

**KONINKLIJK NEDERLANDS  
METEOROLOGISCH INSTITUUT**

**VERSLAGEN**

**V-327**

**L. M. Hafkenscheid**

**Snel convergerende iteratieprocedure voor  
het berekenen van de (isobarische) natte-  
boltemperatuur.**

**De Bilt, 1979**

**Publikatienummer: K. N. M. I. V-327 (B. V.)**

**Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut,  
Bureau Vakopleidingen,  
Postbus 201,  
3730 AE De Bilt,  
Nederland.**

**U. D. C. : 551.501.724**

Snel convergerende iteratieprocedure voor het berekenen van de (isobarische) natte-boltemperatuur

1. Probleemstelling

Het probleem is om bij gegeven druk  $p$ , dampspanning  $e$  en temperatuur  $t$ , de natte-boltemperatuur  $t_w$  te berekenen. Dit kan met behulp van de psychrometerformule. In lineaire benadering ziet deze er als volgt uit:

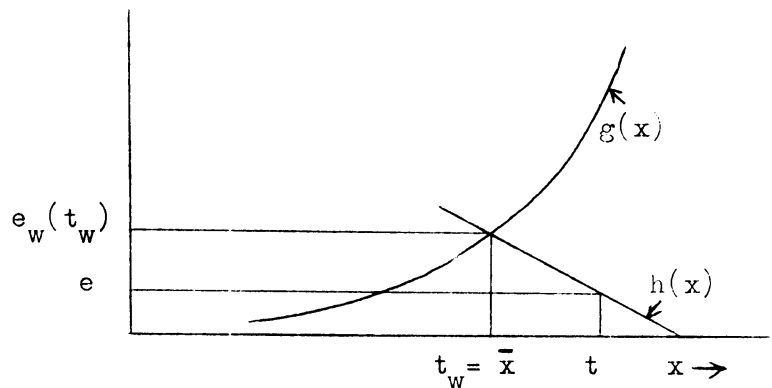
$$e - e_w(t_w) = C_1 p (t_w - t) \quad (1)$$

waarbij  $C_1 \equiv \frac{c_p d}{\epsilon L_v^0}$ . Voor de betekenis van de verschillende thermodynamische grootheden: zie appendix.

Vergelijking (1) is niet analytisch oplosbaar vanwege de manier waarop  $t_w$  in het linkerlid voorkomt. Men moet dus een benaderende formule gebruiken of de vergelijking numeriek oplossen. Hier wordt een numerieke oplossing gegeven.

2. Numerieke methode

figuur 1



Het gaat dus eigenlijk om het bepalen van het snijpunt van de functies:

$$g(x) = e_w(x) \quad \text{en} \quad h(x) = e - C_1 p (x - t)$$

ofwel het bepalen van de wortel  $\bar{x}$  van de vergelijking  $g(x) - h(x) = 0$  (zie figuur 1).

Dit zullen we doen door de iteratiemethode van Newton-Raphson toe te passen op de monotoon stijgende functie  $f(x) \equiv g(x) - h(x)$ .

Bij een iteratiemethode laat men een reeks  $x_n$  convergeren naar  $\bar{x}$

3. Methode van Newton-Raphson

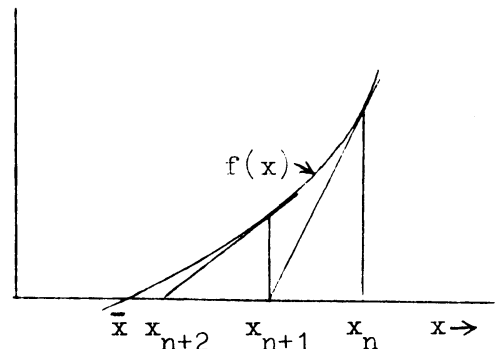
Meetkundig komt deze methode hierop neer dat in het punt  $(x_n, f(x_n))$  de raaklijn getrokken wordt aan de kromme  $f(x)$ , en dat  $x_{n+1}$  de abcis wordt van het snijpunt van deze raaklijn met de  $x$ -as (zie figuur 2).

In formule:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2)$$

In het algemeen (zeker in ons geval) convergeert deze methode zeer snel (kwadratisch). Er geldt dan voor  $x_n \rightarrow \bar{x}$ :

$$d_{n+1} \approx d_n^2 \frac{f''(\bar{x})}{2f'(\bar{x})} \quad \text{met} \quad d_n \equiv x_n - \bar{x}. \quad (3)$$



figuur 2

Wanneer de afgeleide van  $f(x)$  numeriek bepaald moet worden dan zou dat een nadeel van deze methode zijn. In onze toepassing is dat echter niet het geval.

#### 4. Toepassing op de psychrometerformule

We passen de methode Newton-Raphson toe op de functie:

$$f(x) = e_w(x) - e + C_1 p(x-t)$$

De afgeleide van deze functie is eenvoudig omdat de afgeleide van  $e_w(x)$  bekend is, n.l.:

$$e_w'(x) = C_2 \frac{e_w(x)}{(x + T_0)^2} \quad (4)$$

met  $T_0 = 273.15 \text{ K}$  en  $C_2 \equiv \frac{l_v^0}{R_v}$

(Clausius-Clapeyron in niet-geïntegreerde vorm)

Eigenlijk moet  $l_v(t)$  genomen worden in plaats van  $l_v^0$ , maar voor de iteratie maakt dat niets uit.

Dus:

$$f'(x) = C_2 \frac{e_w(x)}{(x + T_0)^2} + C_1 p \quad (5)$$

Toepassing van (2) geeft dus:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e_w(x_n) - e + C_1 p(x_n - t)}{\frac{C_2 e_w(x_n)}{(x_n + T_0)^2} + C_1 p} \quad (6)$$

De methode kan nog iets anders geschreven worden door tegelijk  $e_n$  te laten naderen naar  $e_w(t_w)$  (die krijgt men dan "gratis").

We krijgen dan (identiek aan (6)):

$$F_n = \frac{e_w(x_n) - e_n}{\frac{C_2 e_w(x_n)}{(x_n + T_0)^2} + C_1 p}; \quad x_{n+1} = x_n - F_n; \quad e_{n+1} = e_n + C_1 p F_n \quad (7)$$

Als startwaarden worden dan gebruikt:  $x_0 = t$  en  $e_0 = e$

Blijft nog over de evaluatie van  $e_w(x)$ . Hiervoor zijn zeer goede benaderingen bekend.

#### 5. Uitwerking in de praktijk

Door invullen van de diverse thermodynamische constanten (zie appendix) kunnen  $C_1$  en  $C_2$  berekend worden. Het resultaat is;

$$C_1 = 0.000646 \text{ K}^{-1} \quad \text{en} \quad (8)$$

$$C_2 = 5419 \text{ K}$$

Over de juiste waarde van de constante  $C_1$  (psychrometercoëfficiënt) is wel enige discussie. Deze theoretische waarde vind ik heel bevredigend en deze wordt ook door Sprung zelf verdedigd.

Als benadering van  $e_w(x)$  kan gebruikt worden:

$$e_w(x) = 6.107 \times 10^3 \left( \frac{7.5 x}{x + 237.3} \right) \text{ mbar} \quad (10)$$

(x was al in °C)

De iteratie wordt gestart met de beginwaarden  $x_0 = t$  en  $e_0 = e$  en kan gestopt worden zodra  $|F_n| < \delta$ , waarbij  $\delta$  een van te voren opgegeven nauwkeurigheid is.

### 6. Nauwkeurigheid

Binnen de beperkingen van het te gebruiken rekenapparaat kan  $t_w$  met iedere gewenste nauwkeurigheid uit (1) berekend worden.

Men moet echter voor ogen houden dat (1) zelf al een benaderende formule voor  $t_w$  is. De fout van deze benadering is -onder normale atmosferische omstandigheden- op zijn hoogst 0.1 °C. Het heeft dus geen zin om  $t_w$  uit formule (1) met veel groter nauwkeurigheid te berekenen.

Voor een "zuinig" gebruik moeten we dus uitkijken wat we voor  $\delta$  nemen.

Uitwerking van formule (3), met invulling van de diverse constanten, leert dat in het langzaamste geval (hoge  $t$  en  $p$ ):

$$d_{n+1} \approx d_n^2 \times 0.03 \text{ K} \tag{11}$$

Voor lage  $t$  en/of  $p$  is de convergentie nog sneller.

Om dus minder dan 0.1 °C van  $\bar{x}$  af te wijken (dus  $d_{n+1} < 0.1$ )

moet gelden:  $d_n^2 \times 0.03 \lesssim 0.1$  ofwel  $d_n \lesssim 1.7$

Neemt men bijv.  $\delta = 1$ , dan wordt een fout gemaakt van hoogstens 0.03 °C, \*) zodat  $t_w$  dan benaderd wordt met een nauwkeurigheid van ca. 0.1 °C.

Onderstaand voorbeeld geeft een idee van de convergentiesnelheid voor een "zwaar" voorbeeld:

$$p = 1000 \text{ mbar}, t = 30 \text{ °C}, e = 0 \text{ mbar}$$

n	$F_n$	$x_n$	$d_n$
1	13.4781	16.5219	6.0874
2	5.4240	11.0979	0.6634
3	0.6525	10.4455	0.0110
4	0.0110	10.4345	0.0000
5	0.0001	10.4345	0.0000

Na  $n = 3$  kan gestopt worden:  $|F_n| < 1$  dus  $|d_n| < 0.03$

N.B.: Men kan volstaan met de conditie  $F_n < \delta$  i.p.v.  $|F_n| < \delta$ , omdat onder normale omstandigheden  $F_n$  altijd positief is.

Alleen wanneer men uitgaat van oververzadiging ( $e > e_w(t)$ ) dan is in de eerste iteratiestap  $F_n$  negatief zodat de iteratie stopt, waarbij de gewenste nauwkeurigheid niet gegarandeerd (maar meestal wel bereikt) is.

Ook kan  $F_n$  negatief worden doordat (4) niet de exacte afgeleide is van (10).  $F_n$  is dan echter al van de orde  $10^{-4}$ .

### 7. Uitwerking in de vorm van een Algol-procedure

Meestal zal men voor andere doeleinden al beschikken over een procedure om  $e_w(t)$  uit te rekenen. Zo niet dan moet deze erbij. Het geheel kan er dan als volgt uitzien:

\*) Deze nauwkeurigheid wordt in de meeste gevallen reeds na één of twee stappen bereikt.

```
REAL PROCEDURE EW(T); XVERZ DAMPSP VLAKWATER VOOR T GRAD CELSIUS
VALUE T; REAL T;
EW:=10**(7.5*T/(T+237.3))*6.107;
```

```
REAL PROCEDURE TIW(P,T,E); VALUE P,T,E; REAL P,T,E;
BEGIN
REAL F,C,EX;

C:=P*0.000646;
DO UNTIL
(F:=(EX:=EW(T:=*F))-(E:=*C+F))/(5419*EX/(T+273.15)**2+C))<1;
TIW:=T-F
END;
```

TIW levert de (isobarische) natte-boltemperatuur in °C bij gegeven luchtdruk P (mbar), temperatuur T (°C) en dampspanning E (mbar).

Deze procedure is minstens zo snel als bestaande benaderingsformules voor  $t_w$  en bovendien veel nauwkeuriger, vooral voor lagere waarden van p.

Gebruik bij verschillende vochtigheidsvariabelen:

<u>Gegeven (naast <math>P \equiv p</math> en <math>T \equiv t</math>):</u>	<u>Gebruik:</u>
dampspanning $E \equiv e$ (mbar)	TIW (P, T, E)
dauwpunt $TD \equiv t_d$ (°C)	TIW (P, T, EW (TD))
dauwpuntsdepressie $D \equiv t - t_d$ (°C)	TIW (P, T, EW (T - D))
relatieve vochtigheid U (%)	TIW (P, T, EW(T) * U/100)

APPENDIX

Gebruikte thermodynamische grootheden met eenheden en waarden van de constanten:

Variabelen:

$t$	(droge-bol) temperatuur	$^{\circ}\text{C}$
$t_w$	natte-boltemperatuur	$^{\circ}\text{C}$
$p$	luchtdruk	mbar
$e$	dampspanning	mbar
$e_w(t)$	verzadigingsdampspanning t.o.v. vlak water	mbar

Constanten:

$c_{pd}$	soortelijke warmte bij constante druk van droge lucht	$1005 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$\epsilon$	verhouding gasconstanten van droge lucht en waterdamp	0.622
$L_v^{\circ}$	verdampingswarmte van water bij $0^{\circ}\text{C}$	$2.501 \times 10^6 \text{ Jkg}^{-1}$
$T_o$	absolute temperatuur smeltpunt van water (bij 1 atm.)	273.15 K
$R_v$	gasconstante van waterdamp	$461.51 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Waarden en notaties volgens Iribarne and Godson: "Atmospheric Thermodynamics".