

28 OCT. 1958

KONINKLIJK NEDERLANDS  
METEOROLOGISCH INSTITUUT

Wetenschappelijk Rapport W.R. 56-002 (IV-013)

M.P.H. Weenink

De stormvloeden van 21 - 24 december 1954

Een geval van resonantie

The storm surges of 21 - 24 December 1954

A case of resonance

De Bilt, 1956

Kon. Ned. Meteor. Inst.  
De Bilt



All Rights Reserved.

Nadruk zonder toestemming van het K.N.M.I. is verboden.

M.P.H. Weenink

De stormvloed van 21 - 24 december 1954

Een geval van resonantie

The storm surges of 21 - 24 December 1954

A case of resonance

Summary

This report contains an analysis of sea level disturbance heights at Hoek van Holland caused by the twin storms of 21 - 24 December 1954 on the North Sea. The disturbance curve, which has the character of a forced oscillation, can be quantitatively "explained" with the simple model of a damped harmonic oscillator, satisfying the equation:

$$\frac{d^2h}{dt^2} + r \frac{dh}{dt} + ah = P(t),$$

where  $h$  = disturbance height,  $r$  and  $a$  are constants (for the case considered) and  $P(t)$  represents a periodic external force. The "constants"  $r$  and  $a$  turned out to have had the values  $a = 0.041 \text{ (hour)}^{-2}$  and  $r = 0.12 \text{ (hour)}^{-1}$ . The phase lag amounted to somewhat more than 6 hours.

It is shown that the period between the maxima of the two storms (about 36 hours) has been such as to cause almost complete resonance under the prevailing circumstances. The disturbance height oscillated around a medium value of + 11.6 dm. The first maximum (+21.7 dm) was 10.1 dm above that level, the second one (+24.6 dm) was 13.0 dm above that level, whereas the "equilibrium disturbance height" had an amplitude of 7.6 dm.

The second maximum was already practically equal to the resonance maximum, i.e. a third similar storm (having the same force and time interval) would have given practically the same maximum.

## Inhoud

1. Inleiding
2. Beschrijving van de stormen van 21 - 24 december 1954
3. Vergelijking tussen de evenwichtswindeffecten en de opgetreden windeffecten
4. Eindimensionale theorie van windeffecten in het geval van niet-stationaire windvelden. Resonantie.
5. Toepassing van de theorie op de beide stormvloeden.

### 1. Inleiding

Gedurende de periode van 21 - 24 december 1954 werd ons land geteisterd door een tweetal stormvloeden, veroorzaakt door twee noord-westerstormen met een tussentijd van ongeveer anderhalf etmaal. We hebben hier te doen met een typisch voorbeeld van een niet-stationair gebeuren. De opgetreden maximale windeffecten ten gevolge van beide stormen waren aanmerkelijk groter dan met krachterevenwicht overeen zou komen. We zullen nu aan deze beide stormvloeden enkele beschouwingen wijden. Aan de hand van een zeer eenvoudig model zullen we trachten het verloop van het wind-effect te Hoek van Holland quantitatief te "verklaren". Dat wil zeggen, dat we de parameters die in de voor het genoemde model geldende formule, die het verband tussen het windveld en het windeffect geeft, zo proberen te kiezen, dat de overeenstemming tussen het theoretisch berekende en het opgetreden windeffect zo groot mogelijk is.

Behalve dat we in staat zijn met behulp van een zeer eenvoudig model het opgetreden windeffect in bovenomschreven zin te verklaren, blijkt het bovendien nog mogelijk om enkele uitspraken te doen over de mogelijkheid tot resonantie bij waterschommelingen in het Noordzeebekken. Tot slot blijkt het mogelijk om een verwachting te maken voor het maximale wind-effect voor het geval er nog een derde storm met dezelfde kracht en periode op de tweelingstormen was gevolgd.

### 2. Beschrijving van de stormen

Gedurende de 21ste december 1954 begon midden op de dag boven de Noordzee een wester- tot noordwesterstorm op te steken, die 's avonds tijdens de koufrontpassage de windsnelheid voor de Nederlandse kust tot circa 25 meter per seconde deed toenemen. Na een tijdelijke afneming van de wind tot circa 20 meter per seconde nam hier gedurende de nacht tijdens

de trogpassage de windsnelheid weer toe tot ongeveer 25 meter per seconde, terwijl de richting tot ongeveer NW ruimde. In de ochtend en het begin van de middag van 22 december nam de storm geleidelijk in hevigheid af tot de wind, geleidelijk krimpand, omstreeks 15 uur G.M.T. 's middags tot onder de stormgrens (17 meter per sec.) zakte en zelfs afnam tot circa 10 meter per seconde.

's Avonds begon de wind echter weer aan te wakkeren en te ruimen en omstreeks middernacht werd de stormgrens wederom bereikt. Deze tweede storm bereikte zijn maximum in de middag van 23 december met windsnelheden van ongeveer 25 meter per seconde. In de namiddag nam de storm weer in betekenis af, totdat op 24 december 's ochtends de wind weer tot onder de stormgrens zakte.

Gedurende beide stormen werd de grens voor "zeer zware storm" (24 meter per seconde) dus overschreden.

Voor een uitvoerige beschrijving van de meteorologische situatie en ontwikkeling van deze beide stormen zij verwezen naar: C.J. van der Ham, Meteorologisch verslag betreffende de stormen van 21 - 24 december 1954, K.N.M.I. Wetenschappelijk Rapport W.R. 55-003, 1955. In genoemde publikatie is echter alleen het verloop van de windsnelheid langs onze kust en op de Nederlandse lichtschepen grafisch uitgezet, terwijl we voor ons doel dienen te beschikken over de middelbare wind over de zuidelijke en de noordelijke helft van de Noordzee, alsmede over de middelbare wind boven het Kanaal.

We hebben daarom de wind boven het zuidvak, het noordvak en het Kanaalvak uit de weerkaarten opgemeten. Uit de gemiddelde isobarenafstand hebben we voor elk der drie vakken de wind op 10 meter hoogte boven zee-niveau afgeleid onder verwaarlozing van de kromming der isobaren, die in dit geval inderdaad zeer klein is geweest, terwijl door de treksnelheid van het druksysteem de kromming der luchtbanen (waar het eigenlijk op aankomt) nog geringer was. Op deze manier verkregen we voor ieder vak de gemiddelde "grondwind", in plaats van de middelbare, die we feitelijk moesten gebruiken (onder de middelbare wind in een zeker vak verstaan we een vector met een richting gelijk aan de richting van het gemiddelde over het betrokken vak van de vectoren met een lengte gelijk aan het kwadraat van de windsnelheid en een richting gelijk aan de windrichting, en een snelheid gelijk aan de wortel uit de lengte van de genoemde gemiddelde vector). Voor een homogeen windveld echter zijn beide gelijk. Nu hebben we tijdens beide stormen met vrij homogene windvelden boven het zuidvak van de Noordzee te doen gehad, aangezien de kernen der beide depressies een baan gevolgd hebben die ver noordelijk lag. Aangezien het windeffect langs onze kust in hoofdzaak door het windveld boven het zuidelijke deel der Noordzee wordt

bepaald, mogen we dus voor deze beide stormen wel aannemen dat het wind-effect berekend met behulp van de gemiddelde wind ongeveer gelijk zal zijn aan het windeffect berekend met behulp van de middelbare wind.

In figuur 1 is de windsnelheid in meters per seconde boven het noordvak, het zuidvak en het Kanaalvak tegen de tijd uitgezet. De maximale windsnelheden zijn hier iets kleiner dan die in van der Ham's rapport. Dit behoeft ons echter niet te bevreemden, aangezien de maximale over een groot vak gemiddelde wind in geval van inhomogeniteit allicht kleiner is dan de maximale wind op een bepaalde plaats in dit gebied. Vergelijken we de windopgaven van de lichtschepen (Rapport van van der Ham) met die uit figuur 1, dan blijkt, dat er slechts een geringe tijdvertraging is geweest tussen isobarenpatroon en plaatselijke wind.

Als maximale over het zuidvak gemiddelde windsnelheid vinden we voor beide stormen 23 meter per seconde. Het tijdverschil tussen de maxima der beide stormen bedroeg circa anderhalf etmaal.

In figuur 2 hebben we de gemiddelde isobarenrichting voor de drie vakken grafisch tegen de tijd uitgezet. Tijdens de maxima van beide stormen was de isobarenrichting in het zuidvak circa  $300^{\circ}$  à  $320^{\circ}$ .

### 3. Vergelijking tussen de evenwichtswindeffecten en de opgetreden windeffecten

Voor een uitvoerig verslag over de door deze stormen veroorzaakte waterstanden zij verwezen naar de beide betrokken stormvloedrapporten van Ir. P.J. Wemelsfelder (Rijkswaterstaat, Directie Algemene Dienst, Hydro-metrische Afdeling). Wij hebben echter geen gebruik gemaakt van de opgetreden waterstanden doch van de windeffecten. De windeffectkromme voor Hoek van Holland betreffende deze stormvloeden heeft de Directie Algemene Dienst van de Rijkswaterstaat ons welwillend ter beschikking gesteld.

Aan de hand van de in de figuren 1 en 2 gegeven gemiddelde winden over de drie vakken, te weten de zuidelijke en de noordelijke helft van de Noordzee alsmede het Kanaalvak hebben we met behulp van de grafieken van Schalkwijk (W.F. Schalkwijk K.N.M.I. Mededelingen en Verhandelingen B no. 7, blz. 34) de verwachte bijdragen van elk vak tot het totaal te verwachten evenwichts-windeffect te Hoek van Holland vastgesteld (met evenwichts-windeffect bedoelen we het windeffect dat er optreedt in geval van krachtenevenwicht zoals bijv. in een stationaire toestand). Deze te verwachten bijdragen hebben we in figuur 3 grafisch weergegeven. Hierbij is géén tijdverschuiving in rekening gebracht. In werkelijkheid zal het wind-effect enkele uren op het windveld achterblijven.

Schalkwijk geeft voor deze vertraging een tijd van 2 à 3 uur op. Bij deze beide stormvloed en hebben we met een aanzienlijk grotere vertraging te maken gehad. Dit blijkt bijvoorbeeld duidelijk uit figuur 4, waarin we zowel het totaal verwachte evenwichtseffect als het opgetreden windeffect hebben uitgezet. De gemiddelde vertraging tussen oorzaak en gevolg blijkt hier circa 6 uur te bedragen. In paragraaf 5 zullen we uiteenzetten hoe we deze vertraging hebben vastgesteld.

In het verwachte evenwichts-windeffect liggen beide toppen vrijwel even hoog (ongeveer 19 dm.) Door het feit, dat deze evenwichts-windeffectkromme berust op windgegevens verricht om de drie uur, schuilt er in de juiste plaats van de maxima en minima een onzekerheid van circa 1.5 uur wat de tijd betreft. Uiteraard kan daardoor ook de waarde van het maximum (resp. minimum) iets anders zijn dan in figuur 4. Ook de beide minima in de evenwichtseffectkromme (21 december 6 uur G.M.T. en 22 december 18 uur G.M.T.) liggen op gelijk niveau, te weten 4 dm. De amplitudo van de evenwichtswindeffectkromme bedraagt dus voor deze stormen ongeveer  $7\frac{1}{2}$  dm.

Bekijken we nu de opgetreden windeffectkromme, dan zien we dat het maximale windeffect te Hoek van Holland tijdens de eerste stormvloed bijna 22 dm bedroeg, dit is dus ongeveer 3 dm meer dan we in het geval van evenwicht zouden verwachten. Voor de tweede stormvloed was dit verschil tussen het maximale opgetreden effect en maximale evenwichts-effect nog groter, namelijk bijna 6 dm (het max. windeffect tijdens de tweede stormvloed was 25 dm).

Terloops zij opgemerkt, dat Schalkwijk's rekenrecept voor het "opzweep"effect (d.w.z. het verschil tussen het maximum van het windeffect met inachtneming van de traagheid van het systeem en het maximum van het windeffect in geval van evenwicht) voor deze beide stormen vrij goede resultaten geeft. Dit rekenrecept luidt: Het opzweep-effect is gelijk aan 2,2 maal de maximale stijging per uur in het aan de top voorafgaande deel van de verwachte windeffectkromme. Voor de eerste en de tweede stormvloed geeft dit resp. 3.7 dm en 4.4 dm, terwijl de opgetreden opzweep-effecten blijken te zijn: 3 dm resp. 5.5 dm.

Aan de eerste stormvloed ging reeds een verhoging van ongeveer 8 dm vooraf (maximum op 20 december 22 uur G.M.T.). Ook dit topje komt duidelijk uit het windveld te voorschijn (zie figuur 4).

De werkelijke windeffectkromme heeft een minimum van ca. 2 dm op 21 december 15 uur G.M.T. en een minimum van -1,5 dm op 23 december 0 uur G.M.T. Het eerste minimum (2 dm) ligt 2 dm en het tweede minimum (-1,5 dm) ligt 5,5 dm lager dan het bijbehorende evenwichtsminimum.

4. Eendimensionale theorie van windeffecten in het geval van niet stationaire windvelden. Resonantie.

Als eenvoudigste onderstelling kunnen we aannemen, dat de Noordzee zich bij een schommeling als een harmonische oscillator gedraagt en dat de afwijking  $h$  van het zeeniveau op een bepaalde plaats t.o.v. de "nulstand" (d.i. de stand bij afwezigheid van wind) voldoet aan de differentiaalvergelijking voor een gedempte harmonische oscillator. In dit geval voldoet het windeffect  $h$  aan de differentiaalvergelijking:

$$\ddot{h} + r\dot{h} + ah = P(t), \quad (1)$$

waarin  $r$  een dempingsfactor en  $a$  de versnelling van de terugdrijvende inwendige kracht per eenheid van uitwijking voorstelt, terwijl  $P(t)$  de werking van de wind representeert;  $\dot{h}$  en  $\ddot{h}$  duiden resp. de stijgsnelheid en de stijgsversnelling van het windeffect aan;  $t$  is de tijd.

Het is te bewijzen, dat voor een geheel willekeurig windveld het windeffect niet precies door de differentiaalvergelijking (1) kan worden beschreven. Windeffecten die echter worden opgewekt door aan zekere eisen voldoende windvelden kunnen wel door een vergelijking van de gedaante (1) worden weergegeven, zoals uit de bewegingsvergelijkingen en de continuïteitsvergelijking kan worden afgeleid. Uit die afleiding zou tevens volgen, dat de demping, beschreven door de parameter  $r$ , wordt veroorzaakt door de bodemwrijving en de Corioliskracht. We onderstellen nu in het vervolg, dat het windveld een zodanige ruimtelijke gedaante heeft, dat we de vergelijking (1) mogen toepassen ter berekening van het windeffect.

We zullen nu  $h$  oplossen uit de differentiaalvergelijking (1), door eerst een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking te zoeken en hierbij op te tellen een oplossing van de homogene vergelijking (dat wil zeggen met een rechterlid gelijk aan nul), die dan zodanig gekozen dient te worden, dat ook aan de beginvoorwaarden is voldaan. Als beginvoorwaarden gelden:

$$\text{en } \left. \begin{array}{l} h(t=0) = h_0 \\ \dot{h}(t=0) = k_0 \end{array} \right\} , \text{ waarin} \quad (2)$$

$h_0$  en  $k_0$  willekeurige gegeven constanten zijn. Stellen we de particuliere oplossing van (1) voor door  $x(t)$  en de oplossing van de homogene differentiaalvergelijking door  $y(t)$ , dan moet derhalve gelden:



$$h(t) = x(t) + y(t). \quad (3)$$

We zullen eerst  $x(t)$  oplossen uit de vergelijking:

$$\ddot{x} + r\dot{x} + ax = P(t), \quad (4)$$

met de beginvoorwaarden:

$$\left. \begin{array}{l} x(t=0) = 0 \\ \dot{x}(t=0) = 0 \end{array} \right\} . \quad (5)$$

De oplossing van (4) kunnen we dan voorstellen door een integraal:

$$x(t) = \int_{t'=0}^{t'=t} P(t') p(t, t') dt', \quad (6)$$

waarin  $p(t, t')$  de bij dit probleem behorende functie van Green is, die derhalve voldoet aan de volgende differentiaalvergelijking:

$$\ddot{p} + rp + ap = \delta(t - t'), \quad (7)$$

met

$$\left. \begin{array}{l} p(t=0) = 0 \\ \dot{p}(t=0) = 0 \end{array} \right\} . \quad (8)$$

De functie  $\delta(t - t')$  is gedefinieerd door:

$$\left. \begin{array}{l} \delta(t - t') = 0 \text{ voor } t \neq t' \text{ en} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t') dt' = 1 \end{array} \right\} . \quad (9)$$

Voor  $t < t'$  volgt uit (7) en (8):

$$p(t, t') = 0 \quad (t < t') . \quad (10)$$

Voor  $t > t'$  vinden we als algemene oplossing van (7), door eerst  $p(t, t')$  gelijk te stellen aan  $e^{q(t-t')}$  :

$$p(t, t') = A e^{q_1 t} + B e^{q_2 t} , \quad (11)$$

waarin  $A$  en  $B$  nog nader vast te stellen constanten zijn en  $q_1$  en  $q_2$

de wortels van de vierkantsvergelijking:

$$q^2 + rq + a = 0 \quad (12)$$

Stellen we  $a - \frac{r^2}{4} = w_f^2$ , dan vinden we voor  $q_1$  en  $q_2$ :

$$q_{1,2} = -\frac{r}{2} \pm iw_f \quad (13)$$

Voor  $t = t'$  geldt

$$p(t', t') = 0 = A + B \quad (14)$$

terwijl uit (7) volgt, als we onderstellen  $t > t'$ ,

$$\lim_{t - t' \rightarrow 0} p(t, t') = 1 = q_1 A + q_2 B \quad (15)$$

Uit (14) en (15) volgt voor A en B:

$$A = -B = \frac{1}{2iw_f} \quad (16)$$

wat ingevuld in (11) met (13) en (10) geeft:

$$p(t, t') = \begin{cases} 0 & \text{voor } t \leq t' \\ \frac{1}{w_f} e^{-\frac{r}{2}(t-t')} \cdot \sin w_f(t-t') & \text{voor } t > t' \end{cases} \quad (17)$$

Dit gesubstitueerd in (6) geeft:

$$x(t) = \int_{t'=0}^{t'=t} \frac{P(t')}{w_f} e^{-\frac{r}{2}(t-t')} \cdot \sin w_f(t-t') dt' \quad (18)$$

We dienen nu nog  $y(t)$  op te lossen uit:

$$\ddot{y} + r\dot{y} + ay = 0 \quad (19)$$

met de beginvoorwaarden:

$$\left. \begin{aligned} y(t=0) &= h_0 \text{ en} \\ \dot{y}(t=0) &= k_0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

De oplossing hiervan vinden we door wederom als uitgangspunt te nemen de functie  $e^{qt}$  en in de algemene oplossing van (19), n.l.  $y = Ce^{q_1 t} + De^{q_2 t}$ , de constanten C en D zodanig te kiezen, dat aan (20) is voldaan.

We vinden dan voor  $y(t)$ :

$$y(t) = (h_0 \cos w_f t + \frac{\frac{r}{2} h_0 + k_0}{w_f} \sin w_f t) e^{-\frac{r}{2} t} \quad (21)$$

Optelling van (18) en (21) geeft tenslotte, volgens (20):

$$h(t) = \int_{t'=0}^{t'=t} \frac{P(t')}{w_f} e^{-\frac{r}{2}(t-t')} \cdot \sin w_f(t-t') dt' + (h_0 \cos w_f t + \frac{\frac{r}{2} h_0 + k_0}{w_f} \sin w_f t) e^{-\frac{r}{2} t} \quad (22)$$

We zijn nu in principe in staat om met behulp van (22) voor elke functie  $P(t)$  het bijbehorende windeffect  $h(t)$  te berekenen.

Van bijzonder belang is het om voor  $P(t)$  een periodieke functie te nemen b.v. van de gedaante:

$$P(t) = k + \ell \sin wt, \quad (23)$$

waarin  $k$ ,  $\ell$  en  $w$  constanten zijn. Substitutie van (23) in (22) geeft ons, na enig rekenwerk, de volgende uitdrukking voor het windeffect:

$$h(t) = \frac{k}{a} + \frac{(a-w^2) \ell \sin wt - rw \ell \cos wt}{(a-w^2)^2 + r^2 w^2} + \frac{rw \ell \cos w_f t + \frac{w}{w_f} (w^2 - w_r^2) \sin w_f t}{(a-w^2)^2 + r^2 w^2} e^{-\frac{r}{2} t} + \left\{ \frac{\frac{r}{2}(h_0 - \frac{k}{a}) + k_0}{w_f} \cdot \sin w_f t + (h_0 - \frac{k}{a}) \cos w_f t \right\} e^{-\frac{r}{2} t} \quad (24)$$

Hierin betekent  $w_r^2$ :

$$w_r^2 = a - \frac{1}{2} r^2 \quad (25)$$

Voor grote waarden van  $t$  nadert (24) tot:

$$h(t) = \frac{k}{a} + \frac{(a-w^2) \ell \sin wt - rw \ell \cos wt}{(a-w^2)^2 + r^2 w^2} = \frac{k}{a} + \frac{A}{a} \sin (wt - \varphi), \quad (26)$$

met

$$\frac{A}{a} = \frac{l}{\sqrt{(a-w^2)^2 + r^2 w^2}}, \quad (27)$$

zijnde de amplitudo van de schommeling van het windeffect voor grote waarden van  $t$ , ondersteld dat het windveld nog wordt beschreven door (23). De phaseverschuiving  $\varphi$  wordt gegeven door:

$$\varphi = \text{arc tg } \frac{rw}{a-w^2}. \quad (28)$$

Uit (27) blijkt, dat  $\frac{A}{a}$  maximaal wordt voor  $w = w_r = \sqrt{a - \frac{r^2}{2}}$  en om deze reden wordt  $w_r$  de resonantiefrequentie genoemd. De maximumwaarde van  $\frac{A}{a}$  bedraagt, bij gegeven  $a$  en  $r$ :

$$\left(\frac{A}{a}\right)_{\max} = \frac{l}{w_r r}. \quad (29)$$

De phaseverschuiving bedraagt, in het geval van resonantie:

$$\varphi_r = \text{arctg } \frac{2w_r}{r}. \quad (30)$$

## 5. Toepassing op de tweelingstormvloeden <sup>1)</sup>

Met behulp van (22) zijn we in staat om bij elk gegeven windveld het windeffect te berekenen, gesteld, dat de beginvoorwaarden  $h_0$  en  $k_0$ , alsmede de constanten  $a$  en  $r$  gegeven zijn. In figuur 4 zien we dat, als we het tijdstip  $t = 0$  op 21 december 1400 uur G.M.T. kiezen,  $h_0$  en  $k_0$  respectievelijk zijn:

$$\left. \begin{array}{l} h_0 = 2 \text{ dm} \\ k_0 = 0 \end{array} \right\} \quad (31)$$

We beschouwen in het vervolg slechts tijdstippen  $t > 0$ .

Het evenwichtswindeffect is volgens (1) gelijk aan:

$$h^* = \frac{P(t)}{a}, \quad (32)$$

aangezien in het geval van krachtenevenwicht  $\ddot{h}$  en  $\dot{h}$  nul zijn. Het

1) Verschillende discussies met Prof. P. Groen hebben tot het hier volgende bijgedragen.

evenwichtswindeffect, dat voor de tweelingstormvloed van 21 - 24 december 1954 geldt, is in figuur 4 als gestippelde kromme weergegeven. Uit deze figuur blijkt, dat we met een redelijke graad van nauwkeurigheid van 21 december 1400 uur G.M.T. tot 23 december 2100 uur G.M.T. het verloop van deze gestippelde kromme kunnen voorstellen door de volgende formule:

$$h^* = \frac{k}{a} + \frac{l}{a} \sin wt = 11,6 + 7,6 \sin 0,174 t \quad (33)$$

waarin  $h^*$  in dm is uitgedrukt en  $t$  in uren. In het volgende zullen we steeds lengtematen in decimeters uitdrukken en tijdintervallen in uren. De tijd  $t$  rekenen we vanaf 21 december 1954 1400 uur G.M.T. In figuur 5 is zowel het aan het werkelijke windveld beantwoordende evenwichtswindeffect, als het volgens (33) berekende evenwichtswindeffect weergegeven. We hebben in (33)  $w$ , de hoekfrequentie van het windveld, de waarde 0,174 gegeven. Dit komt overeen met een trillingstijd van  $\frac{2\pi}{w} \approx 36$  (uren).

Invullen van de beginvoorwaarden (31) en de waarden van  $\frac{k}{a}$ ,  $\frac{l}{a}$  en  $w$  volgens (33) in de oplossing (24) geeft:

$$\begin{aligned} h(t) = & 11,6 + 7,6 a \cdot \frac{(a-0,0303) \sin 0,174 t - 0,174 r \cos 0,174 t}{(a - 0,0303)^2 + 0,0303 r^2} \\ & + 7,6 a \cdot \frac{0,174 \cos w_f t + \frac{0,174}{w_f} (0,0303 - w_r^2) \sin w_f t}{(a - 0,0303)^2 + 0,0303 r^2} e^{-\frac{r}{2} t} \\ & - 9,6 \left( \frac{r}{2w_f} \sin w_f t + \cos w_f t \right) e^{-\frac{r}{2} t} \quad (34) \end{aligned}$$

We dienen nu de waarden van  $a$  en  $r$  zo te kiezen, dat het volgens (34) met deze waarden van  $a$  en  $r$  berekende windeffect zo goed mogelijk in overeenstemming is met het opgetreden windeffect. Daarbij denken we in het bijzonder aan de beide maxima van de tweelingstormvloed en aan de faseverschuiving. Het is duidelijk, dat het met twee vrijheidsgraden ( $a$  en  $r$ ) in het algemeen niet mogelijk zal zijn zowel de beide maxima als de faseverschuiving te doen kloppen. We zullen ons daarom in hoofdzaak richten naar de tweede top en de faseverschuiving.

Om snel een idee te krijgen van de orde van grootte van  $a$  en  $r$  nemen we eens even aan dat de amplitudo van de tweede schommeling reeds wordt weergegeven door de uitdrukking (27), die strikt genomen pas geldt voor de oneindigste schommeling. Bovendien nemen we eens aan, dat de fasehoek voor deze beide stormen gelijk is aan de fasehoek voor de oneindigste storm, die gegeven wordt door (28). We kunnen nu  $a$  en  $r$  oplossen uit de vergelijkingen (27) en (28) en vinden:

$$\left. \begin{array}{l} a = 0,041 \text{ uur}^{-2} \\ r = 0,12 \text{ uur}^{-1} \end{array} \right\} \quad (35)$$

Teneinde een overzicht te verkrijgen van de afhankelijkheid van de hoogte der eerste en tweede top, alsmede van de grootte der phasehoek van de waarde van  $a$  en  $r$ , hebben we voor een aantal combinaties van  $a$  en  $r$ -waarden deze drie grootheden berekend en in een  $(a, r)$ -diagram uitgezet. Vervolgens hebben we in dit diagram lijnen getrokken van gelijke hoogte van de eerste top en van de tweede top en lijnen van gelijke phaseverschuiving. In figuur 6 is dit  $(a, r)$ -diagram weergegeven. Uit dit diagram zien we, dat het in dit geval inderdaad onmogelijk is om zowel de eerste en tweede top als de phaseverschuiving met de werkelijke opgetreden waarden te doen overeenstemmen.

De hoogte van de eerste en de tweede top in de opgetreden wind-effectkromme bedragen (zie figuur 4) resp. 21,7 en 24,6 dm, terwijl de phaseverschuiving gemiddeld ruim 6 uur blijkt te bedragen. Deze phaseverschuiving hebben we als volgt bepaald. Allereerst hebben we de amplitudo van het opgetreden windeffect zo goed mogelijk gereduceerd tot de amplitudo van het evenwichtswindeffect en vervolgens hebben we deze gereduceerde kromme in de tijd zodanig verschoven, dat deze verschoven curve zo goed mogelijk met de andere curve samenviel. Op deze manier is de tijdverschuiving tot op een kwartier nauwkeurig te bepalen, hetgeen neerkomt op een onzekerheidsmarge in de phaseverschuiving van circa  $1^\circ$ .

Uit figuur 6 lezen we af, dat we voor  $\frac{a}{w^2}$  resp.  $\frac{r}{w}$  het best de waarden  $1,34 \pm 0,02$  en  $0,70 \pm 0,02$  kunnen kiezen. Dan heeft namelijk de tweede top de vereiste hoogte en bedraagt de phaseverschuiving  $64 \pm 1^\circ$  (dit komt overeen met ruim 6 uur tijdsverschil in ons geval). Deze waarden van  $\frac{a}{w^2}$  en  $\frac{r}{w}$  geven voor  $a$  en  $r$  de waarden:

$$\left. \begin{array}{l} a = 0,041 \pm 0,002 \text{ uur}^{-2} \\ r = 0,122 \pm 0,007 \text{ uur}^{-1} \end{array} \right\} \quad (36)$$

Met behulp van deze waarden van  $a$  en  $r$  vinden we tenslotte voor het windeffect volgens (34):

$$h(t) = 11,6 + 13,0 \sin(9,97 t - 64)^\circ + (2,1 \cos(11,0 t)^\circ - 4,5 \sin(11,0 t)^\circ) e^{-0,061 t} \quad (37)$$

In figuur 7 hebben we zowel de volgens deze formule berekende windeffecten als de opgetreden windeffecten weergegeven. Vergelijken we nu de beide krommen, dan zien we dat de tweede stormvloed door (37) goed

wordt beschreven; zowel het berekende minimum als het berekende maximum zijn in overeenstemming met de opgetreden waarden (althans binnen de onzekerheidsmarge). Op 24 december begint de berekende kromme belangrijk af te wijken van de opgetreden kromme. Dit behoeft ons ook niet te verbazen, omdat de berekende kromme berust op een verloop van de wind volgens (33) en deze vorm van de windkromme is slechts met de werkelijke windkromme in overeenstemming gedurende de periode van 21 december 1400 uur G.M.T. tot 23 december 2100 uur G.M.T.

Beschouwen we de eerste stormvloed, dan blijkt uit figuur 7, dat het opgetreden maximum ongeveer 2 dm lager ligt dan het berekende maximum. Dit behoeft ons echter niet te verwonderen, aangezien er in werkelijkheid in de windkromme een "deuk" zit (21 december 1954, 1800 uur G.M.T.), die we niet in ons geschematiseerd windveld vinden (zie figuur 5). Deze inzinking in de windsnelheidskromme kan althans ten dele het verschil in maximum windeffect gedurende de eerste stormvloed verklaren. Dit achterblijven in hoogte van het werkelijke windeffect tijdens de eerste storm ten opzichte van het volgens (37) berekende windeffect heeft tevens tot gevolg en verklaart derhalve ook de tijdverschuiving van de berekende kromme ten opzichte van de opgetreden kromme in de dalende tak van de eerste stormvloed.

We kunnen dus concluderen dat het redelijk goed mogelijk blijkt de tweelingstormvloed van december 1954 te beschrijven aan de hand van het hierboven beschreven eenvoudige model. Deze analyse heeft ons tevens een idee gegeven van de grootteorde van de in het spel zijnde grootheden en parameters.

Allereerst dan hebben we de grootte van de dempingsconstante  $r$  uit de windeffectkromme afgeleid. Volgens (36) bedraagt deze voor dit geval  $0,122 \text{ uur}^{-1}$ . Schalkwijk (l.c. pag. 52 e.v.) heeft empirisch ook dempingsconstanten berekend. Hoewel zijn waarden voor de verschillende stormen een sterke spreiding vertonen, stelt hij toch een gemiddeld verband op tussen de dempingsfactor en de windsnelheid, dat, vertaald in onze notatie, luidt:

$$r = (1,44 + 0,27 V) 10^{-2} \text{ uur}^{-1}, \quad (38)$$

waarin  $V$  de windsnelheid in meters per seconde voorstelt. Willen we de volgens onze manier berekende waarde van  $r$  vergelijken met de volgens (38) berekende  $r$ , dan moeten we de gemiddelde opgetreden windsnelheden (circa 16 meter per seconde) gebruiken. (38) geeft dan de waarde:  $r = 0,058$ .

De waarde van  $r$  is ongeveer tweemaal zo klein als de door ons berekende waarde. Dit verschil behoeft ons echter niet te verontrusten,

enerzijds doordat de volgens (38) berekende  $r$  slechts een zeer ruwe schatting geeft van  $r$  gezien de grote spreiding in de waarnemingen waarop (38) berust en anderzijds doordat we kunnen verwachten, dat voor deze tweelingstormvloed  $r$  groter geweest zal zijn dan in het normale geval, daar de tweelingstorm met een opvallend sterke buigtheid gepaard ging, die de turbulentiegraad van het water aanzienlijk vergroot kan hebben.

Verder kunnen we uit (36) ook de schommelingsperiode van de Noordzee voor dit geval afleiden. We hebben eerder gezien (21), dat de hoekfrequentie van de vrije schommeling van de Noordzee  $w_f = \sqrt{a - \frac{r^2}{4}}$  bedraagt. De waarden van  $a$  en  $r$  uit (36) geven ons derhalve:  $w_f = 0,192$  uur<sup>-1</sup>. De hiermee corresponderende eigen slingertijd bedraagt dan:

$$T_f = \frac{2\pi}{w_f} = 32,7 \text{ uur} . \quad (39)$$

Voor het geval er geen bodemwrijving zou zijn, zou de hoekfrequentie der eigenschommeling bedragen:  $w_o = \sqrt{a} = 0,202$  uur<sup>-1</sup>, wat overeenkomt met een periode van:

$$T_o = \frac{2\pi}{w_o} = 31,1 \text{ uur} . \quad (40)$$

Vergelijken we de waarde van  $T_f$  volgens (39) met de door Schalkwijk empirisch berekende waarde van de eigen periode voor een schommeling in de lengterichting, (41 uur), dan zien we, dat de door ons berekende waarde veel kleiner is en meer dan driemaal de standaardafwijking (die ruim 2 uur is) in het gemiddelde (41 uur) van de door Schalkwijk geanalyseerde gevallen verschilt van dat gemiddelde. Mogelijk kan dit erop wijzen, dat in het geval van de tweelingstormvloed de Noordzee niet zuiver in de lengterichting heeft geschommeld, maar met een andere trillingsvorm.

Tenslotte willen we nog nagaan in hoeverre er sprake is geweest van resonantie. De resonantieperiode van de Noordzee zou bij de hier opgetreden slingerwijze zijn, volgens formule (25):

$$T_r = \frac{2\pi}{w_r} = \frac{2\pi}{\sqrt{a - \frac{r^2}{2}}} = 34,5 \text{ uur} \quad (41)$$

De opgetreden slingering had dus een periode die 1,5 uur groter was dan de resonantieperiode. We zullen nog nagaan welke maximale windeffecten een sinusvormig windveld zou veroorzaken als de periode van het windveld gelijk zou zijn geweest aan  $T_r$ . We hebben daartoe de



frequentiekarakteristiek volgens (27) berekend, dat wil zeggen: we hebben voor een aantal waarden van  $w$  de bijbehorende  $\frac{A}{a}$  berekend. De karakteristiek is grafisch weergegeven in figuur 8. Hieruit lezen we af, dat de verhouding  $\frac{A}{a}$  maximaal 13,0 dm had kunnen bedragen (bij gelijke amplitudo van het windveld wel te verstaan). De bij de opgetreden periode van de beide stormen behorende amplitudo was 12,9 dm, zodat we bij deze tweelingstormvloed practisch met volledige resonantie te doen hebben gehad. Uit de figuur blijkt bovendien, dat voor een opgedrongen periode tussen 31 en 40 uur de amplitudo  $\frac{A}{a}$  minder dan 5 cm van de resonantieamplitudo zou verschillen. Er dient nog aan herinnerd te worden, dat figuur (8) slechts betrekking heeft op de amplitudo van de schommeling voor voldoende grote waarden van de tijd.

Uit figuur 7 blijkt echter dat tijdens de tweede storm al practisch de maximale amplitudo is bereikt. We kunnen hieruit concluderen, dat in het geval dat de beide stormen nog gevolgd waren door andere stormen van dezelfde kracht en met dezelfde periode deze latere stormen geen hogere windeffecten tot gevolg zouden hebben gehad. Dus in het bijzonder een drielingstorm van dezelfde kracht zou niet gevaarlijker zijn geweest.

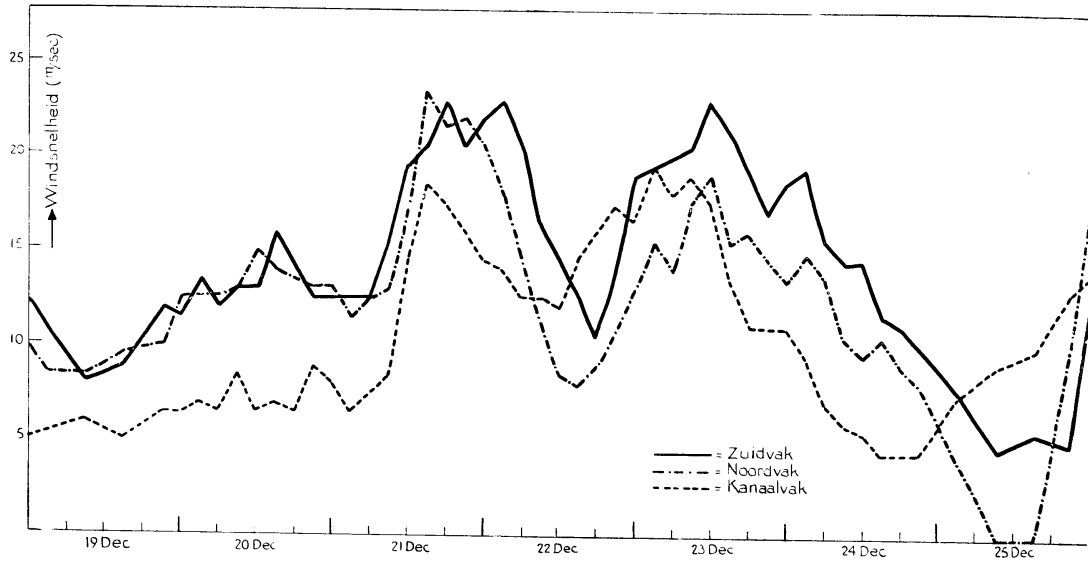


Fig 1

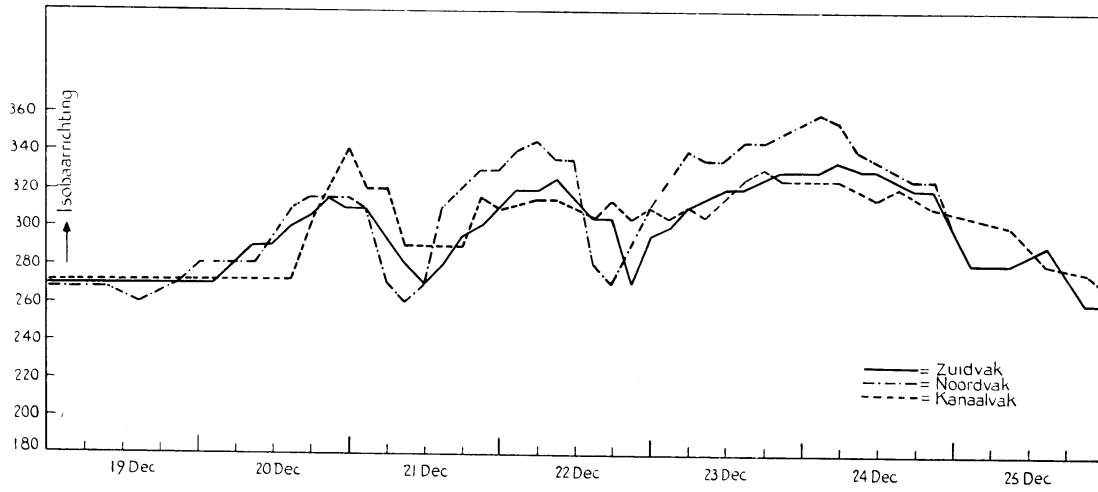


Fig 2

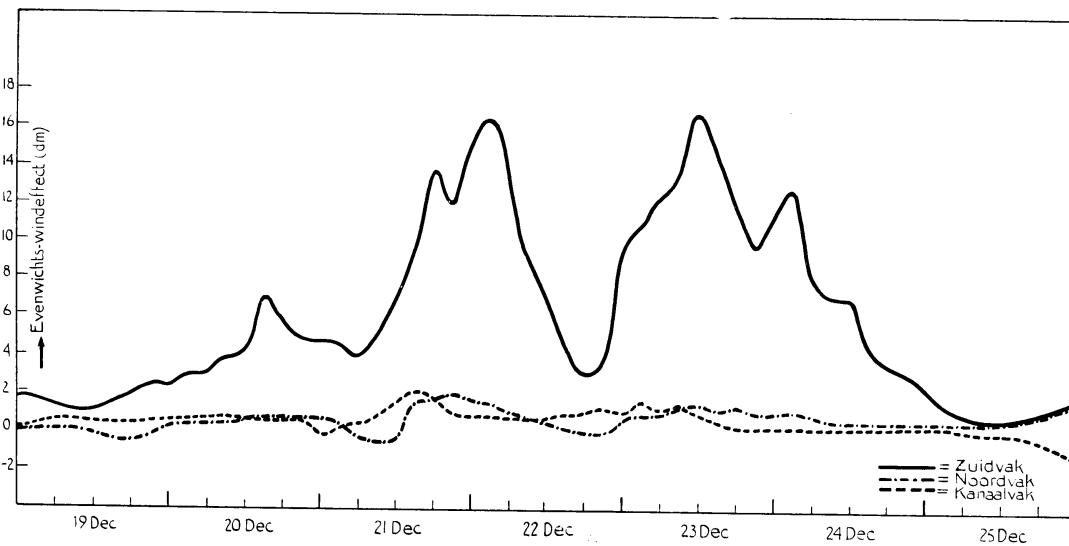


Fig 3

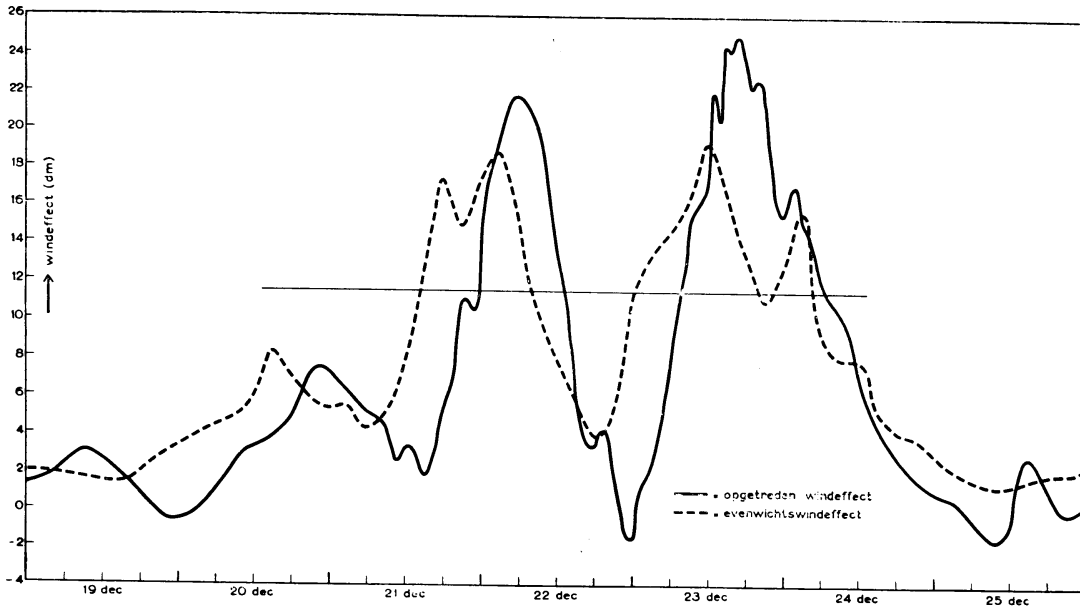


Fig. 4

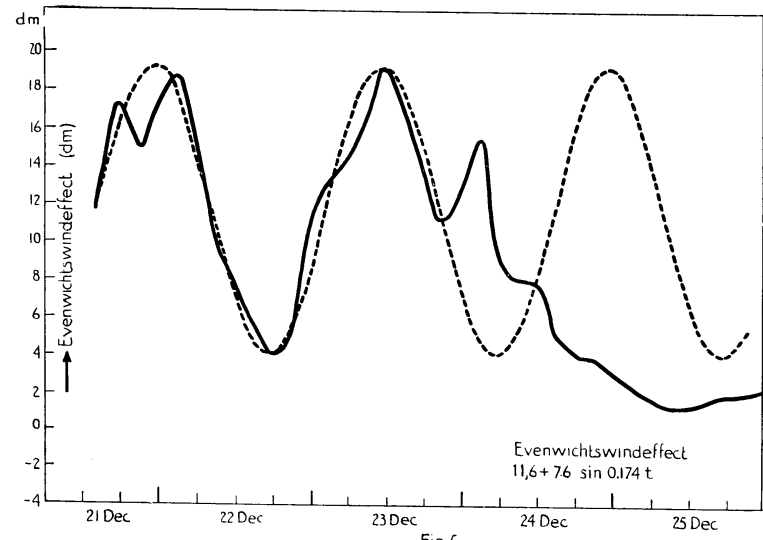


Fig 5

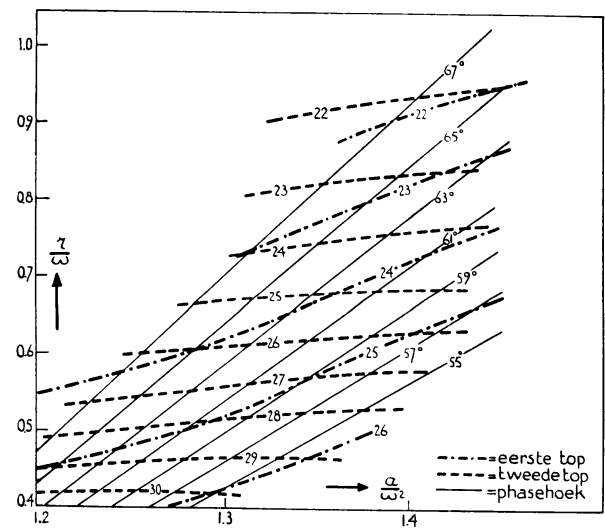


Fig 6

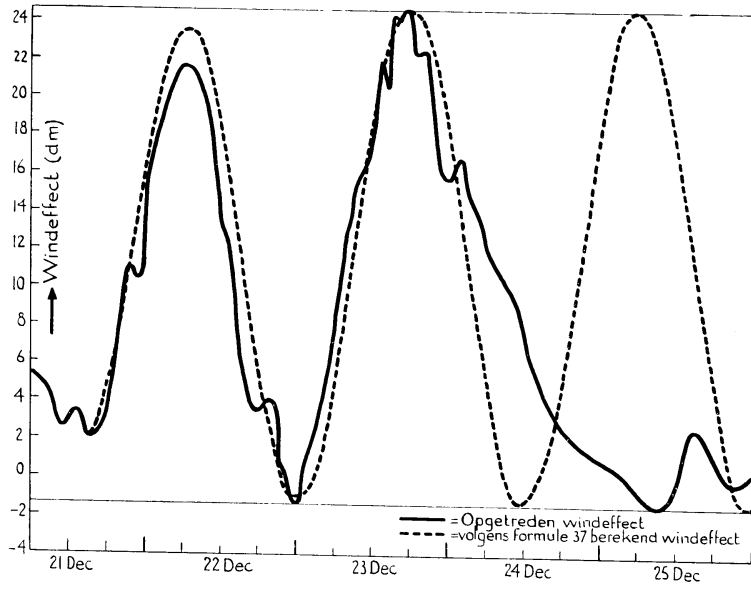


Fig 7

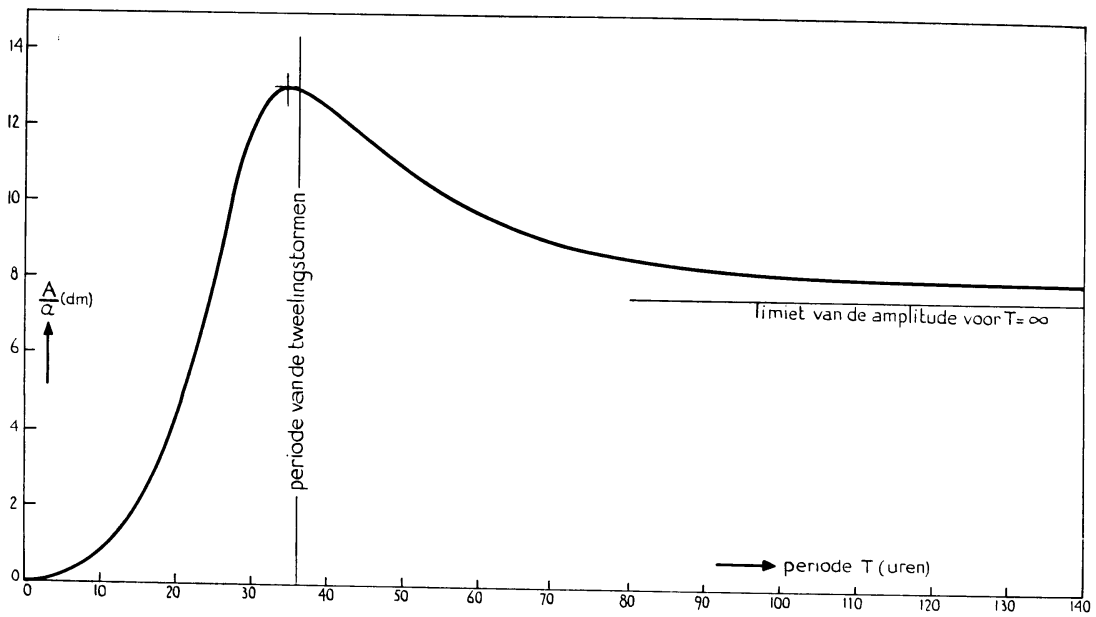


Fig 8