

H. de Groot

W.R. 56-003 (III-180)

**KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT**

WETENSCHAPPELIJK RAPPORT

DRS. P. J. RIJKOORT

Bijdrage tot het bepalen van de meest gunstige
diepte voor het leggen van waterleidingbuizen
in verband met het bevroeringsrisico.

DE BILT - 1956

KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT

Wetenschappelijk Rapport W.R. 56-003 (III-180)

Drs P.J.Rijkoort

Bijdrage tot het bepalen van de meest gunstige diepte voor
het leggen van waterleidingbuizen in verband met
het bevroeringsrisico.

De Bilt, 1956

All Rights Reserved.

Nadruk zonder toestemming van het K.N.M.I. is verboden.

Drs P.J.Rijkoort

Bijdrage tot het bepalen van de meest gunstige diepte voor
het leggen van waterleidingbuizen in verband met
het bevroezingsrisico.

<u>Inhoud:</u>	<u>Pag.</u>
<u>Summary</u>	2
0 <u>Inleiding</u>	3
1 <u>Het economisch decisieprobleem</u>	3
2 <u>De indringingsdiepte van de vorst</u>	5
3 <u>Over het verband tussen de vorstdiepte en enkele meteorologische-en bodem-grootheden</u>	9
4 <u>Analyse van enkele strenge winters</u>	13
5 <u>Het "evenwichts" verschijnsel</u>	18
6 <u>Conclusies</u>	21
<u>Literatuurlijst</u>	23

Summary:

This report is concerned with the possibility of giving the values of the economically best depth for installing waterconduits, an economic decision problem, in which the sum of the costs of installation and the cash value of future repair costs in case of frost damage must be minimized.

An exact solution of the problem in this form cannot certainly be given, as it is almost impossible to calculate future costs of repair. Yet it is useful to study maximum frost depth, which is a main factor in this problem, from the climatological point of view.

It is shown that, even if maximum frost depths for several years are available in some places, the accuracy with which a forecast of maximum frost depth for the next N years can be made, is small. If for $N = 25$ is chosen, then data for 100 years are needed to predict frost depth as $X_m + 10$ cm (with 90 per cent accuracy).

^mSince frost depth has only been measured in a few places, it should be related to meteorological quantities.

According to American and English literature, a temperature index is mostly used for this purpose, in particular the total negative sum of daily values of temperature, starting from the first day of below zero temperature (if a positive period appears the positive sum must be smaller than the foregoing negative sum, otherwise both periods do not count).

The solution of the differential equations for the temperature distribution in the ideal case of constant temperature below zero as boundary condition, constant temperature above zero as initial condition, and constant thermal diffusivity shows that frost depth must be proportional to the root of time.

Since in this case the above defined temperature index is proportional to time, we may assume frost depth to be roughly proportional to the root of the temperature index.

Frost depth values from the lysimeter station at Castricum show this proportionality to hold only if the temperature index is calculated from soil surface temperature, and if the frost period is rather short.

Frost depth apparently tends to a constant value in the case of long frost periods. The reason for this phenomenon seems to be that the initial condition of constant temperature in the soil is not satisfied. A certain temperature lapse rate exists in the soil.

At the beginning of frost periods in the Netherlands this lapse rate amounts to about $4^\circ\text{C}/\text{m}$ near the surface. At greater depths (some kilometers) a value of about $0.03^\circ\text{C}/\text{m}$ is found. The initial condition of a constant lapse rate, or of a constant temperature at a given finite depth, may prove to be a better approximation to the actual circumstances than the usually assumed initial condition.

Unfortunately it seems to be impossible to solve the differential equation for this case. However, it is easy to find the limiting values of frost depth. Hence, if it is possible to show that, at a certain finite depth (say about 3 or 4 m), temperature is actually constant even during the longest frost periods, it is possible to calculate maximum frost depth. These limiting values may prove to be of practical use. Of course the mean surface temperature during the frost periods must be known.

0 Inleiding

De vraag die aanleiding gaf tot het onderzoek, waarvan de resultaten in dit rapport worden beschreven, is in het kort als volgt te formuleren:

Wat is economisch de meest verantwoorde diepte waarop in verschillende delen van ons land de waterleidingbuizen gelegd dienen te worden?

De vraag is een onderwerp van studie van de Commissie Vorst van het Keurings-Instituut voor Waterleiding-Artikelen. De huidige toestand is namelijk zo, dat de meeste leidingen op een diepte van omstreeks 1 m liggen. Enerzijds is het dus de vraag of in bepaalde streken van het land de buizen eigenlijk dieper behoren te liggen in verband met het risico van bevriezen, (in dit geval zou men in de toekomst bij verdere uitbreiding van het net hiermede rekening moeten houden, eventueel tot een dieper leggen van reeds aanwezige leidingen over moeten gaan); anderzijds zou het mogelijk zijn, dat in andere gebieden uitbreiding van het net op geringere diepte kan plaats vinden.

Het probleem, zoals dat hier gesteld is, is een economisch decisieprobleem en b.v. analoog aan het bekende dijkverhogingsprobleem der Deltacommissie, dat door het Mathematisch Centrum behandeld is. In principe is de vraag beantwoord als we de oplossing zouden kennen van het economisch decisieprobleem dat we eerst in het algemeen willen beschouwen:

1 Het economisch decisieprobleem

We nemen om de gedachten te bepalen een zeker gebied G aan waarin de buizen op een zekere diepte X_m komen te liggen. Voor de oplossing moeten we kennen:

- 1e De aanlegkosten voor allerlei waarden van X_m gegeven b.v. door een zekere functie $G_1(X_m)$
- 2e De contante waarde van de toekomstige kosten, die verbonden zijn aan bevriezen van de leidingen, voor allerlei waarden van X_m b.v. gegeven door een tweede functie van X_m : $G_2(X_m)$

De economisch meest verantwoorde waarde van X_m is die waarde, waarvoor $G_1(X_m) + G_2(X_m)$ minimaal is.

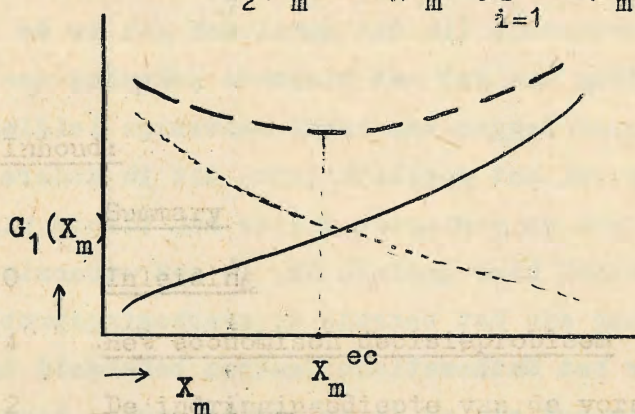
De functie $G_1(X_m)$ zal waarschijnlijk wel te vinden zijn, althans numeriek. (Dit is allicht een monotoon stijgende functie).

De bepaling van $G_2(X_m)$ geeft de moeilijkheden, zelfs als we ons beperken tot het eenvoudige geval, dat ons gebied G uit een geheel homogene bodem bestaat en bevriezing over het gehele gebied op dezelfde diepte plaats vindt. $G_2(X)$ bestaat dan uit een sommatie van de verwachtingswaarden van de herstelkosten jaar voor jaar. Voor dit laatste is nodig te weten:

- 1e De kans, dat in het eerste, tweede, derde enz. toekomstige jaar de vorstdiepte minstens X_m cm wordt.
- 2e De herstelkosten (K) in deze jaren.

Als we veronderstellen dat de rentevoet (δ) in de loop van de jaren constant blijft dan is

$$G_2(X_m) = K(X_m) \sum_{i=1}^{\infty} (1 + \delta)^{-i} \quad (1)$$



In nevenstaande schets vindt men dit toegelicht.

— $G_1(X_m)$
 - - - $G_2(X_m)$
 - · - $G_1(X_m) + G_2(X_m)$

De meest gunstige diepte (X_m^{ec}) is de diepte waarvoor geldt:

$$\frac{d G_1(X_m)}{d X_m} = - \frac{d G_2(X_m)}{d X_m} \quad (2)$$

Echter alleen als er een scherp minimum uitkomt heeft het antwoord praktisch betekenis. Het is n.l. in principe niet onmogelijk dat (2) (althans bij benadering) voor een geheel traject van X waarden zou gelden. In dit geval bezit de $G_1(x) + G_2(x)$ kromme een zeer vlak minimum traject. Het maakt dan weinig uit, welke X men in dit traject kiest. Of er een praktisch bruikbaar resultaat uitkomt hangt dus af van de breedte van dit minimumtraject.

Er komt nog bij dat in het bijzonder $G_2(X_m)$ niet nauwkeurig te bepalen zal zijn en ook hierdoor zal X_m^{ec} met een grote onzekerheidsmarge behept zijn. Zou dus deze marge b.v. 50.....150 cm worden, dan is het duidelijk, dat er niets gewonnen is en men maar beter op de gebruikelijke manier kan doorgaan.

We hebben voorgaande beschouwing slechts gegeven om het probleem in zijn geheel eens scherp te stellen en duidelijk te laten uitkomen hoe het in principe eigenlijk ligt.

Practische betekenis heeft het misschien weinig. De grootste moeilijkheid is stellig de bepaling van $K(x,i)$. Zelfs al zou men zich beperken tot de materiële kosten die er voor het waterleidingbedrijf in verdisconteerd zijn, dan is het nog vrijwel ondoenlijk voor deze functie enigszins betrouwbare waarden te vinden. Er komt echter bij dat strikt genomen ook allerlei niet quantificeerbare factoren in deze $K(x,i)$ opgenomen dienen te worden. We denken b.v. aan het nadeel en ongemak dat door een bevriezing van de hoofdleidingen aan de gebruikers wordt bezorgd. Dit zou in bepaalde gevallen (b.v. voor bedrijven, ziekenhuizen enz.) tot zeer ernstige situaties aanleiding kunnen geven. Het spreekt vanzelf dat voor al deze gevallen de kosten moeilijk in getallen zijn uit te drukken. Niettemin blijft in principe het probleem zoals het in het voorgaande werd geschetst.

Mede op grond van het feit, dat $F(X_m)$ ook slechts met grote onnauwkeurigheid te bepalen is, staat wel vast, dat een min of meer scherpe uitspraak (b.v. voor een bepaalde soort grond in een bepaald gebied ligt de meest gunstige diepte tussen 80 - 100 cm) principieel niet gegeven zal kunnen worden.

Deze laatste opmerking neemt nu weer niet weg, dat een nadere bestudering van de functie $F(X_m)$ zeer nuttig kan zijn. De bestudering van deze functie zal het onderwerp van dit rapport vormen. Lukt het $F(X_m)$ enigszins betrouwbaar te bepalen, dan zal dus de enige praktische betekenis zijn dat men een diepte X_m aangeeft, zodanig dat er slechts een geringe kans is dat in de komende N jaren de leidingen op deze diepte bevriezen. Ook nu weer zal X_m met een bepaalde onzekerheidsmarge behept zijn, waarvan de breedte zijn praktische waarde bepaalt. Men moet zich echter bovendien realiseren, dat er geen enkele garantie is, dat een aldus bepaalde diepte ook werkelijk in de toekomst de meest gunstige zal blijken te zijn. Tenslotte zal bij het verdere onderzoek blijken, dat er misschien nog een mogelijkheid is die ons iets meer houvast geeft.

2 De indringingsdiepte van de vorst 1)

We willen thans nagaan wat er van de vorstdiepte te zeggen valt.

1) Het in de rest van dit rapport behandelde geeft slechts de resultaten weer die tot nu toe bereikt zijn, en vormt dus zeker geen afgesloten geheel.

We beschikken slechts voor enkele plaatsen van ons land over veeljarige grondtemperatuurgegevens. Een redelijk lange reeks, n.l. van 1914 af, is van de Bilt aanwezig. Verder zijn er belangrijke gegevens van Castricum sedert 1941. Hier worden grondtemperatuurwaarnemingen verricht op drie plaatsen resp. onder duinbegroeiing, onder loofhout en onder naaldhout. Bovendien zijn tijdelijk waarnemingen in de onbegroeide lysimeter gedaan.

De grondthermometers te de Bilt zijn tot 1949 opgesteld geweest op het voormalige waarnemingsterrein bij het oude gebouw en na 1949 op het nieuwe buitenterrein, enkele honderden meters van de nieuwe vleugel verwijderd. De nieuwe opstelling bevindt zich stellig op een minder beschutte plek. Gedurende korte tijd zijn parallel waarnemingen gedaan tussen de nieuwe opstelling en een opstelling in de buurt van de oude opstelling. Hieruit is wel gebleken dat er belangrijke verschillen kunnen optreden. Aangezien echter tussen nieuwe en oude opstelling zelf geen vergelijkingsmateriaal beschikbaar is, kunnen we toch niet veel zeggen omtrent de verhouding van de resultaten in beide perioden. Veiligheidshalve zullen we dus aanvankelijk de periode 1914-1949 afzonderlijk beschouwen. De metingen zijn verricht op de diepten 3, 10, 25, 50, 75 en 100 cm beneden maaiveld. Voor iedere winterperiode is grafisch de maximale vorstdiepte (X_m) bepaald. In fig. 1 hebben we deze waarde aangegeven (ook voor de jaren na 1949).

Hoe luidt nu de frequentieverdeling van deze X_m waarden? Helaas is het aantal waarnemingen veel te gering om de dichtheidsfunctie $f(X_m) dX_m$ te bepalen d.w.z. om van een of andere met overleg gekozen functie te toetsen of deze als dichtheidsfunctie acceptabel is. We kunnen niet anders doen dan met behulp van waarschijnlijkheidspapier een oplossing trachten te vinden die althans een redelijke mogelijkheid aangeeft. Aangezien het er ons om te doen is ook te weten hoe nauwkeurig tenslotte de uitspraak wordt, willen we streven naar het vinden van een normale verdeling, omdat het aanbrengen van een betrouwbaarheidsband dan vrij eenvoudig is.

Nu is er aan ons materiaal nog een moeilijke kant n.l. dat X_m niet negatief kan worden. Volgens de definitie is 0 de kleinste waarde. We vinden in ons materiaal zeven waarden nul. We kunnen het echter zo opvatten dat deze waarden toch het gebied $-\infty \dots 0$ vertegenwoordigen en dit is eigenlijk ook zo, want alleen als aan de oppervlakte van de bodem de laagste temperatuur precies nul wordt, is er sprake van een X_m waarde nul.

Als de laagste temperatuur boven nul blijft wordt de $X_m = 0$ nog niet bereikt en is er dus toch eigenlijk van een negatieve X_m sprake. We wijzen er nog op dat bij deze overweging de dagelijkse gang van de temperatuur buiten beschouwing gelaten is. We doen dus alsof we te maken hebben met een gladgestreken temperatuurkromme.

Het feit, dat de X_m -waarden dus bij 0 afgeknot zijn, maakt het onmogelijk voor de aanpassing van een normale verdeling gemiddelde en standaarddeviatie te berekenen. We werken dus verder geheel grafisch op waarschijnlijkheidspapier (zie fig. 2). Hierbij wordt de cumulatieve vorm van de frequentieverdeling n.l.

$$F(X_m) = \int_{-\infty}^{X_m} f(\xi) d\xi \quad \text{gebruikt.}$$

De methode bestaat nu hierin, dat X_m op het waarschijnlijkheidspapier wordt uitgezet tegen $F(X_m)$. Voor $F(X_m)$ wordt een schatting gemaakt uit de steekproef. Immers in de steekproef komen op N (= 35, als we de gegevens van de Bilt tot 1949 beschouwen) gevallen een zeker aantal i voor, kleiner of gelijk X_m . De eenvoudigste schatting voor $F(X_m)$ is dus $\frac{i}{N}$. Uit theoretische overwegingen (zie (1)) is het echter beter als schatting voor $F(X_m)$ te nemen:

$$\frac{i - 0.3}{N + 0.4}.$$

Hierin is dus i het rangnummer van de X -waarden als deze volgens toenemende grootte gerangschikt zijn. Indien nu de frequentieverdeling van X_m normaal is, moet op het waarschijnlijkheidspapier een rechte lijn tevoorschijn komen. In fig. 2 hebben we voor de jaren 1914/1915 tot 1948/1949 van de Bilt de X_m waarden uitgezet 1).

Het is zonder meer duidelijk, dat hier niet van een rechte lijn sprake is. Gaan we van X_m over op $\log X_m$, zoals in fig. 3 gedaan is, dan vinden we een lijn, die duidelijk naar de andere zijde gekromd is dan de lijnen van fig. 2.

1) In fig. 2 is bij de waarschijnlijkheidsschaal genoteerd: kans op $\bar{X}_m \leq X_m$ d.w.z. kans dat de variabele X_m (genoteerd \bar{X}_m) kleiner dan of gelijk aan een bepaalde waarde X_m is (Dit is dus $F(X_m)$).

Wat we nu kunnen doen om toch tot een rechte lijn te komen, is een verschuiving toepassen en b.v. $\log (X_m + A)$ uitzetten tegen $\frac{i - 0.3}{N + 0.4}$. In principe zou men kunnen trachten voor A een zodanige waarde te vinden dat de punten zo goed mogelijk aan een linear verband voldoen. Aangezien dit echter een zeer omvangrijk rekenwerk is, hebben we dit niet gedaan maar volstaan met twee willekeurige waarden te kiezen n.l. $A = 10$ en 30 (zie fig. 4 en 5). Tenslotte gaat het ons er alleen maar om een indruk te krijgen van de mogelijkheden; bovendien krijgen we uit de figuren 4 en 5 wel de indruk dat bij A waarden < 10 of > 30 de lineariteit wel verloren gaat.

We gaan nu nog een stap verder. We zijn immers niet geïnteresseerd in de frequentielijn zoals die in de steekproef van de 35 jaren 1914/1915 - 1948/1949 geweest is, maar in de frequentielijn zoals die in de toekomst zal zijn of m.a.w. in de frequentielijn van het geheel van mogelijke X-waarden, het z.g. universum. De ligging van deze lijn kan aanzienlijk afwijken van de lijn die in de figuren 4 en 5 te zien is. Wij moeten bij de beschouwing van dergelijke figuren nooit vergeten, dat we hier met een cumulatieve voorstelling te doen hebben. Als we over waarnemingen van volgende jaren de beschikking krijgen, dan kan het hele beeld veranderen. Het is niet zoals bij het geval van een regressie tussen twee grootheden x en y, waarbij een uitbreiding van de steekproef eenvoudig betekent, dat er meer punten in de puntenwolk bijkomen terwijl de oude op hun plaats blijven liggen, maar in ons geval betekent het, dat de hele puntenrij verandert en b.v. kan gaan verschuiven. De betrouwbaarheidsband die we willen aanbrengen kunnen we bepalen met behulp van een door Levert geconstrueerd nomogram (2).

Hoe dit in zijn werk gaat laten we hier buiten beschouwing. We volstaan met de opmerking, dat de gestippelde lijnen in de figuren de door ons geconstrueerde betrouwbaarheidsband voor 90% aangeven. Als we ons derhalve zouden indenken, dat we b.v. 1000 soortgelijke gevallen hadden en we zouden hierbij analoog te werk gaan, dan zou in werkelijkheid in ongeveer 900 gevallen de ware frequentielijn binnen de gestippelde grenzen lopen.

In de figuren 4 en 5 geeft de waarschijnlijkheidsschaal (q) dus aan de kans, dat in een willekeurig jaar de waarde X_m niet wordt overtroffen.

$1/(1-q)$ is dus het aantal jaren waarin de waarde X_m gemiddeld één keer wordt overtroffen. Zo kunnen we b.v. aflezen de X_m waarde die 1 keer in 25 jaar wordt overtroffen en vinden dan dat deze met 90% zekerheid zal liggen tussen 42 en 98 cm als we $A = 10$ nemen en tussen 44 en 88 als we $A = 30$ kiezen. Veel verschil maakt het dus niet of we $A = 10$ of 30 nemen. De spreiding in de uitkomst is erg groot maar dit is alleen het gevolg van het feit, dat slechts 35 waarden ter beschikking staan. Dit aantal is dus eigenlijk te klein om een behoorlijk nauwkeurige uitspraak te krijgen.

In fig. 4 hebben we met streep-~~keuze~~^{STIP} lijnen aangegeven welke band we zouden hebben gekregen als $N = 100$ was geweest. Dan blijkt de variatie in een orde van 20 cm te liggen.

In fig. 6 hebben we nog het materiaal van de Bilt met de jaren 1949/1950 tot en met 1955/1956 uitgebreid, daarbij dus aannemende dat de beide opstellingsplaatsen geheel equivalent zijn. Als we dit met fig. 4 vergelijken dan zien we dat een kleine verschuiving is opgetreden. Veel verschil maakt het echter niet. De X_m -waarden met een frequentie van 1 op 25 jaar ligt tussen 48 en 100 cm.

Tenslotte hebben we in fig. 7 de X_m waarden van 15 jaar waarnemingen van Castricum in beeld gebracht. De band is nu nog aanmerkelijk breder dan bij de 35 jaar in de Bilt. De "1 op 25 jaar" X_m waarde ligt nu tussen 77 en 235 cm.

Aangezien het de bedoeling is te trachten voor het hele land een indruk te geven van de kansen waarmee bepaalde X_m waarden worden overschreden, hebben we ook deze indringingsdiepten voor andere plaatsen nodig. Echter zijn bodemtemperatuurmetingen niet in ruime mate aanwezig. Het ligt derhalve voor de hand na te gaan of de indringingsdiepte misschien met andere (bekende) grootheden in verband is te brengen.

3 Over het verband tussen de vorstdiepte en enkele meteorologische en bodemgrootheden.

Op dit gebied is reeds veel werk gedaan. Vele studies zijn samengevat in de Amerikaanse rapporten van het Highway Research Board (3) en (4). Bij het tot nu toe door de Covo verrichte werk is deze kant van het probleem vrijwel uitsluitend in de aandacht geweest.

Laten we het probleem volledigheidshalve nog eens algemeen en mathematisch stellen:

Gegeven is een homogene, vochtige bodem. Aan het oppervlak is de temperatuur bekend als functie van de tijd. In het begin van de vorstperiode is de temperatuurverdeling in de bodem eveneens gegeven.

Gevraagd de temperatuursverdeling in de bodem als functie van de tijd en in het bijzonder de diepte van de vorstgrens als functie van de tijd.

De volledige mathematische formulering is als volgt: Gevraagd de oplossing van het volgende warmtegeleidingsprobleem:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_1(x) \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} \right] = C_1(x) \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} \quad \text{voor } 0 \leq x \leq X(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_2(x) \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} \right] = C_2(x) \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} \quad \text{voor } X(t) \leq x$$

Randvoorwaarde : $T_1(0,t) = \varphi(t)$

Beginvoorwaarde : $T_2(x,0) = \psi(x) \quad (x \geq 0)$

Terwijl $T(\infty,t) = T_\infty = \psi(\infty)$

Vrije grens voorwaarden:

1e $\left(\lambda_1(x) \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} \right)_{x=X_0} - \left(\lambda_2(x) \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} \right)_{x=X_0} = L \frac{\partial X(t)}{\partial t}$

2e $T_1(X(t),t) = T_2(X(t),t) = 0$

Hierin is T : temperatuur

x : diepte in de bodem (gerekend vanaf het aardoppervlak)

t : tijd

λ : warmtegeleidingscoëfficiënt

C : warmtecapaciteit

X : vorstgrens

L : stollingswarmte van water

De oplossing van het probleem in deze algemene vorm is niet bekend. De oplossing van het probleem zolang van geen bevroren sprake is, is in Integraalvorm te geven (zie (5)).

Met een variabele vorstgrens is slechts de oplossing bekend als

*) Waarschijnlijk wordt hier bedoeld de totale stollingswarmte van het water dat per volumeenheid in de bodem aanwezig is. Maar dan is ook $L = L(x,t)$.

λ_1 en C_1 resp. λ_2 en C_2 constant worden ondersteld, evenals $\varphi(t)$ en $\psi(x)$, n.l. $\frac{\lambda_i}{C_i} = a_i$ en $\varphi(t) = T_0$ (< 0) en $\psi(x) = T_b$ (> 0).

Stephan (6) heeft zich reeds met dit probleem beziggehouden. De oplossing, zoals die thans vrij algemeen bekend is en o.a. door Berggren (7) wordt gegeven, is volgens Carslaw and Jaeger (8) reeds van Neumann afkomstig. Door Dr. Hardebol (9) (Warmtestichting) is deze ook voor het Covo-onderzoek aangegeven.

Een algemene behandeling van z.g. vrije grensproblemen is onlangs gepubliceerd door Kolodner (10), ~~echter ook alleen als rand- en beginvoorwaarden constante temperaturen zijn~~

De oplossing luidt:

$$T_1 = A_1 + B_1 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}} \right) \quad 0 \leq x \leq X$$

$$T_2 = A_2 + B_2 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}} \right) \quad \text{Voor } x \geq X$$

waarbij $\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-z^2} dz$

en $A_1 = T_0, \quad B_1 = \frac{-T_0}{\operatorname{erf}(\beta)}$

$$A_2 = \frac{-T_b \operatorname{erf}(\beta \sqrt{\frac{a_1}{a_2}})}{1 - \operatorname{erf}(\beta \sqrt{\frac{a_1}{a_2}})} \quad B_2 = \frac{T_b}{1 - \operatorname{erf}(\beta \sqrt{\frac{a_1}{a_2}})}$$

β is de positieve wortel uit:

$$\frac{e^{-\beta^2}}{\operatorname{erf}(\beta)} + \frac{\sqrt{\lambda_2 C_2}}{\lambda_1 C_1} \cdot \frac{T_b}{T_0} \cdot \frac{e^{-\frac{a_1}{a_2} \beta^2}}{1 - \operatorname{erf}(\beta \sqrt{\frac{a_1}{a_2}})} = \frac{L}{-C_1 T_0} \beta \sqrt{\pi}$$

Verder is $X(t) = 2\beta \sqrt{a_1 t}$

Voor het geval $T_b = 0$ en $L \gg C$ is, blijkt $\beta \sim \sqrt{-T_0}$, dus

$$X(t) \sim \sqrt{-T_0 t} \equiv \sqrt{S} \quad (\text{per definitie}) \quad (3)$$

In vele engelse en Amerikaanse publicaties ziet men deze formule gebruikt (b.v. (11)), hoewel het duidelijk is, dat dit een idealisering is, waar de werkelijkheid stellig aanzienlijk van af wijkt.

$S = \int_0^t T dt$

In werkelijkheid is de oppervlaktetemperatuur niet constant. Daarom wordt gebruik gemaakt van de negatieve temperatuur som ($=S$ en temperatuurindex of vorstindex (freezing index) genoemd; zie b.v. bij Shannon (11) en Legget and Crawford (12)).

Er zijn verschillende pogingen gedaan om met enkele afwijkingen van het gebruikte simpele model rekening te houden. Hardebol heeft voor de Commissie Vorst 1e gelaagdheid van de bodem en 2e opeenvolging van vorstperioden met verschillende T_0 waarden als afzonderlijke gevallen behandeld. Hij kan dan echter de vochtigheid van de grond niet meer in aanmerking nemen waardoor deze berekening veel van zijn waarde verliest.

Het Corps of Engineers van het Frost Effects Laboratory heeft enkele variaties op formule (3) aangegeven, waarbij b.v. de dikte van de instralingslaag als een aparte grootheid wordt ingevoerd.

Er is een groot aantal studies over dit probleem verschenen, zoals uit de Highway Research Board rapporten blijkt. Een volkomen bevredigende formule, die het verband tussen vorstdiepte en meteorologische en bodemkundige grootheden aangeeft, is er echter niet. Op zichzelf zijn de studie en het onderzoek in deze richting belangrijk en interessant, doch de grote moeilijkheid voor de oplossing van het hele probleem blijft de bepaling van de functie $F(X_m)$.

Stel n.l. dat het zou lukken, om voor X_m een formule te vinden, die nauwkeurig het verband met meteorologische en bodemgrootheden aangeeft, dan zou men X_m dus kunnen berekenen, mits de waarden van de bepalende grootheden jaar voor jaar voor verschillende plaatsen bekend zijn. Voor de meteorologische grootheden is dit tot op zekere hoogte wel het geval. Temperatuurgegevens zijn doorgaans in redelijke mate aanwezig; van de sneeuwbedekking (die een zeer grote rol speelt) is echter veel minder bekend (voor 1940 vrijwel niets). Van de bodemgrootheden (warmtegeleidingsvermogen en capaciteit en vochtigheid) is evenwel in het geheel geen statistiek aanwezig. Berekening van X_m waarden voor vele jaren op verschillende plaatsen zou in dit geval onmogelijk zijn. Zouden in plaats van gegevens voor bepaalde jaren de frequentieverdelingen van de betrokken grootheden bekend zijn dan zou in principe $F(X_m)$ toch bepaald kunnen worden (mits ook eventuele onderlinge correlaties bekend zijn).

Ongetwijfeld zou dit een zeer moeilijke mathematische opgave zijn. Jammer genoeg is over de frequentieverdeling van de bodemgrootheden niets te zeggen. Men zou dan in schattingen vervallen die aanzienlijke (en niet aan te geven) onnauwkeurigheden met zich meebrengen en die aan de einduitspraak een ongewenste onzekerheid zouden geven.

Het komt er dus op neer, dat men toch genoeg neemt met een zo eenvoudig mogelijk verband tussen X_m en de meteorologische grootheden (in het bijzonder b.v. S).

We willen daarom in het volgende hoofdstuk nagaan, voor een aantal belangrijke winters, hoe het in ons land met temperatuur en vorstdiepte gesteld was.

4 Analyse van enkele strenge winters

We hebben ons onderzoek beperkt tot de winters 1939/1940, 1941/1942, 1946/1947, 1953/1954 en 1955/1956 en gebruiken de gegevens van de Bilt en Castricum. In het bijzonder beschikken we van het laatste station over belangrijke waarnemingsreeksen, omdat hier meerdere series grondthermometers onder verschillende soorten bodembedekking aanwezig zijn; alleen zijn de waarnemingen pas na de tweede van de bovenstaande vijf winters begonnen.

We beginnen met de waarnemingen van Castricum. Opgesteld zijn grondthermometers op de diepten 0, 10, 25, 50 en 100 cm en wel op drie (tijdelijk op vier plaatsen) n.l.

- a. nabij lysimeter II (onder natuurlijke duinbegroeiing)
- b. " " III (onder loofhout)
- c. " " IV (onder naaldhout)
- d. in lysimeter I (kaal zand) (van jan. 1949 tot april 1954).

Nabij lysimeter II is sedert begin 1949 ook een thermometer op 80 cm diepte opgesteld. Bovendien beschikken we over de waarnemingen van de luchttemperatuur in twee gewone meteorologische hutten en wel nabij lysimeter I en nabij lysimeter III.

We willen in de eerste plaats nagaan in hoeverre de eenvoudige formule $X = C\sqrt{S_1}$ bruikbaar is, door voor S_1 de negatieve temperatuursom van de 3x-daagse luchttemperatuur te gebruiken.

We noteren $I_1 = \sqrt{S_1}$ (per definitie).

De bepaling van X_m is grafisch gedaan door de profielen van de bodemtemperatuur voor iedere waarneming te tekenen met behulp van de 5 temperatuurgegevens.

Ter illustratie geven we in fig. 8a de profielen van de avondwaarneming (19 uur plaatselijke tijd) nabij lysimeter II. We zien hierin in vele gevallen een aanwijzing, dat het profiel bij de 0° grens geknikt is of een deuk vertoont. Dit is natuurlijk het gevolg van het vrijkomen van de latente warmte. Doordat de oppervlaktetemperatuur niet geheel constant blijft, maar fluctueert, wordt dit effect wel enigszins vertroebeld, maar het is desondanks toch wel te constateren.

In fig. 8b hebben we uit deze profielen een isoplethenpatroon getekend, waaruit het verloop van de vorst in de bodem duidelijk te zien is. In de buurt van de 50 cm diepte blijft nog zeer lang een bevroren gedeelte aanwezig, wat misschien mede veroorzaakt wordt door het feit dat van 7 - 13 maart nog wat lichte vorst voorkwam.

Nadat de vorstdiepten op bovenstaande wijze dag voor dag bepaald zijn, gaan we over tot de bepaling van I_1 voor de winters 1947, 1954 en 1956. Bij de winter 1947 zijn we begonnen op 21 januari. Wel zijn er in december 1946 en begin januari 1947 ook reeds enkele vorstperioden geweest, maar deze werden door flinke dooi-perioden gevolgd, waarbij tenslotte de vorst weer geheel uit de grond verdwenen was.

De telling van S_1 is begonnen op de eerste dag waarop de gemiddelde 3x-daagse temperatuur op of beneden 0°C kwam en daar behoudens zeer korte onderbreking onder bleef. In fig. 9 is I_1 uitgezet tegen X (de vorstdiepte om 19 uur).

Wat kunnen we uit deze figuur aflezen? In de eerste plaats dit: Van de winter 1954 geeft lysimeter I een redelijk lineair verband door de oorsprong tussen I_1 en X. De overige drie plaatsen laten in 1954 en 1956 een afwijking zien, die we als een vertraging in het vorstindringingsproces zouden kunnen opvatten. Ongetwijfeld is dit een gevolg van de begroeiing.

In de tweede plaats zien we dat sneeuwval een belangrijke invloed heeft. Natuurlijk is dit eigenlijk een temperatuureffect, want tijdens de sneeuwbuien zal het in het algemeen niet zo sterk meer vriezen. Dit is bijzonder duidelijk in de winter 1956; in figuur 9 hebben we met sneeuwtekens (*) aangegeven bij welke I_1 waarde sneeuwval optrad. Na de eerste sneeuwval zien we een sterke neergang in de kromme, vooral veroorzaakt door de dooi op 8 januari. Daarna een steil oplopen van de kromme terwijl dan bij de tweede en derde sneeuwval de helling aanzienlijk minder sterk wordt.

De korte winter 1954 was zonder sneeuw, van daar dan ook, dat bij $I_1 \sim 9$ à 10 reeds dezelfde vorstdiepte bereikt was als in 1947 - 1956 bij $I_1 \sim 13$. Voor de winter 1947 hebben we geen sneeuwval aangegeven omdat in deze winter vrijwel van begin af (d.w.z. na 21 januari) steeds een sneeuwdek aanwezig was.

Het is uit het bovenstaande wel duidelijk, dat de luchttemperatuurindex geen goede maatstaf is voor de vorstindringing. Alleen als de bodem onbedekt is (dus zonder begroeiing of sneeuw) is er tussen X en I_1 een behoorlijke evenredigheid.

Nu is er in Castricum de gelukkige omstandigheid, dat de kwikbol van de bovenste grondthermometer juist onder het oppervlak geplaatst is. We nemen derhalve de temperatuur van deze thermometer als oppervlakte-temperatuur aan en berekenen hiervoor \sqrt{S} , waarvoor we de notatie I_0 zullen gebruiken.

In fig. 10 vinden we de resultaten als we X tegen I_0 uitzetten. Bij vergelijking met fig. 9 zien we een belangrijke verbetering. In alle gevallen is het beeld veel meer in overeenstemming met de simpele formule $X = C.I$ dan bij fig. 9. De sneeuw- en dooi-periode in 1956 blijft storend werken, hoewel het opvallend is dat de helling van de kromme toch vrijwel dezelfde is als in 1954. We hebben om de figuren niet onduidelijk te maken geen rechten $X = CI$ willen trekken, maar volstaan met het door kruisjes bij $I_0 = 10$ aangegeven van deze op het oog geschatte beste rechten door de gegeven punten.

In de volgende tabel zijn deze X waarden (=10 C) aangegeven.

Tabel 1

Geschatte waarden van 10.C (X waarden voor $I_0 = 10$)

	<u>in lys. I</u>	<u>nabij lys. II</u>	<u>nabij lys. III</u>	<u>nabij lys. IV</u>
1947		75	67	77
1954	84	85	82	74
1956		87	82	78

Uit deze tabel zien we dat inderdaad in 1954 en 1956 de C-waarden vrijwel gelijk zijn. Van 1947 stemt de C-waarde nabij IV met 1954 en 1956 overeen. De andere twee zijn aanmerkelijk lager. Het is mogelijk, dat dit veroorzaakt wordt door het feit, dat in 1947 de begroeiing nog weinig ontwikkeld was.

Voor wat de duin- en loofhout begroeiing betreft, zou het dus zo moeten zijn, dat de sterker ontwikkelde begroeiing meer vocht opneemt en de bodem zelf in latere jaren dus droger is. Dit is wel plausibel, waarom dit echter bij het naalddhout niet merkbaar is, is vooralsnog niet duidelijk.

Hoewel de I_0 dus vrij redelijk evenredig met X is, blijkt dat de maximumwaarde van X toch niet correspondeert met de maximumwaarde van I_0 . Aan het eind zien we n.l. I_0 nog toenemen terwijl X afneemt. Dit is natuurlijk een gevolg van het feit dat de eenvoudige formule de aflossing van het warmtegeleidingsprobleem geeft, als de randvoorwaarde $T(o,t) = T_0$ (constant) vervuld is. Deze constantheid van de oppervlaktetemperatuur is (ook afgezien van de dagelijkse gang) slechts bij benadering juist en vooral aan het eind van een vorstperiode zal hiervan een belangrijke afwijking optreden.

Ter verduidelijking en tevens om nog eens een overzicht van deze winters te verkrijgen, hebben we in fig. 11, 12^a en ^b en 13 het verloop van lucht- en grondtemperatuur, vorstdiepte en sneeuwhoogte als functies van de tijd aangegeven.

Als we nu fig. 12^b nader bekijken, dan zien we de temperatuurlijn van 0 cm op 7 februari vrij scherp van niveau veranderen. De temperatuur blijft gemiddeld beneden 0 (gem. ongeveer $-1,5^{\circ}\text{C}$) maar aanzienlijk minder dan voor 7 februari (gem. ongeveer -6°C). Op 7 februari is het dan ook afgelopen met de toename van de vorstdiepte. In een geval als dit zou men om I_0 als maat voor de maximale vorstdiepte te gebruiken de I_0 waarde op het moment van de temperatuursprong kunnen nemen. Helaas geeft de winter 1947 een geval waar dit ook niet meer opgaat. Als we n.l. fig. 11 naast fig. 10 beschouwen dan zien we bij de punten A, B en C (in fig. 10 hebben deze alleen op de kromme voor lys. II betrekking) dat in de vorstdiepte geen toename is, hoewel I_0 wel toeneemt. Op fig. 11 zien we dat dit voor punt A en C wel te verklaren is met het feit, dat hier de oppervlaktetemperatuur niet meer constant te achten is, bij punt B is dit echter niet het geval, hier zien we in de temperatuur op 0 cm voor en na 20 februari geen verschil. Figuur 10 maakt, wat 1947 betreft, de indruk, dat er een zekere verzadiging optreedt als de vorstperiode erg lang duurt; men zou ook kunnen zeggen, dat er een zeker evenwicht

ontstaat (dwz. op zekere diepte wordt de warmtestroom van diepere lagen naar boven, aan de benedenkant van de vorstgrens evengroot als die aan de bovenkant van de vorstgrens). Voordat we op dit punt nader ingaan, wijzen we nog op enkele bijzonderheden in de figuren 11 — 13.

Door vergelijking van fig. 12^b met 11 en 13 is de invloed van het sneeuwdek na te gaan. We zien n.l. dat in 1954 de oppervlakte-temperatuur slechts een vrij weinig kleiner amplitudo heeft dan de luchttemperatuur. In 1947 en 1956 is het verschil tussen de amplitudina van oppervlakte en luchttemperatuur veel groter.

Vooraf fig. 12 geeft in de vergelijking tussen begroeid en onbegroeid terrein een interessant beeld van het gedrag der bodemtemperaturen. In de onbegroeide lysimeter zien we dat luchttemperatuur en bodemtemperatuur op 0 cm en 5 cm geheel analoog verlopen. De 0 cm temperatuurgolf heeft een iets groter amplitudo dan de 5 cm golf en een iets kleinere amplitudo dan de luchttemperatuurgolf. Op 25 cm is gemiddelde en amplitudo geheel anders, terwijl op 50 cm van de dagelijkse gang vrijwel niets meer te merken is. Onder de begroeiing is er al dadelijk een groot verschil tussen luchttemperatuurgolf en temperatuurgolf op 0 cm en 5 cm diepte. Hier is reeds op 5 cm de amplitudo van dezelfde orde van grootte als in de onbegroeide lysimeter op 25 cm.

In aansluiting met de resultaten van de Castricum gegevens laten we in fig. 14 en 15 de vorstdiepte-temperatuur-index krommen voor de Bilt zien. We hebben hierbij ook de winter van 1939/1940 opgenomen hoewel dit een lastig geval is. De inzet van deze winter is n.l. niet scherp. Er was omstreeks de jaarwisseling een afwisseling van vorst- en dooidagen (o.a. het Weihnachtstauwetter), zonder dat de vorst goed uitde grond verdween. Verder staat in de Bilt de bovenste grondthermometer op 3 cm onder het oppervlak, zodat we niet de juiste oppervlakte temperatuur-index kunnen bepalen. We kunnen natuurlijk met de 3 cm temperatuur werken en hebben dit ook gedaan, maar dan zullen de rechten die het verband weergeven niet door de oorsprong maar door het punt ($X = 3, I = 0$) moeten gaan. Voor de winters 1954 - 1956 ziet het er blijkens fig. 15 b wel naar uit dat dit zo is.

In fig. 15 a klopt het niet zo fraai. Overigens zien we, evenals in Castricum, dat op de duur niet meer aan een lineair verband wordt voldaan maar dat er een zekere grenswaarde voor X is; deze schijnt hier in de buurt van 55 cm te liggen.

Tenslotte geven we in fig. 16 nog de resultaten weer van temperatuurmetingen in het sneeuwdek op enkele dagen van de winter 1956. Er zijn een drietal thermometers opgesteld geweest n.l. één met het reservoir juist onder het sneeuwdek (I), één halverwege het sneeuwdek (II) en een derde aan de basis van het sneeuwdek (III).

I bevindt zich dus 15 à 20 cm boven maaiveld; II op $7\frac{1}{2}$ à 10 cm en III op 0 cm (waarnemingen om 8.40, 14.40 en 15.50 uur). Wij hebben in de grafiek tevens het verloop van de luchttemperatuur weergegeven. Helaas hebben we van de temperaturen van het sneeuwdek geen minimumwaarden tijdens de nacht zodat we t.a.v. de juistheid van de geschetste kromme enige reserve in acht moeten nemen. Hier-tegenover staat, dat vermoedelijk door de phaseverschuiving de minima niet ver van de 8.40 uur temperatuur zullen liggen. Uit de figuur blijkt dat de temperatuur aan de bovenkant van het sneeuwdek vrijwel dezelfde is als de temperatuur van de lucht op 2 m hoogte. Verder zien we de sterke isolerende werking van het sneeuwdek. Aan de basis is van de temperaturen van $\sim -20^{\circ}$ boven het sneeuwdek nog nauwelijks enkele graden over.

5 Het "evenwichts" verschijnsel

We gaan nu wat nader in op het "evenwichts" verschijnsel. We vragen ons af, of de oorzaak waarvoor ons model, dat tot een lineair verband vorstdiepte-temperatuur-index voerde niet meer voldoet, soms gelegen kan zijn in de beginvoorwaarde. Deze luidde:

$$T_2(x,0) = T_b(\infty,0) \text{ (en ook } T_2(\infty,t) = T_b).$$

Het vermoeden dat hierin de oorzaak gezocht moet worden ligt voor de hand. Immers, hoe is het feitelijk gesteld met het temperatuurprofiel in de aardkorst tot grote diepten? Metingen in mijnschachten in Engeland hebben geleerd dat b.v. op ~ 100 m de temperatuur in de orde van 12°C ligt (13).

Dit is in overeenstemming met een reeks waarnemingen in een boorgat in Utrecht, die reeds omstreeks 1878 door Harting werden verricht (14). De temperatuurgradiënt bedraagt op deze grote diepten 2 à $4^{\circ}\text{C}/100$ m. De oude metingen van Harting geven aan dat de temperatuurgradiënt reeds vanaf ~ 25 m van deze grootte-orde is. Latere metingen o.a. in Zuid-Limburg hebben de juistheid van de grootte-orde bevestigd (15). Het volledige profiel van de temperaturen in de bodem aan het begin van een vorstperiode zal dus ongeveer de gedaante hebben als in fig. 17 is weergegeven.

Uit de profielen van Castricum blijkt, dat bij het begin van de vorst de temperatuur op 1 m omstreeks 4°C is. (zie b.v. fig. 8a). Nemen we aan dat de metingen van Harting ongeveer juist zijn dan ontstaat een profiel zoals in fig. 17. Dit profiel is ook in overeenstemming met de profielen die we in een artikel van Albrecht (16) vinden, gemeten onder geheel andere omstandigheden, namelijk te Ikengüng (Gobi), zie fig. 18.

Een beginvoorwaarde $T_2(x, 0) = T_b$ (constant) is dus stellig niet juist. Dat toch steeds deze beginvoorwaarde gebruikt wordt, heeft tot reden dat alleen dan een oplossing voor de differentiaal vergelijkingen te vinden is. Zelfs met de eenvoudige beginvoorwaarde: $T_2(x, 0) = P \cdot x$ is geen oplossing voor het probleem gevonden

Wel kunnen we heel eenvoudig vinden, waartoe het temperatuurprofiel asymptotisch zal naderen als we uitgaan van een beginvoorwaarde $T_2(x, 0) = P \cdot x$. Het proces zal tot een stationaire toestand naderen en de oplossing van de differentiaal vergelijkingen voor het stationaire geval (waarbij dus alle afgeleiden naar de tijd nul gesteld zijn) heeft tot resultaat (zie fig. 19):

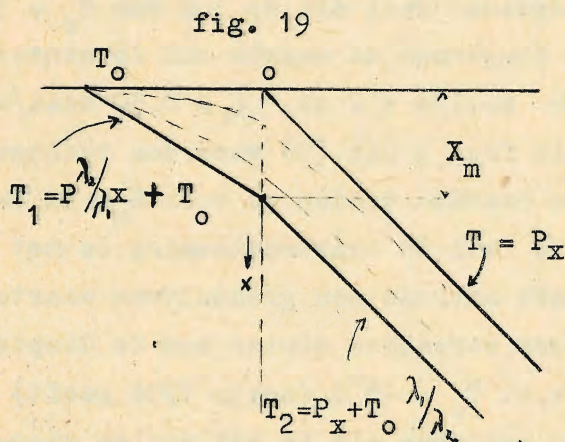


fig. 19

$$\begin{aligned} T_1 &= P \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x + T_0 \\ T_2 &= P x + T_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \\ \text{en} \\ x_m &= \frac{-T_0 \lambda_1}{P \lambda_2} \end{aligned} \quad (4)$$

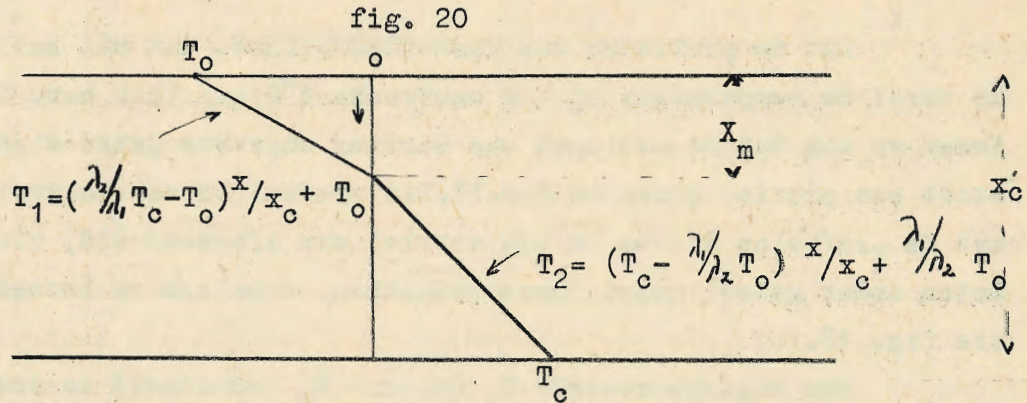
Daarbij is

λ_1 = de warmtegeleidingscoëfficiënt in de bevroren laag

λ_2 = de warmtegeleidingscoëfficiënt in de niet bevroren laag.

Een andere mogelijkheid is dat we veronderstellen, dat op zekere diepte x_c de temperatuur een constante waarde T_c bezit en blijft houden hoe lang de vorstperiode ook duurt. In dit geval nadert het proces tot een stationaire toestand met als oplossing (zie fig. 20):

$$\begin{aligned} T_1 &= \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} T_c - T_0 \right) \frac{x}{x_c} + T_0 \\ T_2 &= \left(T_c - \frac{\lambda_2}{\lambda_2} T_0 \right) \frac{x}{x_c} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2} T_c \\ x_m &= \frac{-T_0 x_c}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} T_c - T_0} \end{aligned} \quad (5)$$



Opm.: Formule (5) gaat in (4) over als we $x \rightarrow \infty$ laten gaan en tegelijkertijd T_c/x_c constant houden en gelijk P stellen.

Wij zijn van mening dat beide mogelijkheden een betere benadering geven dan het model waarbij als beginvoorwaarde $T(x,0)$ constant wordt ondersteld. Misschien is de tweede onderstelling nog de beste; althans uit de profielen zoals we die in fig. 18 zien zou men kunnen afleiden dat dit de meest plausibele onderstelling is.

Helaas beschikken we op het ogenblik niet over voldoende gegevens van de bodemtemperaturen op grotere diepten. Laten we echter eens een schatting maken voor Castricum. Stel dat op 3 m een $T_c = 7^\circ\text{C}$ heerst en nemen we voor $T_0 = -4^\circ\text{C}$ (ongeveer de waarde uit de winter 1947). Stellen we verder $\lambda_1 = 0.40$ kcal/m h $^\circ\text{C}$ en $\lambda_2 = 0.50$ kcal/mh $^\circ\text{C}$ (deze getallen zijn overgenomen uit fig. 3 uit (9) voor een vochtgehalte van ongeveer 8 vol %). Met deze waarden vinden we voor $X_m \approx 94$ cm. Een heel plausibele waarde dus, die wel in overeenstemming is met de suggestie die fig. 9 of 10 ons geeft omtrent een grensniveau waartoe de indringingsdiepte nadert. Bij een strengere winter zou de diepte natuurlijk groter zijn. Nemen we b.v. $T_0 = -8^\circ\text{C}$ (zoals 1954 geeft) dan zouden we, met verder dezelfde gegevens als in het vorige voorbeeld, vinden $X_m \approx 143$ cm.

Dat ook 1954 slechts tot ongeveer 80 cm kwam is dus stellig alleen te danken aan de korte duur van de vorstdiepte.

Bovenstaande cijfers zijn vanzelfsprekend slechts als voorbeeld bedoeld en hebben nog geen waarde voor het gebruik in de praktijk. Ze geven ons echter wel een aanwijzing, dat het niet uitgesloten is, dat we op deze manier tot gegevens kunnen komen die voor de praktijk bruikbaar zijn

Wat we daarvoor dus verder nodig hebben is:

1. Nauwkeuriger gegevens over het temperatuurprofiel in de bodem tot op grotere diepten
2. Nauwkeuriger kennis van de verhouding van de warmtegeleidingscoëfficiënten in bevroren (λ_1) en onbevroren grond (λ_2).

Indien dus blijkt dat

1. op zekere diepte x_c een constante temperatuur T_c heerst
2. de verhouding λ_1/λ_2 vrijwel constant is, dan is het mogelijk om via een statistiek van de gemiddelde oppervlaktetemperaturen tijdens vorstperioden een schatting te maken van maximale vorstdiepten.

Er is nog een derde eis n.l.:

Nauwkeuriger kennis van de oppervlaktetemperatuur of van het verband tussen oppervlaktetemperatuur en luchttemperatuur. Dit laatste is in verband met de onzekerheden van sneeuwdekgegevens nog een moeilijk punt.

6 Conclusies

Dit rapport beoogt slechts de mogelijkheden te onderzoeken om tot de bepaling van de meest gunstige diepte voor het leggen van waterleidingbuizen te komen. Het geeft dus nog niet de oplossing van het probleem, maar slechts de stand van het onderzoek op het ogenblik.

We vonden:

1. In wezen is het probleem een economisch decisieprobleem, waarvoor in principe wel een oplossing te geven is, maar dat praktisch in die vorm wel onoplosbaar zal zijn, in het bijzonder wegens gebrek aan kennis van de economische factoren.
2. De nauwkeurigheid waarmee, volgens statistische methoden, een schatting van de eens in de N jaar te verwachten vorstindringingsdiepten, gegeven kan worden, is slechts gering, vooral doordat de waarnemingen een te kleine tijdreeks omvatten.
3. Het vaak gebruikte lineaire verband tussen vorstdiepte en de wortel uit de z.g. temperatuurindex geldt slechts in zeer beperkte mate. Bij vorstperioden van enigszins langere duur gaat het niet meer op.

4. Een onderzoek naar de temperatuurprofielen tot op grotere diepten (zo mogelijk tot 5 à 10 m) kan de mogelijkheid bieden dat, in verband met een constante temperatuur op zekere diepte, een zekere limietwaarde voor de vorstdiepte gevonden wordt die mogelijk praktische betekenis heeft.

Dit laatste punt moet dan samengaan met nader onderzoek naar de waarde van de verhouding van de warmtegeleidingscoëfficiënten in bevroren en onbevroren grond en naar het verband tussen aardoppervlakte- en luchttemperatuur.

Literatuur:

- (1) A.Benard en E.C.Bos-Levenbach: Het uitzetten van waarnemingen op waarschijnlijkheidspapier. Statistica (Neerlandica) 1953, 163 - 173.
- (2) Dr.C.Leveret...-(nog te publiceren)
- (3) Highway Research Board. Special report Nr.1: Frost Action in roads and airfields. A review of the Literature by A.W.Johnson. Washington 1952.
- (4) Highway Research Board. Special report Nr.2: Frost Action in Soils. A symposium. Washington 1952.
- (5) H.A.Lauwerier: Mathematische Problemen uit de warmtegeleidingstheorie. Mathem. Centrum. 1954 - 1955.
- (6) J.Stefan: Über einige Probleme der theorie der Wärmeleitung. Sitz. ber. der Kaiserl.Akad.der Wiss.Wien 1890: Band XCVIII. IIa, 473.
- (7) W.P.Berggren: Prediction of temperature-distribution in frozen soils. Trans.Am.Geoph.Un. 1943 Pt 3, 71 - 77.
- (8) H.S.Carslaw and J.O.Jaeger: Conduction of heat in solids: Oxford 1950.
- (9) J.Hardebol: Berekening van de indringingsdiepte van vorst in een natte bodem: Rapport Warmtestichting t.b.v. K.I.W.A. 1954.
- (10) I.Kolodner: Free boundary problem for the heat equation with applications to problems of change of phase. Comm. of pure and appl. Mathematics. 1956. IX - 1.
- (11) W.L.Shannon: Prediction of frost penetration. Civil Engineering 1946. Nr. 480, 228 - 233.
- (12) R.F.Legget and C.B.Crawford: Soil temperature in Water Works Practice. Journ.Am.Waterworks Ass.1952, 923 - 939.
- (13) A.E.Benfield: Terrestrial heat flow in Great Britain. Proc. of the Royal Soc. of London. 173(A) 1939. 428 - 450.
- (14) P.Harting: Temperatuebepalingen in een put van 369 meters diepte te Utrecht. Versl. en Meded. Kon.Ak. v. Wet. Afd. Natuurkunde 2e reeks 14 1879, 394 - 409.

- (15) W. de Braaf en W. Maas: Temperature gradient in the South Limburg coal field. Geol. en Mijnbouw. 14. 1952, 54 - 57.
- (16) T. Albrecht: Untersuchungen über den Wärmehaushalt der Erdoberfläche in verschiedenen Klimagebieten. Wiss. Abb. Reichsanstalt für Wetterd. VIII - 2. 1940.

Fig. 1 Maximale indringingsdiepte van de vorst in de bodem (X_m) te De Bilt.

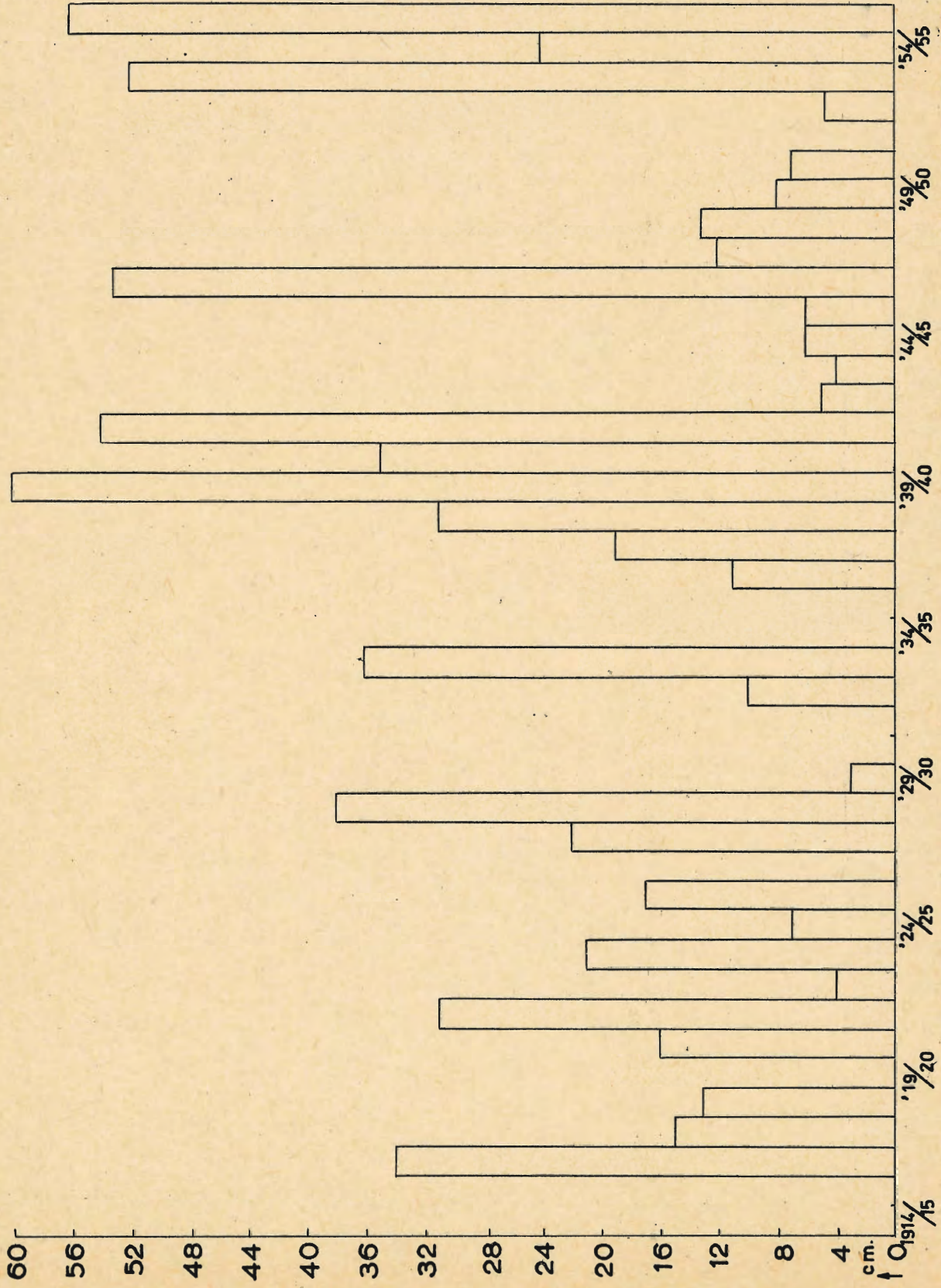


Fig. 2 Maximale vorstindringingsdiepte(X_m) Periode 1914 - 1949 De Bilt.

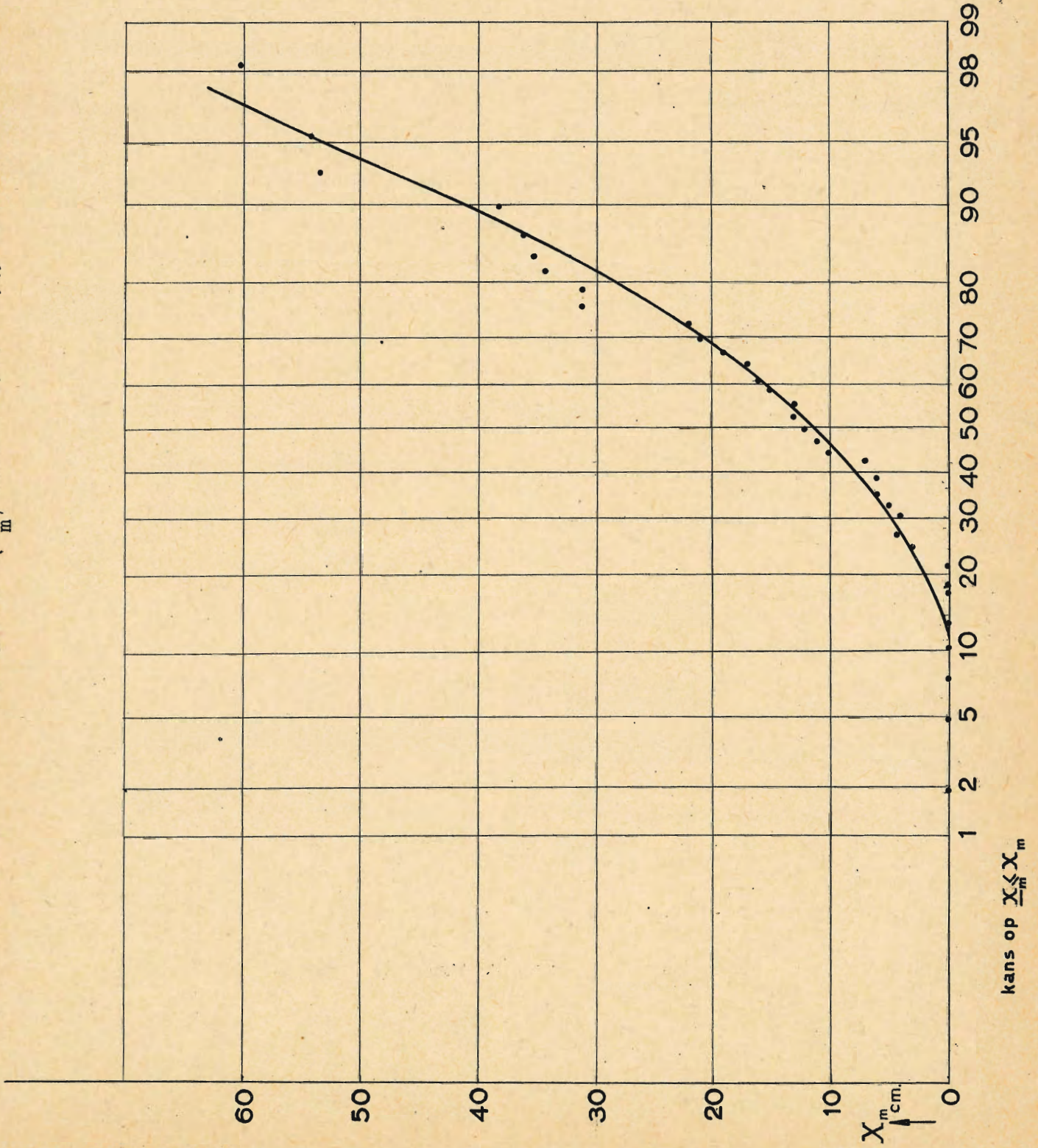


Fig. 3 Maximale vorstindringingsdiepte (X_m) Periode 1914 - 1949 De Bilt.

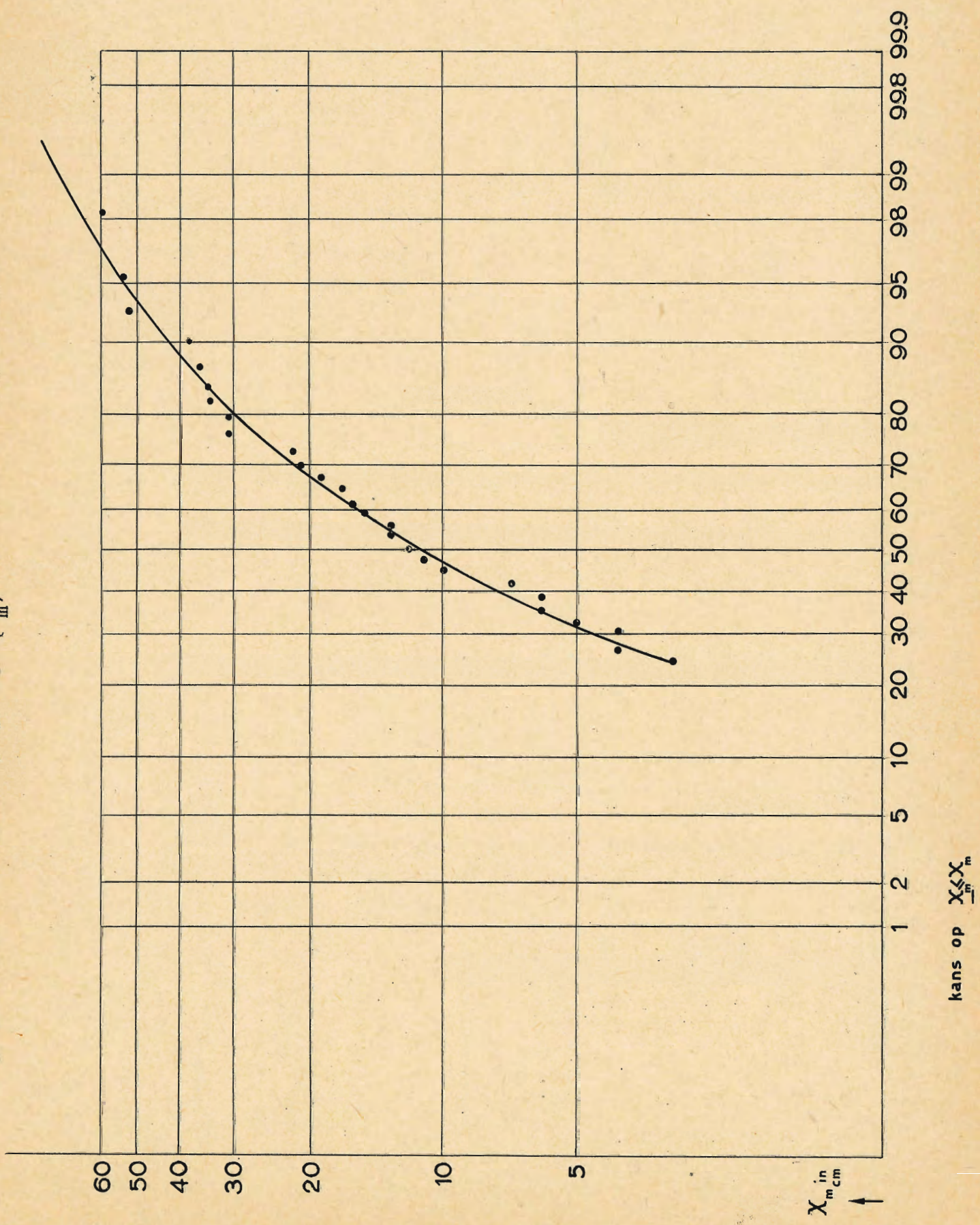


Fig. 4 Maximale vorstindringingsdiepte (X_m) Periode 1914 - 1949 De Bilt.

----- 90% betrouwbaarheidsband

($X_m + 10$ op log schaal)

- · - · - 90% betrouwbaarheidsband indien $N = 100$.

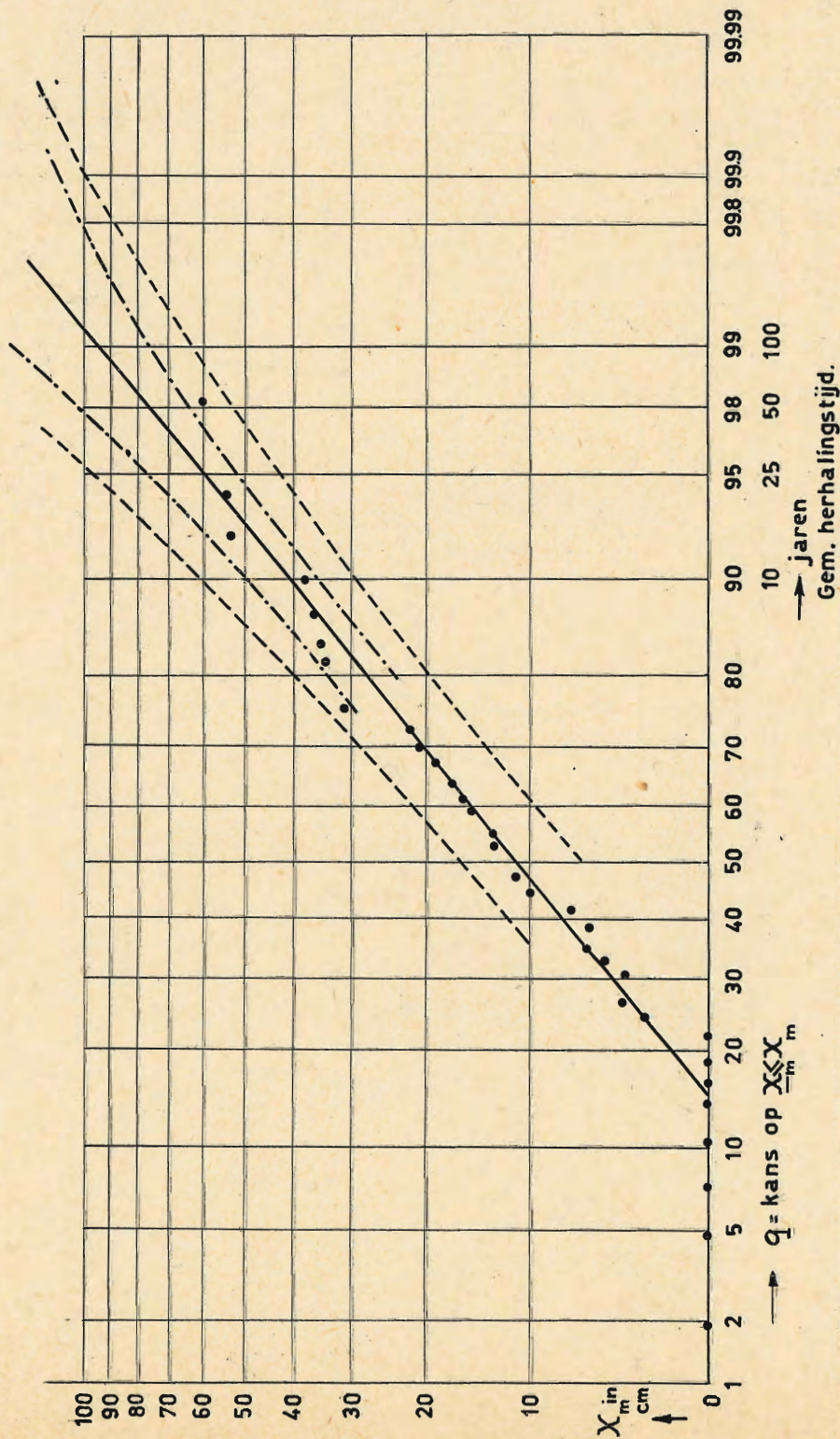


Fig. 5 Maximale indringingsdiepte (X_m) Periode 1914 - 1949 De Bilt.

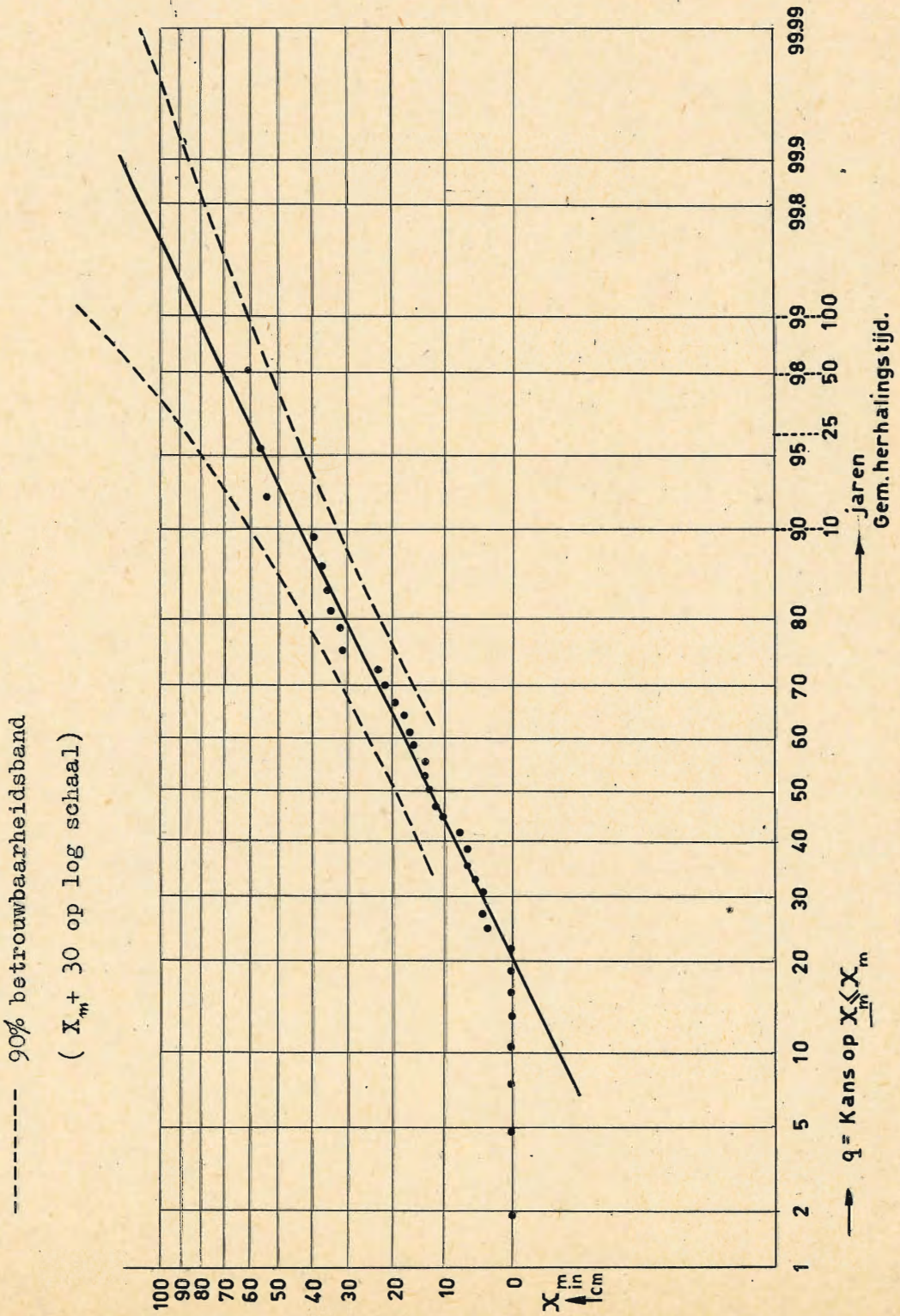


Fig. 6 Maximale vorstindringingsdiepte (X_m) Periode 1914 - 1956 De Bilt.

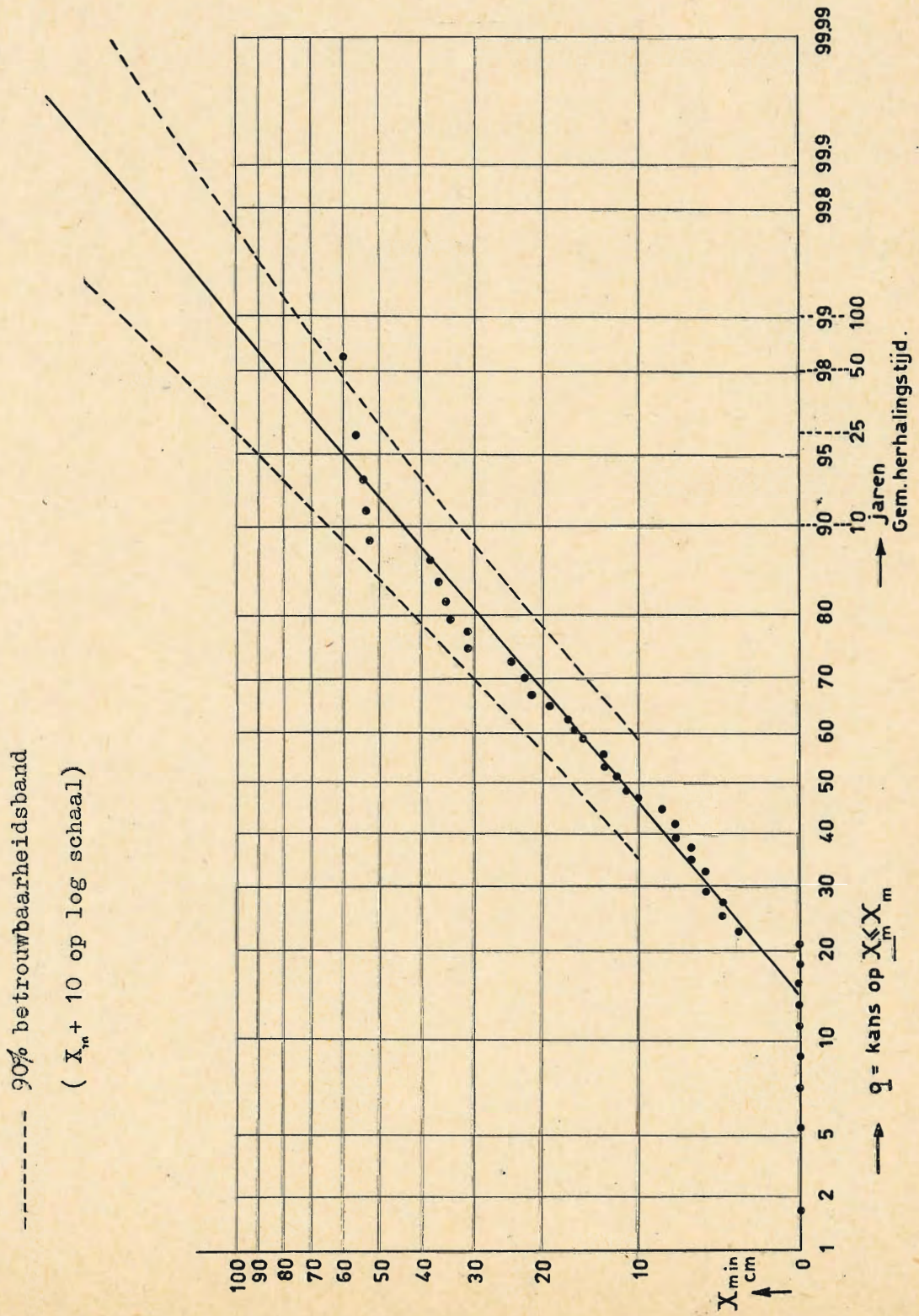
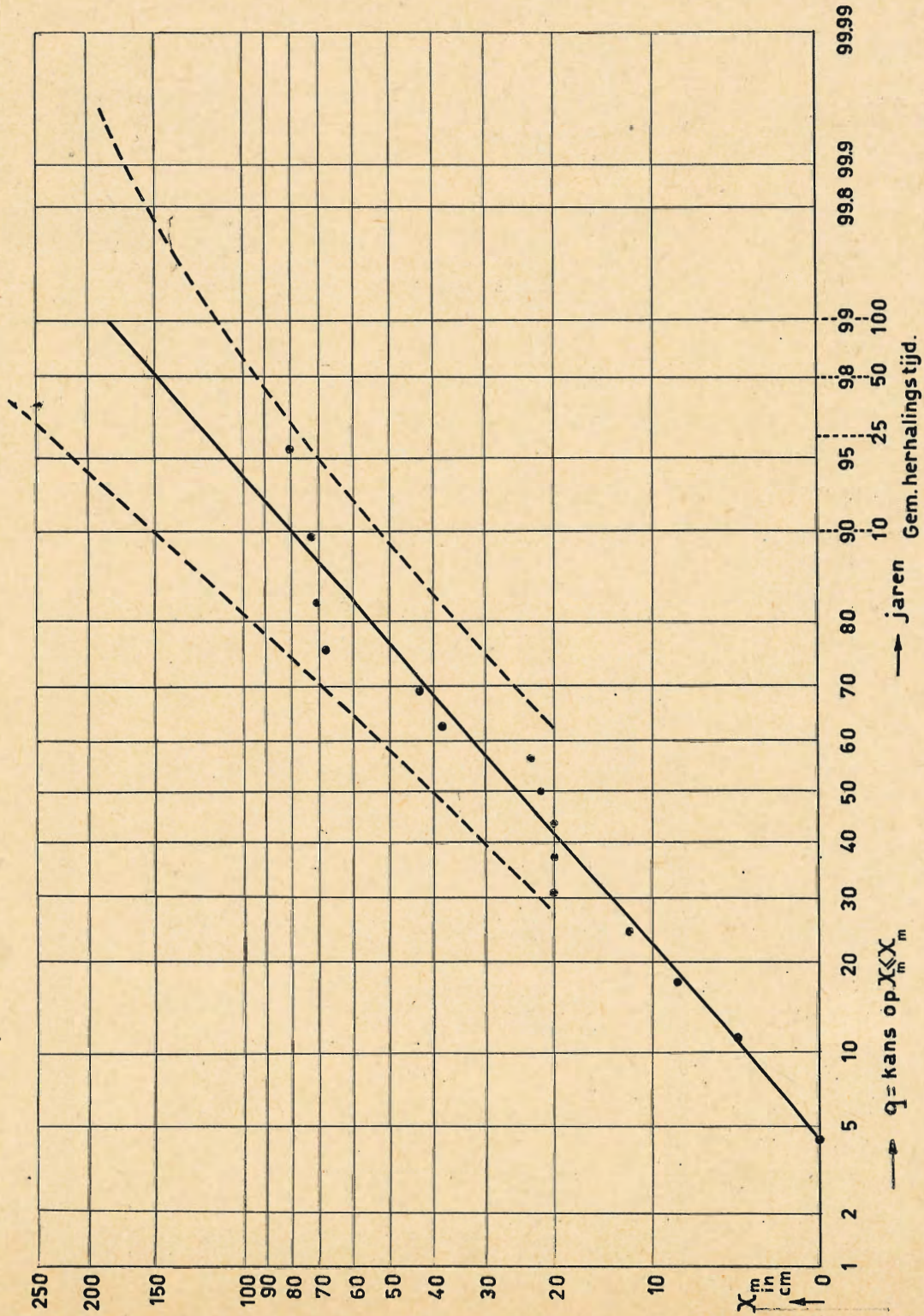
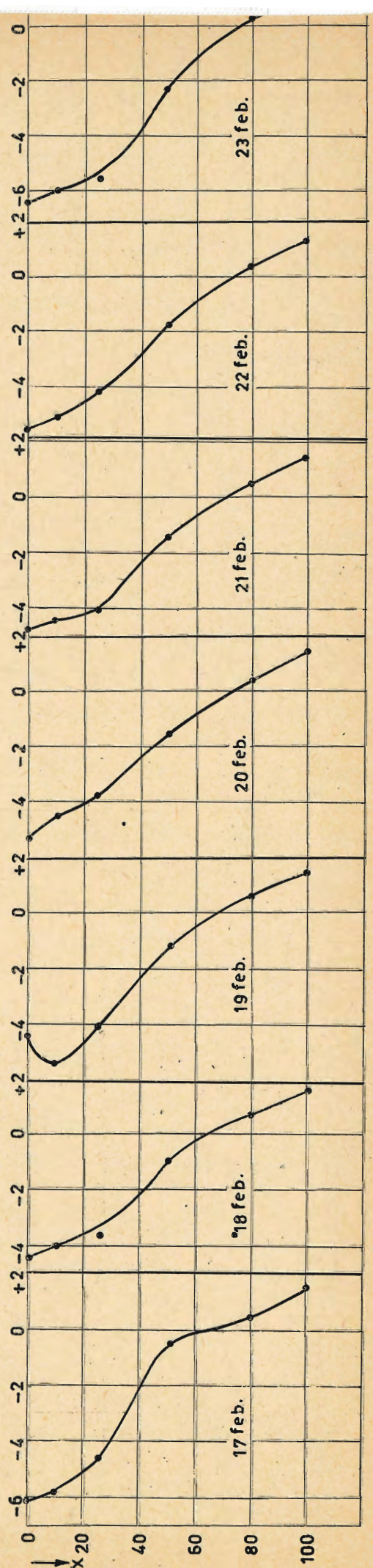
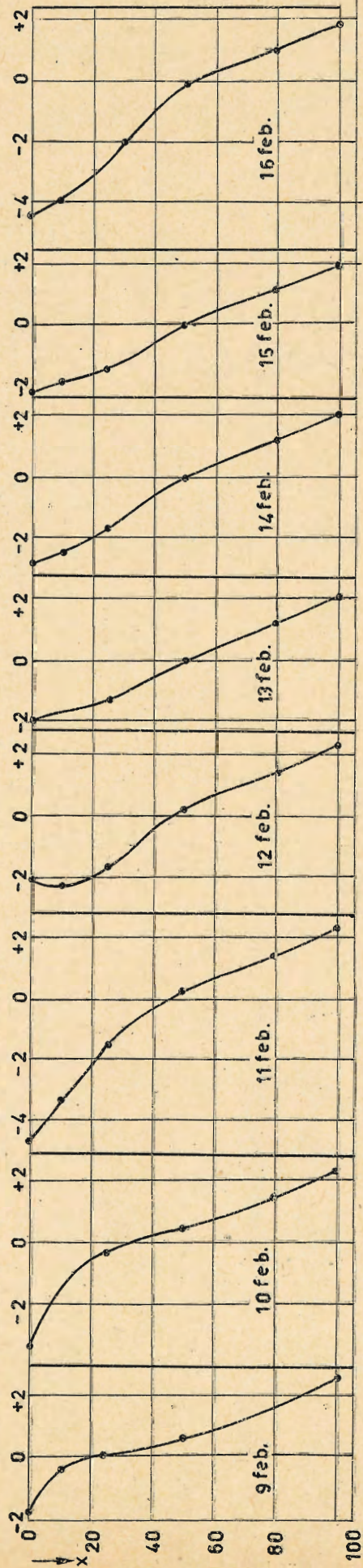
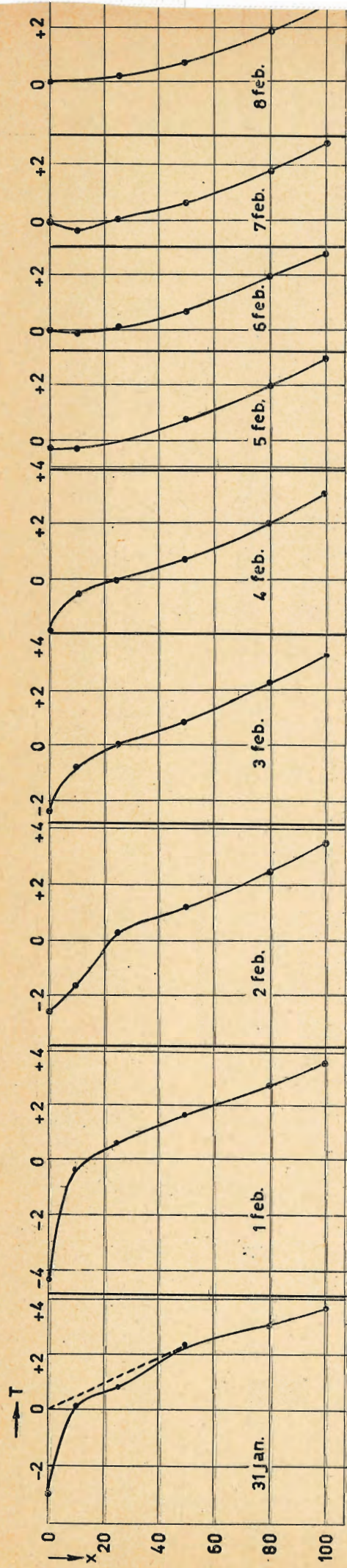


Fig.7 Maximale vorstindringingsdiepte(X_m)periode 1941 - 1956 Castricum nabij lysimeter II.

($X_m + 10$ op log schaal)





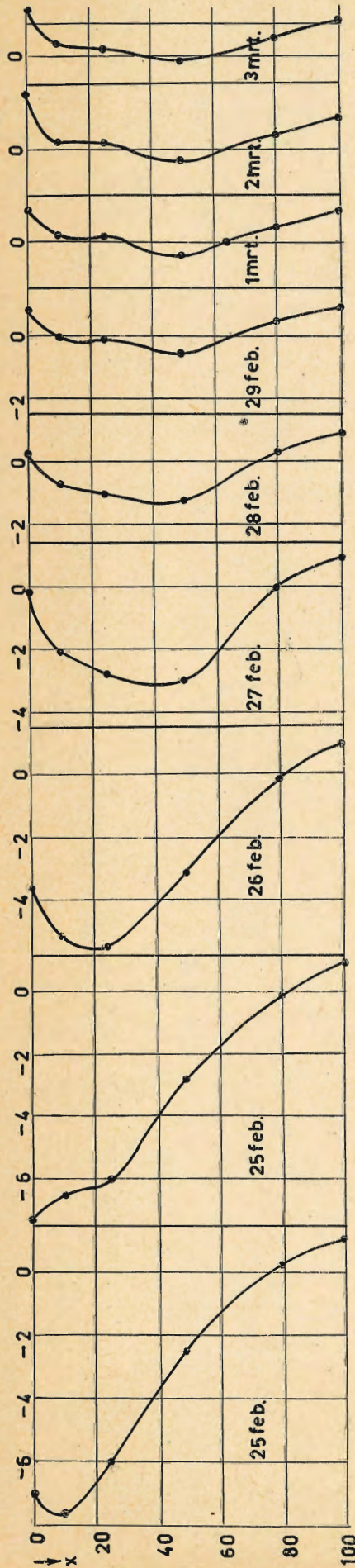


Fig. 8b Isolethenfiguur winter 1956 te Castricum nabij lysimeter II.

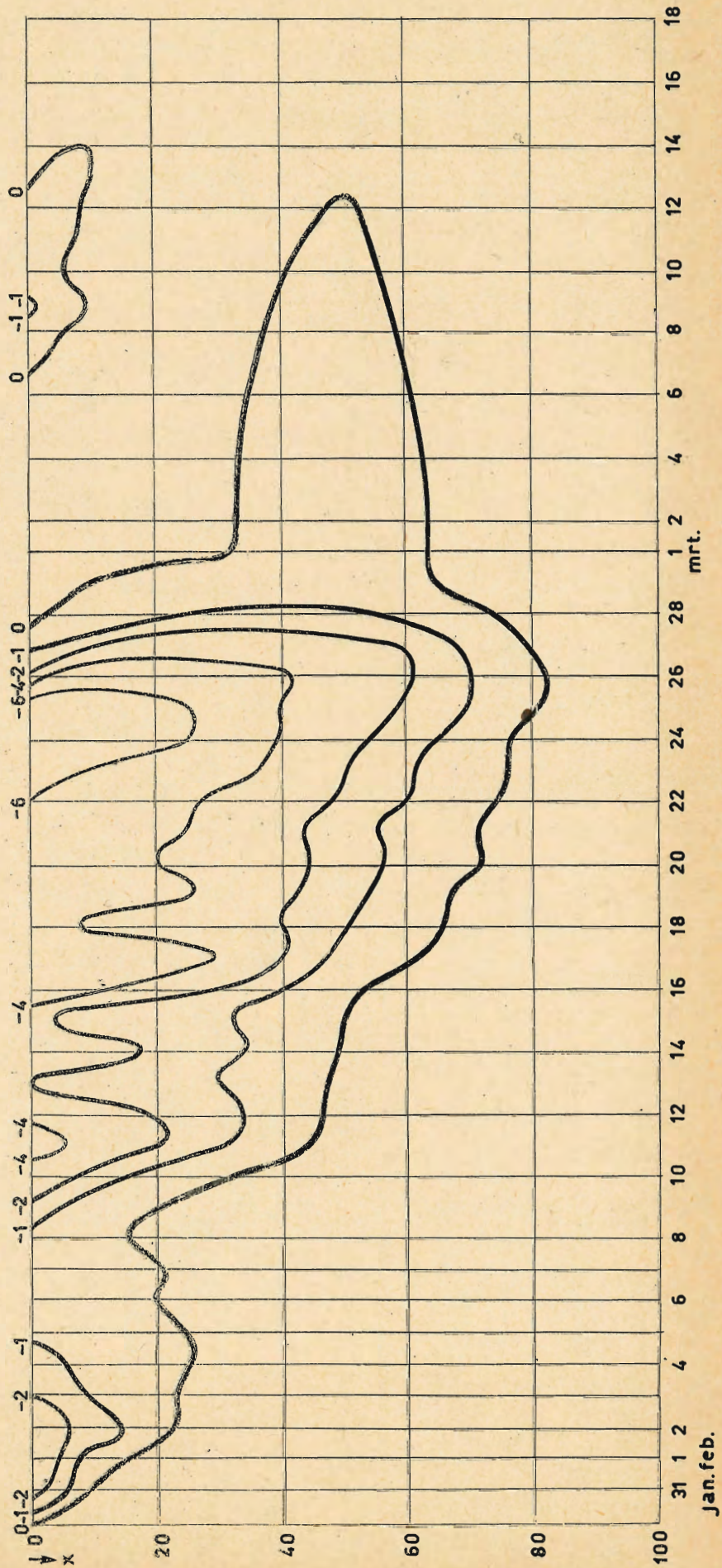


Fig.9 Verband tussen vorstdiepte en luchttemperatuur index te Castricum.

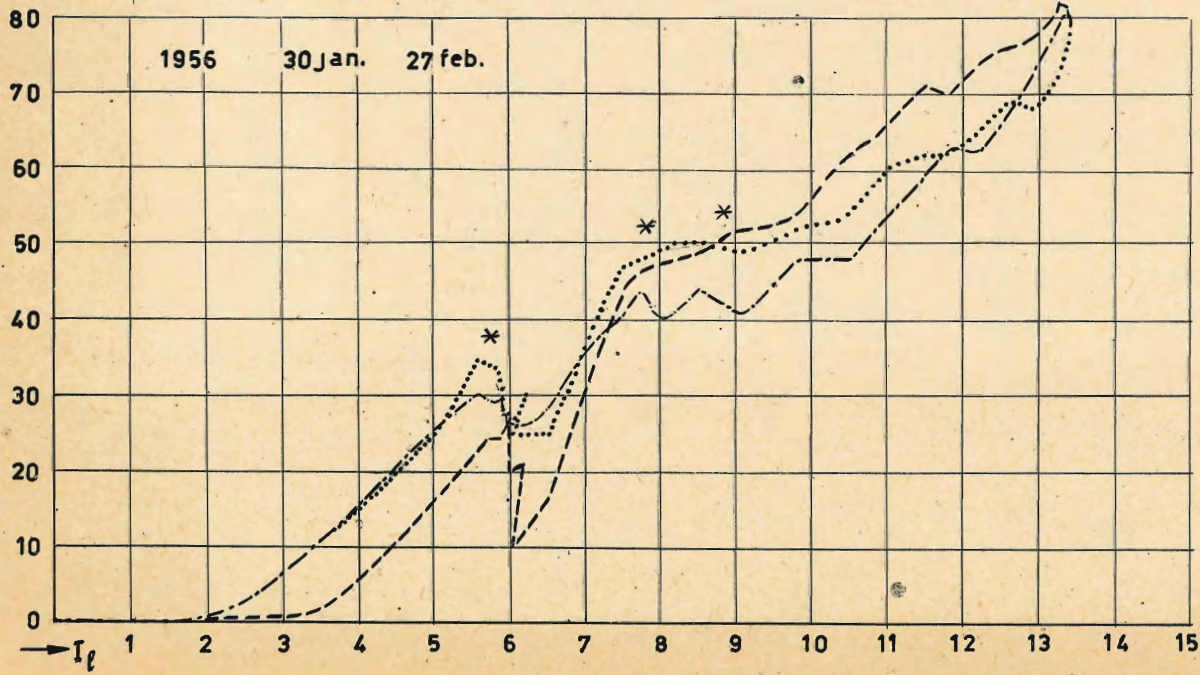
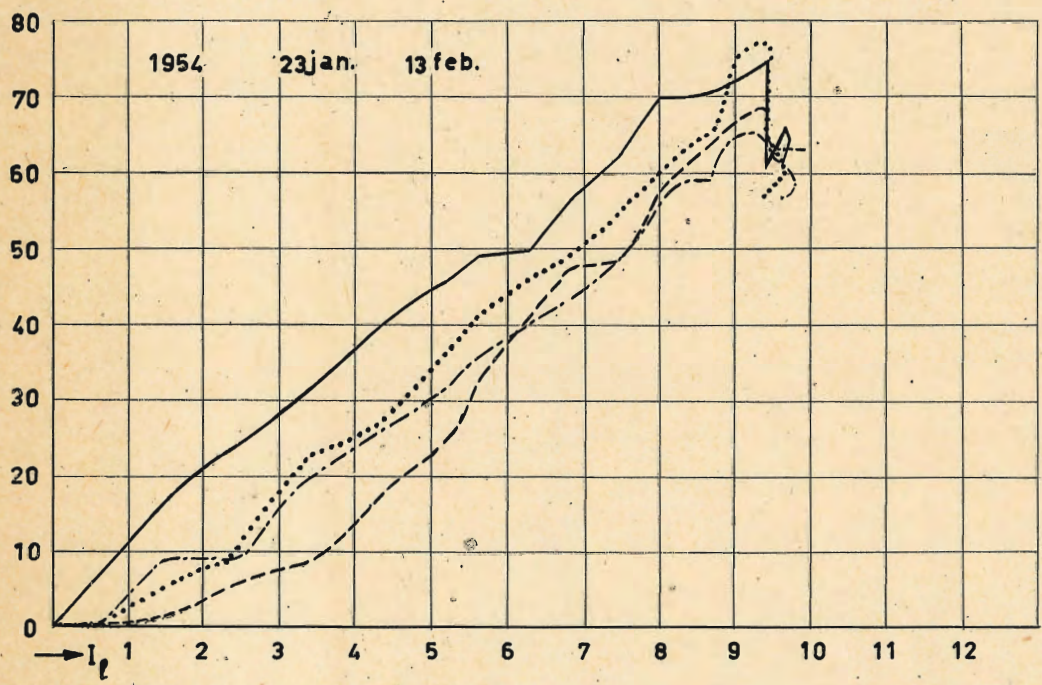
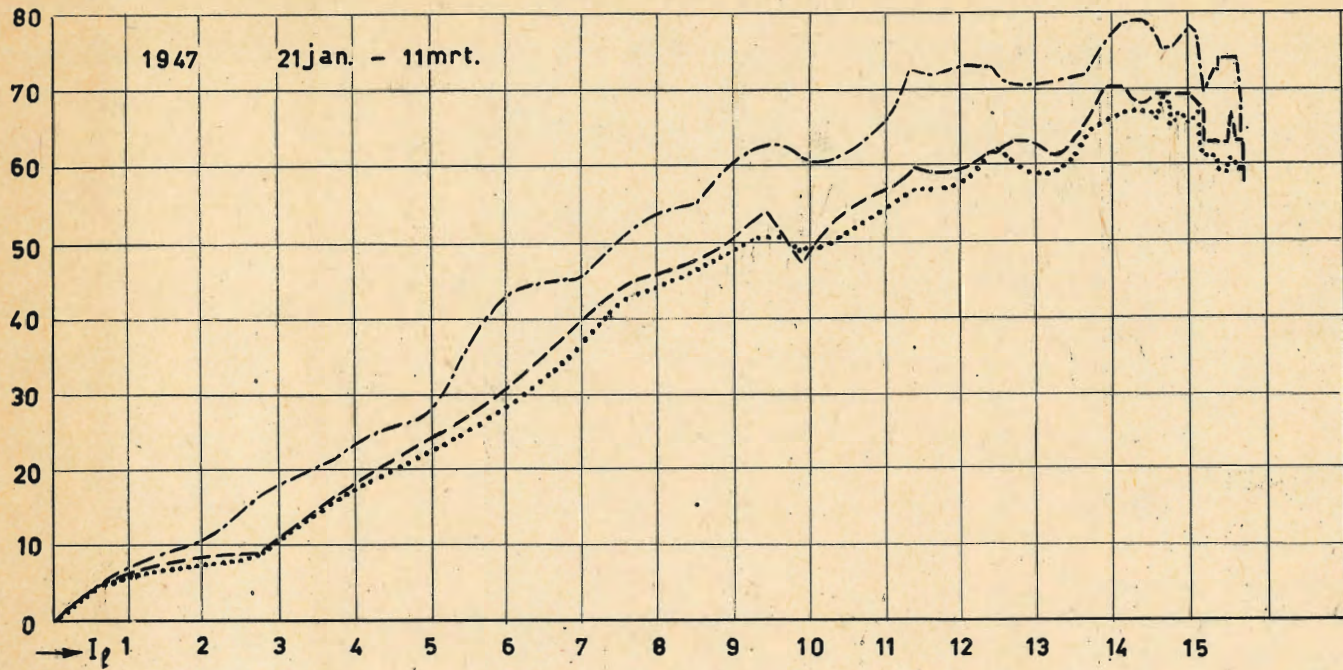
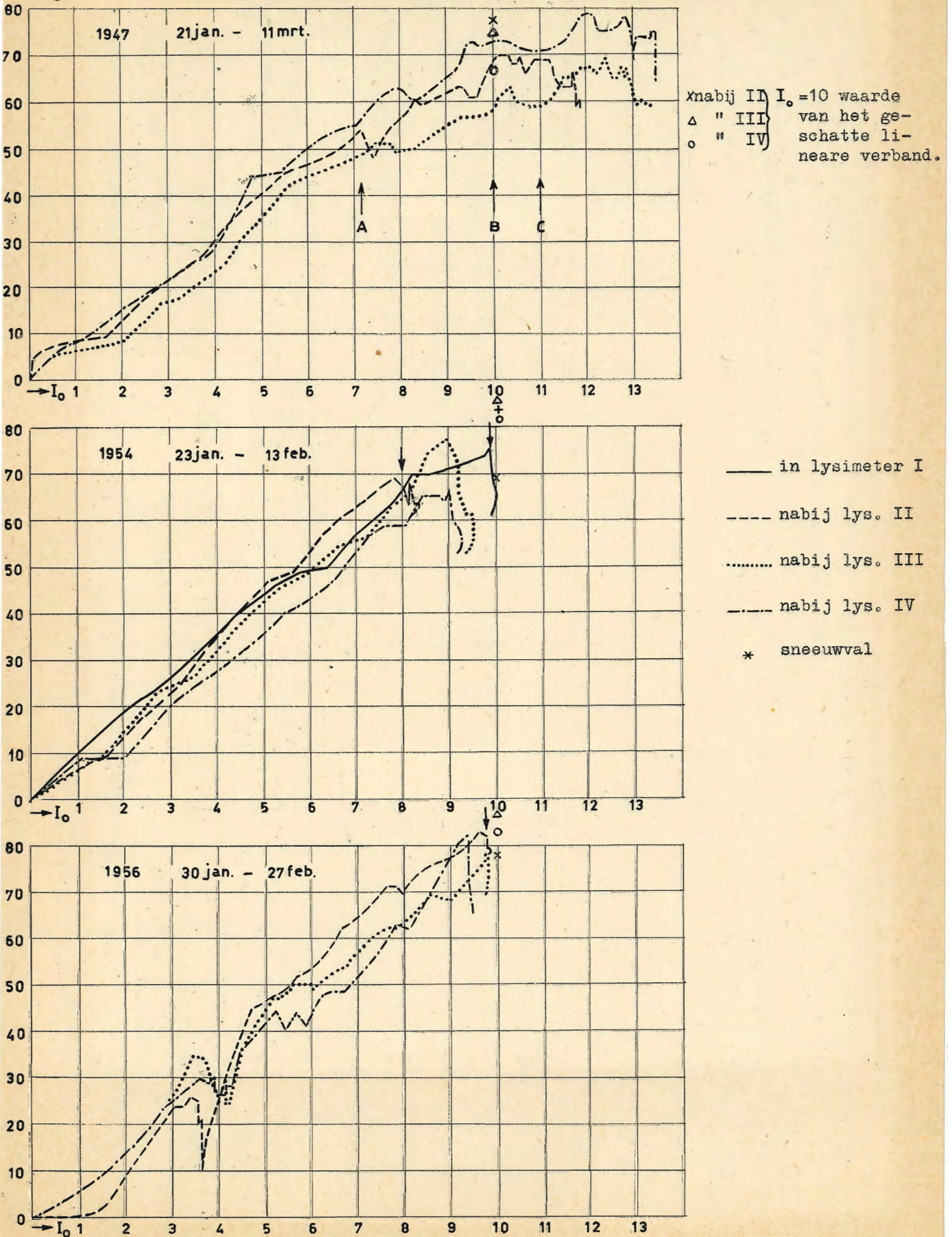


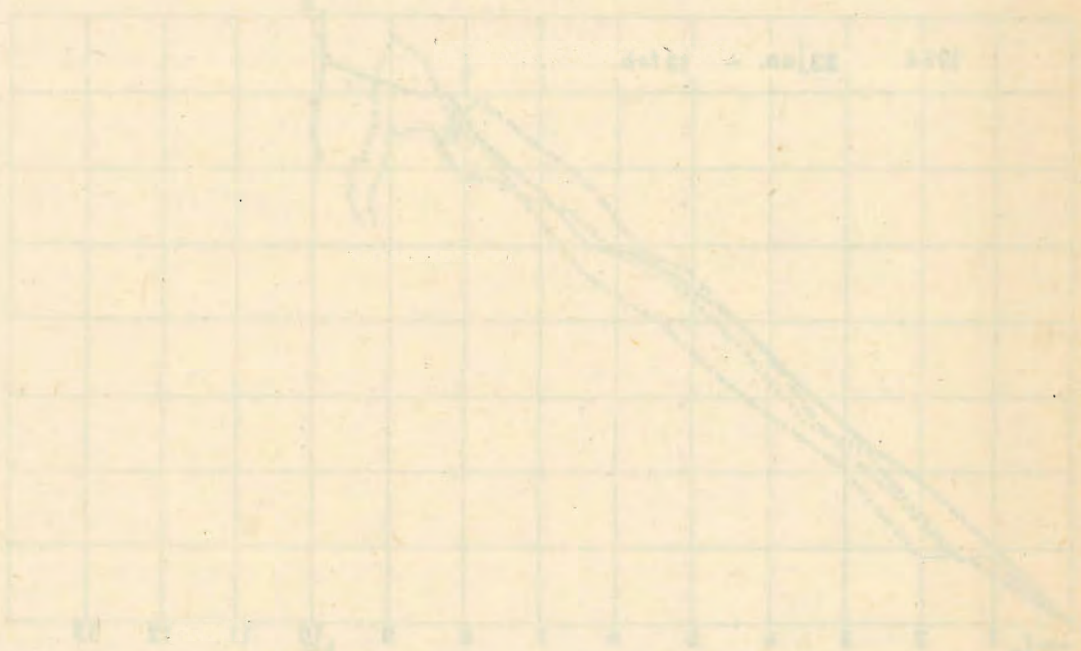
Fig.10 Verband tussen vorstdiepte en oppervlakte temperatuur index te Castricum.



1911
1912
1913
1914
1915



1912
1913
1914
1915



1913

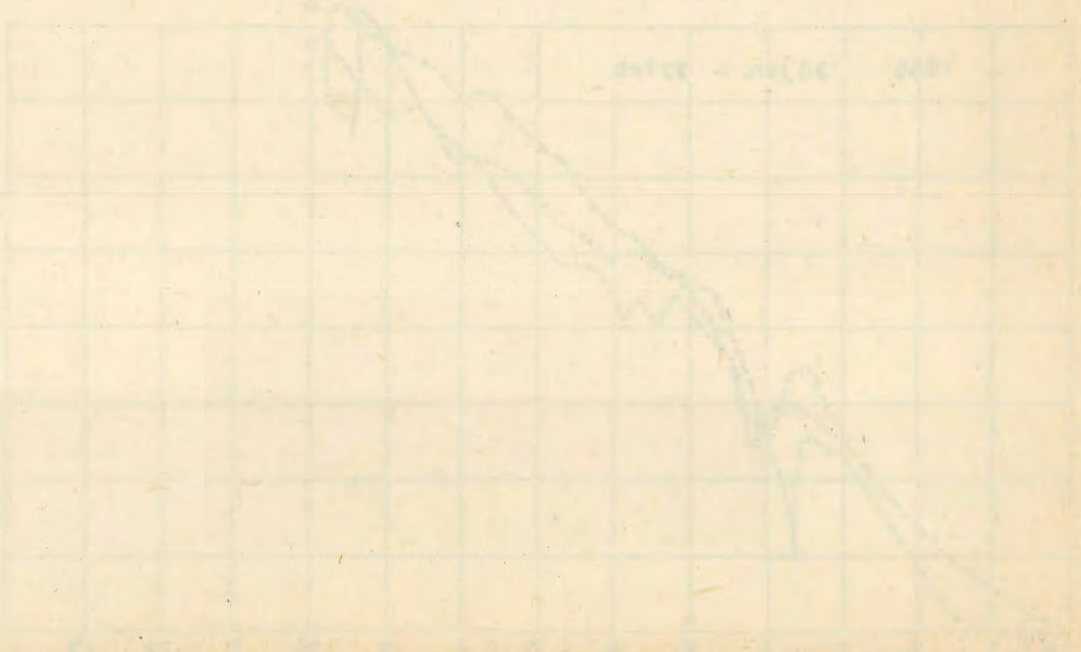


Fig11 Verloop van lucht—bodtemperatuur, vorstdiepte en sneeuwhoogte tijdens de winter van 1947 te Castricum nabij lysimeter II

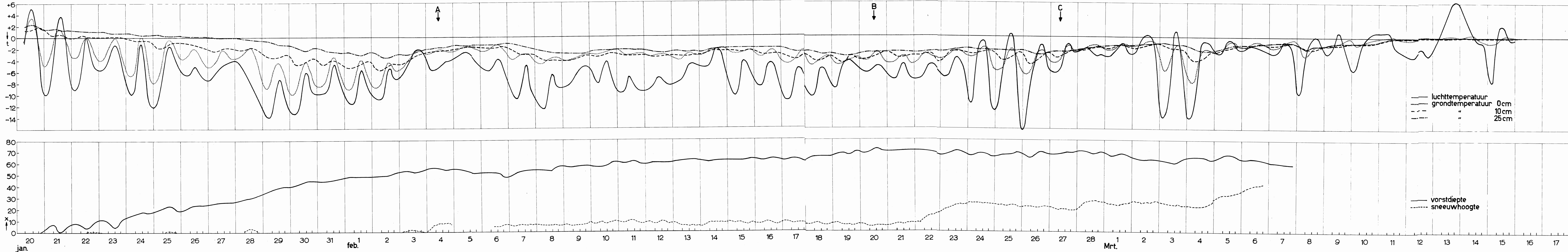


fig.12^a Verloop lucht-en grondtemperatuur en vorstdiepte in en nabij lysimeter I te Castricum 1954

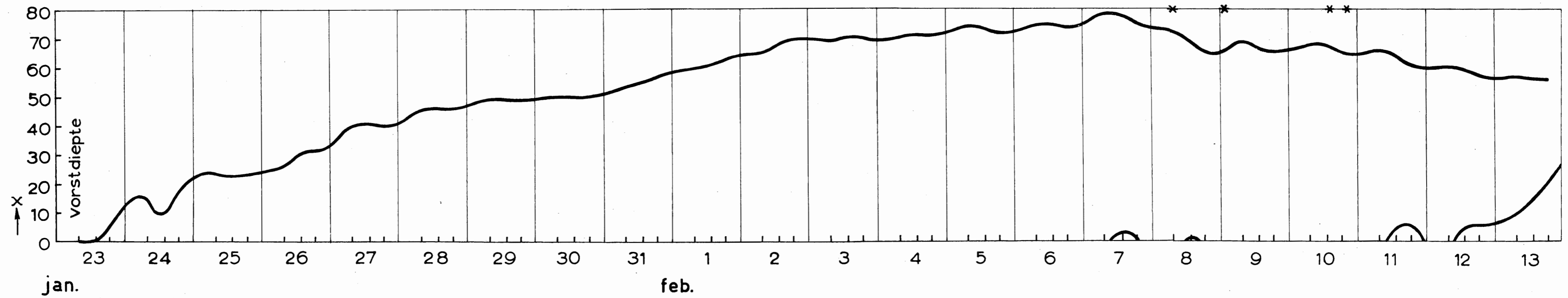
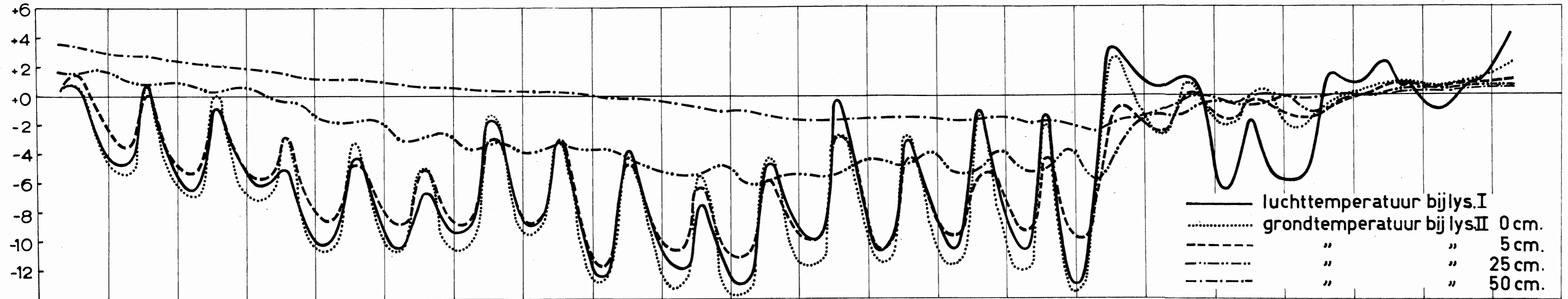


fig.12^b Verloop lucht en grondtemperatuur en vorstdiepte nabij lysimeter II te Castricum 1954

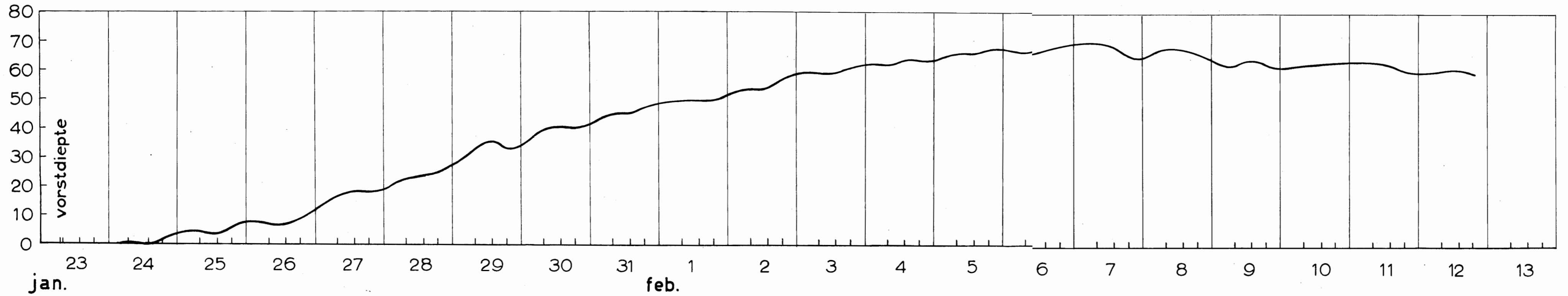
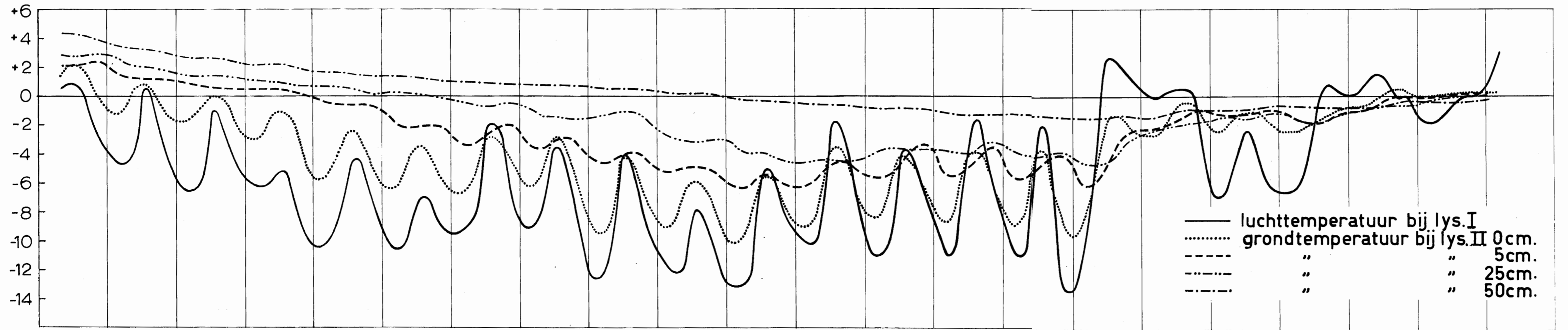


fig.13 Verloop lucht en grondtemperatuur vorstdiepte en sneeuwhoogte nabij lysimeter II te Castricum 1956

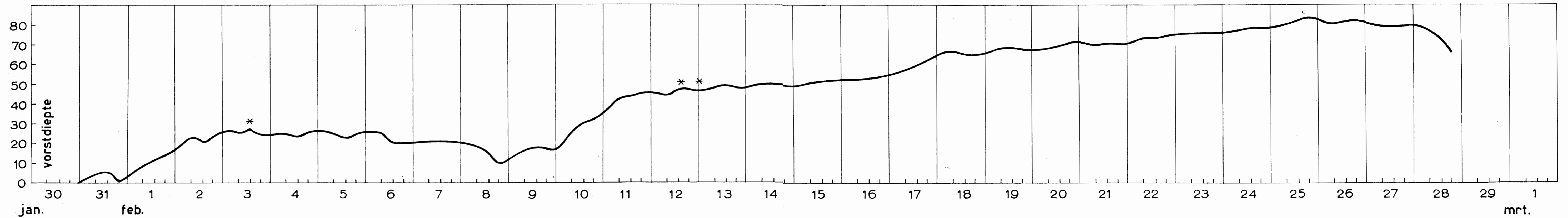
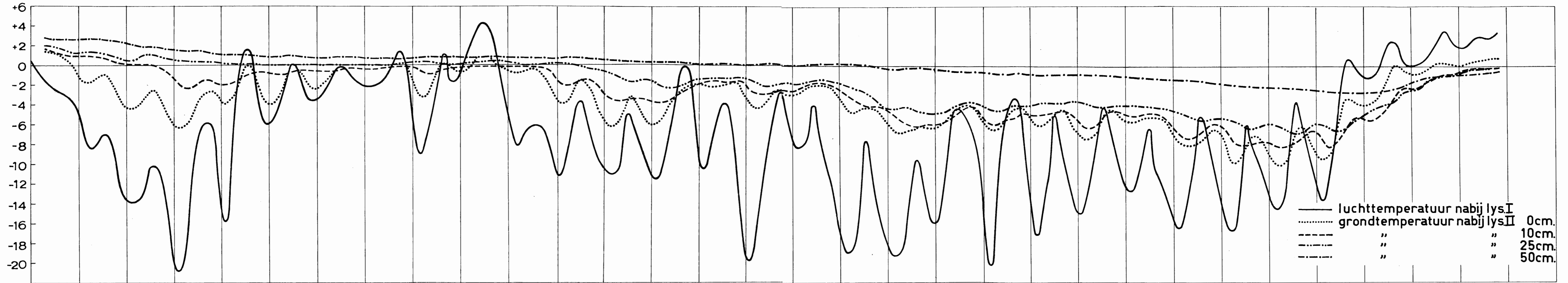


Fig. 14

Verband tussen vorstdiepte en luchttemp. index De Bilt.

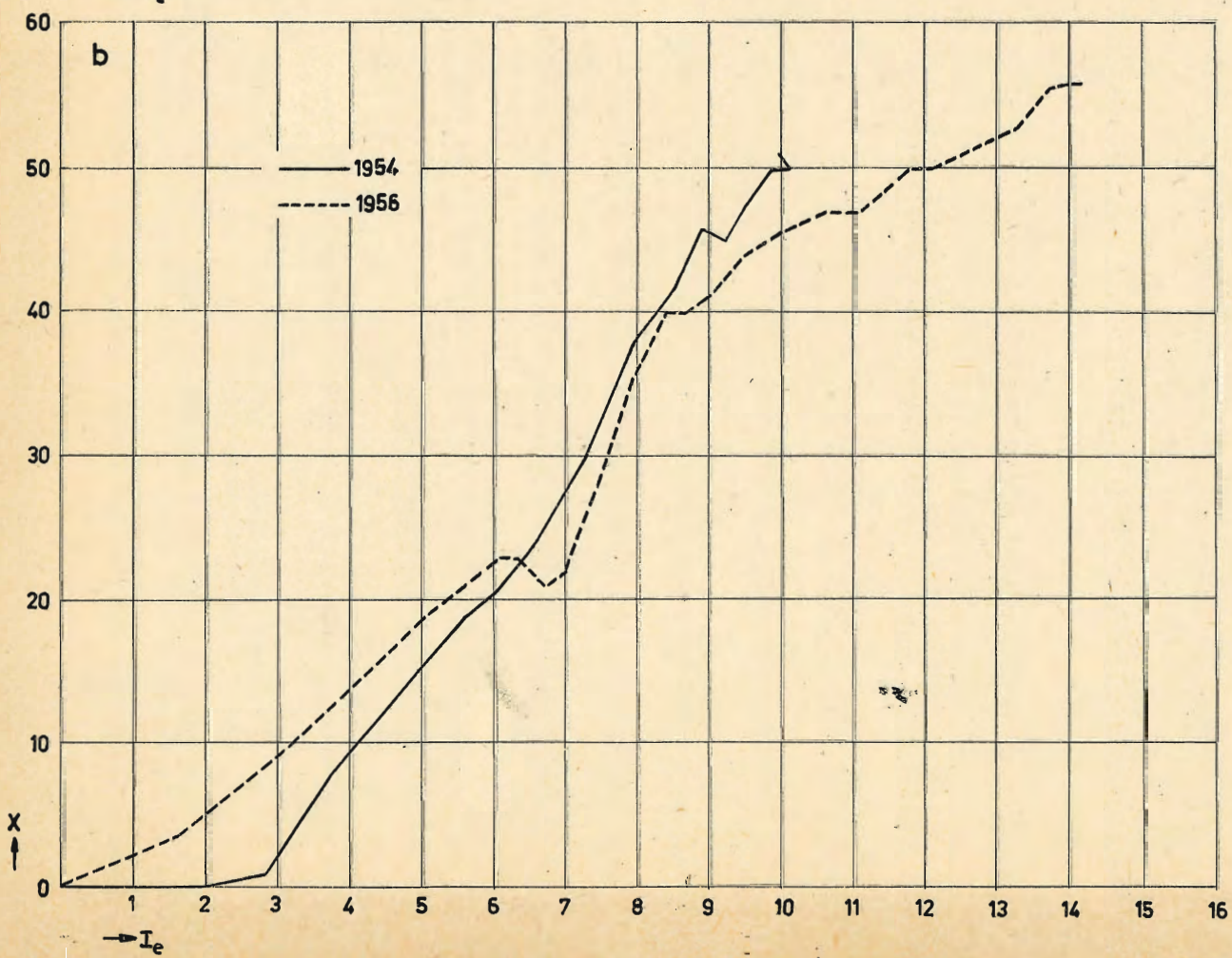
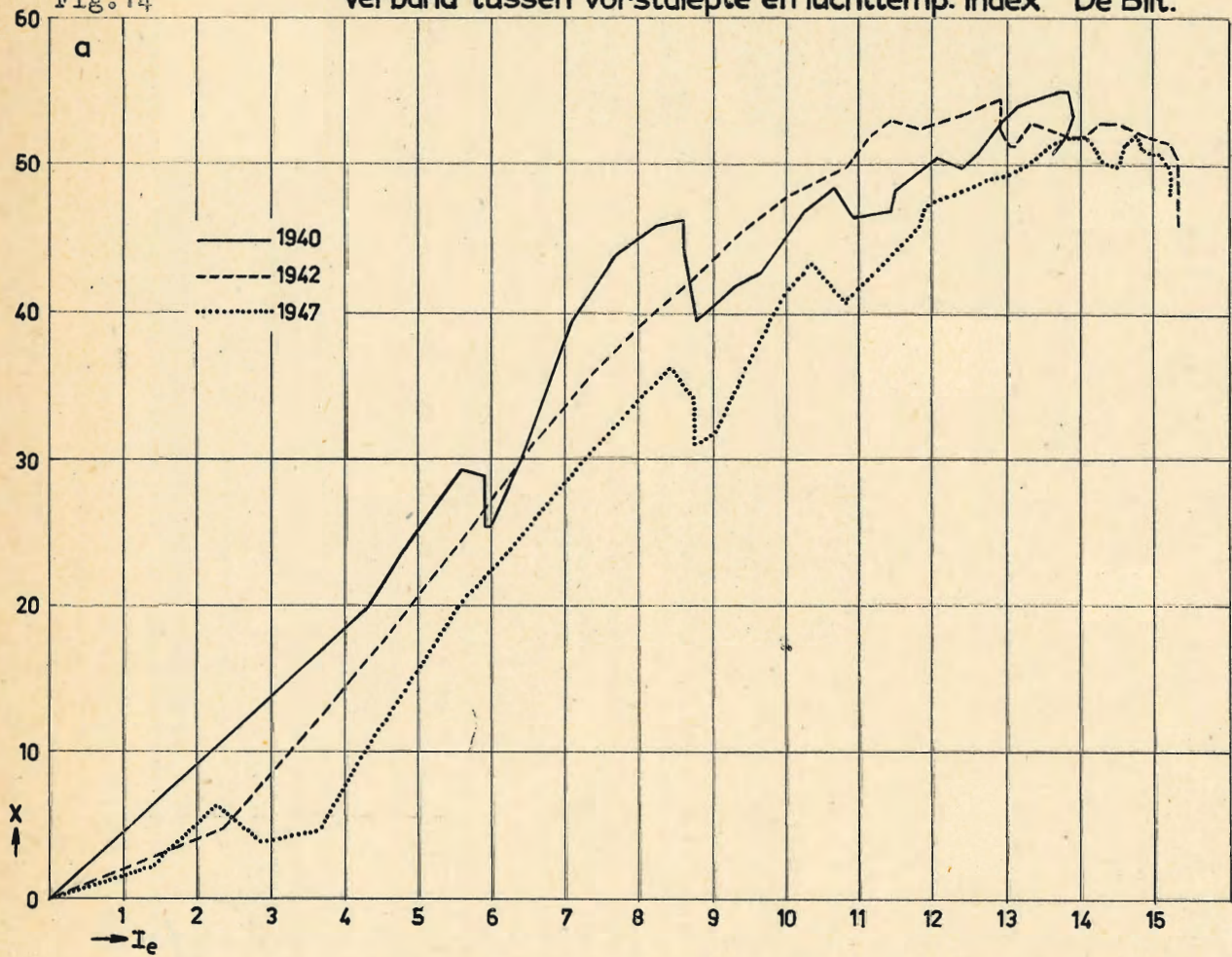


Fig. 15 Verband tussen vorstdiepte en 3 cm temp. index De Bilt.

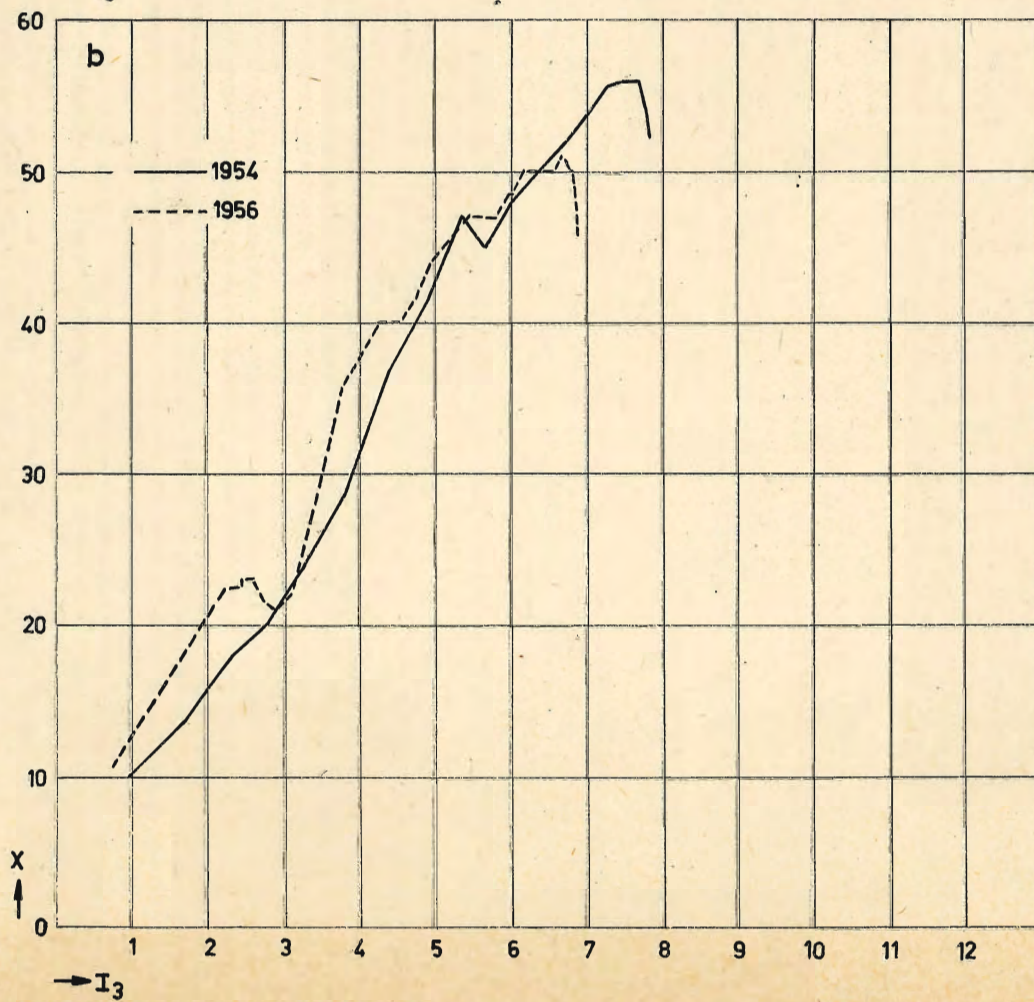
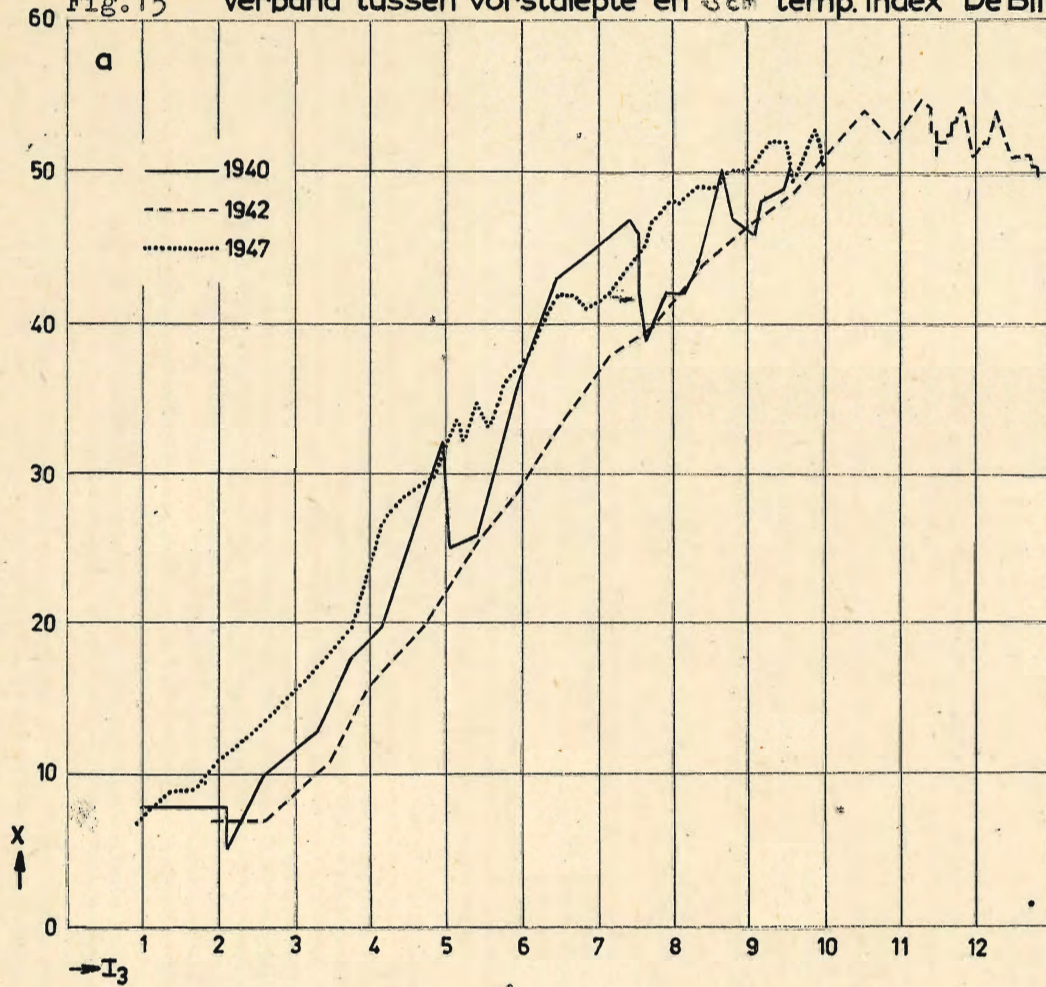


Fig.16 Sneeuwdektemperaturen in de winter 1956

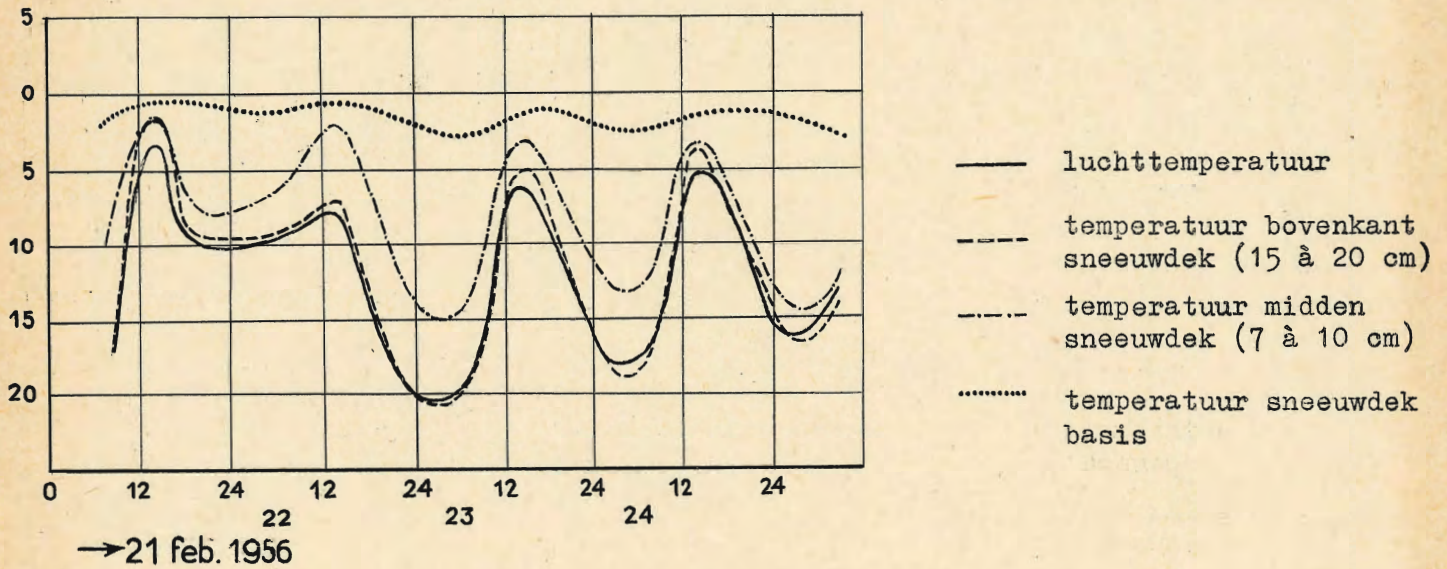


Fig.17 temperatuurprofiel in de bodem

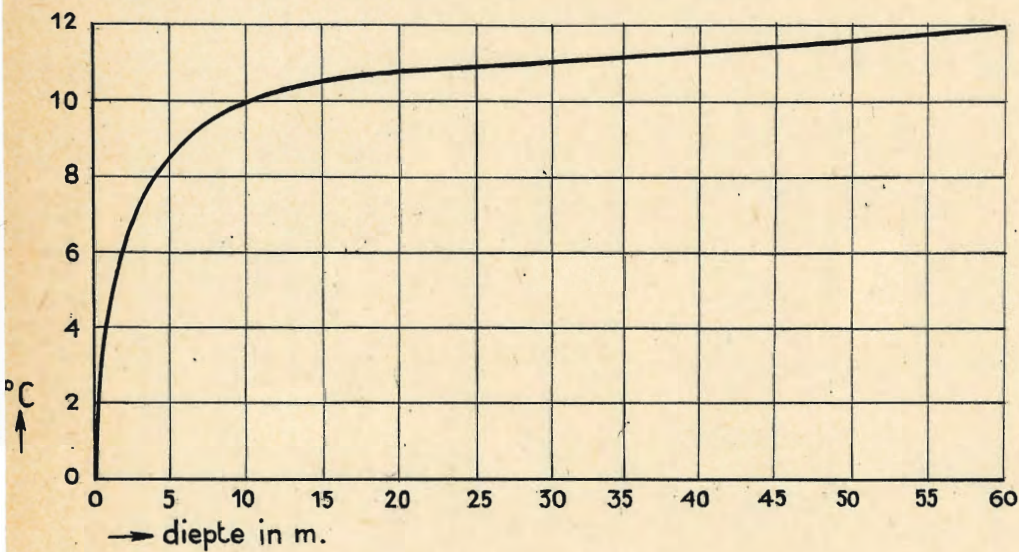


Fig.18 Bodentemperatuurprofielen te Ikengüing 1931

