1}.(\vec{D}_o + \delta\vec{D}) = \vec{\Theta}_o + \vec{M}^{-1}\delta\vec{D} = \vec{\Theta}_o + \delta\vec{\Theta} \tag{4.2}$$

Op grond van de veronderstellingen is aan te tonen dat

$$<\delta\vec{D}> = o \tag{4.3}$$

waarbij met < > wordt aangegeven het gemiddelde over een groot aantal statistisch identiek situaties. Uit (4.2) volgt dan $<\delta\vec{\Theta}> = o$ zodat de geschatte $\vec{\Theta}$ zal spreiden rond de werkelijke $\vec{\Theta}$ met gemiddelde fout nul. Om de mate waarin $\vec{\Theta}$ zal spreiden rond $\vec{\Theta}_o$ vast te leggen gebruikt men de covariantie matrix COV_Θ welke is gedefinieerd als,

$$COV_{\vec{\Theta}} = <\delta\vec{\Theta} \, . \, \delta\vec{\Theta}^T> \tag{4.4}$$

waarin $\delta\vec{\Theta}$ een kolomvector, $\delta\vec{\Theta}^T$ de gespiegelde dus een rijvector.

Uit $\delta\vec{\Theta} = \vec{M}^{-1} . \delta\vec{D}$ volgt dan

$$COV_\Theta = < M^{-1}\delta\vec{D} \, . \, \delta\vec{D}^T \vec{M}^{-1^T} > =$$

$$= \vec{M}^{-1} . <\delta\vec{D} \, . \, \delta\vec{D}^T> . \vec{M}^{-1^T} \tag{4.5}$$

Op grond van de veronderstellingen a) en b) kan men aantonen,

$$<\delta\vec{D} \, , \, \delta\vec{D}^T> = \sigma^2\vec{M} \tag{4.6}$$

waarin σ^2 de variantie van de meetfouten en $\vec{M}$ identiek aan $\vec{M}$ in (3.4). Dus

$$COV_\Theta = \sigma^2 \,.\, \vec{M}^{-1^T} = \sigma^2 \vec{M}^{-1} \tag{4.7}$$

(M is symmetrisch → M^{-1} is symmetrisch → $\vec{M}^{-1^T} = \vec{M}^{-1}$).
Met behulp van deze covariantiematrix kan men een meerdimensionale ellipsoide definieren met als centrum $\vec{\Theta}_o$ welke dan met grote kans (95%) de gevonden $\vec{\Theta}$ zal bevatten. Deze ellipsoide definieert men dan als volgt,

$$\delta\vec{\Theta} \,.\, COV_\Theta^{-1} \,.\, \delta\vec{\Theta}^T < F \tag{4.8}$$

of

$$\delta\vec{\Theta} \,.\, \vec{M} \,.\, \delta\vec{\Theta}^T < \sigma^2 F \tag{4.9}$$

waarin F een constante welke uit de F-verdeling valt af te leiden. Daar deze ellipsoide qua grootte niet afhankelijk is van de werkelijke Θ_o kan men deze ellipsoide ook rond de vector Θ zetten en daarna stellen dat de werkelijke $\vec{\Theta}(\vec{\Theta}_o)$ met grote waarschijnlijkheid hier binnen zal liggen.

In voorgaande afleiding is σ^2, de variantie van de meetfout, in feite nog onbekend. Deze σ^2 dient uit de gegevens te worden geschat.

5. Schatting van de restvariantie σ^2.

Indien men de werkelijke waarde van de coëfficienten zou kennen dan zou de restvariantie σ^2 gemakkelijk te schatten zijn. Immers in dat geval zou voor de functie Δ berekend voor de werkelijke waarde van de coëfficienten gelden

$$\Delta(\vec{\Theta}_o) = \sum_{n=1}^{N} (\delta u_n)^2 + (\delta v_n)^2 \tag{5.1}$$

en gemiddeld over een groot aantal statistisch identieke situaties zou gelden

$$< \Delta(\vec{\Theta}_o)> = 2N.\sigma^2 \tag{5.2}$$

waaruit volgt dat dan

$$\sigma^2 = \Delta(\Theta_o)/2N \tag{5.3}$$

een goede schatter van σ^2 zou zijn.

Helaas zijn de werkelijke waarden van de coëfficienten in de praktijk niet bekend. Op de volgende manier kan men echter toch nog tot een goede schatting komen.

De functie Δ kan men als volgt in een meerdimensionale Tailor-reeks ontwikkelen,

$$\Delta(\vec{\Theta} + \delta\vec{\Theta}) = \Delta(\vec{\Theta}) + \vec{A}^T \,.\, \delta\vec{\Theta} - \tfrac{1}{2}\delta\vec{\Theta}^T \,.\, \vec{B} \,.\, \delta\vec{\Theta} \tag{5.4}$$

waarin $\vec{A}$ de vector met de eerste afgeleiden naar de componenten van $\vec{\Theta}$ ($\vec{A}^T = (\frac{\partial\Delta}{\partial\Theta_1}, \frac{\partial\Delta}{\partial\Theta_2},)$) en $\vec{B}$ de matrix van tweede afgeleiden,

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\Delta}{\partial\Theta_1^2} , & \frac{\partial^2\Delta}{\partial\Theta_1\partial\Theta_2}, \ldots \\ & \\ \frac{\partial^2\Delta}{\partial\Theta_1\partial\Theta_2} , & \frac{\partial^2\Delta}{\partial\Theta_2^2}, \ldots . \end{pmatrix}$$

Stel nu dat men in een groot aantal situaties steeds de functie zou ontwikkelen om het punt waar het minimum Δ_{min} werd gevonden. In dat punt zijn de eerste afgeleiden identiek nul zodat de term $\vec{A}^T . \delta\Theta$ vervalt. Veronderstel verder dat $\delta\vec{\Theta}$ steeds gelijk genomen wordt aan $\vec{\Theta}_o - \vec{\Theta}$, dus gelijk aan de werkelijk coëfficientenvector minus de geschatte vector, en dat deze $\delta\vec{\Theta}$ klein is.
Dan zou voor iedere situatie gelden,

$$\Delta(\Theta_o) = \Delta_{min} + \tfrac{1}{2}\, \delta\vec{\Theta} \,.\, \vec{B} \,.\, \delta\vec{\Theta} \qquad (5.5)$$

en gemiddeld over alle situaties,

$$< \Delta(\Theta_o) > = 2N\sigma^2 = < \Delta_{min} > + < \tfrac{1}{2}\, \delta\vec{\Theta}^T \,.\, \vec{B} \,.\, \delta\vec{\Theta} > \qquad (5.6)$$

Indien men $\vec{B}$ uitschrijft dan blijkt dat $\vec{B} = 2\vec{M}$ waaruit volgt

$$< \tfrac{1}{2}\, \delta\vec{\Theta}^T \,.\, \vec{B} \,.\, \delta\vec{\Theta} > = < \delta\vec{\Theta}^T \,.\, \vec{M} \,.\, \delta\vec{\Theta} > \qquad (5.7)$$

Voor de rechterterm van (5.6) geldt,

$$< \delta\vec{\Theta}^T \,.\, \vec{M} \,.\, \delta\vec{\Theta} > = \mathrm{TRACE}\ (<\vec{M} \,.\, \delta\vec{\Theta} \,.\, \delta\vec{\Theta}^T>) =$$

$$\mathrm{TRACE}\ (\vec{M} \,.\, < \delta\vec{\Theta} \,.\, \delta\vec{\Theta}^T >) = \mathrm{TRACE}\ (\vec{M} \,.\, \sigma^2\vec{M}^{-1}) \qquad (5.8)$$

Dus

$$< \tfrac{1}{2}\, \delta\vec{\Theta}\, \vec{M}\, \delta\vec{\Theta} > = \sigma^2\ \mathrm{TRACE}(\vec{I}) \qquad (5.9)$$

waarin $\vec{I}$ de eenheidsmatrix met de dimensie van $\vec{M}$. De dimensie van $\vec{M}$ is weer gelijk aan het aantal aangepaste coëfficienten (P). Dit ingevuld in vgl 5.6 geeft,

$$< \Delta_{min} > = 2N\sigma^2 - \sigma^2 P \qquad (5.10)$$

waaruit volgt dat σ^2 geschat kan worden met

$$s^2 = \Delta_{min}/(2N-P) \qquad (5.11)$$

6. Toetsing van de coëfficienten.

Met behulp van de schatting van s^2 en de in paragraaf 4 afgeleide covariantie matrix kan men van ieder der coëfficienten nagaan of deze significant afwijkt van nul. Het toetsen van ieder der coëfficienten apart is voor het gegeven probleem niet zo relevant. Men wil immers niet weten of de coëfficient c_{11} van x^2 in $\phi(x,y)$ op zich significant van nul afwijkt doch of het kwadratisch deel in $\phi(x,y)$ als geheel significant is.

Voor het gegeven probleem zijn drie toetsen relevant:

A. Is de geschatte combinatie $\vec{\theta} = (b_1,b_2,c_{11},c_{12},c_{22})$ als geheel significant afwijkend van (0,0,0,0,0)?

B. Is de combinatie $\vec{\theta} = (b_1,b_2)$ als geheel significant afwijkend van (0,0)?

C. Is de combinatie $\vec{\theta} = (c_{11},c_{12},c_{22})$ als geheel significant afwijkend van (0,0,0)?

Onder aanname dat de meetfouten δu en δv bij benadering normaal verdeeld zijn kan men bovenstaande toetsen met behulp van de F-toets aanpakken.

Onder deze veronderstelling geldt dan namelijk dat;

$T_1 = \vec{\theta}^T \vec{M} \vec{\theta}$ verdeeld is volgens $\sigma^2.\chi^2(5)$

$T_2 = \vec{\theta}_L^{\,T} (\vec{M}_L^{-1})^{-1} \vec{\theta}_L$ verdeeld is volgens $\sigma^2.\chi^2(2)$

$T_3 = \vec{\theta}_K^{\,T} (\vec{M}_K^{-1})^{-1} \vec{\theta}_K$ verdeeld is volgens $\sigma^2.\chi^2(3)$

Hierbij wordt met $\vec{M}_L^{-1}$ aangeduid dat deel van de matrix $\vec{M}^{-1}$ dat betrekking heeft op de coëfficienten b_1 en b_2 (2 bij 2 rechtsboven) en $\vec{M}_K^{-1}$ geeft aan het deel van de matrix $\vec{M}^{-1}$ dat betrekking heeft op de coëfficienten c_{11},c_{12},c_{22}. Met $\chi^2(n)$ wordt de Gi-kwadraat verdeling met n vrijheidsgraden aangeduid.

Tevens geldt voor s^2 dat deze een verdeling $\sigma^2.\chi^2(2N-5)$ waaruit volgt dat:

T_1/s^2 verdeeld is volgens $F(5,2N-5)$

T_2/s^2 verdeeld is volgens $F(2,2N-5)$

T_3/s^2 verdeeld is volgens $F(3,2N-5)$

Na berekening van deze grootheden kunnen de toetsingen dus uitgevoerd worden met behulp van de standaard tabellen van de F-verdeling.

7. Slot.

De praktische toepassing van dit model en de resultaten zullen beschreven worden in de rapporten van de afdeling OO betreffende het in de inleiding genoemde onderzoek. Ten behoeve van deze toepassing werd tevens een programma geschreven voor de Burroughs B-6700.

Een handleiding voor dit programma wordt gegeven in bijlage II. De praktische toepassing is natuurlijk niet noodzakelijk beperkt tot stroommetingen doch ieder probleem dat aanleiding geeft tot gekoppelde lineaire regressie vergelijkingen als vermeld in vergelijking (2.5) kan hiermee worden opgelost.

BIJLAGE I: Formules.

Van een aantal belangrijke vergelijkingen is in deze bijlage de uitgeschreven vorm gegeven.

Vgl. (3.3)

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} N, & 0, & \Sigma 2x_n, & \Sigma y_n, & 0 \\ 0, & N, & 0, & \Sigma x_n, & \Sigma 2y_n \\ \Sigma 2x_n, & 0, & \Sigma 4x_n^2, & \Sigma 2x_n y_n, & 0 \\ \Sigma y_n, & \Sigma x_n, & \Sigma 2x_n y_n, & \Sigma x_n^2 + y_n^2 & \Sigma 2x_n y_n \\ 0, & \Sigma 2y_n, & 0, & \Sigma 2x_n y_n, & \Sigma 4y_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} \Sigma v_n \\ -\Sigma u_n \\ 2\Sigma x_n v_n \\ \Sigma(y_n v_n - x_n u_n) \\ -2\Sigma y_n u_n \end{pmatrix}$$

Paragraaf 3: Uit de veronderstellingen betreffende δu en δv volgt:

$$<\delta u_n> = <\delta v_n> = 0$$

$$<\delta u_n^2> = <\delta v_n^2> = \sigma^2$$

$$<\delta u_n . \delta u_{n'}> = <\delta v_n . \delta v_{n'}> = <\delta u_n . \delta v_{n'}> = <\delta u_n . \delta v_{n'}> = 0 \qquad n \neq n'$$

$$<\delta u_n . x_n> = <\delta v_n . y_n> = <\delta u_n . y_n> = <\delta v_n . x_n> = 0$$

Vgl. (4.2)

$$\delta\vec{D} = \begin{pmatrix} \Sigma \delta v_n \\ -\Sigma \delta u_n \\ 2\Sigma x_n \delta v_n \\ \Sigma(y_n \delta v_n - x_n \delta u_n) \\ -2\Sigma y_n . \delta u_n \end{pmatrix}$$

Vgl. (4.4) $\vec{C}_D = <(\delta\vec{D} \; . \; \delta\vec{D}^T)$ is een symmetrische matrix waarvan hier de (boven-) diagonaal elementen worden gegeven

$$C_D[1.1] = <(\Sigma\delta v_n) \; . \; (\Sigma\delta v_n)> = N\sigma^2$$

$$C_D[1.2] = <(\Sigma\delta v_n) \; . \; (-\Sigma\delta u_n)> = \emptyset$$

$$C_D[1.3] = <(\Sigma\delta v_n) \; . \; (2\Sigma x_n \delta v_n)> = (2\Sigma x_n)\sigma^2$$

$$C_D[1.4] = <(\Sigma\delta v_n) \; . \; \Sigma(y_n \delta v_n - x_n \delta u_n)> = (\Sigma y_n)\sigma^2$$

$$C_D[1.5] = <(\Sigma\delta v_n) \; . \; (-2\Sigma y_n \delta u_n)> = 0$$

$$C_D[2.2] = <(-\Sigma\delta u_n) \; (-\Sigma\delta u_n)> = N\sigma^2$$

$$C_D[2.3] = <(-\Sigma\delta u_n) \; (2\Sigma x_n \delta v_n)> = 0$$

$$C_D[2.4] = <(-\Sigma\delta u_n) \; (\Sigma(y_n \delta v_n - x_n \delta u_n))> = (\Sigma x_n).\sigma^2$$

$$C_D[2.5] = <(-\Sigma\delta u_n) \; (-2\Sigma y_n . \delta u_n)> = (2\Sigma y_n)\sigma^2$$

$$C_D[3.3] = 4<(\Sigma x_n \delta v_n) \; (\Sigma x_n \delta v_n)> = (4\Sigma x_n^2)\sigma^2$$

$$C_D[3.4] = 2<(\Sigma x_n \delta v_n) \; (\Sigma(y_n \; v_n - x_n \delta u_n))> = (2\Sigma x_n y_n)\sigma^2$$

$$C_D[3.5] = 4<(\Sigma x_n \delta v_n) \; (\Sigma y_n \delta u_n)> = 0$$

$$C_D[4.4] = <(\Sigma(y_n \delta v_n - x_n \delta u_n))^2> = (\Sigma x_n^2 + y_n^2).\sigma^2$$

$$C_D[4.5] = 2<(\Sigma y_n \delta v_n - x_n \delta u_n). \; (-\Sigma y_n \delta u_n)> = (2\Sigma x_n y_n)\sigma^2$$

$$C_D[5.5] = 4<(\Sigma y_n \delta u_n)^2> = (4\Sigma y_n^2)\sigma^2$$

Dit geldt slechts onder de veronderstellingen die hiervoor zijn geformuleerd.

BIJLAGE II: Handleiding programma OBJECT/FITSTREAMFUNC.

Dit programma verwerkt een serie plaats en stroomsnelheid gegevens in overeenstemming met het in voorgaande rapport beschreven model. Het programma is als code-file aanwezig op PACK(TEST) en kan door iedereen worden aangeroepen.

De invoergegevens worden normaal van kaart gelezen. Door file-equation kan dit veranderd worden. De file waar dan van wordt gelezen dient dan wel met EBCDIC characters beschreven te zijn terwijl de attributes UNITS en MAXRECSIZE respectievelijk CHARACTERS en 80 dienen te zijn. Interne naam van de file die gelezen wordt is CRD.

De ingevoerde getallen kunnen op een willekeurige plaats in het record (kaart) en de file staan. De aangeboden kaarten (file) worden character voor character afgezocht naar het begin van een getal, een teken, cijfer of punt, uit de string van characters tot de eerst volgende spatie of tot einde record wordt dan het getal opgebouwd. Toegestaan zijn (signed) integers en (signed) numbers beide met exponential parts. Tussen de getallen mag comment gegeven worden. Een comment begint met een character dat niet het begin van een getal kan zijn en geen spatie is, en wordt beëindigd door een = teken. In een comment worden alle characters geskipt. Zowel een einde record als een spatie fungeren niet als einde comment maar wel als einde getal.

De eerste drie getallen welke door het programma worden gelezen worden zonder meer uitgeprint in de respectievelijke formats I2, I2 en I6 achter de teksten "EXPERIMENT:", "BEWERKING:" en "DATUM:" (zie voorbeeld output). Deze getallen kunnen gebruikt worden om output te merken. Het vierde getal dat wordt gelezen wordt geinterpreteerd als het aantal (N) combinaties (x_n,y_n,u_n,v_n) dat beschikbaar is. De volgende 4N getallen worden als N van dergelijke combinaties geinterpreteerd. Na het lezen en verwerken van deze gegevens springt het programma weer terug naar het begin en tracht dan verder in de file te lezen. Einde file wordt dan gedetecteerd als einde verwerking.

Na de kenmerkende gegevens print het programma vervolgens op vijf regels de matrix $\vec{M}$ in de eerste vijf kolommen en de matrix $\vec{M}^{-1}$ in de volgende vijf kolommen. Terwijl onder $\vec{M}$ de vector $\vec{D}$ wordt geprint. Aansluitend worden de schattingen van de coëfficienten afgedrukt.

Onder de kop invoergegevens enz. wordt voor iedere ingevoerde combinatie geprint, "volgnr. $n,x_n,y_n,u_n,v_n,\hat{\Phi}_n,\hat{u}_n,\hat{v}_n,u_n-\hat{u}_n,v_n-\hat{v}_n$" waarbij de variabelen met een ^ berekend zijn met behulp van de geschatte coëfficienten.

Vervolgens worden de schattingen van $(\delta u)^2$ en $(\delta v)^2$ en s^2 gegeven. Tot slot worden de in het rapport besproken toetsingsgrootheden afgedrukt.

EXPERIMENT: 1 BEWERKING: 1 DATUM: 760922

4.0000E+00	0.	7.1200E+01	1.6700E+01	0.	9.2218E-01	1.9318E-01	-3.3175E-02	-1.9560E-02	-2.2868E-03
0.	4.000E+00	0.	3.5600E+01	3.3400E+01	1.9318E-01	5.1362E-01	-5.7464E-03	-2.1771E-02	-8.3658E-03
7.1200E+01	0.	1.9028E+03	1.2954E+02	0.	-3.3175E-02	-5.7464E-03	1.7273E-03	5.8185E-04	6.8024E-05
1.6700E+01	3.5600E+01	1.2954E+02	9.0407E+02	1.2954E+02	-1.9560E-02	-2.1771E-02	5.8185E-04	2.2044E-03	2.5772E-04
0.	3.3400E+01	0.	1.2954E+02	1.7135E+03	-2.2868E-03	-8.3658E-03	6.8024E-05	2.5772E-04	7.2719E-04
5.2000E+00	-3.9000E+00	4.1000E+00	5.8680E+01	-1.5586E+02					

B1= 3.1145E+00 B2= -9.9579E-01 C11= -1.1948E-01 C12= 7.4768E-02 C22= -7.7203E-02

INVOERGEGEVENS TERUGGESCHATTE SNELHEDEN EN DEVIATIES

1	17.20000	-7.40000	1.60000	-1.90000	1.1849E+01	-1.43283	-1.54874	0.16717	0.35126
2	0.00000	0.00000	1.30000	3.20000	0.	0.99579	3.11452	-0.30421	-0.08548
3	11.50000	5.60000	0.90000	1.70000	1.6834E+01	1.00063	0.78527	0.10063	-0.91473
4	6.90000	18.50000	3.30000	2.20000	-1.9499E+01	3.33641	2.84895	0.03641	0.64895

RESTVARVX= 8.7963E-02 RESTVARVY= 9.2571E-01 RESTVARTOT= 5.0684E-01

TOETS VOOR TOTALE MODEL F [5. 3]= 14.2
TOETS VOOR LINEAIR DEEL F [2. 3]= 16.0
TOETS VOOR KWADR. DEEL F [3. 3]= 16.7