KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT

Verslagen V-62
(R III-243-1960)

Numerieke voorbeelden als toelichting bij het gebruik van de nomogrammen bij de Interdiurne Variabiliteit

door

C. Levert

De hier volgende numerieke voorbeelden, die elk een bepaald type vraag vertegenwoordigen, geven een toelichting op het gebruik van de 6 nomogrammen (afgekort $\Delta(t)$-, $\Delta(T)$-, $\Delta(U)$-, H-, B-, F- nomogram), die werden ontworpen bij een studie der Interdiurne Variabiliteit.

De verschillende typen van vragen betreffen:

A: overschrijdingskans

B: overschreden waarde

C: tijd van het jaar

D: vergelijking tussen decaden of tussen stations

E: betrouwbaarheden

<u>Type A: Overschrijdingskans</u>

<u>Vraag 1</u>: Welke kans is er op een ééndaagse verandering van tenminste + 6° C in de minimumtemperatuur te Gemert in de decade januari II ?

<u>Antw.</u>: Draai de loper [1] over jan. II [2], Gemert, $\Delta(t)$-nomogram , en lees bij 6° C de P en j af.
Er komt P = 0.025 en j = 1 : 10 P = 4, d.w.z. <u>1 keer in gemiddeld 4 jaren</u>.

<u>Vraag 2</u>: In een bepaalde tijd van het jaar is te Gemert een tussendaagse verandering van tenminste + 6° C in de minimumtemperatuur het minst zeldzaam. Hoe zeldzaam? In welke tijd van het jaar?

Antw.: Draai de loper, Δ (t)-nomogram , zodanig, dat hij aan de Gemert-kromme aan de onderzijde raakt (dus het minst helt) en lees dan bij 6° C de P en j af.
Er komt: <u>1 keer in gemiddeld 2.9 jaren</u>, want P = 0.035; j = 1 : 10 P = 2.9 ; mei III, jun. I

<u>Vraag 3</u>: Op een der 3 stations Gemert, Naaldwijk en Groningen is een ééndaagse toeneming van tenminste 6° C in de minimumtemperatuur het zeldzaamst. Hoe zeldzaam? Welk station?

Noot 1) Waar van "draaien van de loper" sprake is, wordt bedoeld dat de doorzichtige schaal gedraaid wordt om het punt Δ = 0, P = 0.50, welke punt gemakshalve 0 (oorsprong) genoemd wordt. Op deze doorzichtige schaal staat een rechte lijn, die de "loper" heet.

Noot 2) Met de cirkels zelf (en dus niet met de middens, halverwege tussen twee successieve cirkels) corresponderen de decaden I, II en III.

Antw.: Draai de loper, $\Delta(t)$-nomogram, zodanig, dat hij raakt aan een der drie krommen en tevens zo weinig mogelijk helt. Er komt: <u>1 keer in gemiddeld 2.6 jaren</u>. Groningen en wel nov. II. Ook ongeveer Groningen, augustus II en Naaldwijk, juli III.

N.B. De kans op een positieve ééndaagse verandering van tenminste 6° C is gelijk aan die op een negatieve verandering van tenminste 6° C, geschreven $P\left[\Delta \geqslant g\right] = P\left[\Delta \leqslant -g\right]$, voor elke g.

Type B: Overschreden waarde

Vraag 1: Welke ééndaagse toeneming van de maximumtemperatuur wordt in april I te Groningen 1 keer in gemiddeld 5 jaren bereikt of overtroffen?

Antw.: Draai de loper , Δ (T)-nomogram, om 0 over apr.I, Groningen, en lees bij j = 5 (d.i. P = 1:10 j = 0.02) de af. Er komt $\underline{\Delta = 6.6\ ^{\circ}C}$.

Vraag 2: In een bepaalde tijd van het jaar is de waarde van de ééndaagse toeneming in de maximumtemperatuur, die te Groningen 1 keer in gemiddeld 5 jaren bereikt of overschreden wordt, het grootst. Hoe groot?

Antw.: Draai de loper, Δ (T)-nomogram, om 0 zodanig, dat hij raakt aan de bovenzijde van de Groningen-kromme (en dus zoveel mogelijk helt). Lees dan de decade bij het raakpunt af: mei II. Daarbij is $\Delta = 8.2^{\circ}$ C en P = 0.02, d.i. 1 keer in gemiddeld j = 1 : 10 P = 5 jaren.

Type C: Tijd van het jaar

Vraag 1: In welke tijd van het jaar mag men te Naaldwijk 1 keer in gemiddeld 10 jaren een ééndaagse toeneming in de maximumtemperatuur van tenminste 6° C verwachten?

Antw.: Draai de loper, Δ (T)-nomogram, om 0 over het punt met de abscis P = 0.01 (d.i. j = 10) en ordinaat Δ = 6 en lees de decaden af bij de snijpunten van de rechte met de Naaldwijk-kromme. Er komt: mrt. II, III; aug. II, III.

Vraag 2: In welke tijd van het jaar mag men te Groningen 1 keer in gemiddeld 20 jaren een ééndaagse toeneming van de 14^h-relatieve vochtigheid van tenminste 50%, in absolute maat (d.w.z. zowel 20→ 70% als 40→90%) verwachten?

Antw.: Draai de loper, Δ (U)-nomogram, om 0 tot over het punt met de coördinaten Δ = 50, j = 20 (P = 1 : 10 j = 0.005). Lees de decaden bij de snijpunten van de rechte met de Groningen-curve af: mrt. II, III; juli I; sept. I, II.

<u>Type D: Vergelijking tussen decaden of tussen stations</u>

<u>Vraag 1</u>: De interdiurne variabiliteit (I.V.) met de standaarddeviatie σ_Δ der ééndaagse variaties karakteriserend en afsprekende, dat de I.V. groter heet als σ_Δ groter is, vraagt men of te Gemert de toeneming van de I.V. van de minimumtemperatuur in de loop van april statistisch significant is.

Antw.: De s_Δ -waarden (schattingen van de σ_Δ-waarden) in apr. I, II, III zijn (na vereffening; af te lezen rechts boven in het nomogram) 3.03 , 3.06 en 3.10 °C. Draai daartoe de loper om 0 bijv. tot over het punt apr. I van de Gemert-curve en lees de s_Δ -waarde af bij het snijpunt van de rechte met de buitenste cirkel. De effectieve aantallen der drie steekproeven (nominale aantallen bij alle drie: 260, n.l. elke decade 10 dagen; 26 jaren), die deze s_Δ -waarden leverden, zijn 1030, 930, 850, gemiddelde = 940. Men leest ze af langs de rechterrand. De nulhypothese, die wij willen toetsen, luidt, dat de drie normaal verdeelde Δ -universa (die bij april I, apr. II, apr. III) gelijke varianties hebben. Bereken $t = 3.10^2/3.03^2 = 1.05$, waarin 3.10 en 3.03 de grootste resp. kleinste der drie s_Δ 's zijn. Van het, voor dit onderzoek vervaardigde, H-nomogram (gebaseerd op een tabel van Hartley) leest men af, bij $k = 3$, $e = 940$ en de 5%-significantie-drempel, een $t_0 = 1.087$. Aangezien $1.05 < 1.087$ wordt de nulhypothese <u>niet</u> verworpen. Anders gezegd: binnen de maand april is met 95% waarschijnlijkheid de I.V. onveranderlijk.

Het kan zijn, dat men interesse heeft voor een groter deel van het jaar, bijv. voor de decaden apr. I t/m jun. I (7 decaden; $k = 7$). De gemeten varianties zijn (lees weer af langs de buitenste cirkel) 3.03^2 (effectief aantal 1030), 3.06^2 (930), 3.10^2 (850), 3.23^2 (810), 3.25^2 (850), 3.29^2 (930) en 3.29^2 (1040). De nulhypothese luidt thans: de zeven normaal verdeelde Δ-populaties hebben gelijke varianties. Moet men deze verwerpen? Nu is $t = 3.29^2 : 3.03^2 = 1.17$. Het H-nomogram levert bij $k = 7$ en $e = \frac{1}{7}(1030 + 930 + 850 + 810 + 850 + 930 + 1040) = 920$ een $t_0 = 1.08$, derhalve $1.17 > 1.08$. De nulhypothese moet nu wel verworpen worden, m.a.w. de toeneming van de I.V. is in dit gedeelte van het jaar statistisch significant (behoudens een 0.05-kans op een toch foutieve conclusie).

Een statistische finesse:

Indien men zeer exact wil zijn, mag men niet met e werken. Dan moet de formule van Bartlett gebruikt worden. Dit is eveneens het geval als $k > 12$ (d.i. in het geval van gedeelten van het jaar, die meer dan 3 maanden omvatten). Er waren k varianties gemeten: $s_1^2, \ldots s_k^2$ op basis van steekproeven van effectieve aantallen n_1, $n_2 \ldots n_k$. De nulhypothese luidt: de k normaal verdeelde populaties hebben gelijke varianties. Moet deze worden verworpen? Bereken $s^2 = \sum_1^k n_i s_i^2 : \sum_1^k n_i$; noem $n = \sum_1^k n_i$
Bereken ook

$$B = \frac{2.3026}{C}\left[n \cdot \log s^2 - \sum_1^k n_i \log s_i^2\right] ,$$

$$\text{met } C = 1 + \frac{1}{3\,(k-1)}\left[\sum \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n}\right]$$

Deze B volgt onder de nulhypothese een χ^2-verdeling met k-1 graden van vrijheid. Zoek de 5%-significantie-drempel χ_0^2 op en zie of $B > \chi_0^2$ is. Zo ja, dan verwerpe men de nulhypothese, hetgeen dan betekent dat niet alle k varianties σ^2 gelijk zijn.

<u>Vraag 2</u>: Is er een statistisch significant verschil tussen de I.V.'s der minimumtemperaturen in september van de drie stations Naaldwijk, Gemert en Groningen?

Antw.: Het $\Delta(t)$-nomogram levert voor sep. I, II, III als s_Δ-waarden te Naaldwijk : 2.47 2.60 2.75 , te Gemert: 2.84 2.93 3.02 en te Groningen: 2.26 2.31 2.37 °C. De effectieve aantallen zijn Na: 840 820 820 , Ge: 840 820 820 en Gr: 650 630 630. Gemiddeld: e = 763. Het quotiënt der extreme varianties is $t = 3.02^2/2.26^2 = 1.78$. De 5% significantiedrempel t_0 , opgezocht in het H-nomogram bij k = 9 en e = 763, is 1.08 . Aangezien $1.78 \gg 1.08$ moet de nulhypothese, dat de 9 populaties gelijke varianties zouden hebben (dus gelijke I.V.'s) <u>verworpen</u> worden. Dit lijkt visueel (!) zeer voor de hand liggend (zie de 3 krommen), doch alleen een statistische toets kan statistische zekerheid verschaffen. Men kan schrijven Ge $\neq$ Na $\neq$ Gr , beter nog „niet Ge = Na = Gr". Hoe is het met de onderdelen van deze uitspraak?

a) Is Ge $>$ Na? Beschouw de steekproefvarianties 2.84^2(840), 2.93^2 (820), 3.02^2 (820); 2.47^2 (840), 2.60^2 (820) en 2.75^2 (820). Bereken: $t = 3.02^2/2.47^2 = 1.15$ en $e = \frac{1}{6}(840 + 820 + 820 + 840 + 820 + 820) = 827$.
Het H-nomogram (k = 6; e = 827) levert een significantie-drempel $t_o = 1.09$. Dus $1.15 > 1.09$. Conclusie : Ge $>$ Na (met 0.05-kans op foutieve uitspraak).

b) Is Na $>$ Gr? Beschouw nu de varianties 2.47^2(840), 2.60^2(820), 2.75^2(820); 2.26^2(650), 2.31^2(630) en 2.37^2(630). Thans $t = 2.75^2/2.26^2 = 1.48$ en $e = \frac{1}{6}(840 + 820 + 820 + 650 + 630 + 630) = 732$. Het H-nomogram (k = 6; e = 732) levert $t_o = 1.10$, zodat $1.48 > 1.10$ en de conclusie is Na $>$ Gr.

Slotconclusie: het „niet Ge = Na = Gr" impliceert hier:
Ge $>$ Na $>$ Gr

<u>Vraag 3</u>: Verschillen te Naaldwijk voor de maximumtemperatuur de I.V.'s der decaden maart I en september III statistisch significant?

Antw.: Van het Δ(T)-nomogram leest men af: mrt.I : $\sigma_\Delta = 2.23$ °C (effectiefaantal 540) en sep.III : $\sigma_\Delta = 2.02$ °C (750).
Dus $F \equiv 2.23^2/2.02^2 = 1.22$. Raadpleeg het voor ons onderzoek vervaardigde „nomogram bij de toets van Fisher , voor grote aantallen van graden van vrijheid" (F-nomogram, kortheidshalve). Het levert bij F = 1.22 en $\nu \simeq \frac{1}{4}(540 + 720) = 322$ een overschrijdingskans $\beta = 0.008$. Deze ligt ver beneden de 0.05, zodat de nulhypothese, dat de Δ-populaties bij mrt.I en sep.III dezelfde varianties hebben, <u>verworpen</u> moet worden; anders gezegd I.V. (mrt.I) $>$ I.V. (sep.III).

Het nomogram stelt ook in staat een schatting te maken van de minimale omvang van het materiaal, waarbij ook tot een significant verschil tussen de twee steekproefvarianties 2.23^2 en 2.02^2 besloten zou zijn. Zoek daartoe de ν op bij dezelfde $F = 1.22$, maar met $\beta = 0.05$. Er komt $\nu = 160 = \frac{1}{2}.322$. Derhalve zou reeds bij een half zo groot grondmateriaal (dus niet op 26, maar op 13 jaren berustende) tot een significant verschil tussen 2.23 en 2.02 °C (dus tussen de twee I.V.'s) besloten zijn.

Type E: Betrouwbaarheden

a. betrouwbaarheid t.a.v. j, d.i. de kans.

b. betrouwbaarheid t.a.v. , d.i. de overschreden waarde.

Vraag a: Het Δ(t)-nomogram leert, dat te Gemert een ééndaagse toeneming van tenminste 6 ^{o}C in de minimumtemperatuur 1 keer in gemiddeld 4 jaren verwacht mag worden. Hoe (on)betrouwbaar is deze 4?

Antw.: Het nomogram levert een s_Δ = 3.05 ^{o}C, met effectief aantal 500. Raadpleeg vervolgens het B-nomogram met α = 0.05 (het „nomogram voor betrouwbaarheidsintervallen"). Hier is k = 6/3.05 = 1.97 en N = 500. $\sqrt{\Delta(t)}$

Snijd de horizontale rechte op de hoogte k = 1.97 met de twee krommen met parameter N = 500 en lees de abscissi der twee snijpunten af: 0.016 en 0.035. Het 90%-betrouwbaarheidsinterval voor j (puntschatting : 4) ligt derhalve tussen 1 : 10 x 0.035 = 2.9 en 1 : 10 x 0.016 = 6.2 jaren.(het interval ligt niet symmetrisch om 4).

N.B.: 0.90 = 1-2(0.05).

Wil men niet een kans 0.05 op een foutieve uitspraak, doch een kans 0.01, dan levert het B-nomogram met α = 0.005 een 99%-betrouwbaarheidsinterval 2.6 à 6.5 jaren; het is breder, doch bevat natuurlijk opnieuw de puntschatting 4.

Vraag b: Het Δ (T)-nomogram leert dat te Groningen een ééndaagse toeneming in de maximumtemperatuur van tenminste 6.5 ^{o}C in april I 1 keer in gemiddeld 5 jaren te verwachten is. Hoe (on)betrouwbaar is deze 6.5 ^{o}C ?

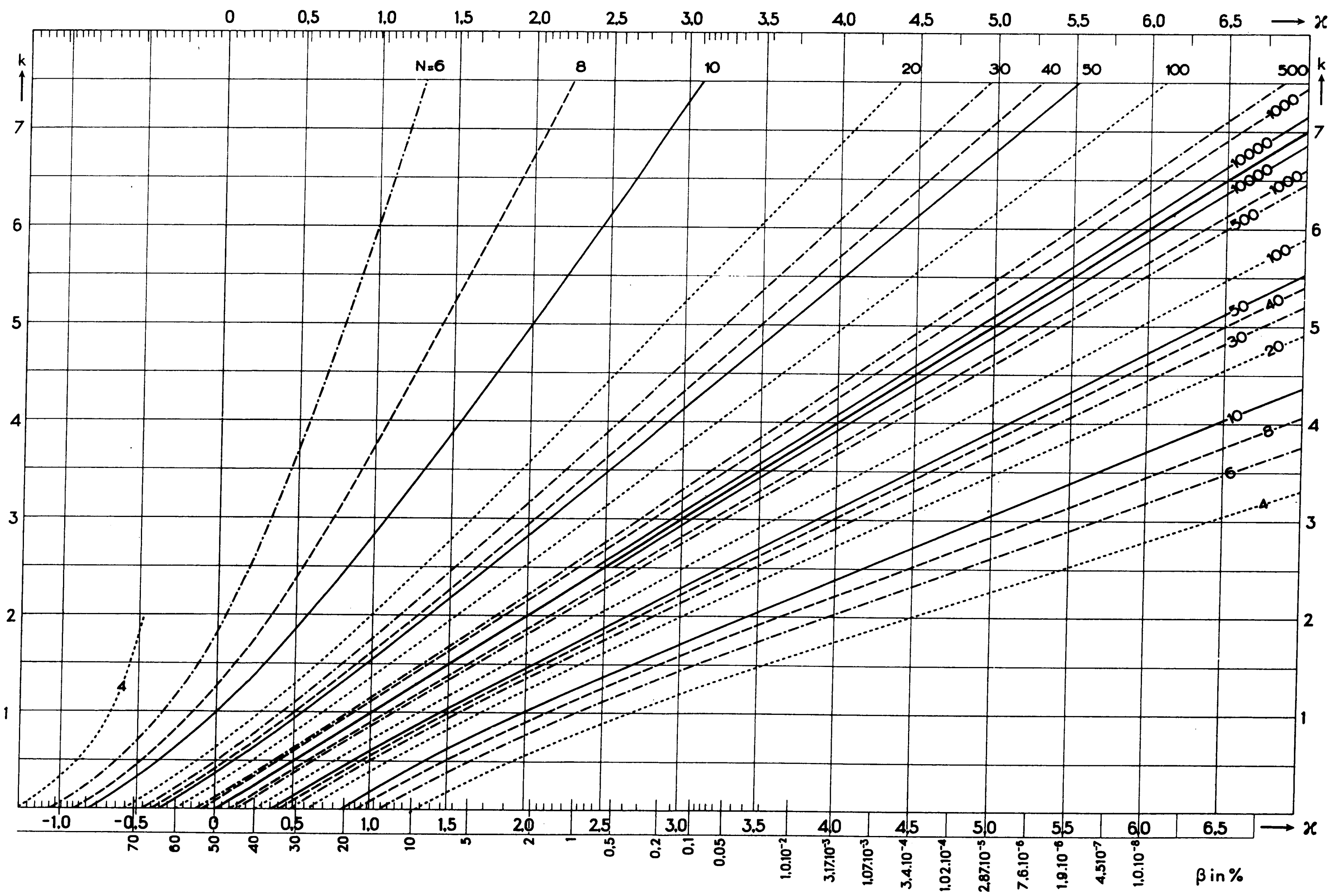
Antw.: Het nomogram leert: s_Δ = 3.16 ^{o}C, apr.I. Raadpleeg het B-nomogram bij α = 0.025. Trek de verticale rechte op de abscis β = 0.02 (want 1 : 10 x 0.02 = 5) en snijd deze met de twee krommen, die N = 780 als parameter hebben. Deze 780 is het effectieve aantal bij s_Δ = 6.5 ^{o}C. De ordinaten der snijpunten zijn 1.88 en 2.18. Derhalve is de gezochte drempel gelegen in het interval 1.88 x 3.16 = 5.9 tot 2.18 x 3.16 = 6.9 ^{o}C, behoudens de kans 0.05 op een foutieve uitspraak. Natuurlijk ligt de puntschatting 6.5 ^{o} in dit interval, maar niet in het midden ervan.

B

NOMOGRAM

voor het aflezen van

één- en tweezijdig begrensde betrouwbaarheidsintervallen voor β en $\varkappa$, met $\alpha = 0.005$



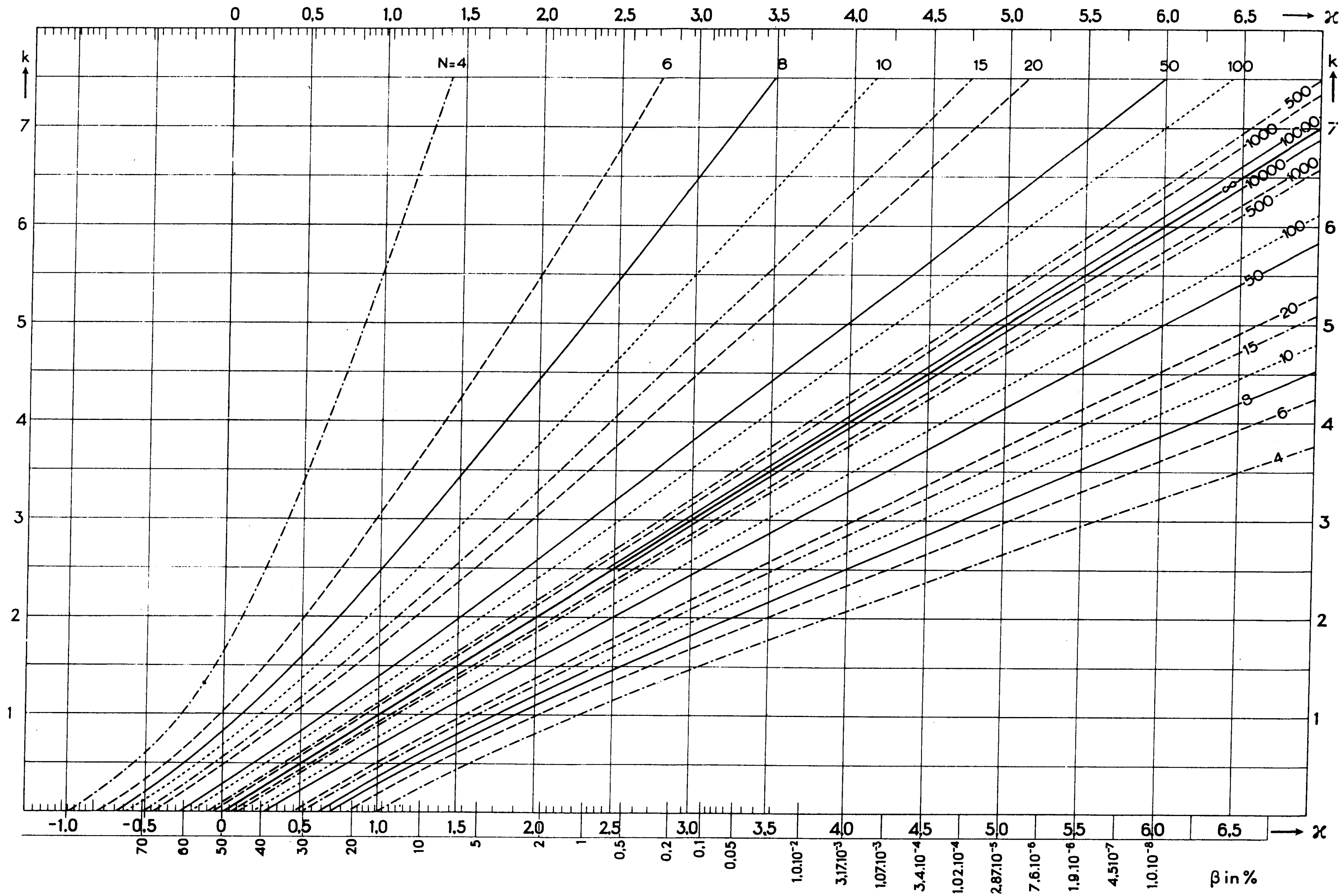
IV. D. 7.

B

NOMOGRAM

voor het aflezen van

één-en tweezijdig begrensde betrouwbaarheidsintervallen voor β en ϰ, met $\alpha = 0.025$

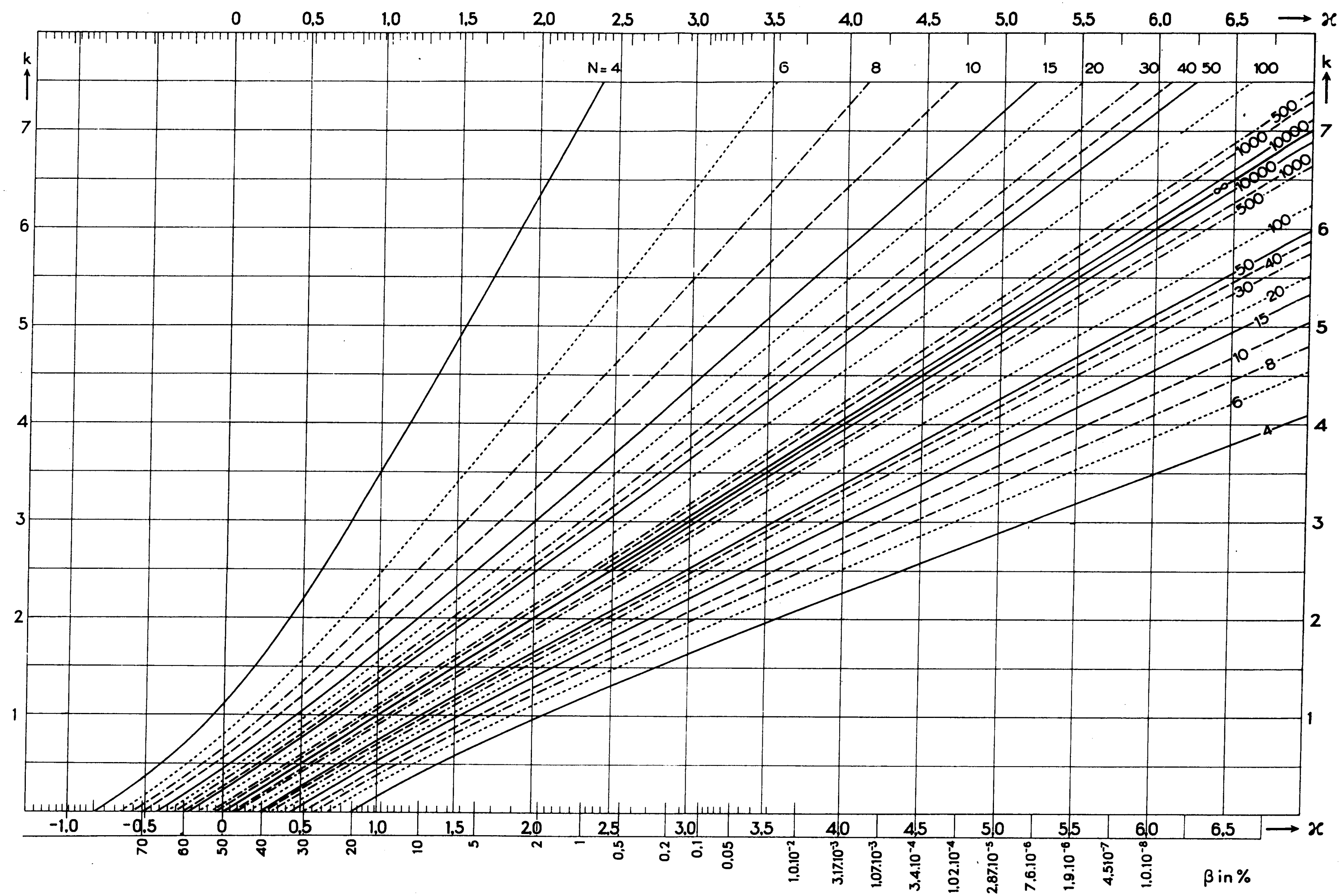


B

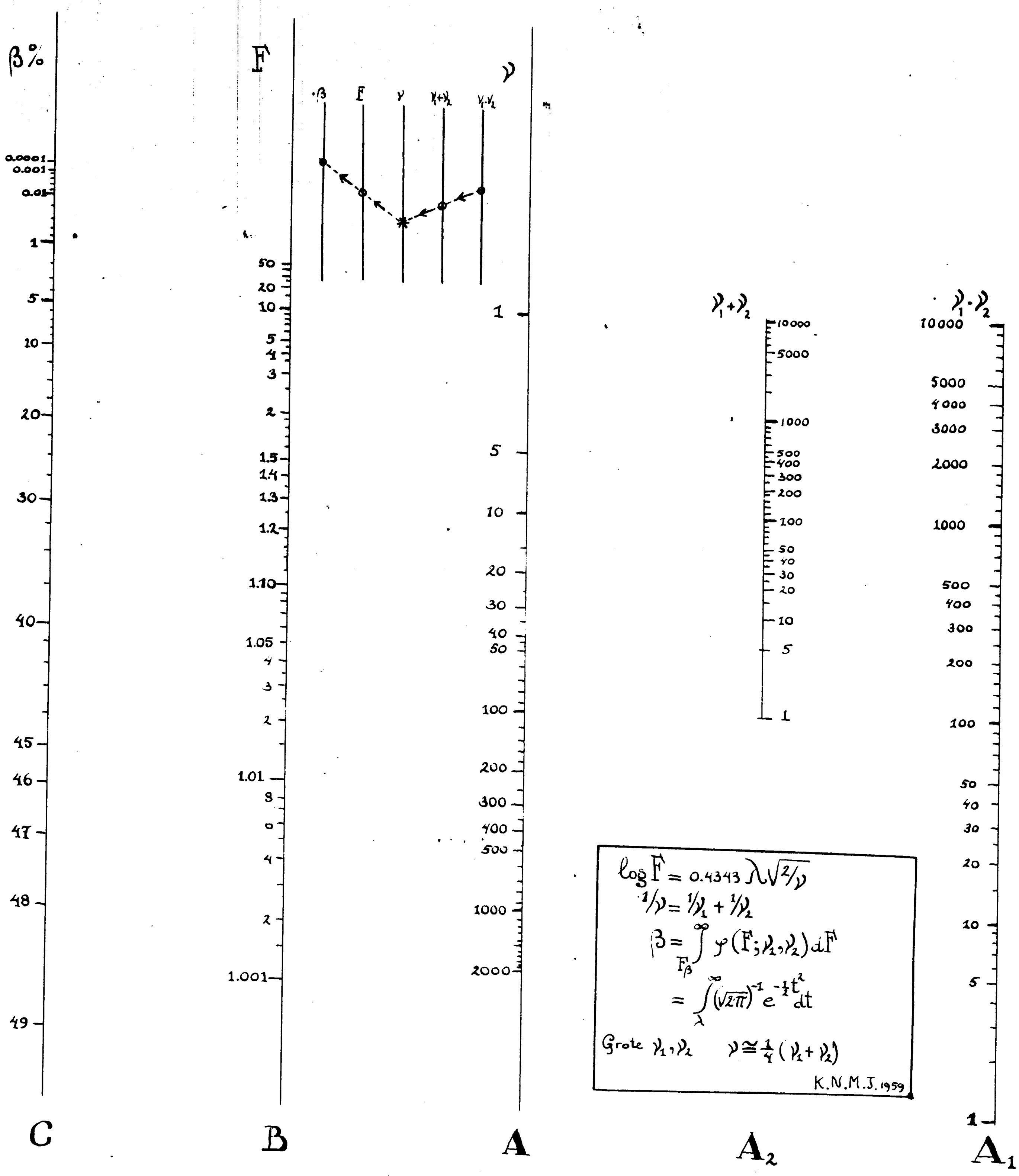
NOMOGRAM

voor het aflezen van

één-en tweezijdig begrensde betrouwbaarheidsintervallen voor β en $\varkappa$, met $\alpha = 0.05$



F-nomogram



$$\log F = 0.4343\,\lambda\sqrt{2/\nu}$$

$$1/\nu = 1/\nu_1 + 1/\nu_2$$

$$\beta = \int_{F_\beta}^{\infty} \varphi(F; \nu_1, \nu_2)\, dF = \int_{\lambda}^{\infty} (\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

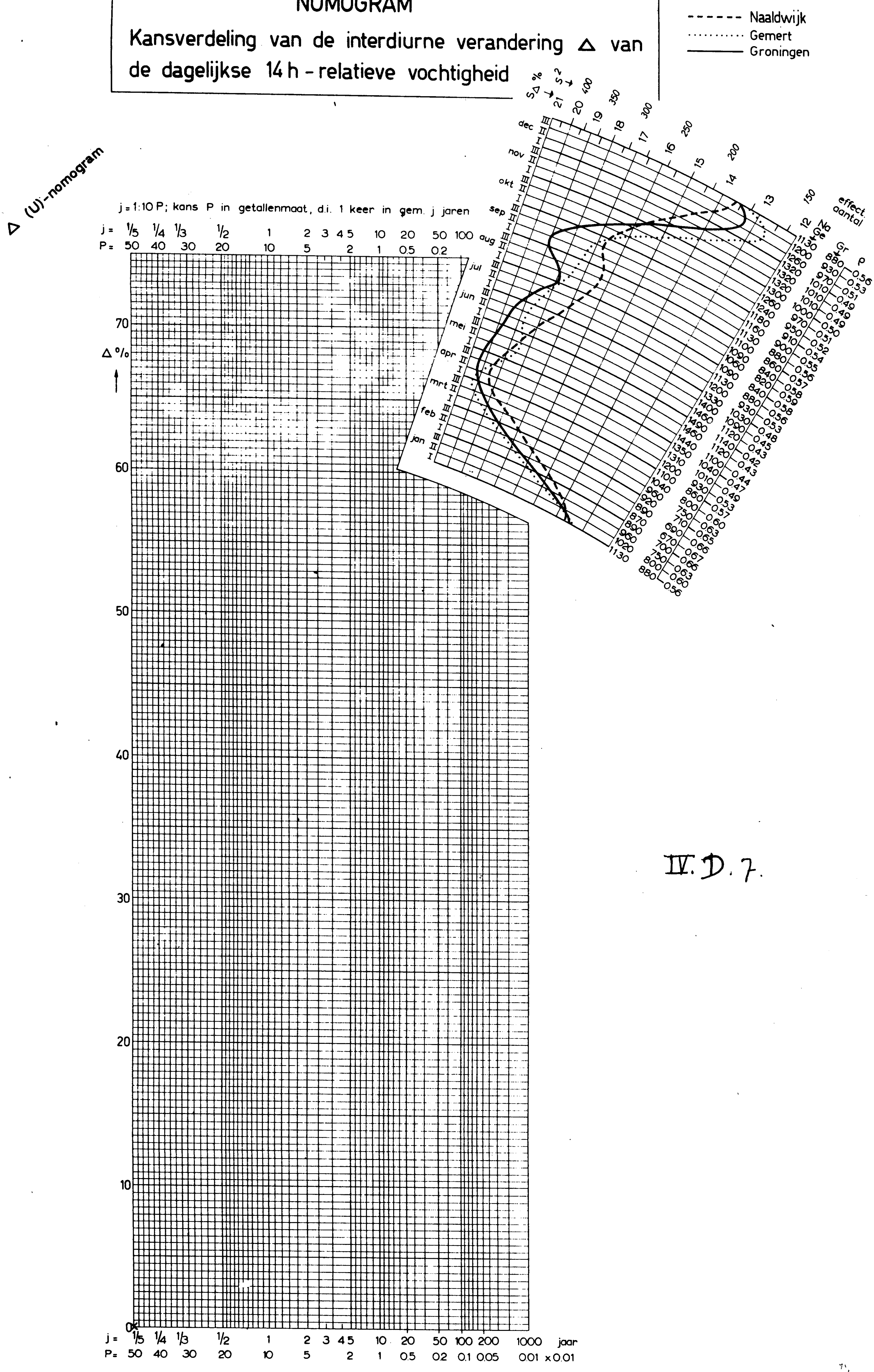
Grote ν_1, ν_2 $\quad \nu \cong \frac{1}{4}(\nu_1 + \nu_2)$

K.N.M.I. 1959

IV. D. 7.

NOMOGRAM

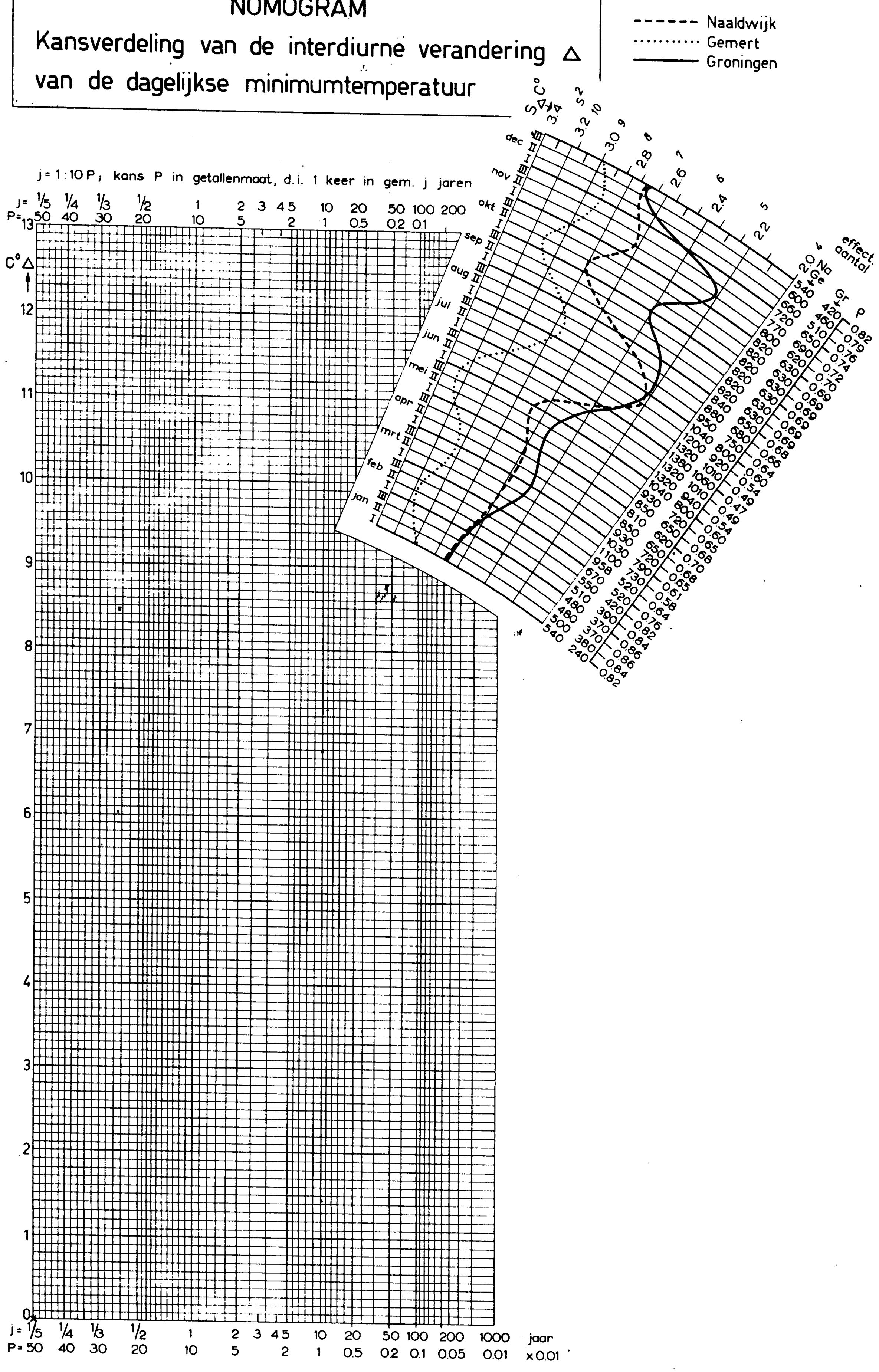
Kansverdeling van de interdiurne verandering Δ van de dagelijkse 14h - relatieve vochtigheid



IV. D. 7.

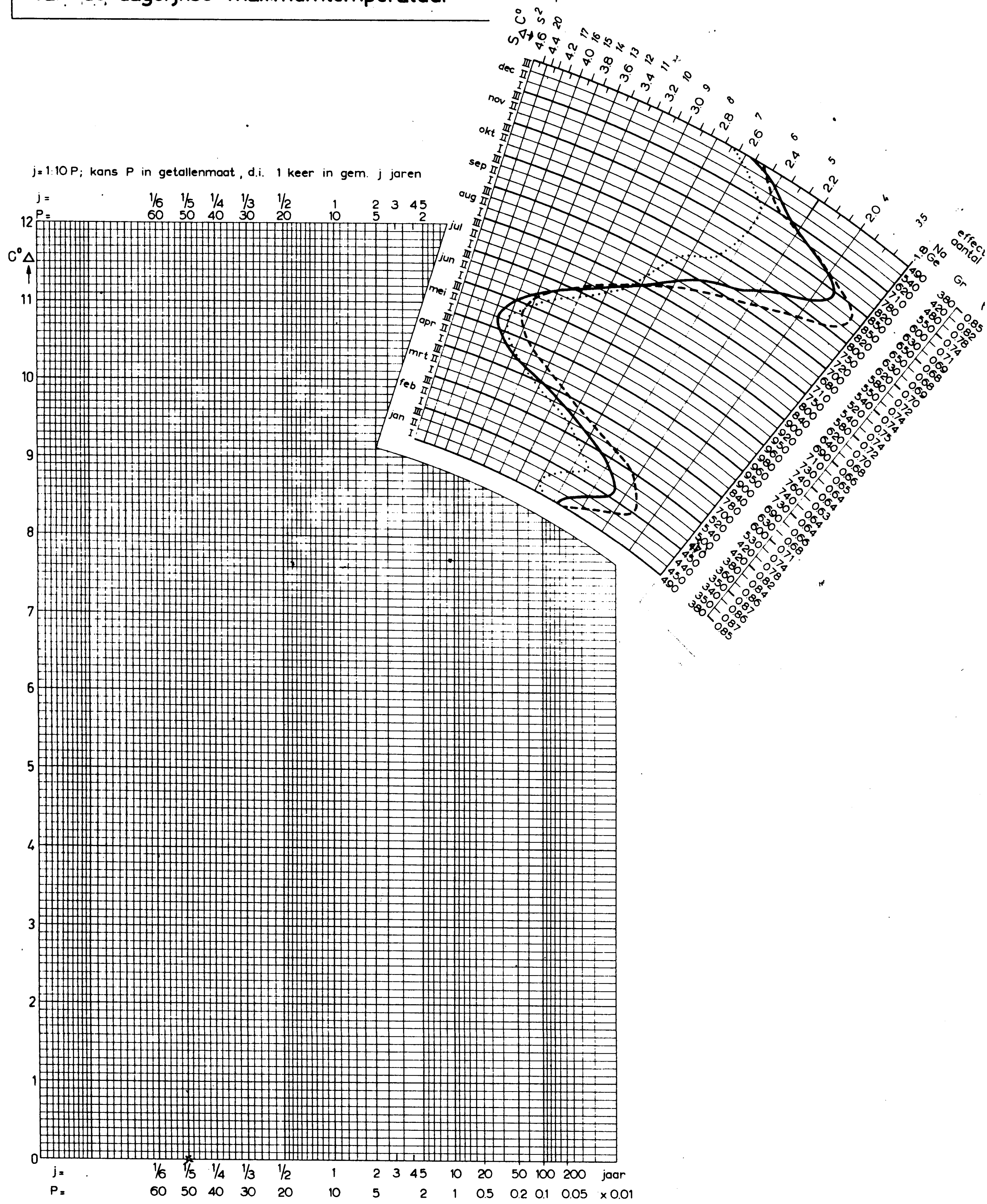
NOMOGRAM

Kansverdeling van de interdiurne verandering Δ van de dagelijkse minimumtemperatuur

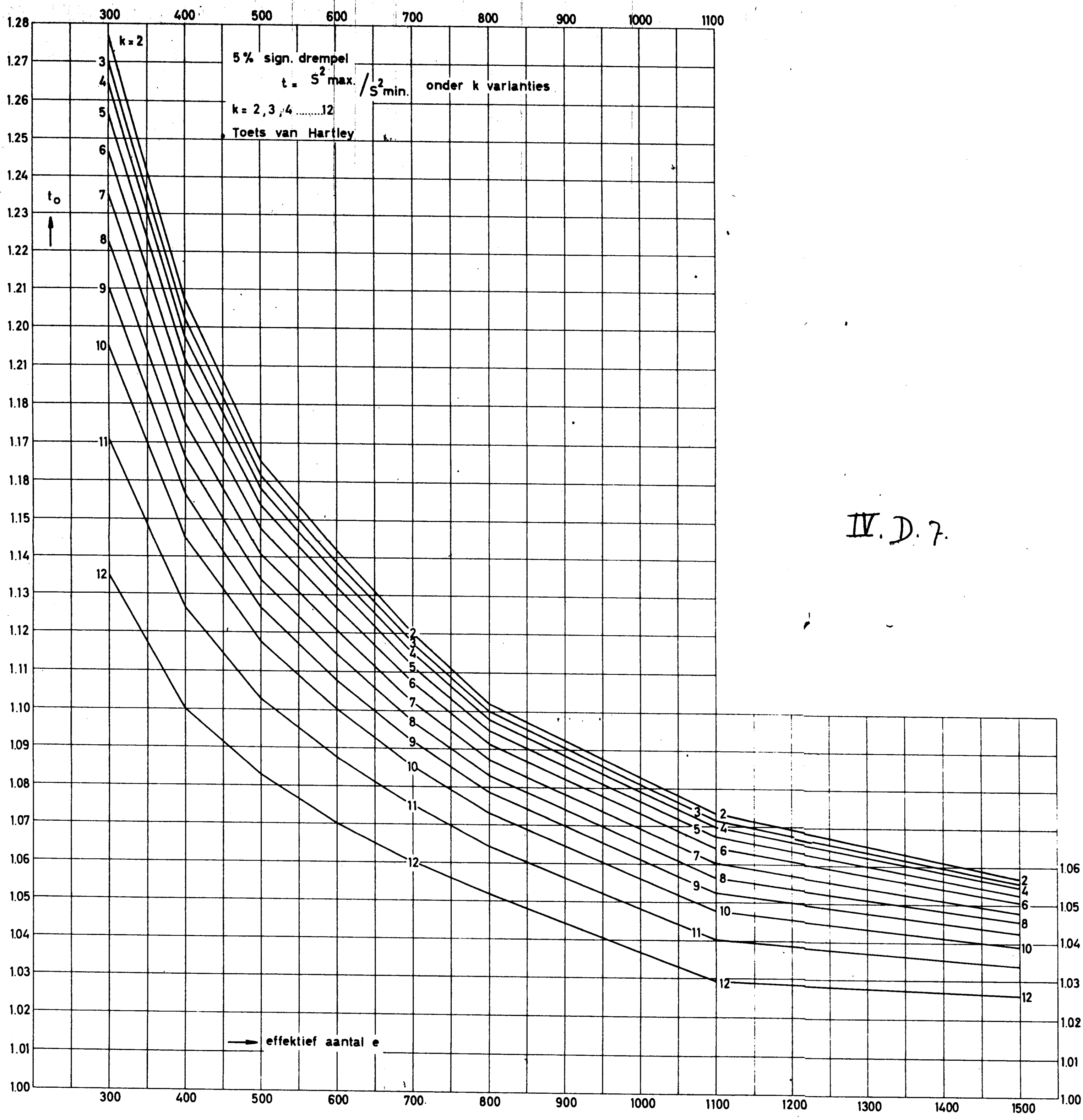


NOMOGRAM

Kansverdeling van de interdiurne verandering Δ van de dagelijkse maximumtemperatuur



H - nomogram



IV. D. 7.