

22 MEI 1959

KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT

Verslagen V-44
(R III-227-1959)

Vergelijking der metingen,
uitgevoerd met de standaard-
regenmeter (400 cm²) en met
een nieuw type (200 cm²)

Dr. C. Levert

551-508.77

1. Inleiding

Het plan bestaat om overal in het land de regenmeter van het conventionele type (opening 400 cm²) te vervangen door een van goedkopere en toch degelijke uitvoering (opening 200 cm²; zie de twee foto's). De argumenten voor het nieuwe type zijn in hoofdzaak van zakelijke aard t.w.

- 1) de trechter zowel als het reserveir kunnen grotendeels uit één stuk van koper worden uitgevoerd.
- 2) de cirkelvormige trechterraand geeft bij een opening van 200 cm² minder constructie-moeilijkheden.
- 3) de regenmeter heeft een handvat, waardoor het uitschenken van de inhoud in een maatglas wordt vergemakkelijkt
- 4) de kegelvormige trechterbodem heeft een kleinere tophoek, in overeenstemming met de W.M.O.-aanbeveling.

Het lag voor de hand na te gaan of met deze nieuwe regenmeter hoeveelheden gemeten zouden worden, die (al of niet) teelaatbaar dech, zo mogelijk, ook verklaarbaar, zouden verschillen van die gemeten met het standaardtype.

Daartoe werden vergelijkende metingen verricht gedurende de maanden juni t/m oktober 1958 op het terrein van het K.N.M.I.. Zie de situatie-schets fig. 1.

Aanvankelijk werd regenmeter R_1 (200 cm²; het nieuwe type) vergeleken met de klimatologische regenmeter R_2 (400 cm²; standaardtype); de onderlinge afstand bedroeg ongeveer 2.4 m. Later bleek het wenselijk niet met deze meter R_2 te vergelijken (de klimatologische metingen mochten door deze experimenten niet worden gestoord), maar met een tijdelijk extra geplaatste R_2^{III} , die identiek aan R_2 was; de afstand tussen R_1 en R_2^{III} werd toen ongeveer 1 m.

Voor alle regenmeters ligt de horizontale opvangopening 40 cm boven het maaiveld.

H_1 werd geleegd in een eigen maatglas, dat echter bij het standaard-type regenmeter behoort; H_2 (H_2^{M}) ook in een eigen maatglas. De aflezingen H_1 dienen dus te worden vermenigvuldigd met de verhouding der geometrische oppervlakken der opvangopeningen O_2 (O_2^{M}) en O_1 , welke "exact" 2 bedroeg (wellicht met een onnauwkeurigheid van enkele ‰), alvorens de verschillen $2 H_1 - H_2$ statistisch bewerkt kunnen worden.

2. Het materiaal

De aflezingen geschieden voor dit onderzoek met bijzondere zorg, d.w.z. langs de schaalverdeling van elk der 2 maatglazen tot in honderdsten mm (bijv. $H_1 = 0.90$ en $H_2 = 1.85$ mm of $H_1 = 0.17$ en $H_2 = 0.32$ mm). Of dit geheel zinvol is met het oog op onvermijdelijke meetfouten en eventueel, ondanks de kleine afstand (2.4; 1 meter), aanwezige reële veldverschillen, zal verderop blijken als de invloed daarvan op de verschillen tussen H_2 en $2 H_1$ besproken wordt.

De vergelijking tussen de metingen met de regenmeters werd zo "berlijk mogelijk" genomen, d.w.z. als het regende werd noch 1, noch 2 afgetapt, zodat niet het gevaar bestond, dat in de ene regenmeter nog neerslag viel terwijl de andere werd geleegd.

De aftappingen vonden plaats op of omstreeks 8.40, 14.40 en 19.40 M.E.T. De afgetapte hoeveelheden hebben wel dikwijls, maar niet altijd betrekking op één enkele regen (zie tabel 1 bij N.B.).

In een verder detail-onderzoek waren we geïnteresseerd in de gemiddelde windsnelheid gedurende de regen. Hiertoe moest vanzelfsprekend het pluviogram worden geraadpleegd om uit te maken gedurende welke tijd de neerslag was gevallen. Vervolgens werd het anemogram van de contact-anemometer (hoogte 60 cm; afstand ong. 8 m, zie situatieschets) geraadpleegd.

Alleen die paren van waarnemingen werden bestudeerd waarbij H_1 en H_2 niet tegelijk nul bedroegen. Zie de overzichtstabel 1, waarin gerangschikt werd naar H_2 en H_1 ; de frequentieverdeling der H_2 -waarden is in tabel 2 opgenomen.

3. Statistische bewerking

3.1 Onderzoek der 120 verschillen $\Delta = 2 H_1 - H_2$

3.1.1. Zie tabel 1 en tabel 3

We willen eerst onderzoeken of $2 H_1 > H_2$ "evenveel voorkomt" als $2 H_1 < H_2$. Daartoe passen we de tekentoets toe. De getoetste nul-hypothese luidt: $k = [\text{kans op } 2 H_1 < H_2] = [\text{kans op } 2 H_1 > H_2] = \frac{1}{2}$. De 19 gevallen $2 H_1 = H_2$ worden daarbij niet beschouwd, zodat $n = 120 - 19 = 101$. Het gemiddeld aantal bij $k = \frac{1}{2}$ te verwachten + verschillen is $\bar{n}_+ = \frac{1}{2} \times 101 = 50\frac{1}{2}$. Geteld werd: $n_+ = 43$; dus $n_+ < \bar{n}_+$. In strijd met $k = \frac{1}{2}$? De tabel bij de tekentoets leert, dat met 95 % waarschijnlijkheid, de n_+ zal liggen tussen 39 en 63; dus $39 < 43 < 63$. De nulhypothese behoeft derhalve niet verworpen te worden, anders gezegd: $2 H_1$ en H_2 zijn gemiddeld om en om groter; exacter uitgedrukt: de conclusie $\mathbb{P}[\Delta > 0] = \frac{1}{2}$ heeft een kans van minder dan 0.05 fout te zijn.

Men doet wellicht beter de verschillen Δ , waarbij H_2 zeer klein is, niet mee te beschouwen. Daarom behandelen we vervolgens alleen de gevallen $H_2 \geq 0.10$ mm. Aldus 97 gevallen, waarvan 16 keren $\Delta = 0$. Nu $n = 97 - 16 = 81$; $\bar{n}_+ = 40\frac{1}{2}$, weer $n_+ < \bar{n}_+$. Geteld: $n_+ = 36$. De betrouwbaarheidsband is 31 à 50; deze band bevat $n_+ = 36$. De nulhypothese $k = \frac{1}{2}$ behoeft derhalve ook nu niet verworpen te worden.

Vervolgens leggen we de drempel nog wat hoger: $H_2 \geq 0.20$ mm. Er komen 82 Δ 's, waarvan 13 stuks 0. Dus $n = 82 - 13 = 69$, met $\bar{n}_+ = 34\frac{1}{2}$. Geteld: $n_+ = 31$, zodat weer $n_+ < \bar{n}_+$. De betrouwbaarheidsband is 25 à 54; deze omvat $n_+ = 31$. De nulhypothese $k = \frac{1}{2}$ behoeft ook nu niet verworpen te worden.

3.1.2. Het ligt voor de hand nu óók te onderzoeken of de Δ -verdeling symmetrisch rondom nul ligt. Hiertoe passen wij de symmetrie-toets van Wilcoxon toe. De in deze toets gebruikte "statistic" T heeft de waarde 377; verder wordt $s_T = 588$, zodat het quotiënt $(|T| - 1) : s_T = 0.64$. Aangezien dit ver beneden 2 blijft, is er geen aanleiding om de hypothese, dat het Δ -universum een symmetrische verdeling rondom nul heeft, te verwerpen. Deze uitspraak is volkomen ongevoelig voor de "uitbijter" $\Delta = 1.70$, waarover in 3.1.3 gesproken wordt.

Verder vragen we of de Δ -verdeling normaal is. De "meandeviation" $|\overline{\Delta}|$ is 0.093, de standaarddeviatie $s_{\Delta} = 0.38$, zodat $|\overline{\Delta}| : s_{\Delta} = 0.24$. Zou de Δ -populatie een normale verdeling hebben, dan zou in een steekproef van 120 elementen het bedoelde quotiënt met 95 % waarschijnlijkheid tussen 0.77 en 0.83 liggen. Het gemeten quotiënt 0.24 ligt ver beneden de benedengrens van deze band. Bij gevolg is de Δ -verdeling zeer waarschijnlijk niet normaal. Ook deze conclusie is volkomen ongevoelig voor de "uitbijter" 1.70.

3.1.3. Nadere beschouwing der Δ -waarden $\neq 0$ doet zien, dat de meeste gelegen zijn in de klasse 0.01 t/m 0.10 mm (75 van de 101 stuks). De zeer grote Δ 's, zegge ≥ 0.40 mm, waren alle positief, d.i. $2 H_1 > H_2$ (d.i. de 200 cm^2 regenmeter gaf meer dan de 400 cm^2); het waren er 7 stuks. Daaronder is in het bijzonder de 1.75 mm ($H_1 = 2.70$; $H_2 = 3.70$), "enorm groot en dus zéér verdacht. Is er een grove fout gemaakt? Dit was niet meer na te gaan. Het moet haast wel, maar we mogen niet bij alle $|\Delta|$'s ≥ 0.40 aan dergelijke grove fouten ("vergissingen") denken.

3.1.4. Er kunnen meetfouten¹⁾ gemaakt worden, "onnauwkeurigheden", samenhangende o.a. met bevochtiging. Deze leiden altijd tot een hoeveelheid minder dan door de opening van 400 cm^2 gepasseerd is. En deze hoeveelheid weer is meestal kleiner dan ter plaatse door een fictief oppervlak van 400 cm^2 gepasseerd zou zijn als ter plaatse geen regenmeter opgesteld geweest zou zijn.

Van welke betekenis de bevochtiging is, als één der componenten van de meetfouten, werd in het laboratorium onderzocht voor wat het standaard-type regenmeter betreft. De standaarddeviatie van deze wellicht rechthoekig verdeelde, fouten bedraagt ongeveer $\sigma_d = 0.06$ mm. Hoe groot deze is voor het nieuwe type regenmeter (200 cm^2) is niet bekend, vermoedelijk iets kleiner, daar de trechter spits is.

¹⁾ Wat zijn meetfouten? Wij denken daarbij aan bevochtiging-afleesonauwkeurigheden, spateffecten, windeffect etc. Zij alle tezamen zijn er oorzaak van, dat er zeer waarschijnlijk even zo vele andere uitkomsten zouden komen als wij vele keren eenzelfde regen zouden kunnen meten. Deze regen gaat samen met één bepaalde, hoewel onbekende, ware hoeveelheid W . Als wij de uitkomsten bij herhaaldelijke metingen zouden noemen $m_1, m_2 \dots m_n$, met een gemiddelde \bar{m} ($n \rightarrow \infty$), zouden de "meetfouten" zijn $d_i = \bar{m} - m_i$. Zij gehoorzamen aan een of andere verdeling. Vermoedelijk is deze rechthoekig, d.i. alle d_i -waarden zijn gelegen tussen twee (onbekende) grenzen en wel overal even waarschijnlijk. De verdeling heeft een standaarddeviatie σ . Het is onmogelijk de waarde daarvan bij metingen onder natuurlijke omstandigheden te schatten. Laboratoriummetingen met betrekking tot deze "meetfouten" leverden een schatting van de bijdrage van de component, die met bevochtiging te doen heeft.

Is het mogelijk de opgetreden Δ 's met deze meetfouten alleen te verklaren? Vermoedelijk zal σ_d weinig of niet van H_2 afhangen. Verder weten we, dat een zeer kleine hoeveelheid wel geheel of grotendeels in de regenmeter kan blijven "hangen", d.i. al het water is verbruikt voor de bevochtiging; zulke effecten zijn wel zeer moeilijk in een statistische beschouwing op te nemen, die trouwens, ook al door de onderstelling, dat aan verschillende voorwaarden voldaan moet zijn (en zulks te verifiëren zou weer verdere metingen vergen), niet anders dan vrij grof en oriënterend kan zijn.

Als de ware hoeveelheden door 400 cm^2 op de plaatsen der twee regenmeters exact gelijk zouden zijn (W), dan wordt gemeten (indien er geen wind-effect zou zijn) $H_2 = W + d_2$ en $2 H_1 = W + d_1$. De d_i volgt een of andere foutenverdeling; $\overline{d_i} = 0$; stel $\sigma(d_1) = \sigma(d_2) = \sigma_d = 0.06 \text{ mm}$ (d.i. onderstel dat beide typen regenmeters dezelfde meetfout hebben).

Bijgevolg: $\Delta \equiv 2 H_1 - H_2 = d_1 - d_2$ en de variantie der Δ -waarden is (d_1 en d_2 zijn onafhankelijk) $\sigma^2(\Delta) = 2 \sigma_d^2$; of $\sigma(\Delta) = \sigma_d \sqrt{2} = 0.085 \text{ mm}$. De 120 Δ -waarden leveren een variantie $S^2(\Delta) = 0.14$, zodat $S(\Delta) = 0.38$.

Vraag: is 0.38 statistisch verenigbaar met 0.085, ofschoon $0.38 \gg 0.085$? Hiervoor moet berekend worden binnen welke grenzen $S(\Delta)$ met 95 % zekerheid gelegen is, als de Δ een verdeling rondom nul en met standaarddeviatie 0.085 zou volgen. Deze grenzen zijn 0.07 en 0.10 (waarbij ondersteld moet worden, dat de Δ een normale verdeling volgt). Aldus blijkt, dat $S(\Delta) = 0.38$ ver buiten de band 0.07 à 0.10 gelegen is; m.w.w. de hypothese, dat in het universum der Δ -waarden de $\sigma(\Delta) = 0.085$ zou zijn (d.i. op grond van meetfouten alleen) moet worden verworpen. Kennelijk zijn er veel meer grote $|\Delta|$'s dan als louter toevallig begrepen zouden kunnen worden.

3.1.5. De $S(\Delta)$ kan echter groter zijn om de navolgende reden. Hoewel de regenmeters 1 en 2 op betrekkelijk kleine afstand, aanvankelijk 2.4 m, later 1 m, stonden, behoeven keer voor keer de ware hoeveelheden W_1 en W_2 ter plaatse (nu betrekking hebbende op 400 cm^2) niet exact gelijk te zijn. Integendeel; gezien de ruimtelijke variaties binnen eenzelfde regen zullen de waarden $W_1^{(1)}, W_1^{(2)}, \dots$ met de gepaard gaande waarden $W_2^{(1)}, W_2^{(2)}, \dots$

noot*) Natuurlijk is dit niet exact. Wij weten immers, dat altijd $H_2 < W$ en dus dat d_2 een variabele moet zijn tussen grenzen $-g_2$ ($g_2 > 0$) en 0, rondom een gemiddelde $\overline{d_2} < 0$. Het komt ons niet nodig voor deze notatie exact te vervolgen.

verschillen $a^{(1)}$ vertonen, die nu eens positief, dan weer negatief of nul zullen zijn. Wij mogen wel aannemen, dat, over lange tijdvakken gesommeerd, de sommen $\sum W_1$ en $\sum W_2$ des te minder zullen verschillen, naarmate de tijdvakken langer zijn. Laten wij van "W-verschillen" spreken. Nu worden de metingen $2 H_1 = W + d_1$ en $2 H_2 = W + d_2 + a$. De variabele a zal een of andere symmetrische kansverdeling volgen met $Ea = 0$ en een standaarddeviatie σ_a (die misschien met W zal samenhangen)

Hoe groot (klein) is σ_a ? Hierover worden we enigszins ingelicht door de simultane metingen met twaalf regenmeters in de maanden augustus en september 1956 (beschreven in Appendix A van rapport W.R. 59 - 2). Helaas waren deze metingen te schaars bij grotere waarden. Misschien bedraagt σ_a ongeveer 0.1 mm, gemiddeld over alle waarden, die tijdens de vergelijkende metingen met R_1 en R_2 opgetreden zijn. Maar dan is Δ niet $d_1 - d_2$, doch $d_1 - d_2 - a$ en $\sigma^2(\Delta) = 2\sigma_d^2 + \sigma_a^2$, zodat $\sigma(\Delta) = \sqrt{2\sigma_d^2 + \sigma_a^2} = 2\sqrt{(0.06)^2 + 0.1^2} = 0,131$, zodat in een steekproef van 120 Δ -waarden uit een normaal verdeeld Δ -universum met $\sigma(\Delta) = 0,131$, de s met een kans 0.95 zal liggen tussen 0.11 en 0.15. Ook nu bevindt zich de gemeten $s(\Delta) = 0.38$ ver buiten de 95 %-band ($0.38 \gg 0.15$).

3.1.6. Zo schijnt het, dat we zelfs en met meetfouten en met W-verschillen de grote spreiding in de Δ 's niet kunnen verklaren. We moeten echter drie dingen goed bedenken:

- a) de $s(\Delta)$ is wellicht te groot berekend, want er zullen zich hoogstwaarschijnlijk onder alle Δ 's enkele bevinden, die zo groot zijn louter door "vergissingen", en de $s(\Delta)$ is daarvoor zeer gevoelig. Het is echter statistische ongeoorloofd deze te schrappen, als wij die "vergissingen" niet met volkomen zekerheid kunnen aanwijzen.
- b) misschien moeten we σ_a wat groter dan 0,1 mm nemen. Er staan ons geen uitkomsten van een bewerking van lange reeks van vergelijkende metingen tussen twee identieke zeer naburige regenmeters ter beschikking. Zouden a) en b) waar zijn, dan wordt het verschil tussen $s(\Delta)$ en $\sigma(\Delta)$ al kleiner.
- c) de H_2 heeft zodanig sterk gevarieerd (kleinste waarde 0.01; grootste 23.00 mm) dat het wellicht ongeoorloofd is met één enkele σ_a te werken, als we althans mogen aannemen dat σ_a met toenemende H_2 in den regel toeneemt. Maar over deze toeneming zijn we helaas slecht numeriek georiënteerd. Door nu toch gemakshalve met één enkele σ_a te werken,

introduceren we een nieuwe moeilijkheid: Hoe deze te kiezen? Waren er misschien toevallig vrij vele gevallen met zeer markante W-verschillen? Het is niet onmogelijk. Zulke toevalseffecten zijn alleen te onderschep-
pen als men zeer vele metingen doet, zeker veel meer dan 120 stuks.

3.2. Onderzoek naar het lineaire verband tussen H_1 en H_2

3.2.1. Men kan

of bestuderende quotiënten $q = 2 H_1 / H_2$ en onderzoeken hoe deze rondom 1 spreiden en hoe de kansverdeling van q misschien nog afhangt van

- a) de hoeveelheid H_2 ; b) de intensiteit I van de regen (d.i. H_2 :totale duur);
- c) de gemiddelde windsnelheid \bar{v} gedurende de regen

of bestuderen het lineaire verband $\overset{E}{C}(2H_1) = \gamma_1 H_2 + \delta_1$ en onderzoeken hoe de kansverdeling der bij gegeven H_2 behorende waarden van H_1 nog, eventueel, afhangt van a) H_2 zelf; b) de I ; c) de \bar{v} . (men kan ook bekijken: $\overset{E}{C}H_2 = \gamma_2 (2 H_1) + \delta_2$; andere lineaire regressies zullen wij buiten beschouwing laten)

Wij hechten de voorkeur aan $\overset{E}{C}(2 H) = \gamma_1 H_2 + \delta_1$. Mocht blijken dat $\delta_1 = 0$ is, dan komen we vanzelf op de eerste aanpak terecht. Vanzelfsprekend gaan we hierbij na of $\gamma_1 = 1$ kan zijn.

Hierbij dachten we aan enige opmerkingen o.a. van Braak, zie M.V, 48, (1945), pg. 9. Volgens Braak zou Belgrand bij Honfleur met regenmeters met 4 verschillende grootten der opvangopeningen uitkomsten hebben verkregen, die erop wijzen, dat het windeffect met kleinere opening toeneemt. Voor de jaarlijkse regensom werden de onderstaande verhoudingen gevonden

oppervlakte in cm^2	100	400	1600	2500
verhouding	0.913	0.973	0.992	1.000

(de hoogte, waarop de regenmeters stonden, wordt niet genoemd; wel wordt verteld, dat de onderlinge verschillen tussen de uitkomsten snel kleiner worden naarmate deze opvangopeningen dichter bij de grond liggen). Nu hebben deze cijfers betrekking op jaarsommen. Ze zullen waarschijnlijk meer uiteenlopen voor maandsommen en voor dagsommen en nog meer voor individuele regens. De vraag is echter hoeveel meer?

De opening van $200 cm^2$ komt in bovenstaand rijtje niet voor; interpolatie levert: 0.955. Dit betekent voor een jaarsom, dat met de $200 cm^2$ -meter gemiddeld ongeveer 1.8 % minder gemeten wordt dan met de $400 cm^2$ -regenmeter. Maar dan meet R_2 een hoeveelheid $H_2 = W (1 - P_2)$ en levert R_1 een

noot [≠] De notatie betekent, dat bij gegeven H_2 een kansverdeling voor $2 H_1$ behoort, waarin de gemiddelde waarde $\overset{E}{C}(2 H_1)$ is.

hoeveelheid $2 H_1 = W (1 - p_1)$; p_1 = windeffect-correctie. Braak beweert dus: voor een jaarsom is $W (1 - p_2)(1 - 0.018) = W (1 - p_1)$, zodat $\frac{1}{2} W (1 - p_1)(W(1 - p_2)) = \frac{1}{2} (1 - 0.018) = 0.491$ (gemakshalve meetfouten en W-verschillen verwaarlozende).

Dat zou wijzen (indien in de bovenstaande lineaire relatie $\delta = 0$) op een $\gamma_1 < \frac{1}{2}$, waarbij echter met nadruk toegevoegd moet worden, dat wij, in ons experiment, met individuele regens te doen hebben en Belgrand's getallen slaan op jaarsommen.

3.2.2. We berekenden het beste lineaire verband (H_1 als afhankelijke en H_2 als onafhankelijke variabele) met de Methode der kleinste kwadraten;

(1) in het universum: $E H_1 = \alpha_1 H_2 + \beta_1$ ^(*)

Er kwam, via de steekproef van 120 paren H_1, H_2 :

(2) een beste schatting: $\hat{\alpha}_1 = 0.508$ $E H_1 = \hat{\alpha}_1 H_2 + \hat{\beta}_1 = 0.508 H_2 - 0.002$
 en $\hat{\beta}_1 = -0.002$

Betekenis: bij gegeven waarde van H_2 behoort gemiddeld een H_1 van $0.508 H_2 - 0.002$. Per geval kan H_2 daarvan afwijken, in positieve en negatieve zin. Het feit, dat β zwak negatief zou kunnen zijn, betekent, dat er zeer kleine hoeveelheden zijn, die wèl in R_2 , doch niet in R_1 gemeten worden. Natuurlijk betekent 0.002 mm op zich zelf "niets". Maar dit vast te stellen is niet de essentie van het statistisch onderzoek. Het gaat niet om het rekenresultaat $\hat{\beta}_1$, doch om de β in het universum. Zelfs al zou $\hat{\beta}_1 = 0$ geweest zijn, dan nog zou het universum wel een $\beta \neq 0$, die wel van enige praktische betekenis zou zijn, hebben kunnen bezitten. Het gaat niet om $\hat{\alpha}$ en $\hat{\beta}$, maar om α en β . Voor de laatste laten zich betrouwbaarheidsbanden berekenen, die én met $\hat{\alpha}$ en $\hat{\beta}$ én met het aantal waarnemingen samenhangen.

Willen we verder de regresssierechte gaan gebruiken en vooral allereerst toetsen of in het universum $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ en $\beta_1 = 0$ kunnen zijn, d.w.z. of de gemeten waarden $\hat{\alpha}_1 = 0.508$ en $\hat{\beta}_1 = -0.02$ daarmede niet in strijd behoeven te zijn, dan dient aan enige belangrijke voorwaarden voldaan te zijn:

- a) de H_2 moet zelf foutloos en instelbaar zijn, d.i. geen kansverdeling volgen. Zo niet, dan is de theorie nog niet volkomen ontwikkeld, maar een normale verdeling van een foutloze H_2 is nog toegestaan,
- b) bij elke gegeven H_2 volgt de bijbehorende H_1 een normale verdeling,
- c) al deze normale verdelingen hebben dezelfde variantie σ^2 , terwijl hun gemiddelden de lineaire relatie $E H_1 = \alpha H_2 + \beta$ volgen.

noot [≡] Het onderzoeken van $E(2 H_1) = \gamma H_2 + \delta$ is natuurlijk hetzelfde als van $E H_1 = \alpha H_2 + \beta$, met $\alpha = \frac{1}{2} \gamma$ en $\beta = \frac{1}{2} \delta$.

Er zijn nog meer voorwaarden, doch de formulering daarvan valt buiten het kader van dit rapport.

Noch H_1 noch H_2 is normaal verdeeld; de verdeling is J-vormig, d.i. de nulwaarden zijn het meest frequent; grotere H's zijn altijd zeldzamer. Zo is voor zowel H_1 als H_2 de standaarddeviatie groter dan het gemiddelde, hetgeen de markante asymmetrie der verdeling illustreert. (zie tabel 4). Toch hebben we de gebruikelijke regressie-analyse toegepast. Er valt bezwaarlijk iets anders te doen, tenzij we de moeite zouden willen nemen allereerst H_1 en H_2 te normaliseren, maar dat zou werk en tijd vergen, vermoedelijk niet in overeenstemming met de belangrijkheid van het doel. Onder punt c) werd σ genoemd. Het is zaak ook deze te berekenen. (beste schatting heet $\hat{\sigma}$) De verschillende grootheden worden in tabel 4 genoemd.

Tabel 4

aantal H_1, H_2 -paren	120
gem. H_1	$\left\{ \begin{array}{l} 1.088 \text{ mm}; 2 \bar{H}_1 = 2.176 \\ 2.145 \text{ mm}; 2 \bar{H}_2 = 1.014 \bar{H}_2 \end{array} \right.$
gem. H_2	
st.dev. s_1	1.89 mm
st.dev. s_2	3.70 mm
corr.coëff. r	0.995
$\hat{\alpha}_1$ $\hat{\beta}_1$ $\hat{\sigma}_1 = s_1 \sqrt{1 - r^2}$	0.508
	-0.002
betr. grenzen voor $\hat{\alpha}_1$ als $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ betr. grenzen voor $\hat{\beta}_1$ als $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ en $\beta_1 = 0$	0.490 en 0.510
	-0.03 en -0.01
$\hat{\alpha}_2$ $\hat{\beta}_2$ $\hat{\sigma}_2 = s_2 \sqrt{1 - r^2}$	1.949
	-0.024
betr. grenzen voor $\hat{\alpha}_2$ als $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ betr. grenzen voor $\hat{\beta}_2$ als $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ en $\beta_2 = 0$	1.96 en 2.04
	-0.06 en +0.01
	0.370 mm

In tabel 4 zijn tevens die gegevens opgenomen, welke nodig zijn voor het geval wé niet H_2 , doch H_1 als onafhankelijke variabele willen beschouwen. D.w.z. we berekenen én $\hat{E} H_1 = \alpha_1 H_2 + \beta_1 = 0.508 H_2 - 0.002$

én $\hat{E} H_2 = \alpha_2 H_1 + \beta_2 = 1.949 H_1 - 0.024$

In fig. 2 is voor het eerste geval de betrouwbaarheidsband, ter breedte $4\hat{\sigma}_1$, om de beste regressierechte getekend. (fig. 2)

Een getallenvoorbeeld moge de betekenis illustreren.

Stel gemeten wordt $H_2 (400 \text{ cm}^2) = 4 \text{ mm}$. Wat zou dan met H_1 gemeten kunnen zijn?

Antw.: $\hat{E} H_1 = \hat{\alpha}_1 H_2 + \hat{\beta}_1 = 2.03$; $2\hat{\sigma}_1 = 0.38 \text{ mm}$. Dus gemiddeld mag men verwachten $2\hat{E} H_1 = 4.06 \text{ mm}$ en met zekerheid 0.95 zal $2 H_1$ liggen tussen 3.30 en 4.82 mm, waarbij $3.30 = 4.06 - 2 \times 0.38$ en $4.82 = 4.06 + 2 \times 0.38$.

In het algemeen:

gegeven H_2 , dan is $\hat{E}(2H_1) = 2\hat{\alpha}_1 H_2 + 2\hat{\beta}_1$ en zal

voor de individuele $2 H_1$ gelden $\hat{E}(2 H_1) - 4 \hat{\sigma}_1 < 2 H_1 < \hat{E}(2 H_1) + 4 \hat{\sigma}_1$

Men ziet, dat deze onzekerheidsband (waarmede derhalve gerekend zou moeten worden wanneer men geval voor geval zou willen reduceren van H_2 tot H_1) relatief zeer breed is zolang H_2 klein is. Er is reeds gezegd, dat de gebruikelijke regressieanalyse eigenlijk niet mag worden toegepast, omdat het zeer de vraag is of voor grotere H_2 de spreiding van H_1 dezelfde blijft. In 3.2.4. wordt aannemelijk gemaakt, dat ze toeneemt met toenemende H_2 .

3.2.3. Uit $\hat{E} H_1 = \hat{\alpha}_1 H_2 + \hat{\beta}_1$ volgt $\hat{E} H_1 / H_2 = \hat{\alpha}_1 + \frac{\hat{\beta}_1}{H_2}$; $\hat{\alpha}_1 = 0.508$ en $\hat{\beta}_1 = -0.002$

De verhouding tussen H_2 en de gemiddeld daarbij behorende H_1 is dus vrijwel constant, onafhankelijk van H_2 , n.l. 0.508. Nu is 0.508 een steekproef-waarde. De statistische toets leert, dat de universum-waarde exact $\frac{1}{2}$ kan zijn, want dan kan, met een 0.95-kans, toch nog in de steekproef van 120 paren, de volgens de methode van de kleinste kwadraten berekende lineaire regressie leiden tot een regressie-coëfficiënt, gelegen tussen 0.49 en 0.51, in welke band inderdaad 0.508 gelegen is. We zouden een zeer veel groter materiaal moeten verzamelen om uit te maken of de universum- α werkelijk exact $\frac{1}{2}$ bedraagt, doch het lijkt ons zinloos hiervoor zoveel werk te verrichten. M.a.w. het is onmogelijk met het beschikbare materiaal te toetsen of $H_1 : H_2 \stackrel{!}{=} 0.491$, waarbij 0.491 gesuggereerd wordt door de getallen die Braak noemt, zie blz. 8. Gesommeerd over alle gevallen komen wij tot $\bar{H}_1 = 1.088$ en $\bar{H}_2 = 2.145$, zodat $\bar{H}_1 : \bar{H}_2 = 0.506$, zoals behoort, n.l. ongeveer $\hat{\alpha}_1 + \frac{\hat{\beta}_1}{\bar{H}_2} = 0.508 - \frac{0.002}{2.145}$.

Welke consequenties t.a.v. van $q = H_1 : H_2$ (bij dit quotient denkt men aan $\frac{1}{2}$) heeft de uitkomst, dat er tussen H_1 en H_2 een lineaire regressie zou zijn, aangegeven door $H_1 = \alpha_1 H_2 + \beta_1 + \varepsilon$, waarin ε een toevalsvariabele is, die een verdeling volgt met $E\varepsilon = 0$ en variantie σ^2

(beide onafhankelijk van H_2)? Antw.:

$E q \approx \alpha_1 + \beta_1 \left(\frac{1}{H_2} + \frac{2\sigma^2}{H_2^3} \right)$ en $\sigma^2(q) \approx \sigma^2 / H_2^2$, als σ_2 = standaard

deviatie van H_2 . We zien dat én het gemiddelde én de standaard deviatie van q met toenemende H_2 afneemt. Mocht de regressierechte exact door de oorsprong gaan (d.i. $\beta_1 = 0$), dan alleen is $E q$ constant en wel gelijk aan de helling daarvan, maar dan neemt $\sigma(q)$ nog altijd af met grotere H_2 . Wij hebben er vanaf gezien al deze interessante statistische aspecten numeriek te onderzoeken doch noemden ze volledigheidshalve. Ze beduiden ongeveer: als σ niet van H_2 afhangt, dan σ_q wel; omgekeerd: als σ_q niet van H_2 afhangt, dan noodzakelijk σ wel. Overigens blijft het oude probleem bestaan: doet men goed $q = H_1 : H_2$ te beschouwen of $H_1 = \alpha H_2 + \beta + \varepsilon$, d.w.z. $\varepsilon = H_1 - \alpha H_2 - \beta$, waarbij men het verschil tussen $E \frac{H_1}{H_2}$ en $E \left(\frac{H_1}{H_2} \right)$ in het oog houde.

De "complementaire" lineaire regressie $E H_2 = \hat{\alpha}_2 H_1 + \hat{\beta}_2 = 1.949 H_1 - 0.024$ kan gebruikt worden om H_2 (400 cm²) te schatten, zodra H_1 (200 cm²) gegeven wordt.

Voorbeeld:

Onderstel $2 H_1 = 4$ mm (N.B. we schrijven $2 H_1$ omdat nog steeds ondergesteld is, dat bij de nieuwe regenmeter van 200 cm² het maatglas, dat bij het standaardtype behoort, wordt gebruikt)

Dan ligt H_2 gemiddeld bij $1.949 (H_1) - 0.024 = \underline{3.9 \text{ mm}}$ en met een 95 % kans ergens tussen $3.87 - 2 \hat{\sigma}_2$ en $3.87 + 2 \hat{\sigma}_2$, d.i. tussen 3.5 en 4.2 mm.

Resumerende: bij $H_2 = 4.0$ mm geldt $3.3 < 2 H_1 < 4.8$ mm, rondom $2 \bar{H}_1 = 4.1$ mm; bij $2 H_1 = 4.0$ mm geldt $3.5 < H_2 < 4.2$ mm, rondom $\bar{H}_2 = 3.9$ mm.

3.2.4. Wij lieten zien, dat, bij gegeven H_2 , een verzameling van $2 H_1$ -waarden behoort die voor 95 % gelegen zijn in de band $E(2 H_1) - 4 \hat{\sigma}_1$ tot $E(2 H_1) + 4 \hat{\sigma}_1$, waarin $E(2 H_1) = \hat{\alpha}_1 H_2 + \hat{\beta}_1$. Deze band heeft blijkbaar een van H_2 zelf onafhankelijke breedte en wel $8 \hat{\sigma}_1 = 8 s_1 \sqrt{1-r^2}$, met s_1 = st.dev. der H_1 -waarden en r = corr.coëff. tussen H_1 en H_2 . Dat deze band een vaste breedte heeft is geen resultaat der berekening, maar werd als onderstelling in de berekening opgenomen.

Men kan zich natuurlijk afvragen: Wordt ze bevestigd door de metingen? Wij verdelen het materiaal in drie groepen t.w. A met $H_2 = 0.01$ t/m 0.50 mm; B met $H_2 = 0.51$ t/m 5.00 mm en C met $H_2 \geq 5.01$ mm. (aantallen H_1, H_2 -paren resp. 63, 41 en 16) Gemakshalve onderstellen wij, dat voor elk der drie groepen het theoretische lineaire verband wordt weergegeven door dezelfde betrekking $\hat{E}(2 H_1) = H_2$; voor de individuele waarneming geldt dan $2 H_1 = H_2 + \Delta$, waarbij Δ een normale verdeling rondom nul met st.deviate σ volgt. De vraag is nu: Verschillen $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ significant? Men beschouwe daartoe tabel 5.

Tabel 5

aantal		H_2	\bar{H}_2	\bar{H}_1	s_Δ	$ \Delta $	95 % band voor σ	mm 4 s_Δ	$\frac{4 s_\Delta}{H_2}$
63	groep A	0.01-0.50	0.180	0.081	0.058	0.039	0.051-0.069	0.232	129
41(40)	groep B	0.51-5.00	2.11	1.08	0.315 (0.166)	0.125 (0.085)	0.28 -0.37 (0.15-0.19)	(0.664)	31
16	groep C	≥ 5.01	9.94	5.06	0.320	0.214	0.25 -0.45	1.28	13

De getallen tussen haken gelden voor het geval, dat wij de zeer verdachte combinatie $H_2 = 3.70$; $H_1 = 2.70$ ($\Delta = 1.70$) willen schrappen. De 95 % banden voor de onbekende $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ hebben geen gemeenschappelijke delen (liggen geheel buiten elkaar), hetgeen er op zou wijzen, dat $\sigma_A < \sigma_B < \sigma_C$; anders gezegd: de spreiding der bij gegeven H_2 behorende $2 H_1$ -waarden lijkt toe te nemen met toenemende H_2 (zie in verband hiermee het tussen haken geplaatste aan einde van 3.2.3.). Ook dit feit wijst erop, dat hier niet alleen meetfouten in het spel zijn. Intussen maakt zulks de regressie-analyse nóg moeilijker. Naar een oplossing der moeilijkheid hebben we niet gezocht.

3.2.5. In tabel 4 zijn ook de betrouwbaarheidsbanden voor $\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2$ genoemd gebaseerd op $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ en $\alpha_2 = 2$. Met deze kunnen we statistisch "vaststellen" of de ware (onbekende, in de binormale populatie geldende) regressie-rechten $\hat{E}H_1 = \alpha_1 H_2 + \beta_1$ en $\hat{E}H_2 = \alpha_2 H_1 + \beta_2$ door de oorsprong gaan (hetgeen betekent $\beta_1 = \beta_2 = 0$) en (of) $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ resp. $\alpha_2 = 2$ is. Dit geschiedt als volgt.

Beschouw de relatie $\hat{E}H_1 = \alpha_1 H_2 + \beta_1$; de steekproef levert $H_1 = 0.508 H_2 - 0.002$.

De waarde 0.508 is niet in strijd met de hypothese $\alpha = 0,50$ want het betrouwbaarheidsgebied voor $\hat{\alpha}_1$ ligt van 0.490 tot 0.510 en bevat 0.508. Het betrouwbaarheidsgebied voor de $\hat{\beta}_1$ hangt van α , β en $\hat{\alpha}_1$ af; $\hat{\alpha}_1$ wordt door de meting geleverd, doch α_1 kennen we niet. Wel weten we, dat α_1 tussen 0.498 en 0.518 móét liggen opdat althans de gemeten $\hat{\beta}_1 = 0.508$ er nog met "een kans 0.95 mee verenigbaar" is. Daarom berekenen wij de betrouwbaarheidsband voor $\hat{\beta}_1$ twee keer: één keer voor $\alpha = 0.498$ en één keer voor $\alpha = 0.518$; in beide gevallen met $\beta = 0$.
 Bij $\alpha = 0.498$ behoort de $\hat{\beta}_1$ -band: -0.031 à -0.012 ;
 bij $\alpha = 0.518$ " " $\hat{\beta}_1$ -band: $+0.011$ à $+0.031$.
 Men ziet aldus dat $\hat{\beta}_1 = -0.002$ in géén van deze twee banden gelegen is. Dit betekent; noch bij $\alpha = 0.498$, noch bij $\alpha = 0.518$, is de gemeten $\hat{\beta}_1 = -0.002$ verenigbaar met de hypothese $\beta_1 = 0$ (d.i. rechte door oorsprong). Maar voor een tussen 0.498 en 0.518 gelegen verzameling van waarden voor α wel; de betrouwbaarheidsband, uitgaande van $\alpha = 0.500$, zijnde -0.027 à -0.007 , bevat ook nog niet -0.002 (zie tabel 4).

Derhalve zegt ons materiaal, dat α in ieder geval tussen 0.500 en 0.518 moet liggen, als we willen, dat $\beta = 0$, d.w.z. het meest waarschijnlijk is de lineaire regressie $\hat{E}H_1 = \alpha_1 H_2$ met $0.500 < \alpha_1 < 0.518$.

[Een meer exacte statistische beschouwing kan de verzameling der toegestane α -waarden nog meer begrenzen. Er moet n.l. voldaan zijn aan én $\{ \beta - (0.508 - \alpha) 2.145 \} - 0.0098 < -0.002 < \{ \dots \} + 0.0098$ én $0.498 < \alpha < 0.518$, waarbij $\hat{\alpha} = 0.508$; $\hat{\beta} = -0.002$; $\bar{H}_2 = 2.145$; $2.08 \cdot \frac{s_2}{s_1} \sqrt{\frac{1-t^2}{n}} = 0.0098$; $s_1 = 1.89$; $s_2 = 3.70$; $r = 0.0995$; $n = 120$.

Hieruit volgt, dat voor alle α 's tussen 0.503 en 0.513 de verenigbare β -banden de $\hat{\beta} = -0.002$ bevatten. Dit betekent o.a. dat het materiaal in strijd is met de mogelijkheid, dat in het H_1, H_2 -universum in de lineaire relatie $\hat{E}H_1 = \alpha_1 H_2 + \beta_1$ de $\alpha < 0.5$ en $\beta < 0$ zou zijn. Slechts volledigheidshalve zij op dit aspect de aandacht gevestigd. Zie fig. 3.]

In het feit dat de α_1 zeer waarschijnlijk boven 0.5 ligt, zou een aanwijzing gezien kunnen worden, dat doorgaans de nieuwe regenmeter meer levert dan de conventionele. Het materiaal is echter te klein om van een bewijs te spreken. Als het vermoeden door meer materiaal bevestigd zou worden, zou gezegd kunnen worden, dat het nieuwe type regenmeter beter is.

3.3. Is het lineaire verband tussen H_1 en H_2 nog afhankelijk van de gemiddelde windsnelheid gedurende de regen?

De gedachtengang hierbij is deze:

Indien er geen windeffect zou zijn (d.i. zouden beide regenmeters géén verliezen door luchtwervels ondergaan, bijv. als rondom beide opvangopeningen bijzondere windschermen aangebracht zouden zijn) of indien het windeffect op de twee regenmeters exact gelijk zou zijn ($p_1 = p_2$, zie in de notatie $H_2 = W(1-p_2)$ en $2H_1 = W(1-p_1)$, blz. 7 e.v., dan zou, als meetfouten afwezig zouden zijn, bij elke waarneming exact aan de gelijkheid $H_1 = \frac{1}{2} H_2$ moeten worden gehoorzaamd. De werkelijkheid is, dat er én meetfouten zijn én voor R_1 en R_2 verschillende windeffecten, zodat waarschijnlijk $p_1 < p_2$ zal zijn. De volgens Braak door Belgrand genoemde getallen (zie blz 8) wijzen in die richting. Daarbij komt, dat p_1 en p_2 met toenemende wind toenemen en het relatieve verschil tussen p_1 en p_2 gelijktijdig. Als dit alles voldoende markant is, zal moeten blijken, als wij het materiaal in enkele groepen voor de gemiddelde windsterkte \bar{V} gedurende de regen indelen, dat de regressiecoëfficiënt α_1 in de lineaire relatie $\hat{C}H_1 = \alpha_1 H_2 + \beta_1$ met toenemende afneemt. (de onvermijdelijke meetfouten zullen, als het effect klein is, het moeilijk maken een en ander statistisch significant te stellen).

Te dien einde werd bij elke in tabel 1 genoemde hoeveelheid van het pluviogram de regenduur t afgelezen en daarna weer van het anemogram van de naburige contactanemograaf (zie schets; 60 cm hoogte) de gedurende deze regenduur voorgekomen gemiddelde windsnelheid \bar{V} afgelezen. Dit gelukte bij 83 van de 120 gevallen. Daarna werden deze 83 gevallen gegroepeerd in de klassen $\bar{V} = 0.0 - 0.9; 1.0 - 1.9; 2.0 - 2.9$ en ≥ 3.0 m/sec. (aantallen 15, 35, 23 en 10). Voor elk dezer werd de beste lineaire relatie $\hat{C}H_2 = \hat{\alpha}_1 H_1 + \hat{\beta}_1$ en $\hat{C}H_1 = \hat{\alpha}_2 H_2 + \hat{\beta}_2$ berekend, alsmede de grootheden $\bar{H}_1, \bar{H}_2, s_1, s_2, r(H_1, H_2)$,
 $\hat{\sigma}_1 = s_1 \sqrt{(1-r^2)}, \hat{\sigma}_2 = s_2 \sqrt{(1-r^2)}$, terwijl opnieuw de betrouwbaarheidsgrenzen bij $\hat{\alpha}_1$ en $\hat{\beta}_1$ werden berekend onder de aanname $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ en $\beta_1 = 0$, alsmede $\alpha_2 = 2$ met $\beta_2 = 0$. ($i = 1, 2$) Zie tabel 6.

Tabel 6

$\bar{v} \rightarrow$		A	B	C	D	AB	CD
		0.0-0.9	1.0-1.9	2.0-2.9	≥ 3.0	≤ 1.9	$> 2.0^m/\text{sec.}$
gem.	n	15	35	23	10	50	33
	\bar{v} m/sec.	0.47	1.48	2.39	3.39	1.18	2.69
	\bar{H}_1 mm	0.981	1.677	1.305	2.560	1.468	1.685
	\bar{H}_2 mm	1.898	3.267	2.617	5.049	2.856	3.354
	s_1 mm	1.444	1.962	1.677	3.776	1.836	2.507
	s_2 mm	2.736	3.810	3.375	7.420	3.551	4.961
	r (H_1, H_2)	0.998	0.957	0.935	0.9999	0.965	0.980
$\hat{\epsilon}_{H_1} = \hat{\alpha}_1 H_2 + \hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_1$	0.526	0.493	0.465	0.509	0.499	0.495
	$\hat{\beta}_1$	-0.017	+0.066	+0.088	-0.010	0.043	0.025
	betr. gr. voor $\hat{\alpha}_1$	0.48; 0.52	0.45; 0.55	0.37; 0.63	0.49; 0.51	0.46; 0.54	0.46; 0.54
	betr. gr. voor $\hat{\beta}_1$	-0.07; -0.03	-0.03; 0.08	-0.08; 0.18	-0.05; -0.04	-0.04; 0.04	-0.02; 0.05
$\hat{\epsilon}_{H_2} = \hat{\alpha}_2 H_1 + \hat{\beta}_2$	$\hat{\alpha}_2$	1.890	1.858	1.883	1.965	1.867	1.938
	$\hat{\beta}_2$	-0.044	-0.151	-0.160	-0.019	-0.115	-0.088
	betr. gr. voor $\hat{\alpha}_2$	1.93; 2.07	1.90; 2.10	1.68; 2.32	1.98; 2.02	1.86; 2.14	1.86; 2.14
	betr. gr. voor $\hat{\beta}_2$	-0.12; 0.03	-0.25; -0.05	-0.48; 0.16	-0.04; 0.00	-0.26; 0.03	-0.23; 0.05
	$\hat{\sigma}_1 = s_1 \sqrt{1 - r^2}$ mm	0.091	0.559	0.598	0.054	0.478	0.501
	$\hat{\sigma}_2 = s_2 \sqrt{1 - r^2}$ mm	0.173	1.07	1.20	0.10	0.91	0.99

In alle vier groepen A, B, C, D geeft het materiaal geen aanleiding om de mogelijkheid, dat in de universa der H_1, H_2 -paren de β_1 en $\beta_2 = 0$ is, te verwerpen, d.w.z. de lineaire relaties mogen geschreven worden als $\hat{\epsilon}_{H_2} = \alpha_1 H_1$ resp. $\hat{\epsilon}_{H_1} = \alpha_2 H_2$, waarbij (alweer door de kleine aantallen per groep) het niet mogelijk is te zeggen of α_1 van $\frac{1}{2}$ verschilt en wellicht met toenemende \bar{v} in toenemende mate (evenals of α_2 van 2 verschilt). Zo het bedoelde effect er is, is het zo klein, dat het vanwege o.a. meetfouten en reële veldverschillen niet te ontdekken is, tenzij men over een uiterst groot materiaal zou kunnen beschikken.

4. Samenvatting

4.0. Regenmeter R_1 had een opvangopening van 200 cm^2 ; de standaardregenmeter (voor klimatologische doeleinden) 400 cm^2 . Beide openingen lagen op 40 cm boven maaiveld. Zij stonden eerst 2.4, later 1 m van elkaar. R_1 werd geleegd in het bij R_1 behorende maatglas. Bij iedere aftapping (welke doorgaans, maar niet altijd, de hoeveelheid van één regen vertegenwoordigde) zou dus, strikt genomen, $2 H_1 = H_2$ moeten gelden. Dit bleek niet het geval. Een en ander werd statistisch geanalyseerd.

4.1. 1) a. De verschillen $\Delta = 2 H_1 - H_2$ zijn zowel negatief, nul als positief.

De hypothese dat positieve en negatieve Δ 's even waarschijnlijk zijn, behoeft niet verworpen te worden,

noch voor alle 120 gevallen, waarin $H_2 \geq 0.01 \text{ mm}$ en $\Delta \neq 0$,

noch voor alle 97 gevallen, waarin $H_2 \geq 0.10 \text{ mm}$ en "

noch voor alle 82 gevallen, waarin $H_2 \geq 0.20 \text{ mm}$ en "

b. De kansdistributie der Δ 's in de populatie is zeer waarschijnlijk symmetrisch rondom nul.

c. De Δ -verdeling is beslist niet normaal.

2) Een enkele der grote $|\Delta|$'s (zegge $\geq 0.30 \text{ mm}$) berust misschien op een echte vergissing (verschrijving, etc.) t.a.v. H_1 en (of) H_2 .

Het bleek statistisch dat de grote spreiding in de Δ 's niet te verklaren is met de bekende meetfouten (t.g.v. o.a. bevochtiging van regenmeter en glas) alleen, ook niet met de gevolgen van meetfouten én veldverschillen op afstanden van 1 à 2 m. Maar het ziet er naar uit, dat dit wel het geval zou zijn, wanneer meer vergelijkingsmateriaal (vooral vele metingen van grote hoeveelheden) ter beschikking zou staan. Het is tevens gewenst beter over de grootten der meetfouten en veldverschillen ingelicht te zijn.

8 % aller $|\Delta|$'s lag boven 0.20 mm ; op basis van meetfouten alleen zou dat 1.8 % moeten zijn.

3) $\bar{H}_1 = 1.088$; $\bar{H}_2 = 2.145 \text{ mm}$; $\bar{\Delta} = 2 \bar{H}_1 - \bar{H}_2 = 0.031 = 1.4 \%$ van \bar{H}_2 . Het gemiddelde verschil tussen $2 H_1$ en H_2 (ongeacht teken) = $|\bar{\Delta}| = 0.095 \text{ mm}$;

op grond van meetfouten alleen zou dit geweest zijn

$\varepsilon = \sigma_d \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0.06 \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0.068$, althans in een normale ver-

deling rondom nul en met standaarddeviatie $\sigma_d = 0.06 \text{ mm}$. Maar én de Δ -verdeling is niet normaal, én de st.dev. is veel groter.

4.2. Onderzocht werden de lineaire relatie $\bar{E} H_1 = \alpha_1 H_2 + \beta_1$ en $\bar{E} H_2 = \alpha_2 H_1 + \beta_2$.

Resultaat: $\hat{\alpha}_1 = 0.508$ $\hat{\beta}_1 = -0.002$
 $\hat{\alpha}_2 = 1.949$ $\hat{\beta}_2 = -0.024$

Er is statistisch geen aanleiding om de hypothese, dat $\beta_1 = \beta_2 = 0$ te verwerpen, maar dan moet α_1 tussen 0.50 en 0.51 en α_2 tussen 1.93 en 2.00 liggen ($\alpha_2 = 1 : \alpha_1$)

De relaties zijn dus hoogstwaarschijnlijk:

$$\begin{aligned} \bar{E} H_1 &= 2\alpha_1 H_2; & 0.50 < \alpha_1 < 0.51 \\ \bar{E} H_2 &= \alpha_2 H_1; & 1.96 < \alpha_2 < 2.00 \end{aligned}$$

Dit zijn relaties, die aangeven welke waarde van $2 H_1$ (resp. H_2) in het gemiddelde behoort bij gegeven waarde van H_2 (resp. H_1).

Er geldt:

- bij gegeven H_2 , is er 95 % kans, dat $2\alpha_1 H_2 - 4\hat{\sigma}_1 < 2 H_1 < 2\alpha_1 H_2 + 4\hat{\sigma}_1$, met $\hat{\sigma}_1 = 0.59$ mm
- bij gegeven H_1 , is er 95 % kans, dat $\alpha_2 H_1 - 2\hat{\sigma}_2 < H_2 < \alpha_2 H_1 + 2\hat{\sigma}_2$, met $\hat{\sigma}_2 = 0.37$ mm

Hier volgen twee numerieke voorbeelden (niet gelijk aan die op blz 11):

Onderstel $\alpha_1 = 0.51$, $\alpha_2 = 1 : 0.51 = 1.96$. Dan is,

als $2 H_1 = 4.0$ mm, $3.18 < H_2 < 4.66$ rondom $\bar{H}_2 = 3.92$; bandbreedte = 1.48 mm = 37%

als $H_2 = 4.0$ mm, $3.32 < 2H_1 < 4.84$, " $2\bar{H}_1 = 4.08$; " = 1.52 mm = 38%

als $2 H_1 = 40$ mm, $38.5 < H_2 < 39.9$, rondom $\bar{H}_2 = 39.2$; bandbreedte = 1.48 mm = 3.7%

als $H_2 = 40$ mm, $40.0 < 2H_1 < 41.6$, " $2\bar{H}_1 = 40.8$ mm; " = 1.52 mm = 3.8%

De bandbreedten voor H_1 en H_2 blijven in absolute zin gelijk, doch nemen in relatieve zin (t.o.v. H_2 resp. H_1) af met toenemende H_2 resp. H_1 .

Nadere analyse echter maakt waarschijnlijk, dat met toenemende H_2 , de in de verzameling der bij gegeven H_2 behorende waarden van $2 H_1$ aanwezige spreiding toeneemt. Indien dit statistisch significant is neemt de bandbreedte der $2 H_1$ -waarden in absolute zin toe en (t.o.v. H_2) in relatieve zin af met toenemende H_2 . (tabel 5)

In het eerste geval houdt dit tevens in, dat $q = 2 H_1 : H_2$ een kansverdeling volgt, waarin het gemiddelde \bar{q} onafhankelijk is van H_2 (n.l. gelijk aan $2\alpha_1$),

en waarvan de standaarddeviatie σ_q omgekeerd evenredig is met H_2 ; in het laatste geval zal deze σ_q (ongeveer) onafhankelijk van H_2 zijn. Veel meer materiaal is nodig om tussen deze twee uitersten te kunnen beslissen. De kwestie betreft het al oude probleem of men beter doet te beschouwen $H_1 : H_2$ of $H_1 - (\alpha H_2 + \beta)$. [Zie ook W.R. 58-3 door P.J. Rijkooft]

4.3. Het materiaal was te klein om te onderzoeken of het lineaire verband tussen H_1 en H_2 nog afhankelijk is van de gemiddelde windsnelheid \bar{v} tijdens de regen. Het bleek niet mogelijk uit te maken of in de relaties $\overset{E}{H}_1 = 2\alpha_1 H_2$ en $\overset{E}{H}_2 = \alpha_2 H_1$ de α_1 resp. α_2 met toenemende \bar{v} af -, resp. toeneemt. Dit zou n.l. mogen worden verwacht als het waar is, dat een regenmeter met kleinere opvangopening een groter windeffect ondergaat. Het verschil-effect is wellicht zo klein, dat het verloren gaat tegenover de effecten van meetfouten en veldverschillen.

4.4. Opmerking van statistische aard

Hoe ook de frequentieverdeling van H_1 of H_2 moge zijn, het is altijd mogelijk een beste lineaire regressie tussen H_1 en H_2 te berekenen (met de methode der kleinste kwadraten). Is het ook zinvol? Dat hangt af van het doel van de regressieanalyse. Zodra naar de betrouwbaarheidsmarges van de regressiecoëfficiënten gevraagd wordt (bijv. om uit te maken of de regressiecoëfficiënt al of niet in strijd is met een hypothetische waarde, of om te weten of de universum-regressierechte door de oorsprong gaat) of de vraag gesteld wordt of twee regressierechten significant van helling verschillen of hoe sterk de ene variabele nog spreiden kan als de andere gegeven wordt, moet aan enkele voorwaarden voldaan zijn, opdat een statistische beschouwing überhaupt mogelijk is. Zo moeten H_1 en H_2 normaal verdeeld zijn. Dit nu zijn ze zeker niet. Wij vonden het de moeite niet lonen naar transformaties te zoeken, die $H_1^{\equiv} = f(H_1)$ wel normaal verdeeld doen zijn (misschien komt $f \equiv \log$ het eerst in aanmerking) en dan met de getransformeerde variabelen verder te werken. In deze zin zijn onze berekeningen dus ietwat "zwak", maar de praktijk heeft al dikwijls geleerd, dat de gebruikelijke betrouwbaarheidsbeschouwingen niet alle waarde missen doordat de variabelen niet normaal verdeeld zijn.

Tabel 1

Overzicht van alle 120 paren van waarnemingen. H_1, H_2
(beide regenmeters op 40 cm hoogte)

t = regenduur; \bar{v} = gemiddelde wind gedurende de regen, op 60 cm hoogte

400 cm ² H ₂	200 cm ² H ₁	$\Delta =$ 2H ₁ -H ₂	t	\bar{v}	400 cm ² H ₂	200 cm ² H ₁	$\Delta =$ 2H ₁ -H ₂	t	\bar{v}	400 cm ² H ₂	200 cm ² H ₁	$\Delta =$ 2H ₁ -H ₂	t	\bar{v}
mm	mm	mm	min	m/sec	mm	mm	mm	min	m/sec	mm	mm	mm	min	m/sec
0.01	0.00	-0.01			0.20	0.07	-0.06	5	1.5	1.50	0.81	0.12	45	2.0
0.01	0.00	-0.01			0.20	0.08	-0.04	60	0.0	1.60	0.72	-0.16	50	1.1
0.02	0.01	0.00			0.22	0.10	-0.02	15	0.7	1.62	0.80	-0.02	105 ²⁾	1.9
0.02	0.02	0.02			0.26	0.18	0.10	15	2.6	1.65	0.82	-0.01	15	2.3
0.03	0.00	-0.03			0.27	0.12	-0.03			1.70	0.90	0.10	130 ³⁾	1.6
0.03	0.00	-0.03			0.28	0.10	-0.08	10	1.5	1.85	0.90	-0.05	30	2.3
0.03	0.01	-0.01			0.28	0.13	-0.02	5	1.5	1.90	0.94	-0.02	195 ²⁾	1.7
0.03	0.01	-0.01			0.28	0.16	0.04	5	2.9	2.00	1.10	0.20	182	3.2
0.03	0.02	0.01			0.29	0.10	-0.09	150	0.3	2.30	1.16	0.02	70 ⁴⁾	1.3
0.04	0.00	-0.04			0.29	0.18	0.05	45	?	2.50	1.20	-0.10	185 ³⁾	1.6
0.04	0.00	-0.04			0.30	0.10	-0.10	75 ²⁾	0.9	3.00	1.45	-0.10	85 ³⁾	2.0
0.04	0.02	0.00			0.30	0.15	0.00	15	1.4	3.00	1.50	0.00	480 ⁶⁾	2.1
0.04	0.03	0.02	38	2.9	0.32	0.17	0.02	5	0.7	3.36	1.65	-0.26	96 ⁴⁾	2.2
0.05	0.03	0.01			0.36	0.17	-0.02	10	0.0	3.40	1.80	0.20	60	3.7
0.05	0.03	0.01			0.39	0.20	0.01	5	1.9	3.60	1.80	0.00	180 ³⁾	1.3
0.05	0.03	0.01			0.40	0.10	-0.20	15 ²⁾	4.2	3.70	1.85	0.00	20 ²⁾	1.2
0.06	0.03	0.00			0.41	0.22	0.03	25	3.3	3.70	1.90	0.10	70 ²⁾	1.6
0.08	0.01	-0.06			0.43	0.18	-0.07	10 ²⁾	2.4	3.70	2.70	1.70	35	1.0
0.08	0.01	-0.06			0.43	0.18	-0.07	30	1.2	4.00	2.00	0.00	105	0.6
0.08	0.03	-0.02			0.44	0.27	0.10	25	2.3	4.00	2.09	0.18	185 ³⁾	1.0
0.09	0.01	-0.07	5	2.2	0.46	0.25	0.04			4.20	2.00	-0.20	310	1.1
0.09	0.04	-0.01			0.48	0.27	0.06	65 ³⁾	1.8	4.20	2.10	0.00	330 ⁴⁾	2.3
0.09	0.06	0.03			0.49	0.22	-0.05	10	3.3	4.60	2.40	0.20	135 ²⁾	1.6
0.10	0.00	-0.10			0.56	0.31	0.06	40	2.7	4.70	2.77	0.84	150 ²⁾	0.0
0.10	0.02	-0.06			0.58	0.28	-0.02	45 ²⁾	2.9	5.45	2.73	+0.01	125	1.3
0.10	0.03	-0.04			0.59	0.30	0.01			6.40	3.20	0.00	105	1.6
0.10	0.05	0.00			0.65	0.32	-0.01	10	2.7	6.60	3.30	0.00	490 ³⁾	0.3
0.10	0.05	0.00	110	2.9	0.68	0.32	-0.04	10	3.3	6.90	3.50	0.10	103 ³⁾	2.6
0.10	0.06	0.02	20	0.6	0.70	0.30	-0.10	65 ²⁾	2.0	6.75	3.35	-0.05	80 ⁴⁾	3.0
0.12	0.06	0.00			0.72	0.36	0.00	45 ³⁾	0.6	7.10	3.55	-0.40	210 ⁵⁾	2.4
0.13	0.06	-0.01	10	0.9	0.72	0.39	0.06	20 ²⁾	1.8	7.60	3.80	0.00	185 ⁴⁾	1.6
0.15	0.03	-0.09			0.76	0.39	0.02	35	3.1	8.40	4.60	0.80	90 ⁵⁾	1.9
0.15	0.06	-0.03			0.79	0.39	-0.01	5	1.5	8.60	4.51	0.42	310 ⁴⁾	0.9
0.16	0.09	0.02	5	1.0	0.80	0.40	0.10	245	1.1	9.20	4.70	0.20	150	1.9
0.16	0.10	0.04			0.80	0.40	0.00	15	1.9	10.70	5.30	-0.10	620 ⁴⁾	2.0
0.18	0.10	0.02			1.12	0.55	-0.02	75 ²⁾	2.2	10.75	5.30	-0.15	350 ²⁾	1.7
0.19	0.09	-0.01			1.20	0.59	-0.02	90 ²⁾	1.8	11.70	5.80	-0.10	190	2.1
0.19	0.10	0.01	90	0.0	1.20	0.60	0.00	65	1.1	12.60	6.40	0.20	280	3.2
0.20	0.00	-0.20			1.30	0.63	-0.04	45	1.3	18.10	9.30	0.50	75	1.8
0.20	0.05	-0.10			1.35	0.61	-0.13	80	0.0	23.00	11.70	0.40	495 ³⁾	3.6

N.B. waar noch t, noch \bar{v} genoemd wordt, was het pluviogram zo onduidelijk, dat de regenduur (en daardoor ook de \bar{v}) niet afgelezen kon worden. De symbolen ²⁾, ³⁾, ⁴⁾, ⁵⁾, ⁶⁾ betekenen, dat de totale hoeveelheid neerslag van 2, 3, 4, 5, 6 regens stonde. In de overige gevallen was van één regen sprake.

Tabel 2

Frequentietabel van 120 waarnemingen

$H_2(400 \text{ cm}^2)$ Interval in mm	Aantal
0.01- 0.50	63
0.51- 1.00	12
1.01- 2.00	13
2.01- 3.00	4
3.01- 4.00	8
4.01- 5.00	4
5.01- 6.00	1
6.01- 7.00	4
7.01- 8.00	2
8.01- 9.00	2
9.01-10.00	1
10.01-11.0	2
11.01-12.0	1
12.01-13.0	1
18.0 -19.0	1
22.0 -23.0	1
alle	120

Tabel 3

frequentieverdeling der

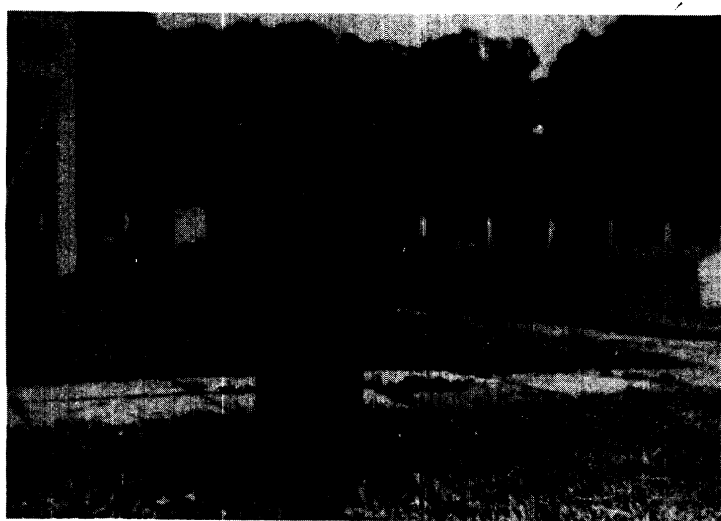
$|\Delta|$ waarden;

$$\Delta = 2H_1 - H_2$$

klasse mm	Aantal
0.00	19
0.01-0.10	79
0.11-0.20	14
0.21-0.30	1
0.31-0.40	2
0.41-0.50	2
0.80	1
0.84	1
1.70	1
alle	120



De standaard regenmeter. Opening 400 cm².
Bovenrand 40 cm. boven maaiveld

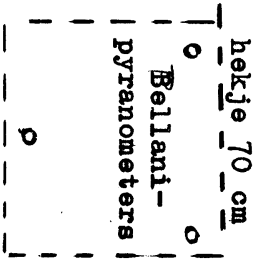


Het nieuwe type regenmeter. Opening 200 cm².
Bovenrand 40 cm. boven maaiveld.

Overzicht van de opstelling



x₄
 vier
 scheef opge-
 stelde regen-
 meters
 x₃



verdampingsbak



40 cm

o anemometer;
 60 cm hoog

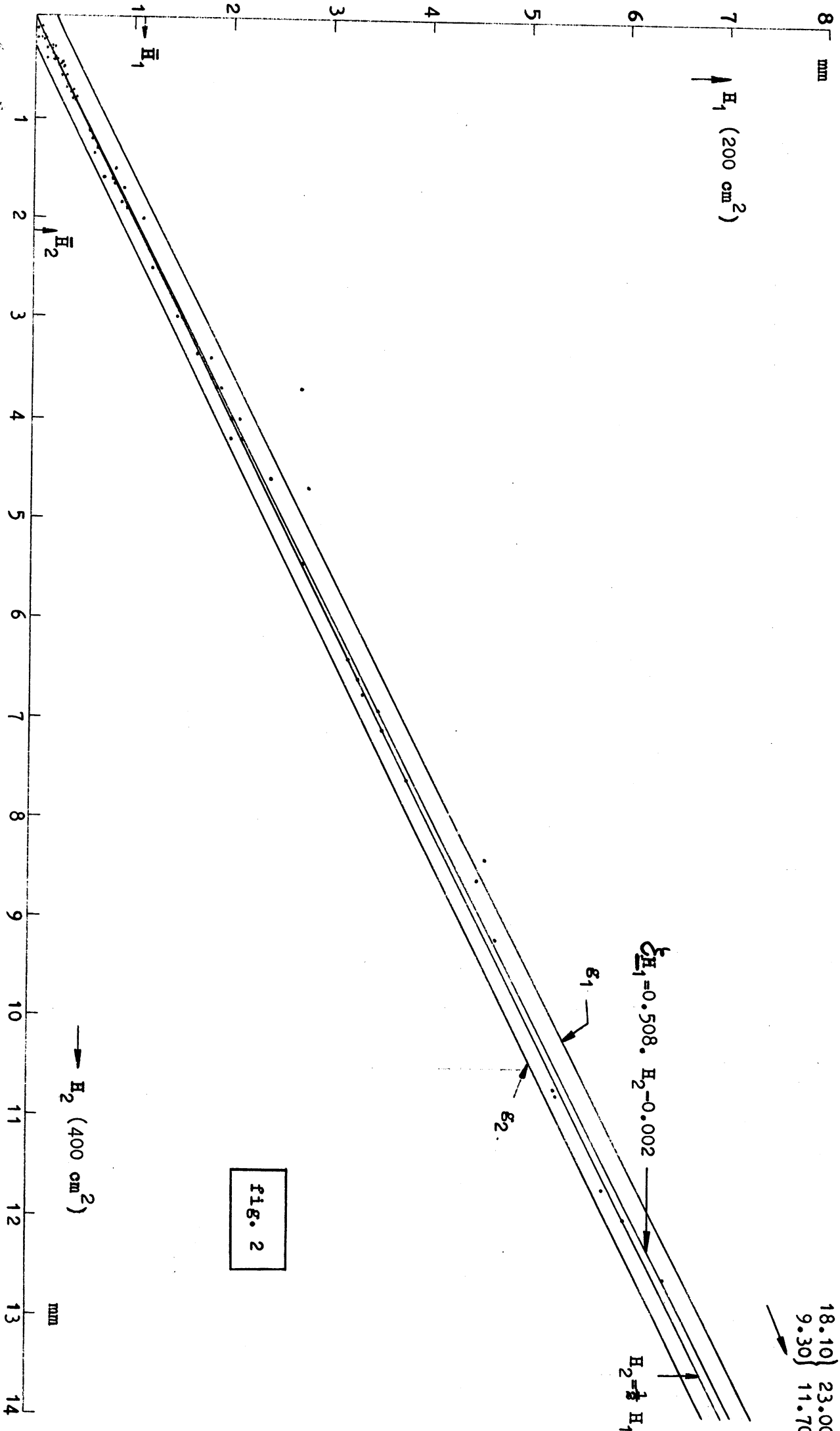


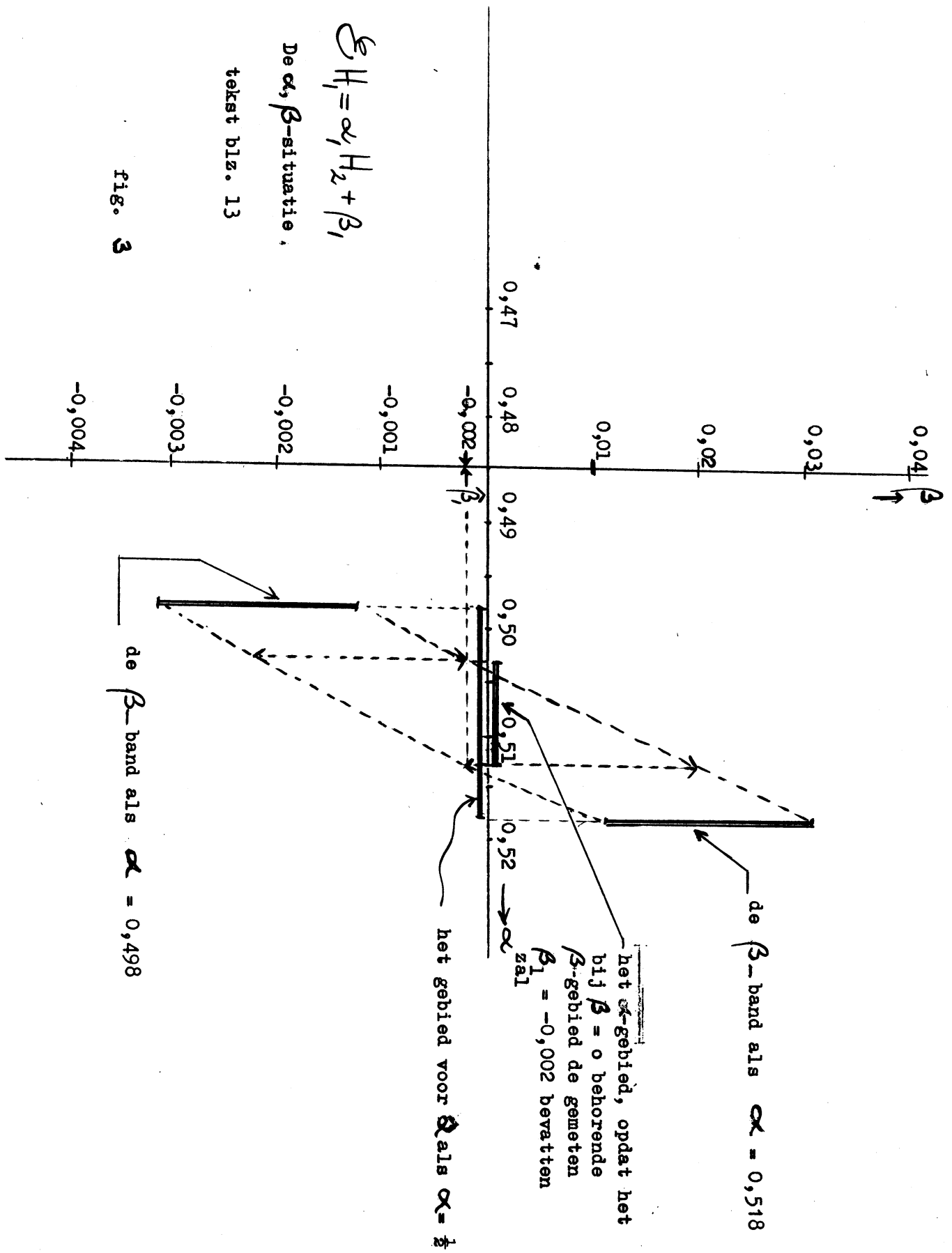
R_1 = koperen regenmeter 200 cm²
 R_2 = klimat. " 400 cm²
 R_2^E = extra " 400 cm²
 P = pluviograaf

R_1 x
 R_2^E x
 R_2 x
 x_P

fig. 1

Alle vier op 40 cm hoogte.





$$E H_1 = \alpha_1 H_2 + \beta_1$$

De α, β -situatie,

tekst blz. 13

fig. 3