

**KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT**

WETENSCHAPPELIJK RAPPORT

B. LOPES CARDOZO

Numerieke integratie van de
barotrope voorspellingsvergelijking



DE BILT-1957

UNREPRODUCIBLE COPY
UNREPRODUCIBLE COPY

UNREPRODUCIBLE COPY

All Rights Reserved.

Nadruk zonder toestemming van het K.N.M.I. is verboden.

UNREPRODUCIBLE COPY
UNREPRODUCIBLE COPY

UNREPRODUCIBLE COPY

Voorwoord.

Dit rapport is het resultaat van een studie van de literatuur over numerieke weersvoorspelling.

Het behandelt enigszins uitvoerig de quasi-geostrofische, barotrope voorspellingstechniek, zoals die o.a. in Washington en Stockholm met succes werd toegepast voor de stroming op het 500-mb niveau.

Recente ontwikkelingen, zoals de veelheid van barokliene modellen en de z.g. balansvergelijking komen slechts zéér terloops ter sprake.

Gaarne betuig ik hier mijn dank aan de heren Drs.D.J.Bouman, H.C.Bijvoet, Dr.H.M.de Jong en Dr.F.H.Schmidt voor stimulerende en vruchtbare discussies.

Bijzondere dank ben ik aan de Hoofddirecteur verschuldigd voor de toestemming, deze studie mede te laten dienen als scriptie voor mijn doktoraal examen.

mei, 1957

B.Lopes Cardozo

S u m m a r y

A review is given of numerical forecasting with emphasis on the barotropic model. The point of view is mainly that of the theoretical meteorologist, special attention being paid to the possible mathematical techniques involved in the solution of the barotropic prognostic equation. Following a method closely analogous to the one described by Charney and Phillips in their 1953 paper, it is estimated that an 48-hour barotropic 500-mb forecast would take about two hours computation time on the simple Dutch electronic computer ZEBRA.

INHOUD.

	blz.
Inleiding	1
Lijst van symbolen	8
Hoofdstuk I. Dynamica van de atmosfeer	13
<u>A.</u> Coördinatenstelsels	13
<u>B.</u> Eulervorm van de bewegingsvergelijkingen	14
<u>C.</u> Continuïteitsvergelijking	16
<u>D.</u> Circulatie en vorticititeit	17
Hoofdstuk II. De barotrope voorspellingsvergelijking	22
<u>A.</u> Het meteorologische ruisverschijnsel	22
<u>B.</u> Het quasi-geostrofische barotrope model	26
Hoofdstuk III. Integratie van de barotrope voorspellingsvergelijking	29
<u>A.</u> Het beginvoorwaardeprobleem; criterium van Courant, Friedrichs en Lewy voor de convergentie van numerieke oplossingen	29
<u>B.</u> 1) Het randvoorwaardenprobleem bij het barotrope model	33
2) Het randvoorwaardenprobleem in de praktijk; de invloedsfunctie voor het gelineariseerde $1\frac{1}{2}$ -dimensionale barotrope model	35
<u>C.</u> Enkele opmerkingen over digitale elektronische rekenmachines	39
<u>D.</u> Numerieke integratiemethodes voor de barotrope voorspellingsvergelijking	41
0) Inleiding	41
1) Een analytische methode: Greenfuncties	43
2) Algemene matrixmethoden; eliminatie volgens Gauss	48
3) Iteratiemethoden	51
a) Algemeen convergentiekriterium	51
b) De methode Richardson; relaxatiemethode	53
c) De geëxtrapoleerde methode Liebmann	57
d) Een schatting van de benodigde rekentijd voor een 48-uurs barotrope voorspelling met behulp van de Nederlandse P.T.T. rekenautomaat Zebra	63
4) De grafische methode Fjörtoft	66
<u>E.</u> Algemene opmerking over de reversibiliteit van het barotrope model	79
Literatuur	80
Aanhangsel. Voorbeeld van een 24-uurs voorspelling volgens Fjörtoft	83

The first part of the report deals with the general situation of the country and the progress of the war. It is followed by a detailed account of the military operations in the various theaters of war. The author then discusses the political and diplomatic relations of the country during this period. The report concludes with a summary of the achievements and a forecast for the future.

The second part of the report contains a list of the names of the officers and soldiers who were killed in action during the war. This list is arranged in alphabetical order and includes the names of the deceased, their ranks, and the dates of their deaths. It is a touching tribute to the brave men who sacrificed their lives for their country.

The third part of the report is a collection of letters and documents that were written or received during the war. These documents provide a personal and intimate view of the war and the lives of the soldiers and their families. They are a valuable historical record and a source of inspiration for future generations.

The fourth part of the report is a collection of poems and songs that were written or performed during the war. These poems and songs express the feelings and thoughts of the soldiers and their families and provide a glimpse into the cultural life of the time. They are a beautiful and moving tribute to the war and the men who fought it.

The fifth part of the report is a collection of photographs and illustrations that were taken or created during the war. These images provide a visual record of the war and the lives of the soldiers and their families. They are a valuable historical record and a source of inspiration for future generations.

The sixth part of the report is a collection of maps and diagrams that were used during the war. These maps and diagrams provide a geographical and tactical record of the war and the lives of the soldiers and their families. They are a valuable historical record and a source of inspiration for future generations.

The seventh part of the report is a collection of statistics and tables that were compiled during the war. These statistics and tables provide a quantitative record of the war and the lives of the soldiers and their families. They are a valuable historical record and a source of inspiration for future generations.

The eighth part of the report is a collection of names and addresses of the families of the soldiers who were killed in action during the war. This list is arranged in alphabetical order and includes the names of the families, their addresses, and the names of the deceased. It is a touching tribute to the brave men who sacrificed their lives for their country.

The ninth part of the report is a collection of names and addresses of the families of the soldiers who were wounded during the war. This list is arranged in alphabetical order and includes the names of the families, their addresses, and the names of the wounded. It is a touching tribute to the brave men who sacrificed their health for their country.

The tenth part of the report is a collection of names and addresses of the families of the soldiers who were captured during the war. This list is arranged in alphabetical order and includes the names of the families, their addresses, and the names of the captured. It is a touching tribute to the brave men who sacrificed their freedom for their country.

The eleventh part of the report is a collection of names and addresses of the families of the soldiers who were missing during the war. This list is arranged in alphabetical order and includes the names of the families, their addresses, and the names of the missing. It is a touching tribute to the brave men who sacrificed their lives for their country.

The twelfth part of the report is a collection of names and addresses of the families of the soldiers who were killed in action during the war. This list is arranged in alphabetical order and includes the names of the families, their addresses, and the names of the deceased. It is a touching tribute to the brave men who sacrificed their lives for their country.

Inleiding.

Met numerieke weersvoorspelling wordt bedoeld het berekenen van de (stromings-) toestand van de atmosfeer op zeker tijdstip, uitgaande van de waargenomen toestand op een voorafgaand moment, door gebruik van louter natuurkundige wetten, zoals bewegingsvergelijking, continuïteitsvergelijking, etc..

De term dynamische (of ook nog: fysische, mathematische) weersvoorspelling zou ook geschikt zijn. Maar de naam numerieke weersvoorspelling, waaronder L.F.Richardson (1922)^{*}) dit onderwerp ten doop hield, heeft burgerrecht verkregen.

Vóór Richardson had V.Bjerknes (1904) de weersvoorspelling al als een mathematisch-fysisch probleem gesteld, door er op te wijzen dat de toestand van de atmosfeer in beginsel beschreven wordt door 7 grootheden (3 windsnelheidscomponenten, druk, dichtheid, temperatuur, vochtigheid) welke aan 7 vergelijkingen voldoen. Richardson echter trachtte tot een werkelijke oplossing van deze (partiële differentiaal-) vergelijkingen te komen door ze om te zetten in differentie-vergelijkingen, die hij vervolgens oploste.

Hoewel zijn eigenlijke voorspellingsmethode faalde, is het werk van Richardson, dat een schat aan oorspronkelijke ideeën bevat, toch van grote betekenis. Dit falen is toe te schrijven aan verschillende oorzaken. Een triviale oorzaak is het ontbreken van voldoende en voldoende nauwkeurige waarnemingen. Een dieper liggende fout berustte op het gebruik van de tendentie-vergelijking. Hiervan had M.Margules (1904) reeds laten zien, dat zij overgevoelig is voor kleine onnauwkeurigheden in de windmetingen.

Toen na de 2e wereldoorlog de opkomst van de elektronische rekenmachine een nieuwe impuls gaf aan de numerieke weersvoorspelling werd deze kwestie door Charney (1948) uitvoerig onderzocht. Hij wees erop, dat de moeilijkheden, die bij de tendentie-vergelijking aan de dag treden, diep geworteld zijn in de algemene bewegingsvergelijkingen. Het centrale probleem is, dat de algemene bewegingsvergelijkingen te algemeen zijn. Geluid, zwaartegolven, depressies, al deze verschijnselen worden door dezelfde vergelijkingen beschreven. Alleen de beginvoorwaarden bepalen, welke van deze verschijnselen zullen overheersen. Hiervoor is een zo volledige en gedetailleerde kennis van de begintoestand vereist, dat het niet doenlijk is deze door metingen te verkrijgen.

Charney stelde zich daarom ten doel de vergelijkingen zodanig te veranderen, dat de geluidsgolven en zwaartegolven, die voor de weersvoorspelling hinderlijke bijprodukten zijn, niet meer tot de oplossing zouden behoren. Zijn model zou dan "ruisvrij" zijn en alleen nog maar het "meteorologisch signaal" doorgeven.

^{*}) Zie alfabetische literatuurlijst.

In niet-mathematische taal kunnen we hierover het volgende zeggen.

De horizontale bewegingsvergelijking drukt uit dat er voortdurend evenwicht moet zijn tussen

de kracht van het luchtdrukveld,

de corioliskracht van het windsnelheidsveld,

de traagheidskracht van het versnellingsveld en

de wrijvingskrachten, die op ingewikkelde wijze van het windsnelheidsveld afhangen.

Als we de beide laatste krachten nul stellen, onttaardt de bewegingsvergelijking in de geostrofische-windvergelijking. Bij een gegeven luchtdrukveld hoort nu juist één windsnelheidsveld en bij een gegeven windveld hoort ten hoogste één drukveld. We zullen dit noemen een starre koppeling tussen wind- en drukveld. De gradiëntwind vergelijking geeft, wanneer we deze formeel toepassen zonder ons erom te bekommeren of de voorwaarden ervoor vervuld zijn, een wat minder sterke koppeling, omdat bij gegeven drukveld nog verschillende windvelden mogelijk zijn, afhankelijk van de banen die luchtdeeltjes beschrijven.

Het moet in principe mogelijk zijn een hele rij van vergelijkingen op te stellen, die een steeds zwakkere koppeling tussen wind- en drukveld geven.

De zwakste koppeling treedt op bij de algemene bewegingsvergelijking. Hierin kan men drukveld en windveld volkomen vrij kiezen. Onder zekere voorwaarden liggen de wrijvingskrachten vast en het resulterende veld der traagheidskrachten schrijft een versnellingsveld voor.

Gaan we nu de atmosfeer beschouwen, dan zien we voor bewegingen op kleine schaal op niet te lage breedte een zwakke koppeling tussen wind- en drukveld. Een sprekend voorbeeld vormen windhozen met anticyclonale rotatie.

Naarmate we bewegingen op groter schaal onderzoeken blijkt de koppeling sterker te worden. Op de schaal van depressies heerst een nogal sterke koppeling (die het ons dan ook mogelijk maakt met isobarische analyse luchtstromingen te beschrijven).

Laten we nu eens een mathematische model-atmosfeer beschouwen, waarin de algemene bewegingsvergelijking geldt. Richtten we onze aandacht speciaal op dat deel van de vrije atmosfeer waarin de wrijvingskrachten heel klein zijn. De begintoestand ligt nu vast, wanneer we het drukveld en het windveld op zeker moment kennen. Zijn deze overal en met volmaakte nauwkeurigheid gemeten, dan zal het versnellingsveld overeenstemmen met dat van de werkelijke atmosfeer — wrijvingskrachten buiten beschouwing gelaten. Na korte tijd produceert het versnellingsveld een extra windveld, dat met dat in de werkelijke atmosfeer overeenkomt en we mogen van een tijdsintegratie een goed eindresultaat verwachten. Stel echter dat er in het gemeten windveld kleine fouten zitten.

Deze geven aanleiding tot een foutief versnellingsveld, dat na enige tijd een fiktief extra windveld produceert. Hierdoor zal op sommige plaatsen meer lucht samenstromen dan in de werkelijke atmosfeer en op andere punten zal juist een te lage druk ontstaan. Daardoor worden weer nieuwe fiktieve luchtbewegingen in het leven geroepen. Men kan nu mathematisch nagaan - met gelineariseerde vergelijkingen zonder wrijvingstermen - dat op deze wijze een golfbeweging over de werkelijke oplossing gesuperponeerd wordt: zwaartegolven. De amplitude van deze zwaartegolven is onverwacht groot. Een 10% fout in de windwaarneming, mits ruimtelijk periodiek optredend, kan zo sterke zwaartegolven doen ontstaan, dat zij de meteorologisch belangrijke verschijnselen overstemmen, zoals door Hinkelmann (1951) werd berekend (Zie hoofdstuk II). Een fout van 10% in de windwaarneming komt echter niet zelden voor! De kinematische gevolgen hiervan zijn niet groot. Wat de fysische consequenties kunnen zijn, laat zich verduidelijken door een hoogtewindstation te beschouwen, dat representatief geacht wordt voor een gebied van $100 \times 100 \text{ km}^2$. (In de praktijk is dit gebied meestal aanzienlijk groter). Laat de wind op alle niveaus 10 m/sec bedragen. Men meet echter abusievelijk 11 m/sec . Hierdoor wordt aan een luchtmassa van 10^{11} ton een energie toegekend van $\frac{1}{8} \cdot 121 \cdot 10^{11} \text{ ton m}^2 \text{ sec}^{-2}$ of $60,5 \cdot 10^{21} \text{ erg}$, terwijl deze in feite $50 \cdot 10^{21} \text{ erg}$ bedraagt. De fout in de windmeting vertegenwoordigt een kinetische energie van ruim 10 nominale atoombommen.

Na de uitbarsting van Krakatau en bij H-bom explosies zijn inderdaad zwaartegolven in het luchtdrukveld waargenomen, vgl. b.v. Schlegel (1956).

Mathematisch vormen de zwaartegolven een belangrijke klasse oplossingen van de algemene bewegingsvergelijking. Fysisch zijn ze evenwel onbelangrijk omdat voor het opwekken ervan grote hoeveelheden energie in korte tijd volgens een ruimtelijk geordend patroon beschikbaar moeten zijn. Zulk een aanslag mechanisme komt in de natuur niet voor. Daarenboven is er in de werkelijke atmosfeer nog een dempingsmechanisme, n.l. de wrijving, die in het mathematische model buiten beschouwing is gebleven.

We moeten de conclusie trekken, dat in een mathematisch model met zwakke koppeling tussen drukveld en windveld kleine fouten in de beginvoorwaarden aanleiding geven tot een schommeling van deze velden om hun evenwichtstoestand, n.l. de min of meer geostrofische toestand, die in de atmosfeer bij bewegingen op grote schaal heerst.

Maar ook bij volkomen foutloze beginvoorwaarden kan een model met zwakke koppeling nog zwaartegolven genereren, zodra men numeriek gaat integreren. In een numeriek model werken we met differenties i.p.v. differentiaal. Bij een numerieke - modelatmosfeer moeten we eigenlijk niet meer aan een continu medium denken, maar aan een verzameling met lucht gevulde dozen, die op een voorgeschreven manier met elkaar in wisselwerking staan, b.v. door elastische wanden

en kranen. De instelling van evenwicht tussen wind- en drukveld gaat evenmin op continue wijze, doch met eindige tijdstapjes. Kiest men deze te groot in verhoudingen tot de afmetingen der dozen, dan gaat de instelling van het evenwicht met herten en stoten, waardoor het systeem gaat oscilleren : zwaartegolven.

Dit tweede zwaartegolven genererende mechanisme is een voorbeeld van de z.g. berekeningsonstabielheid, die door Courant, Friedrichs en Levy (1928) algemeen mathematisch onderzocht werd bij niet-elliptische 2e orde differentievergelijkingen. Zij bewezen, dat dit verschijnsel verdwijnt, als men de tijdsdifferenties voldoende klein maakt. Het kritieke tijdsinterval is gelijk aan de tijd, die de snelste golven, welke aan de vergelijking voldoen, nodig hebben om een doos te doorlopen. In een model met zwakke koppeling zijn dat de zwaartegolven, welke fasesnelheid ongeveer gelijk is aan die van het geluid in lucht. In het model van Richardson zou b.v. 10 minuten de grootste toelaatbare tijdsdifferentie zijn. Aangezien Richardson in werkelijkheid 6 uur gebruikte zou hij zelfs bij een perfect waarnemingsmateriaal geen goede voorspelling kunnen krijgen t.g.v. berekenings onstabielheid.

De situatie overziende zijn er twee soorten modellen mogelijk.

A. Modellen met zwakke koppeling tussen windveld en drukveld.

Deze hebben de neiging zwaartegolven (ruis) te genereren. Om deze ruis te onderdrukken dient men:

- 1°. De beginvoorwaarden zorgvuldig te bevrijden van fouten, speciaal in de windmetingen. Men zou b.v. in de beginvoorwaarden windgegevens kunnen gebruiken die kunstmatig aan het drukveld zijn aangepast.
- 2°. Zeer korte tijdsintervallen te kiezen voor de numerieke integratie. Met een dergelijk model is door Charney (1951) en Freeman in Princeton geëxperimenteerd. Hun resultaten zijn echter (nog) niet gepubliceerd.

Bij dit soort modellen krijgen de berekeningen een enorme omvang door de — meteorologisch gezien absurd — kleine tijdsintervallen. Het effect van afrondingsfouten wordt daardoor belangrijk.

B. Modellen met zo sterke koppeling, dat de zwaartegolven verdwijnen.

De vraag hoe sterk men de koppeling moet maken om juist ruisvrije vergelijkingen te krijgen is nog niet in volle algemeenheid beantwoord. Wel is gemakkelijk in te zien, dat de starre koppeling die door de geostrofische windformule gegeven wordt, zwaartegolven volledig uitsluit. De geostrofische windvergelijking is immers een (wrijvingsloze) bewegingsvergelijking zonder traagheidskracht. Een zuiver geostrofisch model kan echter alleen maar (aan de grond) stationaire toestanden beschrijven, vgl. Jeffreys (1919). Het is echter aan Charney (1949) en Eliassen gelukt door bepaalde termen in de vorticitetsvergelijking

geostrofisch te approximeren, een vergelijking op te sporen, die èn ruisvrij is èn tegelijkertijd niet-stationaire atmosferische toestanden kan beschrijven. Weliswaar is de klasse van bewegingen die door dit z.g. divergentievrije barotrope model wordt beschreven beperkt tot wrijvingsloze, adiabatische, barotrope horizontale, divergentievrije stromingen van droge lucht, maar ondanks deze beperkingen is er een bemoedigende overeenstemming met de werkelijk optredende stroming in de atmosfeer. Het barotrope model levert voor het 500 mb niveau voorspellingen, die over het algemeen iets beter zijn dan de met conventionele methodes behaalde resultaten, vgl. b.v. Bolin (1955). De in deze voorspelling optredende fouten kunnen in 4 groepen worden ingedeeld.

1) Dynamische fouten, waaronder we zullen verstaan fouten veroorzaakt door de aan het model opgelegde hydro- en thermodynamische beperkingen (b.v. barotrope, horizontale, divergentievrije, adiabatische wrijvingsloze stroming). Voor voorspellingen met een termijn van enkele dagen is de barotropie wel de meest storende beperking. Om de uitdieping of opvulling van depressies te kunnen beschrijven zal men het model op de een of andere wijze moeten uitbreiden tot een baroklien model. Naast een drukveld zal dan een temperatuurveld (of een specifiek-volumeveld) moeten optreden. De aangewezen manier om dit in te voeren is door het drukveld op twee verschillende niveaus, of liever: niveaulijnen van twee verschillende drukvlakken te beschouwen. De voordelen van deze werkwijze zijn dezelfde als voor de weerdienst. Het is echter niet geoorloofd de bewegingen op de beide niveaus als onderling onafhankelijk te beschouwen. Gaat men hun onderlinge wisselwerking in het model opnemen, dan komt ook de verticale windcomponent in het spel. Dit brengt weer met zich mee, dat men de stroming horizontale divergentie moet toestaan. Wil men derhalve barokliene ontwikkelingen in het model opnemen, dan komt men min of meer vanzelf terecht bij een twee-lagenmodel (2-parametermodel, $2\frac{1}{2}$ dimensionaal model), waarvoor als belangrijkste dynamisch meteorologische ingrediënten horizontale divergentie en verticale beweging aan het barotrope model worden toegevoegd. Bijna alle twee-lagen-modellen, zoals dat van Phillips (1951), Eliassen (1952), Sawyer en Bushby (1953), Charney en Phillips (1953) stemmen in dit opzicht overeen. Verder is b.v. door Bushby en Hinds (1955) een bepaald niet-adiabatisch effect in het twee-lagen model opgenomen. Naast deze twee-lagen modellen, die een verwantschap vertonen met de theorie van Sutcliffe en Forsdyke kunnen we nog een 3-lagen model vermelden, het z.g. Princeton model van Charney en Phillips (1953), dat op ruwe wijze ook nog de verticale stabiliteit verdisconteert. De met de barokliene modellen behaalde resultaten zijn in zoverre bemoedigend, dat soms op frappante wijze cyclogenese werd voorspeld, zie b.v. Charney (1954).

Uit de tamelijk slechte gemiddelde verificatiecijfers blijkt echter dat deze modellen nog verder verbeterd moeten worden. Het is a priori niet te zeggen of deze verbeteringen typisch meteorologisch (niet-adiabatische effecten, wrijving) zullen moeten zijn.

Het feit, dat barokliene modellen onstabiele golven bevatten, duidt ook op de mogelijkheid dat andersoortige fouten, die in het barotrope model onbelangrijk bleven, hier storend worden.

2) De fouten t.g.v. de quasi-geostrofische benadering.

De tweede groep modelfouten hangt samen met de door Charney ingevoerde quasi-geostrofische koppeling tussen druk- en windveld. Deze heeft o.a. tot gevolg, dat in gebieden met anticyclonaal gekromde luchtbanen te lage windsnelheden optreden. Naar alle waarschijnlijkheid is dit de voornaamste oorzaak van de veelvuldig optredende z.g. valse anticyclogenese op lage breedte, zie b.v. Bolin (1955).

Een mogelijk ander bezwaar van de quasi-geostrofische benadering is o.a. door Edelmann (1956) naar voren gebracht, die er op wees, dat het geostrofische windveld (op breedte-effecten na) divergentievrij is en dus moeilijk verenigbaar met de voor verticale bewegingen vereiste horizontale divergenties. Heel veel hangt hier natuurlijk af van de wijze waarop in de vergelijkingen de geostrofische benadering wordt gehanteerd.

Naast de quasi-geostrofische koppeling is door Fjörtoft (1955) een andere, ruisvrije koppeling voorgesteld, berustend op de z.g. balansvergelijking. Deze wordt verkregen door in de divergentievergelijking de individuele afgeleide van de horizontale divergentie nul te stellen. Thompson (1956) maakte aannemelijk dat op deze wijze de zwakste koppeling is verkregen, die nog juist ruisvrij is. Resultaten met balansmodellen zijn tot dusver nog slechts in beperkte mate gepubliceerd, o.a. door Bushby en Huckle (1956), Bolin (1956).

3) De fouten tengevolge van de onzekerheid in de beginvoorwaarden (analysefouten, instrumentele fouten) zijn tamelijk groot. Thompson (1956^a) schat deze zelfs op ongeveer de helft van de totaal in numerieke voorspellingen optredende fout. Best (1956) demonstreerde met enkele voorbeelden, dat deze fouten vooral bij voorspellingen over meer dan 24 uur snel aangroeien.

4) Van de mathematische fouten is het z.g. randbederf het grootst. De oorzaak hiervan is het volgende. Mathematisch is voor de oplossing van de vergelijkingen kennis van de waarden der te voorspellen grootheden op de rand van de kaart vereist, niet alleen voor het begintijdstip, maar ook gedurende de verwachtingsperiode. Aangezien men deze randvoorwaarden nu juist niet kent (behalve voor het begintijdstip), is men gedwongen een gissing te gebruiken. De zo verkregen fiktieve randvoorwaarden veroorzaken een bederf van de oplos-

sing, dat zich van de randen uit voortplant met een snelheid, die de orde van grootte heeft van die der algemene stroming. Na verloop van enkele dagen wordt de hele kaart door het randbederf aangetast. Circumpolaire kaarten, welke zich tot dicht bij de aequator uitstrekken, vormen waarschijnlijk de enige remedie. Van minder betekenis zijn de fouten, die ontstaan door eindige lengte der ruimtelijke- en tijdsdifferenties.

Lijst van Symbolen.

- $\vec{A} \wedge \vec{B}$ uitwendig product van de vectoren \vec{A} en \vec{B}
- $\vec{\nabla}_H$ = $\vec{e}_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_Z + \vec{e}_2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_Z$ horizontale nabla operator in xyz stelsel
- $\vec{\nabla}$ = $\vec{e}'_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_P + \vec{e}'_2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_P$ isobare nabla in xyp stelsel
- ∇^2 = $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)_P + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)_P$ isobare Laplace operator
-
- \vec{A} vectoroppervlak behorend bij de kromme C. (I, D)
- A amplitude van golfstoring $\phi(x, t)$. (II, A)
- A_{kl} constante in de fouten-eigenfunctie voor het Liebmann proces (3.63)
- A_m afvlakkingsoperator (3.78)
- $a_m(\vec{k})$ eigenwaarde van de afvlakkingsoperator (3.80)
- a breedte van de strook G (II, B, 2)
- a lengte van rechthoek waarbinnen een Poissonvergelijking wordt opgelost (III, D, 1)
- $a^{(j)}$ residuvector bij de j-de benadering (3.44)
-
- B_{kl} coëfficiënt van $\psi(x, y)$ in sinusreeksontwikkeling (III, D, 1)
- B_{kl} constante in de fouten-eigenfunctie voor het Liebmann proces (3.63)
-
- b breedte van een rechthoek waarbinnen een Poissonvergelijking wordt opgelost (III, D, 1)
- b kolom matrix met als elementen de rechterleden van (3.41)
-
- C willekeurige gesloten kromme (I, D)
- C_m verhouding tussen $H_m \phi(\vec{r})$ en $\nabla^2 \phi(\vec{r})$ (III, D, 4)
- $C_{m, \vec{k}}$ verhouding tussen $H_m \phi_{\vec{k}}(\vec{r})$ en $\nabla^2 \phi_{\vec{k}}(\vec{r})$ (III, D, 4)
- $c = \omega/k$ fasesnelheid van een vlakke golf $\exp(ikr - i t)$
- $c = |\vec{v}_p|/|\vec{v}|$, wrijvingscoëfficiënt (I, D)
- $c^{(j)}$ correctievector bij de j-de benadering (3.44)
- c_p specifieke warmte bij constante druk
- c_v idem bij constant volume

$D = \partial/\partial t + U_0 \partial/\partial x$ eerste orde benadering voor de individuele afgeleide (II,A)

D_0 isobarische divergentie $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ aan de grond (I,D)

$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ individuele afgeleide bij stroming in een isobarisch vlak (I,D)

$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$ (xyz-stelsel) } individuele afgeleide
 $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial z}$ (xyp-stelsel) }

\vec{d}_{2s} oppervlakte-element

ds weglengte-element

d roosterconstante

$d_m = \frac{\pi}{2m}$ roosterconstante

\vec{E} willekeurige veldvector (I,A)

\vec{e}_1, \vec{e}_2 eenheidsvectoren in de horizontale x-richting, resp. y-richting

\vec{e}'_1, \vec{e}'_2 eenheidsvectoren in de isobarische x-, resp. y-richting

F rechterlid van Poissonvergelijking (3.19), i.h.b. van de barotrope voorspellingsvergelijking (3.13)

\hat{F} numerieke equivalent van F (3.16)

F_1, F_2 willekeurige functies van hun argument (III,A)

$F_m(\vec{r})$ advective verandering van η_m (3.100a), benadering voor de advectie van absolute vorticititeit.

$\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ som van wrijvingskracht en zwaartekracht per massaeenheid (I,B)

\vec{F}_p isobare component van de wrijvingskracht (I,D)

$f = 2 |\vec{\Omega}| \sin \varphi$ coriolis parameter, grootte orde 10^{-4} sec^{-1} .
 f is i.h.g. een functie van de plaats: $f(x,y)$ of $f(\vec{r})$.

$f_m = \left(\frac{\pi}{4m}\right)^2 \frac{4\Omega^2}{C_m} (1.866)^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi (1 + \sin \varphi) d\varphi$

G enkelvoudig samenhangend gebied, i.h.b. een (lange) strook (III,B,2)

$G(x,y|\xi,\eta)$ Green functie voor de Poissonvergelijking met rechthoekige rand en homogene randvoorwaarden (3.28)

$G(m,n|\mu,\nu)$ idem voor een rooster (3.38)

g versnelling van de zwaartekracht

ϵ_{kl} coëfficiënten voor de ontwikkeling van de foutenfunktie $E^{(j)}$ naar eigenfuncties ϵ_{kl}

H numerieke equivalent van de Laplace operator (III,A)

$$H\psi(x,y) = \psi(x+\Delta x, y) + \psi(x-\Delta x, y) + \psi(x, y+\Delta y) + \psi(x, y-\Delta y) - 4\psi(x,y)$$

H_m hetzelfde als H , met $\Delta x = \Delta y = \pi/2m$

$h = \Delta x$, roosterconstante in de x-richting

- $J(x,t)$ Greenfunctie voor de $1\frac{1}{2}$ dimensionale, barotrope storingsvergelijking (3.2) voor oneindige lange strook G en homogene randvoorwaarden
- $J'_\lambda(x,t)$ idem voor een strook G van (eindige) lengte 2π (3.12)
- i aantal iteraties (3.72)
- K iteratieoperator voor het Richardson proces (3.52)
- $K(\lambda)$ iteratieoperator voor het Liebmann proces (3.62)
- K_{kl} eigenwaarden van K of $K(\lambda)$
- K^* grootste der moduli van K_{kl}
- $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, index in Fourier ontwikkeling
- $k = \Delta y$ roosterconstante in de y -richting
- $k = 2\pi/L$ golfgetal (L golflengte)
- $\vec{k} = (k_1, k_2)$ golfvector
- $\vec{k}_0 =$ verticale eenheidsvector
- L golflengte (II,A)
- L_x, L_y lengte en breedte van het gebied waarin een Fourierontwikkeling geldt (III,A)
- $L = \frac{1}{2} [L_x^{-2} + L_y^{-2}]^{-\frac{1}{2}}$, het kwadratisch harmonisch gemiddelde van L_x en L_y (III,A)
- L $N \times N$ matrix (3.42)
- l index in Fourierontwikkeling, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- M positief getal (III,D,4)
- m^* schaalfactor van een conforme afbeelding. m is i.h.a. een functie van de plaats, $m^*(x,y)$ of van de geografische breedte, $m^*(\varphi)$
- m rooster coördinaat (3.14)
- m index voor de afvlakkingsoperator A_m (3.78)
- $N = pq$ totaal aantal in- en uitwendige punten voor het oplossen van een Poissonvergelijking (III,A)
- N grootste der golfgetallen k_1 en k_2 , waarvoor de bijbehorende Fouriercomponenten nog niet verwaarloosbaar zijn (3.77)
- n roostercoördinaat (3.14)
- n index voor afvlakkingsoperator A_n (3.103)
- O willekeurig oppervlak met C als rand (I,D)
- P kwadratisch harmonisch gemiddelde van p en q (3.71a)
- P_{kl} coëfficiënt in de sinusreeksontwikkeling van F (3.34)
- p natuurlijk getal (index of aantal roosterpunten op de x -as) (III,D,1)
- p luchtdruk, p_0 druk aan de grond
- q natuurlijk getal (index of aantal roosterpunten op de y -as) (III,D,1)

\vec{r}	$= (x,y)$	positievector in een isobarisch vlak
\vec{r}_0		positie van een luchtdeeltje, dat een baan in een isobarisch vlak beschrijft
T		temperatuur
t		tijd
t_{kl}		$\cos \pi k/p + \cos \pi l/q$ (3.66)
U_0		snelheid van de ongestoorde stroming (II,A)
u		x-component van de snelheid
\vec{v}		gemiddelde windsnelheid met componenten $\{u,v,w\}$
\vec{v}_H		gemiddelde horizontale windcomponent
v		y-component van de snelheid
$\vec{v} = (u,v)$		isobare component van de wind
\vec{v}^g		geostrofische wind
\vec{v}^g_a		(isobare) a-geostrofische windcomponent
\vec{v}^g_m		(fictieve) geostrofische wind behorend bij het gemiddelde geopotentiaal veld $A_m + f_m$ (III,D,4)
v_y		noord-zuid component van \vec{v}
$w = dz/dt$		verticale windcomponent
x,y,z		locale, cartesische coördinaten. x naar het oosten, y naar het noorden, z verticaal omhoog.
x,y		cartesische coördinaten met willekeurige oriëntatie in het kaartvlak (bij conforme projectie)
Z		tijdsafhankelijk deel van vlakke golf (III,A)
α		specifiek volume
$\beta = df/dy$		Rossby parameter
β		willekeurige functie van zijn argument (III,B,1)
Γ_C		circulatie langs de kromme C (I,D)
γ		willekeurige scalaire veldgrootte
γ		wortel van vergelijking
δ		deltafunctie van Dirac:
		$\delta(x) = 0$ voor $x \neq 0$ $\delta(x) = \infty$ voor $x = 0$ } met $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$
δ_{mn}		Kronecker delta, $\delta_{mn} = 0$ voor $m \neq n$, $\delta_{mn} = 1$ voor $m = n$
$\epsilon^{(j)}$		fout in de j-de benadering van ψ , $\epsilon^{(j)}$ is afhankelijk van de plaats van het roosterpunt (m,n) (III,D,3)
ϵ_{kl}		eigenfunctie voor (j) (III,D,3)
ξ		$\partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ "relatieve vorticititeit", eigenlijk: verticale component van $\vec{v}_H \wedge \vec{v}$
$\xi_0 = \xi(p_0)$		relatieve vorticititeit aan de grond

- $f_g = \partial v_g / \partial x - \partial u_g / \partial y$, geostrofische relatieve vorticititeit
- $\eta = f + \zeta$ "absolute vorticititeit", eigenlijk verticale component van de absolute vorticititeit
- η integratievariabele in de y-richting (III,D,1)
- $\hat{\eta}$ numerieke equivalent van η , (3.15)
- $\eta_m = (1 - A_m)\phi - f_m$ (3.94), grafische benadering voor η
- κ golfgetal in Fourierreeksontwikkeling, welke de waarden $0, \pm 2\pi/L, \pm 4\pi/L \dots$ doorloopt. Hierin is L de lengte van het x-interval waarin de ontwikkeling geldt.
- $\kappa = c_p / c_v$
- λ inverse maat voor de breedte van een strook G
- λ parameter bij de correctievector $c^{(j)}$ (3.46a)
- μ golfgetal als κ , maar nu voor de y-richting
- μ rooster coördinaat (x-richting)
- ν rooster coördinaat (y-richting)
- ρ luchtdichtheid
- φ geografische breedte
- ψ van y onafhankelijk deel van golfstoring (III,B,2)
- $\phi = \phi(x, y, p, t)$ geopotentiaal
- ϕ_0 geopotentiaal in de ongestoorde toestand
- $\psi(x, y)$ onbekend scalair veld
- $\psi_{h,k}(x, y)$ oplossing voor $\psi(x, y)$ verkregen met rooster met roosterconstanten h en k
- $\psi = \partial \phi / \partial t$
- $\vec{\psi}$ numeriek equivalent van ψ , kolom matrix met elementen ψ_p
- $\vec{\Omega}$ rotatiesnelheid van de aarde
- $\omega = dp/dt$ individuele drukverandering van een luchtdeeltje, corresponderende met de verticale snelheid w in het xyz-stelsel
- $\omega = 2\pi/T$ cirkelfrequentie van golfstoring met periode T

Hoofdstuk I. Dynamica van de atmosfeer.

A) Coördinatenstelsels.

Men gebruikt in de dynamische meteorologie doorgaans een met de aarde meebe-
wegend rechts cartesisch stelsel, waarvan het x-y vlak in de oorsprong raakt
aan het aardoppervlak in een of ander punt met geografische breedte φ en -leng-
te λ . De y-as laat men naar het N. wijzen.

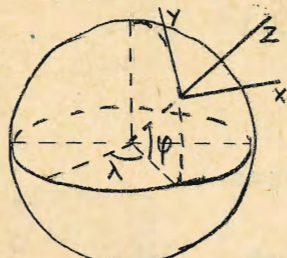


fig. 1.1

Een dergelijk stelsel is geschikt om bewegingen te
beschrijven in de omgeving van het punt O. Voor
stromingen, die zich over een groot deel van de
aarde uitstrekken, kan men beter op bolcoördinaten
overgaan. Dit geeft echter belangrijke complica-
ties in de meeste vergelijkingen.

Een fraaie methode om deze complicaties te vermijden berust op de volgende
overweging. Het deel van de atmosfeer dat wij moeten bestuderen heeft een dik-
te van ongeveer 10 km of ca. 10^{-3} maal de straal van de aarde. De essentiële
bewegingen laten zich zodoende op een boloppervlak beschrijven. Dit laat zich
dan weer conform op een plat vlak afbeelden. Dit heeft een tweeledig voordeel.
In de eerste plaats zijn differentiaaloperatoren, zoals de laplaciaan en de
jacobiaan, invariant (op een factor na) t.o.v. deze transformatie. In de
tweede plaats worden de vergelijkingen direct toepasbaar op de weerkaarten.

Een merkwaardig coördinatenstelsel, dat enkele praktische voordelen heeft, is
nog het volgende. Als verticale as blijft de zenithrichting fungeren. Het xy-
vlak wordt vervangen door een vlak van constante druk p_0 . De y-as is de door-
snijdingskromme van dit vlak met het meridiaanvlak. De x-as is de snijkromme
van het vlak $p_0 = \text{constant}$ met het vlak, dat door de verticale as gaat en
loodrecht op het meridiaanvlak staat. Als onafhankelijk veranderlijke in de
verticale richting gebruikt men de druk.

Dit stelsel wordt in hoofdzaak gebruikt voor de beschrijving van bewegingen
op kleine schaal. De kromming van de aarde kan daarom buiten beschouwing wor-
den gelaten. Het is niet orthogonaal in zoverre de $p = \text{constant}$ vlakken niet
horizontaal zijn. De helling van deze "drukvlakken" is van de orde 10^{-4} , zo-
dat we met voldoende nauwkeurigheid toch mogen schrijven

$$\text{grad } \chi = \vec{e}_1 \frac{\partial \chi}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial \chi}{\partial y} + \vec{k}_0 \frac{\partial \chi}{\partial z}$$

of bijvoorbeeld:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_p}{\partial p}$$

In de 1e uitdrukking bevatten de weggelaten tensorcomponenten een factor van de orde 10^{-8} . In de divergentie zijn de termen met de Christoffelsymbolen van de 2e soort weggelaten. Deze hangen af van de welving der p-vlakken en zijn nog enkele grootteordes kleiner dan 10^{-8} .

B) Eulervorm van de bewegingsvergelijkingen in een cartesisch stelsel, dat met de aarde meedraait luidt:

$$d\vec{v}/dt + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -\rho^{-1} \nabla p + \vec{F} \quad (1.1)$$

waarin $v = \{u, v, w\}$ de gemiddelde snelheid der luchtdeeltjes

t = tijd

$\vec{\Omega}$ = rotatiesnelheid van de aarde. $|\vec{\Omega}| = 0.729 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$

$\rho = 1/\alpha$ = luchtdichtheid

p = druk

\vec{F} = overige op de lucht werkende krachten (o.a. zwaartekracht)

Uitgeschreven:

$$\left. \begin{aligned} du/dt + 2|\vec{\Omega}| (w \cos \varphi - v \sin \varphi) &= -\alpha \partial p / \partial x + F_x \\ dv/dt + 2|\vec{\Omega}| u \sin \varphi &= -\alpha \partial p / \partial y + F_y \\ dw/dt - 2|\vec{\Omega}| u \cos \varphi &= -\alpha \partial p / \partial z - g + F'_z \end{aligned} \right\} (1.2)$$

Hierin stellen F_x , F_y en F'_z wrijvingskrachten en schuifspanningen voor, die in verband met de geringe viscositeit van de lucht een heel kleine rol spelen, althans in de vrije atmosfeer boven de z.g. wrijvingslaag. Als we deze verwaarlozen en verder bedenken, dat de verticale snelheid w klein is t.o.v. u en v , krijgen we:

$$\left. \begin{aligned} du/dt - fv &= -\alpha \partial p / \partial x \\ dv/dt + fu &= -\alpha \partial p / \partial y \\ 2|\vec{\Omega}| \cos \varphi &= \alpha \partial p / \partial z + g \end{aligned} \right\} (1.3)$$

Nu is in de atmosfeer voor luchtbewegingen $|2\vec{\Omega} u \cos \varphi| < 10 \cdot 10^{-3} g$, zodat we de 3e verg. kunnen schrijven als

$$\partial p / \partial z = -g\rho \quad \text{hydrostatische grondverg.}$$

Met behulp hiervan kan men van het x, y, z stelsel overgaan op het x, y, p stelsel.

We hebben

$$p = p(x, y, z, t)$$

wegens $\partial p / \partial z < 0$ is eenduidig $z = z(x, y, p, t)$

Voor een willekeurige scalaire veldgrootheid γ

$$\gamma = A(x, y, z, t) = A[x, y, z(x, y, p, t), t] = B(x, y, p, t)$$

vinden we
$$\partial \gamma / \partial z = (\partial \gamma / \partial p) (\partial p / \partial z) = -g \rho \partial \gamma / \partial p$$

Voorts
$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} \right)_p = \text{const} = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} \right)_z + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_p$$

Dus
$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p + g \rho \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_p \frac{\partial}{\partial p}$$
, idem voor y .

Zij de geopotentiaal $\phi(z) \equiv \int_0^z g dz \approx g z$, dan is

$$\vec{\nabla}_H = \vec{\nabla} + \rho \vec{\nabla} \phi \frac{\partial}{\partial p}$$

waarin $\vec{\nabla}_H = \vec{e}_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_z + \vec{e}_2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_z$ de horizontale nabla-operator in het xyz stelsel,

$\vec{\nabla} = \vec{e}_1' \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p + \vec{e}_2' \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p$ de isobare nabla in het x,y,p stelsel.

De verticale snelheid in het x,y,p stelsel introduceren we als

$$w = dp/dt$$

N.B. Een dalende beweging heeft $w > 0$

In het xyp stelsel is
$$d/dt = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_p + u \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p + v \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p + w \frac{\partial}{\partial p}$$

Toegepast op de geopotentiaal ϕ

$$g w = d\phi/dt = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_p + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \phi + w \partial \phi / \partial p$$

hetgeen wegens $\partial \phi / \partial p = -\alpha$ met ruwe benadering vervangen kan worden door

$$w = -\frac{\alpha}{g} \dot{\phi}$$
, indien $\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_p$ niet te groot is

Immers \vec{v} en $\vec{\nabla} \phi$ zijn ongeveer orthogonaal.

We kunnen nu de twee "horizontale" componenten van de bewegingsvergelijking voor het xyp stelsel als volgt schrijven

$$d\vec{v}/dt = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_p + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} + w \partial \vec{v} / \partial p = -\vec{\nabla} \phi - f \vec{k}_0 \wedge \vec{v} \quad (1.4)$$

waarin \vec{v} = de snelheidscomponent in het drukvlak,

$f = 2|\vec{\Omega}| \sin \rho$ de "coriolisparameter",

\vec{k}_0 = vertikale eenheidsvektor

Een kleine term met de corioliskracht t.g.v. vertikale beweging is weggelaten.

We zien hieruit: in het xyp stelsel verschijnt de bewegingsvergelijking van de inhomogene, samendrukbare atmosfeer in dezelfde vorm als de bewegingsvergelijking van een 2-dimensionale, homogene vloeistof met dichtheid 1, in een assen-

stelsel dat met hoeksnelheid $f\vec{k}_0$ roteert. Voor rechtlijnige evenwichtsstroming ($\frac{d\vec{V}}{dt} = 0$) komt er:

$$\vec{\nabla}\phi = -f\vec{k}_0 \wedge \vec{V}_g$$

of

$$\vec{V}_g = f^{-1}\vec{k}_0 \wedge \vec{\nabla}\phi \quad (1.5)$$

waarin v_g de geostrofische wind

Voor constante f is $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_g = 0$

Het geostrofische windveld is dan dus een divergentievrije, zuiver horizontale stroming met stroomfunctie $f^{-1}\phi$

We differentiëren de geostrofische windvergelijking naar de druk:

$$\partial\vec{V}_g/\partial p = f^{-1}\vec{k}_0 \wedge \vec{\nabla}\phi/\partial p = -f^{-1}\vec{k}_0 \wedge \vec{\nabla}\alpha = f^{-1}p^{-1}R\vec{\nabla}T \wedge \vec{k}_0$$

waarin we lucht als ideaal gas met $p\alpha = RT$ beschouwd hebben.

We definiëren nog de thermische wind $\vec{V}_T \equiv -\partial\vec{V}_g/\partial p$

Dan is
$$\vec{V}_T = \frac{R}{pf} \vec{k}_0 \wedge \vec{\nabla}T$$

In een isobarisch vlak vormen isothermen stroomlijnen van de thermische wind. Kent men het windveld aan de grond en de temperatuurverdeling, dan is daarmee de wind in de gehele atmosfeer bepaald in dezelfde mate als waarin de geostrofische wind de ware wind bepaalt.

C) De continuïteitsvergelijking

$$\partial\rho/\partial t + \text{div } \bar{\rho}\vec{v} = 0 \quad (1.6)$$

of

$$d/dt \int \rho \, dx dy dz = 0$$

transformeren van $xydz \rightarrow xyp$ met $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,y,p)} = -1/\rho g$

Dus in het xyp stelsel in de cont. verg.:

$$d/dt \int dx dy dz = 0$$

zodat (variëaties in g buiten beschouwing gelaten) lucht in het xyp stelsel onsamendrukbaar is. Derhalve:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \partial w/\partial p = 0$$

Dan is

$$\int_{p_0}^0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \, dp = - \int_{p_0}^0 \partial w/\partial p \, dp = -w(0) + w(p_0) = d p_0/dt$$

Hierin stelt p_0 de druk aan de grond voor. De individuele drukverandering

dp_0/dt gaan we nu in het xyz stelsel nader bestuderen:

$$dp_0/dt = \partial p_0/\partial t + u \partial p_0/\partial x + v \partial p_0/\partial y + w \partial p_0/\partial z$$

Aan de grond is echter $w = 0$. Splitsen we nu de horizontale windcomponent \vec{v}

$$\vec{v} = \vec{v}_g + \vec{v}_a$$

waarin \vec{v}_a , de "ageostrofische wind" absoluut genomen altijd veel kleiner is dan $|\vec{v}_g|$ dan blijkt, wegens $\vec{v}_g \perp \vec{\nabla} p_0$

$$dp_0/dt = \partial p_0/\partial t + \vec{v}_a \cdot \vec{\nabla} p_0$$

Dus is $\partial p_0/\partial t = -\vec{v}_a \cdot \vec{\nabla} p_0 + \int_{p_0}^0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dp$
of, bij ruwe benadering:

$$\partial p_0/\partial t = \int_{p_0}^0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dp$$

de z.g. tendentie-vergelijking

D) Circulatie en vorticititeit.

Beschouw een enkelvoudig gesloten kromme C in de atmosfeer. We veronderstellen zodanige continuïteit van de luchtstromingen, dat de luchtdeeltjes, die ten tijde $t = 0$ tot C behoren, ook op de tijd $t = t$ nog een enkelvoudig gesloten kromme zullen vormen. De circulatie langs C is

$$\Gamma_c = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

Voor de circulatieversnelling $d\Gamma_c/dt$ vinden we

$$\frac{d\Gamma_c}{dt} = \oint_C \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} + \oint_C \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} d\vec{r}$$

De tweede integraal rechts verdwijnt wegens

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{v} = \left| \vec{v} \right|^2 \Big|_C = 0$$

Substitutie uit de bewegingsvergelijking geeft:

$$\frac{d\Gamma_c}{dt} = -2 \oint_C \vec{\Omega}_1 \cdot \vec{v} \cdot d\vec{r} - \oint_C \alpha \vec{\nabla} p \cdot d\vec{r} + \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1.7)$$

Als we de wrijvingskrachten buiten beschouwing laten stelt \vec{F} de (conservatieve) zwaartekracht voor. Dus verdwijnt de derde integraal rechts. Met behulp van de stelling van Stokes schrijven we nog

$$\oint_C \alpha \vec{\nabla} p \cdot d\vec{r} = \int_O \vec{\nabla} \alpha \cdot \vec{\nabla} p \cdot d_2\vec{S}$$

waarin $d_2\vec{S}$ het oppervlakte-element is van een oppervlak O dat C tot rand heeft.

We voeren ten slotte nog in het vectoroppervlak \vec{A} , behorend bij de kromme C

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{r}_1 \cdot d\vec{r}$$

Voor de individuele tijdsafgeleide vinden we

$$\dot{\vec{A}} = \frac{1}{2} \oint_c \dot{\vec{r}}_{\perp} d\vec{r} + \frac{1}{2} \oint_c \vec{r}_{\perp} \dot{d\vec{r}} = \frac{1}{2} \oint_c \vec{v}_{\perp} d\vec{r} + \frac{1}{2} \vec{r}_{\perp} \dot{\vec{v}} \Big|_c - \frac{1}{2} \oint_c d\vec{r}_{\perp} \dot{\vec{v}}$$

De stokterm verdwijnt, zodat we mogen schrijven:

$$\dot{\vec{A}} = \oint_c \vec{v}_{\perp} d\vec{r}$$

Met behulp hiervan herleiden we de eerste term uit het rechterlid van (1.6) als volgt:

$$-2 \oint_c \vec{\Omega}_{\perp} \cdot \vec{v} d\vec{r} = -2 \oint_c \vec{\Omega}_{\perp} \cdot \vec{v}_{\perp} d\vec{r} = -2 \vec{\Omega}_{\perp} \cdot \oint_c \vec{v}_{\perp} d\vec{r} = -2 \vec{\Omega}_{\perp} \cdot \dot{\vec{A}} \quad (1.8)$$

zodat

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{c} + 2 \vec{\Omega}_{\perp} \cdot \vec{A} \right] = - \int_0 \vec{\nabla} \alpha_{\perp} \cdot \vec{\nabla} p \cdot d\vec{s} \quad (1.9)$$

Dit is de circulatiestelling van Bjerknes. In een barotrope atmosfeer is $\alpha = \alpha(p)$, zodat het rechterlid verdwijnt. De grootheid tussen vierkante haken kan dan als stromingsinvariant worden opgevat.

Om verschillende redenen is de vorm (1.9) van de stelling van Bjerknes minder geschikt voor numerieke integratie. We zullen daarom de vorticitetsvergelijking bestuderen, die essentieel de differentiaalvorm is van (1.9). In het xyp-stelsel kan de isobare component van de bewegingsvergelijking geschreven worden als:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + f \vec{k}_0 \wedge \vec{v} + \nabla \phi = \vec{F}_p$$

Door hiervan de verticale component van de rotatie te nemen (vermenigvuldig de x-component met $-\partial/\partial y$, de y-component met $\partial/\partial x$ en tel op) krijgen we de vorticitetsstelling:

$$d\eta/dt = -\eta \vec{v} \cdot \vec{\nabla} - \vec{k}_0 \cdot \vec{\nabla} \omega_{\perp} \partial \vec{v} / \partial p + \vec{k}_0 \cdot \vec{\nabla}_{\perp} \vec{F}_p \quad (1.10)$$

waarin $\eta = f + \zeta$, $\zeta = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y = \vec{k}_0 \cdot \vec{\nabla}_{\perp} \vec{v}$ resp. "absolute-" en "relatieve" vorticitet voorstellen. Feitelijk is een vorticitet een 3-dimensionale vector en zijn η en ζ hiervan de verticale componenten. Kortheidshalve noemen we echter η absolute- en ζ relatieve vorticitet.

Waren alle termen in het rechterlid van (1.10) nul, dan zou de vergelijking behoud van absolute vorticitet uitdrukken voor een willekeurige stroming. Het is uit praktisch oogpunt aantrekkelijk de vorticitetsstelling in een iets andere vorm te schrijven:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \eta = -\omega \partial \eta / \partial p - \vec{k}_0 \cdot \vec{\nabla} \omega_{\perp} \partial \vec{v} / \partial p - \eta \vec{v} \cdot \vec{\nabla} + \vec{k}_0 \cdot \vec{\nabla}_{\perp} \vec{F}_p$$

De eerste term in het rechterlid stelt het verticale vorticitetstransport voor (afgezien van het teken). De tweede term rechts kunnen we ons anschouwelijk voorstellen als we bedenken, dat de thermische wind $-\partial \vec{v} / \partial p$ een soort wervel met horizontale as voorstelt.

Is er nu langs deze wervelas een verloop in de verticale snelheid, dan betekent dit een kanteling van de wervel, een omzetting dus van horizontale vortici-teitskomponenten in de verticale.

De eerste en tweede term rechts nemen we als volgt samen:

$$-\omega \frac{\partial}{\partial p} (\vec{k}_0 \cdot \vec{v}_1 \vec{v}) - \vec{k}_0 \cdot \vec{v} \omega_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial p} = -\vec{k}_0 \cdot \omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial p}$$

De derde term rechts benaderen we op ruwe wijze door de onderstelling, dat in de wrijvingslaag \vec{F}_p evenredig is met de snelheid:

$$\vec{F}_p = -c \vec{v} \quad (c > 0)$$

dan is

$$\vec{k}_0 \cdot \vec{v}_1 \vec{F}_p = -c \zeta$$

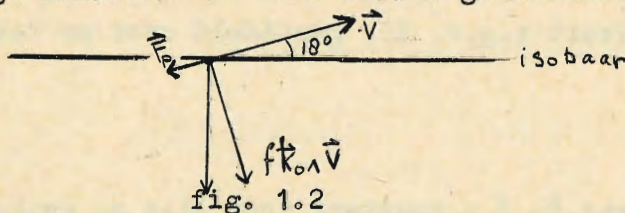
We zullen ons nu verder bezig houden met de vortici-teitsstelling in de vorm:

$$D\eta/Dt \equiv \frac{\partial \eta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \eta = \underbrace{-c \zeta}_I - \underbrace{2 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}}_{II} - \vec{k}_0 \cdot \vec{v}_1 \omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial p} \quad (1.11)$$

waarin weer D/Dt de individuele isobarische afgeleide is. Was het rechterlid nul, dan zou (1.11) betekenen, dat de absolute vortici-teit bij isobare stroming behouden bleef. Bestudering van vortici-teitskaarten (zoals die b.v. door Bad Kissingen werden gepubliceerd) leert, dat dit voor het 500 mb-vlak bij benadering geldt. Er zijn echter uitzonderingen, waarvan sommige waarschijnlijk fiktief zijn (analysefouten !). Uit de vortici-teitskaarten is verder te zien, dat op het 500 mb-vlak in gebieden met normale depressieactiviteit de orde van grootte van $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ en $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \eta$ 10^{-9} sec^{-2} bedraagt.

Wat de term I betreft weten we dat ζ de grootteorde $\frac{1}{3} \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ heeft.

c kunnen we als volgt schatten. De hoek tussen grondwind en isobaren op 18° stellende is



$$|F_p| = c|\vec{v}| = \text{tg } 18^\circ \cdot f|\vec{v}|, \text{ dus } c \approx 0.3 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$$

zodat

$$c \zeta \approx 10^{-9} \text{ sec}^{-1}$$

Wanneer II en III nul waren zou de wrijving aan de grond een dissipatie van vortici-teit geven volgens

$$D(\zeta + f)/Dt = -c \zeta$$

of, variatie in f buiten beschouwing latend:

$$\zeta(t) = \zeta(0) e^{-ct},$$

een exponentieel met de tijd naar nul strevende relatieve vortici-teit met

halveringstijd van de orde van 1 dag.

Samenvattend hebben we dus in de wrijvingslaag (zeg de onderste 30 mb) een vernietiging van relatieve vorticititeit in cyclonale gebieden en een schepping in anticyclonale gebieden. Deze is in absolute grootte van dezelfde orde als het advectione vorticititeitstransport in de vrije atmosfeer (op 500 mb). Verdeeld over de gehele hoogte van de troposfeer is zij één à twee grootteordes kleiner.

Bezien we nu de term II. Uit het werk van Fleagle (1948) weten we, dat onderin en bovenin depressies en hogedrukgebieden $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ van de orde 10^{-5} sec^{-1} is, terwijl in de omgeving van 500 mb deze grootte de orde van 10^{-6} heeft. Bovenin een depressie heerst divergentie, dus is daar $-\eta \vec{\nabla} \cdot \vec{v} < 0$, er wordt dus vorticititeit vernietigd. Onderin depressies is $-\eta \vec{\nabla} \cdot \vec{v} > 0$, daar wordt dus vorticititeit gecreëerd en wel met een tempo van de orde van 10^{-9} sec^{-2} .

We bepalen onze aandacht nu eens tot een stationaire depressie met gesloten isobaren. De wrijving in de onderste lagen, die ongeveer 1/30 gedeelte van de totale massa van de atmosfeer vertegenwoordigen, vernietigt vorticititeit in een tempo van de orde van 10^{-9} sec^{-2} . Om dit verlies aan te vullen zonder vorticititeitsadvectione van buitenaf, is gemiddeld over de totale hoogte van de atmosfeer een creatie nodig van de orde van $10^{-10.5} \text{ sec}^{-2}$. We vragen ons af of het netto effect van divergenties en convergenties deze orde van grootte kan hebben. Om dit laatste te berekenen stellen we $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -2D_0(p - \frac{1}{2})$, waarin $1 \leq p \leq 0$. We nemen aan de grond $p = p_0 \approx 1$, zodat $p = \frac{1}{2}$ ongeveer met het divergentievrije niveau (500 mb) overeenstemt.

De creatie van vorticititeit t.g.v. II, gemiddeld over de totale hoogte van de atmosfeer is dan:

$$\overline{\text{II}} = \frac{1}{p_0} \int_0^{p_0} -\eta \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dp$$

Stellen we nu eerst eens $f = f_0 = \text{constant}$ voor alle p , zoals in een barotrope atmosfeer het geval is, dan kunnen we $\eta = f + f_0$ voor het integraalteken plaatsen en we krijgen:

$$\overline{\text{II}} = -\frac{1}{p_0} \eta \int_0^{p_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dp = +\frac{\eta}{p_0} \frac{dp_0}{dt} \approx 10^{-10.5} \text{ sec}^{-2}$$

Voor de schatting van deze grootteorde hebben we $\eta \approx 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ genomen en $p_0^{-1} dp_0/dt \approx 10^{-6.5} \text{ sec}^{-1}$, hetgeen overeenkomt met een "opvulling" van 1 mb

per uur.

In een barokliene atmosfeer kan de orde van de divergentieterm II iets groter worden. Wanneer we n.l. stellen

$$\xi = 2 \xi_0 (p - \frac{1}{2})$$

zodat met $\xi_0 > 0$ in de onderste lagen van de atmosfeer cyclonale vorticititeit voorkomt en in de hoogste lagen anticyclonale, dan geeft II een bijdrage, ook al is $dp_0/dt = 0$. We vinden dan n.l.

$$\overline{II} = -p_0^{-1} f \int_0^{p_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dp + 4 p_0^{-1} \xi_0 D_0 \int_0^{p_0} (p - \frac{1}{2})^2 dp = 0 + \frac{4}{3} \xi_0 D_0$$

Stellen we $\xi_0 \approx 10^{-4.5} \text{ sec}^{-1}$ en $D_0 \approx 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$, dan komen we op een tempo van vorticititeitscreatie van de orde $10^{-10} \text{ sec}^{-2}$, bij constante gronddruk p_0 .

Conclusie: De creatie van vorticititeit t.g.v. convergenties en divergenties is op het 500 mb-vlak van de orde $10^{-10} \text{ sec}^{-2}$.

Gemiddeld over de totale hoogte van de atmosfeer is ze zelfs in gunstige situaties (sterke opvulling, cyclonaal patroon nabij aardoppervlak met een rug erboven in de hogere luchtlagen) een grootteorde kleiner dan het advectioneel vorticititeitstransport, $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \eta$, maar wel voldoende om het vorticititeitsverlies t.g.v. wrijving te compenseren.

We beschouwen nu de term III uit het rechterlid.

In de eerste plaats willen we een schatting maken van de grootte van ω .

We kijken hierbij naar gelijkmatige stijgbeweging in grote gebieden, fronten b.v. en laten de enorme verticale snelheden, die in cumulonimbi incidenteel worden aangetroffen, buiten beschouwing. Nemen we een regenintensiteit van 1 mm per uur als typisch voor frontale neerslag in lucht met een dauwpunt van 10°C op 1015 mb.

Corresponderende mengverhouding 7.5 kg per ton. We nemen aan dat de lucht bij haar gedwongen opstijging $\frac{2}{3}$ van haar waterdamp verliest aan neerslag. Per m^2 van het aardoppervlak moet 1 kg water worden afgeleverd, waarvoor 0.2 ton lucht nodig is, welke een luchtdruk van 0,2 cb vertegenwoordigt.

Aannemende, dat boven een zeker condensatieniveau de lucht juist verzadigd is, vindt men in dit gehele gebied een uniforme stijgsnelheid

$$-\omega = \frac{0.002}{3600} = 0.6 \times 10^{-6} \text{ bar/sec}$$

Voor de thermische wind $-\delta\vec{v}/\delta p$ nemen we als representatieve waarde in frontale zones 50 kts per 500 mb. Dus

$$\left| \frac{\delta\vec{v}}{\delta p} \right| \approx 50 \text{ m sec}^{-1} \text{ bar}^{-1}$$

De grootteorde van $-\vec{k}_0 \cdot \vec{\nabla} (\omega \delta\vec{v}/\delta p)$ in frontale zones bepalen we nu door een gemiddelde te nemen over een rechthoek ABCD met zijden $AB = 1 \text{ m}$, $BC = 10^6 \text{ m}$

en oppervlak 0, gelegen aan de koude zijde van de frontale zone (zie fig 1.3)

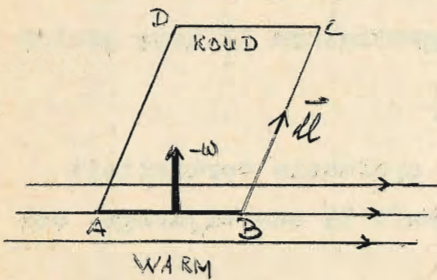


fig. 1.3

We nemen aan dat de thermische wind overal loodrecht staat op BC en AD en nul is langs CD. Nu is

$$\begin{aligned} \frac{1}{0} \int_0^B -\vec{v}_1 \cdot (\omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial p}) \cdot d_2 \vec{s} &= -\frac{1}{0} \int \vec{v}_1 \cdot (\omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial p}) \cdot d_2 \vec{s} = -\frac{1}{0} \oint \omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial p} \cdot d\vec{l} = \\ &= \frac{1}{0} \int_A^B -\omega \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial p} \right| \cdot dl \approx -10^{-6} \times 0.6 \times 10^{-6} \times 50 \times 1 = -10^{-10.5} \text{ sec}^{-2} \end{aligned}$$

We zien hieruit, dat in frontale zones creatie en annihilatie van vorticititeit optreedt t.g.v. het gecombineerde effect van vertikaal vorticititeitstransport en kanteling der wervelassen. Bij stijgende luchtbeweging in frontale zones (regen !) wordt aan de koude (cyclonale) zijde vorticititeit vernietigd en aan de andere (anticyclonale) zijde gecreëerd in een tempo van de orde $10^{-10.5} \text{ sec}^{-2}$.

Samenvattend mogen we concluderen dat in de gematigde breedten de termen in het rechterlid van (1.11) ten minste één grootteorde kleiner zijn dan die in het linkerlid, wanneer we ons beperken tot het 500 mb-vlak. De stroming op dit niveau mogen we dus bij benadering opvatten als divergentievrij en isobaar of als divergentievrij en barotroop. De vereenvoudigde vorticititeitsvergelijking

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \zeta = 0 \quad (1.12)$$

vormt de basis van het z.g. barotrope model. Op zichzelf is (1.12) nog niet te integreren, omdat zij twee onbekenden, n.l. u en v bevat. Men zal dus nog een tweede vergelijking moeten gebruiken. Uit de discussie in het volgende hoofdstuk zal blijken, dat als tweede vergelijking in u en v alleen een zodanige in aanmerking komt, waarin geen tijds afgeleiden voorkomen.

Hoofdstuk II.

De barotrope voorspellingsvergelijking.

A. Het meteorologische ruisverschijnsel.

Alvorens de z.g. barotrope voorspellingsvergelijking af te leiden zal iets nader worden ingegaan op het verschijnsel van de z.g. meteorologische ruis.

We beschouwen nog eens de bewegingsvergelijkingen, de continuïteitsvergelijking en de vergelijking voor adiabatische toestandsveranderingen.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dt} \ln \rho + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

$$\rho p^{-1/\kappa} = C(\text{const}) \quad (2.5)$$

(waarin $\kappa = c_p/c_v$)

Deze 5 verg. met 5 onbekenden u, v, w, p, ρ zijn van de eerste orde in t . Men mag dus verwachten dat (met geschikte randvoorwaarden !) kennis van een enkelvoudige beginvoorwaarde van het Dirichlet-type (dus de waarde van de onbekende functie op het begintijdstip) voldoende zal zijn om de toekomstige waarden van u, v, w, p, ρ te berekenen. Weliswaar is van dit stelsel van partiële differentiaalvergelijkingen geen exacte oplossing bekend, maar het is, naïf redenerend, niet in te zien, waarom het stelsel differentievergelijkingen:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = -u \frac{\Delta u}{\Delta x} - v \frac{\Delta u}{\Delta y} - w \frac{\Delta u}{\Delta z} + fv - \frac{1}{\rho^{1/\kappa}} \frac{\Delta p}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -u \frac{\Delta v}{\Delta x} - v \frac{\Delta v}{\Delta y} - w \frac{\Delta v}{\Delta z} - fu - \frac{1}{\rho^{1/\kappa}} \frac{\Delta p}{\Delta y}$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = -u \frac{\Delta w}{\Delta x} - v \frac{\Delta w}{\Delta y} - w \frac{\Delta w}{\Delta z} - \frac{1}{\rho^{1/\kappa}} \frac{\Delta p}{\Delta z} - g$$

$$\frac{\Delta \ln \rho}{\Delta t} = -u \frac{\Delta \ln \rho}{\Delta x} - v \frac{\Delta \ln \rho}{\Delta y} - w \frac{\Delta \ln \rho}{\Delta z} - \kappa \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta y} + \frac{\Delta w}{\Delta z} \right)$$

niet de incrementen $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ en Δp zou geven, want bij gegeven begintoestand zijn de rechterleden bekend. Met deze incrementen verkrijgt men dan weer $u(t + \Delta t)$ etc., waarna door herhaling van het procédé de toestand op iedere gewenste tijd $t + n \cdot \Delta t$ moet zijn te berekenen. Wanneer dit echter niet blijkt te gaan, kan men drie dingen doen:

de beginvoorwaarden verdenken, de geldigheid van de overgang $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\Delta}{\Delta t}$ wantrouwen, of allebei en dit laatste is het beste.

Wat de beginvoorwaarden betreft kunnen we b.v. opmerken dat w zeer onnauwkeurig bekend is. Het zou dus realistisch zijn de verticale bewegingsvergelijking de vervangen door $\rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial z} = -g$. Weglaten van dw/dt betekent dat in verticale richting geen geluidsgolven meer kunnen lopen. Dit is voor een meteorologisch model geen bezwaar. Voor de overgang op eindige tijdsintervallen Δt moet men natuurlijk eisen, dat deze kort zijn t.o.v. de periode der golven die dit model toelaat. Het is dus van belang de golven die de bewegingsvergelijkingen toelaten nader te onderzoeken, voordat men tot het rekenen overgaat. We voeren

daartoe nog enkele verdere vereenvoudigingen in.

Beschouw een homogene, wrijvingloze onsamendrukbare atmosfeer met een vrij oppervlak op "hoogte" $\bar{\Phi}_0$ boven een plat aardoppervlak, dat met hoeksnelheid $f\bar{k}$ roteert. (Voor bewegingen op niet te grote schaal is dit een redelijke benadering, zie (1.4)). We nemen nu als grondtoestand een rechtlijnige, constante stroming U_0 in de x-richting, zodat de bewegingsvergelijkingen zich vereenvoudigen tot

$$fU_0 + \partial\bar{\Phi}_0/\partial y = 0$$

De continuïteitsvergelijking krijgt de vorm

$$\partial\bar{\Phi}_0/\partial t + \frac{\partial}{\partial x}(u\bar{\Phi}_0) + \frac{\partial}{\partial y}(v\bar{\Phi}_0) = 0$$

waarvan in de grondtoestand het linkerlid identiek nul is.

We superponeren nu een kleine storing $\vec{v} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2$ met "extra" geopotentiaal van het vrije oppervlak ϕ . Uit de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\Phi}_0 + \phi) + \frac{\partial}{\partial x}(U_0 + u)(\bar{\Phi}_0 + \phi) + \frac{\partial}{\partial y}v(\bar{\Phi}_0 + \phi) = 0$$

behouden we de termen van 1e orde in de storing:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial\phi}{\partial x} + \bar{\Phi}_0 \frac{\partial u}{\partial x} - fU_0 v + \bar{\Phi}_0 \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

We beperken ons tot storingen die onafhankelijk zijn van de y-coördinaat en schrijven $D = \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x}$, zodat

$$D\phi = fU_0 v - \bar{\Phi}_0 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.6)$$

Uit de bewegingsvergelijkingen volgen:

$$Du = -\partial\phi/\partial x + fv \quad (2.7)$$

$$Dv = -fu \quad (2.8)$$

We elimineren nu eerst u:

$$(D^2 + f^2)v = f\partial\phi/\partial x \quad (2.9)$$

$$(\bar{\Phi}_0 D \frac{\partial}{\partial x} + f^2 U_0)v = fD\phi \quad (2.10)$$

Uit (9) en (10) elimineren we v:

$$\begin{aligned} (D^2 + f^2)fD\phi &= (\bar{\Phi}_0 D \frac{\partial}{\partial x} + f^2 U_0)f \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \text{of} \quad D(D^2 - \bar{\Phi}_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2})\phi + f^2 \frac{\partial\phi}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Deze vergelijking bevat alle golven $\phi(x, t) = A \exp[ikx - i\omega t]$ in het veld, die ook aan de oorspronkelijke storingsvergelijkingen (6), (7) en (8) voldoen, plus eventuele golfoplossingen die door het eliminatieproces zijn ingevoerd. Aangezien essentieel twee maal D is toegepast kunnen golven ingevoerd zijn

met $c = \omega/k = \pm U_0$. Achteraf zal blijken, dat deze niet tot de oplossing behoren, zodat inderdaad (2.11) wat ϕ betreft equivalent is met (2.6,7,8).

We merken nog op, dat voor $f = 0$ de frekwentievergelijking wordt:

$$-\omega^2 + 2U_0\omega k + (\Phi_0 k^2 - U_0^2 k^2) = 0$$

zodat

$$c = U_0 \pm \sqrt{\Phi_0}$$

Dit is de fasesnelheid van uitwendige zwaartegolven [Lamb, (1895) blz. 273] zoals we mochten verwachten.

De volledige frekwentievergelijking wordt:

$$(U_0 - c)^3 - (\Phi_0 + f^2 k^{-2})(U_0 - c) + f^2 k^{-2} U_0 = 0 \quad (2.12)$$

Opgevat als vergelijking in $(U_0 - c)$ is er minstens één reële wortel γ , die door iteratie gevonden kan worden uit

$$\gamma_{n+1} = \frac{f^2 k^{-2} U_0}{\Phi_0 + f^2 k^{-2} - \gamma_n^2}, \quad \gamma_0 = 0$$

Bij elke stap wordt de nauwkeurigheid van deze benadering minstens een faktor

$$\frac{2\gamma_n' f^2 k^{-2} U_0}{(\Phi_0 + f^2 k^{-2} - \gamma_n^2)^2}, \quad \text{met } |\gamma - \gamma_n'| < |\gamma - \gamma_n|$$

beter. Zelfs voor lange golven ($L = 10^{-7}$ m) en $U_0 = 15$ m/sec is deze faktor van de orde 10^{-3} , zodat we met goede benadering voor deze wortel vinden:

$$\gamma(k) \approx \gamma_1 = \frac{f^2 k^{-2} U_0}{\Phi_0 + f^2 k^{-2}} \quad (2.13)$$

Delen we $U_0 - c - \gamma$ uit, dan volgen de beide andere wortels uit

$$(U_0 - c)^2 + \gamma(U_0 - c) + \gamma^2 - (\Phi_0 + f^2 k^{-2}) = 0$$

zodat we 3 verschillende golfsnelheden vinden:

$$c_1 = c_1(k) = U_0 - \gamma \quad (2.14)$$

$$c_2 = c_2(k) = U_0 - \frac{1}{2}\gamma + \sqrt{\Phi_0 + f^2 k^{-2} - \frac{3}{4}\gamma^2}$$

$$c_3 = c_3(k) = U_0 - \frac{1}{2}\gamma - \sqrt{\Phi_0 + f^2 k^{-2} - \frac{3}{4}\gamma^2}$$

De golven met snelheid c_1 komen overeen met hoge- en lagedrukgebieden, waarvan de verplaatsingssnelheid van de orde van grootte is van de grondstroming U_0 . c_2 en c_3 slaan op zwaartekrachtsgolven, die staande golven vormen welke zich met $U_0 - \frac{1}{2}\gamma$ voortbewegen. Ze vormen voor de weersvoorspelling een hinderlijk bijproduct. Men spreekt wel van de "ruis" van dit model.

De amplitudeverhouding $(|A_2| + |A_3|)/|A_1|$ moet berekend worden uit de beginvoorwaarden $\phi(x,0)$, $u(x,0)$ en $v(x,0)$. Wil men realistische beginvoorwaarden kiezen dan moet men rekening houden met het feit, dat in de atmosfeer de wind

bij benadering geostrofisch is. Laat

$$\phi(x,0) = \phi_0 e^{ckx} \quad (2.15)$$

dan zal bij geostrofisch evenwicht gelden:

$$u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = f^{-1} ck \phi_0 e^{ckx}$$

We stellen nu eens als beginvoorwaarden

$$u(x,0) = 0.1 f^{-1} ck \phi_0 e^{ckx}$$

$$v(x,0) = 0.9 f^{-1} ck \phi_0 e^{ckx}$$

waarbij we in het midden laten of deze 10% afwijking van de geostrofische wind reël is, dan wel op meetfouten berust.

Wanneer men deze waarden in de storingsvergelijkingen substitueert vindt men na enig rekenwerk de amplitude-verhoudingen, die in de laatste kolom van tabel 1 zijn weergegeven. Voor zuiver geostrofische begintoestand is de amplitudeverhouding daarentegen praktisch nul.

Tabel 1 ($U_0 = 15 \text{ m/sec}$, $f = 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$, $\phi_0 = 8.10^4 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-2}$)

$L = 2\pi k^{-1}$	c_1	m sec^{-1}	T_1 (uur)	$T_2 \approx T_3$	$(A_2 + A_3) / A_1 $
30 (10^6 m)		3.89	2140	15	6%
10		11.39	244	9	25%
5		13.90	100	5	45%
1		14.95	19	1	210%

Het bovenstaande model leert ons het volgende: aangezien de gemeten winden altijd iets afwijken van de geostrofische, kunnen bewegingsvergelijkingen, die versnellingstermen du/dt en dv/dt bevatten, zwaartegolven genereren.

Door hun grote voortplantingssnelheid (ongeveer gelijk aan de Newtonse geluidssnelheid, 300 m/sec) en korte periode zijn deze zeer onaangenaam voor elk numeriek procedé.

Bovendien dreigt bij meteorologisch middelbare en korte golven het signaal geheel door de ruis overstemd te worden.

Men zou kunnen proberen, door het invoeren van wrijvingstermen de zwaartegolven te onderdrukken. Voor zover bekend is dit nog niet gedaan. Het is de vraag of het effect van de wrijving niet veel te klein is om de gewenste demping (van de gewenste golfsoort) te leveren.

B) De quasi -geostrofische benadering.

Charney (1948) heeft op de mogelijkheid gewezen de zwaartegolven uit de vergelijkingen " weg te zeven " door in de vereenvoudigde vorticititeitsvergelijking

(1.12) de wind geostrofisch te approximeren. Het is bekend, dat de geostrofische benadering niet gebruikt mag worden in de horizontale divergentie van het windveld. Voor de wind zelf en zeker voor de verticale vorticitetscomponent ervan is het echter een goede benadering. Noemen we deze laatste ζ_g , dan is

$$\zeta \approx \zeta_g \equiv \partial v_g / \partial x - \partial u_g / \partial y = \frac{\partial}{\partial x} (f^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (f^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial y}) \approx f^{-1} \nabla^2 \phi \quad (2.16)$$

Wanneer we dit substitueren in (1.12) komt er

$$\begin{aligned} \text{of} \quad f^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi - f^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (f^{-1} \nabla^2 \phi + f) + f^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (f^{-1} \nabla^2 \phi + f) &= 0 \\ \nabla^2 \partial \phi / \partial t &= \frac{\partial}{\partial x, y} (f^{-1} \nabla^2 \phi + f, \phi) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Deze vergelijking bevat als enige onbekende de geopotential ϕ van het beschouwde drukvlak (500mb), en is van de eerste orde in t . Zij zal dus slechts één golfsoort beschrijven. We kunnen nu gemakkelijk nagaan dat deze golven meteorologisch belang hebben. Hiertoe schrijven we (1.12) in de vorm

$$\begin{aligned} \text{en substitueren} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f \right) &= 0 \\ v = v_g = f^{-1} \partial \phi / \partial x \\ u = u_0 + u_g = u_0 - f^{-1} \partial \phi / \partial y \end{aligned}$$

u_0 is hier weer een van x , y en t onafhankelijke grondstroming.

We behouden alleen termen van de 1e graad in de storing, zodat

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + v_g \frac{df}{dy} \quad (2.18)$$

of, in verband met (2.16)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) f^{-1} \nabla^2 \phi + f^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{df}{dy} = 0$$

Voor vlakke golven, loodrecht op de x -as en onafhankelijk van y ,

$$\phi(x, y) = \exp(ikx - i\omega t)$$

wordt de frekwentievergelijking

$$i\omega k^2 - iu_0 k^3 + ik \frac{df}{dy} = 0$$

zodat

$$c = u_0 - \beta L^2 / 4\pi^2$$

met $\beta \equiv df/dy$ en $L = 2\pi/k$, de golflengte. We vinden dus, dat de vergelijking (2.17) inderdaad slechts één soort golven beschrijft en wel de Rossby-golven, waarvan de voortplantingssnelheid de orde van grootte heeft van de windsnelheid. Inderdaad bevat (2.17) dus geen ruis meer. Met de ruis zijn echter ook andere oplossingen verdwenen, n.l. alle processen, waarin de horizontale storingsdivergentie ongelijk nul is en alle barokliene processen.

De vergelijking (2.17) geldt in het xyp -stelsel, dat slechts verschijnselen op

kleine schaal kan beschrijven. Verschillende benaderingen waren echter alleen toelaatbaar voor processen op grote schaal. We gaan daarom deze vergelijking transformeren in een nieuw assenstelsel, dat wèl rekening houdt met de kromming van de aarde. Doordat in (2.17) alleen de x en y coördinaat voorkomen kan hiervoor een conforme transformatie gekozen worden, die het voordeel heeft de vorm der differentiaaloperatoren invariant te laten.

We beelden daartoe het (bolvormig gedachte) aardoppervlak conform af op een plat vlak, dat we het kaartvlak noemen. Beschouw in dit kaartvlak cartesische coördinaten x' en y', zodat dus

$$\text{grad}' = \hat{i}' \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{j}' \frac{\partial}{\partial y'} = \hat{\nabla}'$$

We kunnen nu elke coördinatenlijn x' = const. of y' = const. beschouwen als de conforme afbeelding van zekere lijnen x = const. en y = const. op de aarde. Bij de Mercatorprojectie kunnen dit de meridianen en breedtecirkels zijn. Bij een circumpolaire steografische projectie is er echter geen eenvoudig verband met de bekende aardrijkskundige coördinaten. Heeft onze conforme afbeelding nu de schaalfactor m^{*} = m^{*}(x,y), dan is de relatie tussen de weglengte-elementen ds en ds' op aarde en op de kaart resp.:

$$(ds')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 = m^{*2} [(dx)^2 + (dy)^2] = m^{*2} (ds)^2$$

Hierin is m^{*} onafhankelijk van de richting waarin ds genomen wordt. I.h.b. is

zodat

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{1}{m^*} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{1}{m^*} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\hat{\nabla}' = \frac{1}{m^*} \hat{\nabla}$$

en

$$\frac{\partial}{\partial (x',y')} = \frac{1}{m^{*2}} \frac{\partial}{\partial (x,y)}$$

(2.17) wordt derhalve

$$m^{*2} \hat{\nabla}'^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = m^{*2} \frac{\partial}{\partial (x',y')} (m^{*2} f^{-1} \hat{\nabla}'^2 \phi + f_1 \phi)$$

of, met weglating van de accenten:

$$\nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial (x,y)} (f^{-1} m^{*2} \nabla^2 \phi + f_1 \phi) \quad (2.18)$$

Dit is de Barotrope voorspellingsvergelijking voor een bolvormige aarde.

Tabel 2. Waarden van de schaalfactor m^{*} als functie van de geografische breedte φ, a) bij de conforme projectie van Lambert op een kegel door de breedtecirkel van 30° en 60°, b) bij stereografische projectie uit de zuidpool.

	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°
m [*] (φ) a)	-	1.29	1.08	1.00	0.97	0.97	1.00	1.06	1.15	1.28
b)	0.93	0.94	0.96	1.00	1.06	1.14	1.24	1.39	1.59	1.86

Hoofdstuk III.

Integratie van barotrope voorspellingsvergelijking.

A. Het beginvoorwaardenprobleem; het criterium van Courant, Friedrichs en Lewy voor de convergentie van numerieke oplossingen.

De oplossing van een partiële differentiaalvergelijking met gegeven grensvoorwaarden laat zich in het algemeen benaderen door de differentiaalquotienten te vervangen door differentiequotienten. Voor een vergelijking met 2 onafhankelijk veranderlijken x en y komt dit erop neer, dat men het x - y vlak overdekt met een rooster. De waarde van de afhankelijk veranderlijke, ψ , in de "randroosterpunten" is bekend uit de grensvoorwaarden. Na het oplossen van N lineaire vergelijkingen met N onbekenden (n.l. de waarden van de afhankelijk variabele, ψ , in de inwendige roosterpunten) verkrijgt men een benaderde oplossing $\psi_{h,k}(x,y)$ in een discreet aantal punten. $\psi_{h,k}(x,y)$ hangt nog van de roosterconstanten $h = \Delta x$ en $k = \Delta y$ af. In vele gevallen zal

$$\psi_{h,k}(x,y) \rightarrow \psi(x,y) \quad \text{voor } h, k \rightarrow 0, 0$$

In het bijzonder is door Courant, Friedrichs en Lewy (1928) bewezen, dat deze convergentie bij elliptische differentiaalvergelijkingen verzekerd is (mits de grensvoorwaarden voldoende continuïteit bezitten) en wel onafhankelijk van de wijze, waarop

$$h, k \rightarrow 0, 0.$$

Bij parabolische en hyperbolische vergelijkingen is echter alleen convergentie te bewijzen, indien h en k op een speciale manier tot nul naderen.

Dit betrekkelijk onverwachte resultaat kan op eenvoudige wijze worden verduidelijkt bij de 1-dimensionale golfvergelijking

$$\partial^2 \psi / \partial t^2 = c^2 \partial^2 \psi / \partial x^2$$

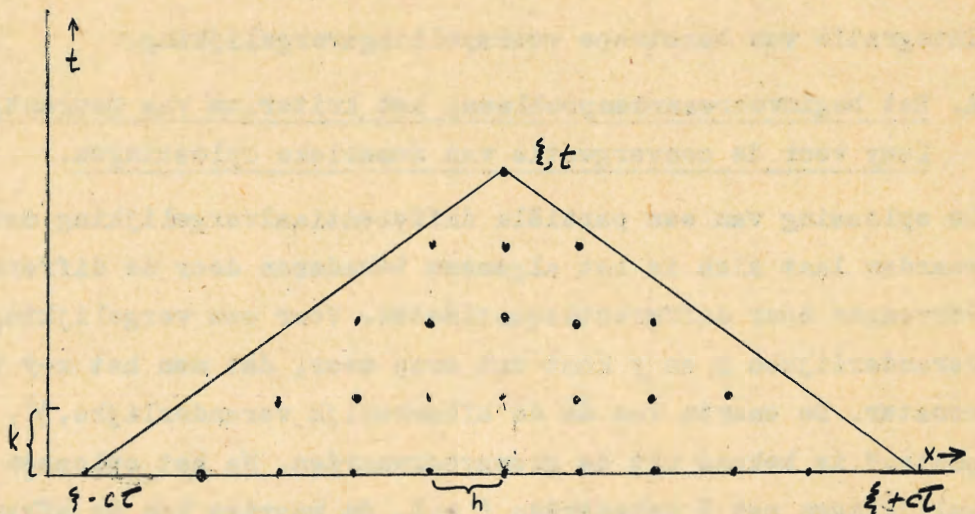
De meest algemene oplossing hiervan is

$$\psi(x,t) = F_1(x+ct) + F_2(x-ct)$$

waarin F_1 en F_2 volkomen willekeurige funkties zijn. Het is nu gemakkelijk in te zien, dat $\psi(\xi, \tau)$ alleen afhangt van de beginvoorwaarden op de x -as in het interval

$$\xi - c\tau \leq x \leq \xi + c\tau$$

fig. 3.1



Brengt men nu een rooster aan met $\Delta x = h, \Delta t = k$, dan is de corresponderende differentievergelijking, als $\psi(m,n)$ de oplossing van de differentievergelijking voorstelt in het punt (mh, nk) :

$$\psi(m, n+1) + \psi(m, n-1) - 2\psi(m, n) = \frac{k^2 c^2}{h^2} [\psi(m+1, n) + \psi(m-1, n) - 2\psi(m, n)]$$

Op deze wijze bouwt men een oplossing $\psi_{h,k}(\xi, \tau)$ op, die afhankelijk is van de (begin-) waarden op de x-as gelegen tussen $\xi - h\tau/k$ en $\xi + h\tau/k$. Is nu $h/k < c$ dan zal $\psi_{h,k}(\xi, \tau)$ niet van de relevante beginwaarden afhangen. Want hoe fijn men het rooster ook maakt bij gelijke verhouding h:k, er blijven toch steeds twee stukken op de x-as,

$$\xi - c\tau \leq x \leq \xi - \frac{h}{k}\tau \quad \text{en} \quad \xi + \frac{h}{k}\tau \leq x \leq \xi + c\tau$$

waarop de beginvoorwaarden wel invloed hebben op de waarde van $\psi(\xi, \tau)$, zonder dat deze evenwel in de oplossing $\psi_{h,k}(\xi, \tau)$ kunnen worden verwerkt. Voor convergentie van $\psi_{h,k}(\xi, \tau)$ tot $\psi(\xi, \tau)$ is blijkbaar nodig dat

$$\frac{h}{k} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \geq c$$

We zullen iets dieper op deze heuristische beschouwing ingaan. Daartoe stellen we ons de oplossing van de golfvergelijking als een Fourrierreeks voor:

$$\psi(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A(x) e^{ikx - i\omega t}$$

waarin

$$k = 2\pi \nu / L, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Omdat de coëfficiënten $A(k)$ in de volgende beschouwingen niet van belang zijn, stellen we deze gelijk 1. Beschouw nu een bepaalde Fouriercomponent

$$\psi_k(x,t) = e^{i k x - i \omega t}$$

Substitueer deze in de differentievergelijking

$$\psi(x, t+\Delta t) + \psi(x, t-\Delta t) - 2\psi(x, t) = c^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left[\psi(x+\Delta x, t) + \psi(x-\Delta x, t) - 2\psi(x, t) \right]$$

Dit geeft:

$$e^{-i\omega\Delta t} + e^{i\omega\Delta t} - 2 = c^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left[-4 \sin^2 k \frac{\Delta x}{2} \right]$$

We hebben dus voor het tijdsafhankelijk deel $Z = e^{-i\omega\Delta t}$ van ψ_k een vierkantsvergelijking:

$$Z^2 - 2 \left(1 - 2 c^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 k \frac{\Delta x}{2} \right) Z - 1 = 0 \quad (3.1)$$

We eisen nu dat ω reëel zal zijn (dus $|Z| = 1$) omdat anders exponentieel groeiende of afnemende golven ontstaan. Heeft (3.1) reële wortels, dan kunnen deze slechts beide gelijk één zijn, wanneer de discriminant verdwijnt. Een negatieve discriminant is ook toelaatbaar, omdat dan $|Z| = 1$.

Onze eis komt dus neer op de voorwaarde:

$$2 c^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 k \frac{\Delta x}{2} - 1 \leq 1$$

of

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq c \sin k \frac{\Delta x}{2}$$

of

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq c \quad \text{voor willekeurige } k$$

In het algemeen moet de verhouding van ruimtelijke- en tijdsdifferenties zo worden gekozen, dat een of andere verandering van een beginwaarde zich minstens even snel door het rooster voortplant als de snelste golven in het continue medium, die de differentiaalvergelijking toelaat. Dit is door Courant, Friedrichs en Lewy (1928) algemener bewezen. Is aan deze voorwaarde niet vol-

daan, dan krijgt de numerieke oplossing een exponentieel aangroeiende factor. Men spreekt van berekeningsonstabilitéit (computational instability), omdat het hier om een verschijnsel gaat, dat louter door het numerieke procédé veroorzaakt wordt.

We beschouwen nu meer in het bijzonder het barotrope model. De hierbij behorende storingsvergelijking is

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \phi + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

met $\xi_y = f^{-1} \nabla^2 \phi$ (vgl (2.18))

In differentievorm geschreven:

$$d^2 H \left[\frac{\phi(x, y, t + \Delta t) - \phi(x, y, t - \Delta t)}{2\Delta t} + u_0 \frac{\phi(x+d, y, t) - \phi(x-d, y, t)}{2d} \right] + \beta \frac{\phi(x+d, y, t) - \phi(x-d, y, t)}{2d} = 0$$

Hierin is $d = \Delta x = \Delta y$ en H een operator waarvoor geldt:

$$H\phi(x, y, t) \equiv \phi(x+d, y, t) + \phi(x-d, y, t) + \phi(x, y+d, t) + \phi(x, y-d, t) - 4\phi(x, y, t)$$

Aan de oorspronkelijke vergelijking voldoen vlakke golven:

$$\phi(x, y, t) = e^{ikx + i\mu y - i\omega t}$$

zodat

$$H\phi(x, y, t) = -4(\sin^2 kd/2 + \sin^2 \mu d/2) \phi(x, y, t)$$

Stel nu

$$Z = e^{-i\omega \Delta t}$$

Dan is

$$-\frac{(\sin^2 kd/2 + \sin^2 \mu d/2)}{d^2} \phi(x, y, t) \left(\frac{Z - Z^{-1}}{2\Delta t} + i \frac{u_0}{d} \sin kd \right) + i\beta \frac{\sin kd}{d} = 0$$

Dus

$$Z^2 + 2iaZ - 1 = 0$$

met

$$a = \left(U_0 - \frac{\frac{1}{4} \beta d^2}{\sin^2 Kd/2 + \sin^2 \mu d/2} \right) \frac{\Delta t}{d} \sin Kd$$

Voor reële ω moeten we weer eisen dat $|Z_1| = 1$ en $|Z_2| = 1$. Daartoe moet ditmaal de discriminant groter of gelijk nul zijn, of

$$a \leq 1.$$

Dus is de voorwaarde voor stabiliteit van het rekenproces

$$\frac{d}{\Delta t} \geq U_0 \sin Kd + \frac{\frac{1}{4} \beta d^2 \sin Kd}{\sin^2 Kd/2 + \sin^2 \mu d/2}$$

De eerste term rechts kunnen we majoreren door U_0 .

De tweede neemt toe met afnemende K en μ . We kunnen deze dus majoreren door

$$\frac{\beta d K}{K^2 + \mu^2}$$

Als we de storingsvergelijking willen oplossen in een rechthoekig gebied met zijden L_x en L_y , dan kunnen we K en μ minoreren door resp. $2\pi/L_x$ en $2\pi/L_y$, zodat

$$\frac{\beta d K}{K^2 + \mu^2} < \frac{2\pi \beta d}{L_x \left(\frac{4\pi^2}{L_x^2} + \frac{4\pi^2}{L_y^2} \right)} = \frac{\beta d L^2}{4\pi L_x}$$

waarin $L = \frac{1}{2} \sqrt{L_x^{-2} + L_y^{-2}}$

Voor niet te grote L en d overweegt de eerste term. We kunnen dan dus als (voldoende) voorwaarde stellen:

$$\frac{d}{\Delta t} \geq U_0$$

Voor $d = 10^5$ m en $U_0 = 10$ m/sec wordt Δt van de orde van 3 uur.

Zou men echter met een model werken, dat golven toelaat met fasesnelheid van b.v. 300 m/sec. (zwaartegolven) dan wordt het langst toelaatbare tijdsinterval bij deze d 6 minuten.

B 1. Het randvoorwaarden-probleem bij het barotrope model.

Terwijl de vraag, welke soort beginvoorwaarden gebruikt moeten worden bij de

barotrope voorspellingsvergelijking gemakkelijk te beantwoorden was, omdat deze van de eerste orde in de tijd is, levert het zoeken van goede randvoorwaarden iets meer moeilijkheden, wegens het optreden van derde orde ruimtelijke afgeleiden. We zullen ons ook hier weer tevreden moeten stellen met beschouwingen aan de hand van een sterk vereenvoudigd probleem om daarna een generalisatie uit te voeren die niet mathematisch gerechtvaardigd kan worden. Deze generalisatie is echter fysisch plausibel en blijkt bovendien bij praktische berekeningen goed te voldoen.

Beschouw dus de beweging van een tweedimensionale, wrijvingsloze, onsamendrukbare vloeistof over een cylinderoppervlak, waarop een naar de as gerichte "zwaartekracht" werkt. De lijnen y -constant zijn beschrijvende, de lijnen x -constant zijn hierop loodrechte cirkels. Wegens de onsamendrukbaarheid is er een stroomfunctie ψ . Er is geen rotatie van de cylinder om zijn as, zodat de voorspellingsvergelijking ontaardt in:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{div grad } \psi) = \frac{\partial}{\partial x} (\text{div grad } \psi) \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (\text{div grad } \psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.3)$$

Beschouw nu een ringvormig gebied G , begrensd door de cirkel $y = 0$ en $y = a$. Stel de randvoorwaarden:

$$\psi = x \quad \text{voor } y = 0 \quad \text{en } y = a \quad \text{en } t \geq 0.$$

Beginvoorwaarde:

$$\psi = x \quad \text{overal in } G \quad \text{voor } t = 0$$

Nu is er een oneindige verzameling oplossingen van de vorm:

$$\psi(x, y, t) = x + \frac{y}{a} [\beta(t) - \beta(t-a)] - [\beta(t) - \beta(t-y)] \quad (3.4)$$

Hierin mag voor β een willekeurige functie van zijn argument genomen worden, mits maar

$$\beta(t) = 0 \quad \text{voor } t \leq 0.$$

Immers, in onze coördinaten is $\text{div grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, zodat wegens

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{div grad } \psi) = \frac{\partial^3}{\partial t^3} \beta(t-y) = -\frac{\partial}{\partial y} \text{div grad } \psi$$

voldaan is aan (3.3). Ook de rand- en beginvoorwaarden zijn vervuld. Aangezien β willekeurig is wordt de stroming (zoals te verwachten was) niet bepaald door de randvoorwaarde: $\psi =$ gegeven. We zullen nu aantonen, dat dit wel het geval is, wanneer ook nog gegeven wordt:

div grad ψ op dat deel van de rand, waar vloeistof G binnenstroomt.

Laat dus $(\nabla^2 \psi)_{y=0} = F(t)$ een gegeven functie zijn.

Dus
$$\frac{d^2}{dt^2} \beta(t) = F(t)$$

of
$$\beta(t) = \int_0^t \int_0^{t'} F(t'') dt'' dt' + At \equiv \chi(t) + At$$

waarin A een willekeurige constante en $\chi(t)$ een volkomen bepaalde functie is.

Dus is nu

$$\psi(x, y, t) = x + \frac{y}{a} [\chi(t) - \chi(t-a)] + [\chi(t) - \chi(t-y)]$$

geheel bepaald.

Generaliserend zullen we nu stellen, dat goede randvoorwaarden voor de barotrope voorspellingsvergelijking zijn:

$$\left. \begin{array}{l} \phi \text{ overal op de rand voor alle } t > 0 \\ \nabla^2 \phi \text{ op dat deel van de rand, waar lucht binnenstroomt} \end{array} \right\} \text{ bekend}$$

B 2. Het randvoorwaarden-probleem in de praktijk; de invloedsfunctie voor het gelineariseerde 1½ dimensionale barotrope model.

Door in de storingsvergelijking van het barotrope model (1.17) de verticale vortiteitscomponent op de gebruikelijke manier te benaderen door

$$\zeta_g = f^{-1} \nabla^2 \phi$$

kunnen we deze schrijven als:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \tag{3.2}$$

waarin β nu de Rossby parameter voorstelt.

Willen we deze vergelijking nu voor een enkelvoudig samenhangend gebied G gaan integreren, dan dienen we volgens het voorgaande te beschikken over de waarden ϕ op de rand voor alle $t \geq 0$, en over de $\nabla^2 \phi$ van de binnenstromende lucht. Deze zijn echter niet bekend. Men zou hier liefst over de hele aarden willen integreren, waardoor de randen geheel verdwijnen. Maar doordat men slechts in beperkte gebieden over voldoende meteorologische gegevens beschikt zijn randen onvermijdelijk. Men kan echter fiktieve randvoorwaarden stellen en hopen dat de hierdoor veroorzaakte fouten niet te snel de oplossing binnen in G zullen bederven.

Om na te gaan of deze hoop gerechtvaardigd is onderzoeken we welke invloed de waarde van ϕ (randpunt) heeft op ϕ (binnenpunt). Hiertoe gaan we over op een "1 $\frac{1}{2}$ dimensionaal model". We nemen voor G een oneindig lange strook, begrensd door lijnen $y = 0$ en $y = a$. Bovendien scheiden we de y -afhankelijkheid van ϕ af, door te stellen

$$\phi(x, y, t) = (\sin \lambda y) \varphi(x, t)$$

waarin $\lambda = \pi/a$

(3.2) gaat nu over in

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda^2\right) \varphi + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (3.5)$$

Hieraan voldoen golven

$$\varphi(x, t) = e^{ikx - i\omega t}$$

mits

$$\omega = u_0 k - \frac{\beta k}{k^2 + \lambda^2} \quad (3.6)$$

We schrijven nu de gegeven beginwaarde als Fourier integraal:

$$\varphi(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \varphi(\xi, 0) e^{ik(x-\xi)} \quad (3.7)$$

Men verifieert gemakkelijk, dat dan

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \varphi(\xi, 0) e^{ik(x-\xi) - i\omega t} \quad (3.8)$$

zowel aan de beginvoorwaarde (3.7) als aan (3.5) voldoet.

De verandering van φ in het punt x in de tijd t wordt dus gegeven door:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \varphi(\xi, 0) (e^{-i\omega t} - 1) e^{ik(x-\xi)} \quad (3.9)$$

We introduceren nu een invloedsfunctie

$$J(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk (e^{-i\omega t} - 1) e^{ikx} \quad (3.10)$$

welke wegens (3.6) mede van λ afhankelijk is. Met behulp hiervan schrijven we, na verwisseling van de integratievolgorde:

$$\varphi(x, t) - \varphi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \varphi(\xi, 0) J(x - \xi, t)$$

Blijkbaar is $J(x - \xi, t)$ de Greenfunctie, die het gewicht geeft van de bijdrage welke van $\varphi(\xi, 0)$ uitgaat op de verandering van φ in x in de tijd t .

We zullen aantonen, dat deze invloed een begrensde dracht x heeft voor eindige t . Het geval $x = 0$, dat niet interessant is, sluiten we uit.

We splitsen $J(x, t)$ nu als volgt:

$$J = J_1 - J_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx - i\omega t} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}$$

J_2 heeft voor alle t alleen een bijdrage in $x = 0$.

J_1 heeft alleen een bijdrage voor stationaire fase, dus als

$$\frac{\partial}{\partial k} \left(kx - \omega_0 kt + \frac{\beta kt}{k^2 + \lambda^2} \right) = 0 \quad \text{of}$$

$$x - \omega_0 t = \frac{\beta (k^2 - \lambda^2)}{(k^2 + \lambda^2)^2} t \quad (3.11)$$

Voor vaste λ is de coëfficiënt van t ¹⁾ in het rechterlid een begrensde functie, deze heeft dus een maximum en een minimum.

1) Dit is de groepssnelheid van de golven $\varphi(x, t)$

We mogen dus zeggen, dat $J(x,t)$ verdwijnt buiten het interval met grenzen

$$X_1 = U_0 t + \min\left(\frac{\beta(k^2 - \lambda^2)}{(k^2 + \lambda^2)^2}\right) t \quad ; \quad X_2 = U_0 t + \max\left(\frac{\beta(k^2 - \lambda^2)}{(k^2 + \lambda^2)^2}\right) t$$

De waarden der extrema blijken bij berekening weinig realistisch te zijn.

Dit is te wijten aan de onderstelling, dat G in de x-richting oneindig lang is. Een betere benadering wordt verkregen door voor het gebied een rechthoek te nemen zoals in figuur 3.2.

Hierin is de lengte gelijk 2π (in de x-richting) en de breedte is gelijk $a = \pi/\lambda$ (in de y-richting).

We eisen dat $\varphi(x,t) = \varphi(x+2\pi, t)$ voor alle x,t

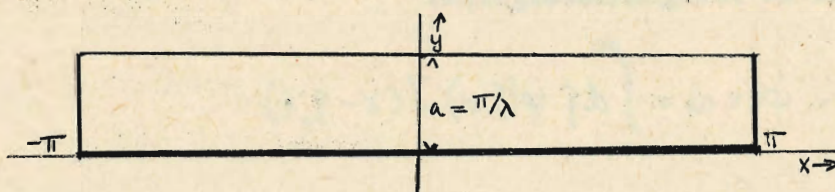


fig. 3.2

Dan wordt $\varphi(x,t) = \varphi(x - U_0 t, 0) + \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \varphi(\xi, 0) J'_\lambda(x - U_0 t - \xi, t)$

waarin nu $J'_\lambda(x,t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ckx} (e^{-c\omega' t} - 1)$ (3.12)

met $\omega' = -\frac{\beta k}{k^2 + \lambda^2}$

Deze reeks is numeriek te sommeren. (Zie Charney, Fjörtoft en v. Neumann (1950)) Voor een rechthoekig gebied met lengte = 8 maal de breedte ($\lambda = 4$) wordt het verloop van $J'_\lambda(x,t)$ voor $t = 1$ dag als volgt:

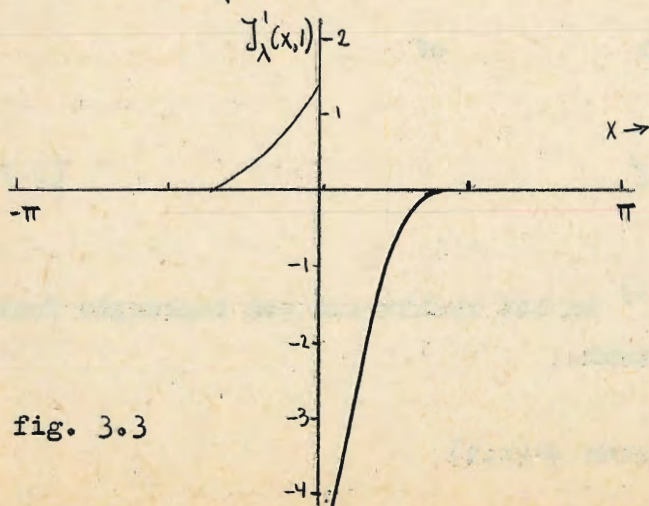


fig. 3.3

Met deze invloedsfunctie is het zelfs mogelijk voor een bepaalde breedtecirkel de geopotential van het 500 mb vlak over perioden van 24 uur met niet al te slecht resultaat te voorspellen. (Gates (1953))

Dit $1\frac{1}{2}$ dimensionale model is echter alleen bevredigend wanneer de gemiddelde stroming inderdaad ongeveer evenwijdig aan de beschouwde breedtecirkel is, een situatie, die zich lang niet altijd voordoet.

C. Enkele opmerkingen over digitale elektronische rekenmachines.

Terwijl in niet-digitale rekenmachines getallen (functies) op continue wijze door spanningen, stroomsterkten e.d. gerepresenteerd worden met een begrensde (meet-) nauwkeurigheid, worden in digitale rekenautomaten getallen op discontinue wijze exact voorgesteld. De digitale machines bestaan uit vijf organen:

1. invoer
2. geheugen
3. besturing
4. rekenorgaan
5. uitvoer

We zullen over deze organen heel kort iets zeggen, zonder op de technische werking ervan in te gaan. Daarbij zal in het algemeen de Nederlandse P.T.T.-machine ZEBRA als richtlijn gelden. (v.d. Peel (1956), vgl. ook Heijna (1955).)

Een geschikte invoer is een magnetische band of een ponsband (Zebra).

Deze laatste wordt met een snelheid van 100 symbolen per sec. afgelezen.

Een symbool is een letter of cijfer, gerepresenteerd door een combinatie van 5 al of niet geponste plaatsen op de band.

Het geheugen van zeer snelle machines wordt gevormd door een batterij kathodestraalbuizen, die in zeer snel tempo worden afgetast. Het eindoppervlak van de buis is in b.v. 1000 vakjes onderverdeeld. Heeft bij alle buizen b.v. het linker bovenvakje lading, behalve bij de laatste drie buizen, dan "leest" de machine het getal

000 0111

Dat is de binaire representatie van het decimale getal

$$2^0 + 2^1 + 2^2 = 7$$

Langzamer is de werking van het z.g. magnetische geheugen (Zebra), bestaande uit een snel roterende cylinder welke met magnetisch materiaal is bedekt. Op een cirkelomtrek van enkele mm breedte (spoor) onderscheidt de machine ruim duizend magneetjes die N of Z kunnen zijn. Een reeks van 33 achter elkaar liggende magneetjes vormt hier een binair getal. De Zebra telt 256 sporen, zodat het geheugen ruim 8000 getallen van 9 decimalen bevat. Bij een toerental van 100 Hz wordt elk getal één maal per 10 millisecon. afgetast. Bepaalde getallen, die vaker beschikbaar moeten zijn, worden vastgelegd in het "korte geheugen", dat 32 plaatsen bevat en 32 maal zo snel is.

Rekenorgaan. In een mechanische rekenmachine worden getallen gerepresenteerd door aantallen nokken, die uit tandwielen naar buiten steken. In een electro-nische machine berust de werking van het rekenorgaan in principe op het al of niet stroom voeren van buizen in flipflopschakeling. Men heeft hiermee optelorganen en vermenigvuldigorganen geconstrueerd. De Zebra kent alleen optelorganen. Een optelling duurt $1/3$ msec. wanneer de beide getallen direkt beschikbaar zijn. Moet het getal eerst nog in het geheugen opgezocht worden, dan gemiddeld 5 msec. Een vermenigvuldiging, b.v. $9 \times$ (zeker getal) komt in het tweetallig stelsel neer op

$$1001 \times (\text{zeker getal})$$

dat is (zeker getal) + ("zeker getal", 3 plaatsen naar links verschoven).

Een willekeurige vermenigvuldiging wordt door de Zebra in iets meer dan 20 msec. gedaan. Voor machten van twee wordt deze tijd aanzienlijk korter.

Het besturingsorgaan is een soort centrale schakelkamer. Deze bepaalt, welk getal uit het geheugen moet worden genomen en waar dit heen gevoerd moet worden. Dat kan zijn naar het optelorgaan, de uitvoer etc. maar ook naar de besturing zelf. Men kan dus opdrachten (in codevorm) aan de besturing in het geheugen stoppen. Doordat de opdrachten in binaire code zijn vervat, kan de machine ook met zijn opdrachten "rekenen". Hij kan zedoende zijn opdrachten volgens een van te voren opgesteld schema zelf wijzigen, al naar de omstandigheden. Hij kan b.v. een reeksontwikkeling afbreken, als de laatst uitgerkende term kleiner is dan een van te voren opgegeven bedrag. Of een vijandelijke pion van het schaakbord slaan, als hij de schaakregels in het geheugen heeft.

Het uitvoerorgaan is meestal een snel schrijvende elektrische schrijfmachine.

De berekening wordt gesplitst in elementaire bewerkingen. Deze worden in volgorde opgeschreven en in machinecode vertaald: programma. Dit wordt op een ponsband gezet en in de machine ingevoerd. De programmeur zal er steeds op bedacht zijn, series van dezelfde bewerkingen, die meer dan één maal in een berekening voorkomen (zij het dan met andere getallen) tot een subprogramma samen te voegen, waarnaar verder verwezen kan worden. Daardoor zijn reeksontwikkelingen en iteratiemethodes aantrekkelijk. Moet van een getal de log genomen worden, dan laat men dit de machine zelf uitrekenen. Voor uitvoerige tafels is in het geheugen geen plaats. Desgewenst laat men subprogramma's voor log, sin, tg etc. permanent in het geheugen zitten.

Controle. De aard van de machine is zodanig, dat eventuele fouten meestal een incidenteel karakter hebben. Men kan bij wijze van controle de machine de gehele berekening laten overdoen en opdracht geven dit net zo lang te herhalen

tot de laatste twee uitkomsten identiek zijn, en daarna pas het eindresultaat uit te typen. De "foutvrije tijd" schijnt voor de Zebra van de orde van 1 uur te zijn. Eventuele systematische fouten moeten door een onafhankelijke controle (van het type negenproef) aan het licht gebracht worden. Ondanks de enorme aantallen bewerkingen is de kans op insluipen van fouten niet zo heel groot. De meeste machinedefecten veroorzaken kolderuitkomsten of stilstand van de machine.

In het volgende zal bij de verschillende numerieke oplossingsmethodes nog nader worden ingegaan op enkele praktische aspecten, met name ten aanzien van de Zebra.

D. Numerieke integratiemethoden van de barotrope voorspellingsvergelijking.

O. Inleiding.

Voor het daadwerkelijke oplossen van de barotrope voorspellingsvergelijking:

$$\nabla^2 \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial(x, y)} \left[\frac{m^*(x, y)}{f(x, y)} \nabla^2 \phi(x, y, t) + f(x, y), \phi(x, y, t) \right] \quad (3.13)$$

bestaan verschillende methoden. Deze maken uiteraard alle gebruik van de beginvoorwaarde:

$$\phi(x, y, 0) = \text{gegeven,}$$

waardoor het gehele rechterlid voor $t = 0$ bekend is en (3.13) ontaardt in een Poissonvergelijking in $\partial\phi/\partial t$;

voorts op de een of andere manier van de randvoorwaarden:

$$\left. \begin{aligned} \partial\phi(\text{rand}, t)/\partial t &= \text{gegeven} \\ \nabla^2\phi(\text{instroomrand}, t) &= \text{gegeven.} \end{aligned} \right\} t \geq 0$$

De rand is, zoals past bij een Poissonvergelijking, een gesloten kromme.

Voor de vorm van de rand neemt men meestal een rechthoek.

We onderscheiden enerzijds machinale en niet-machinale methoden; anderzijds numerieke en grafische methoden. De verschillende numerieke methoden onderscheiden zich in hoofdzaak door de wijze waarop de in (3.13) vervatte Poissonvergelijking wordt opgelost.

	Numeriek	Grafisch
Machinaal	1) Analytische methode: Greenfuncties 2) Numerieke niet-itererende methoden: matrix inversie 3) Iteratiemethoden: a) Volgens Richardson b) Volgens Liebmann	
Niet-machinaal	c) Relaxatiemethode (Southwell)	4) Fjörtofts methode

In de berekening van het rechterlid van (3.13) komen geen principiële verschillen voor. De weerkaart wordt overdekt door een orthogonaal rooster. De roosterpunten worden in de x-richting genummerd met $m = 0, 1, \dots, p$ en in de y-richting met $n = 0, 1, \dots, q$. We nemen in het vervolg steeds de roosterconstanten $\Delta x = \Delta y = d$. Voor het numerieke equivalent van de vlakke Laplaceoperator gebruiken we voortaan de letter H

Dus

$$d^2 H \phi(m, n) = \phi(m+1, n) + \phi(m-1, n) + \phi(m, n+1) + \phi(m, n-1) - 4\phi(m, n) \quad (3.14)$$

Verder berekent men eens en voor altijd de waarden van de schaalfactor m^* en de coriolisparameter f in alle roosterpunten.

Het rechterlid van (3.13) is dan in enkele stappen te berekenen uit de beginvoorwaarden, als we nog de notatie invoeren :

$$\hat{H}(m, n, 0) = m^{*2}(m, n) f^{-1}(m, n) H \phi(m, n, 0) + f(m, n) \quad (3.15)$$

Het rechterlid is dan:

$$\begin{aligned} \hat{F}(m, n, 0) = & \frac{\hat{\eta}(m+1, n, 0) - \hat{\eta}(m-1, n, 0)}{2d} \cdot \frac{\phi(m, n+1, 0) - \phi(m, n-1, 0)}{2d} \\ & - \frac{\hat{\eta}(m, n+1, 0) - \hat{\eta}(m, n-1, 0)}{2d} \cdot \frac{\phi(m+1, n, 0) - \phi(m-1, n, 0)}{2d} \end{aligned} \quad (3.16)$$

We zullen het rechterlid in het vervolg als bekend beschouwen wanneer ϕ bekend is. Op de benodigde rekentijd komen we terug (blz. 63).

De meeste numerieke methoden stemmen voorts overeen wat betreft de tijdsintegratie. In elk punt wordt berekend:

$$\phi(m, n, v\Delta t) = \phi(m, n, (v-1)\Delta t) + \Delta t \frac{\partial \phi}{\partial t}(m, n, (v-1)\Delta t) \quad (3.17)$$

of beter, met gecentreerde differenties:

$$\phi(m, n, (v+\frac{1}{2})\Delta t) = \phi(m, n, (v-\frac{1}{2})\Delta t) + \Delta t \frac{\partial \phi}{\partial t}(m, n, v\Delta t) \quad (3.18)$$

Voor de verdere behandeling van de numerieke methoden richten we nu onze aandacht geheel op de oplossingsmethoden van de Poisson-vergelijking.

De grafische methode van Fjörtoft wordt apart behandeld (blz. 66 e.v.)

1.) Een analytische methode: Greenfuncties.

We behandelen eerst de 2-dimensionale, continue Poisson-vergelijking

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x, y) = F(x, y) \quad (3.19)$$

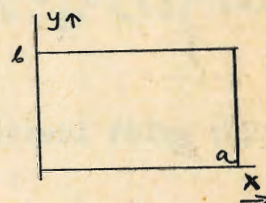


fig.3.4

voor een rechthoekig gebied (zie fig. 3.4). Hierin is ψ de tijdsafgeleide van de geopotential ϕ (van het 500 mb vlak).

We stellen als randvoorwaarde

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\text{rand}) = \psi(\text{rand}) = 0. \quad (3.20)$$

In werkelijkheid zal op de rand ϕ wel degelijk veranderen, maar aangezien we niet weten hoé, kunnen we weinig anders doen dan aannemen, dat $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$. (vgl. blz. 33 e.v.). Verder veronderstellen we

$$F(\text{rand}) = 0, \quad (3.21)$$

hetgeen neerkomt op de aanname dat

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi(\text{rand}, t) = 0$$

Dit is voor de instroomrand een goede randvoorwaarde, maar waar lucht over de rand naar buiten stroomt i.h.a. niet, zoals in III B1 is aangetoond.

Als (3.20) en (3.21) zouden gelden, konden we ψ en F in sinusreeksen ontwikkelen:

$$\psi(x,y) = \sum_{k,l} B_{kl} \sin k\pi x/a \sin l\pi y/b \quad (3.22)$$

en

$$F(x,y) = \sum_{k,l} \left\{ \frac{4}{ab} \int_0^a d\xi \int_0^b d\eta \sin k\pi \xi/a \sin l\pi \eta/b F(\xi,\eta) \right\} \sin k\pi x/a \sin l\pi y/b \quad (3.23)$$

waarin de vorm tussen accoladen de Fouriercoëfficiënt voorstelt.

Nu is

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x,y) = \sum_{k,l} - \left\{ \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b} \right)^2 \right\} B_{kl} \sin k\pi x/a \sin l\pi y/b \quad (3.24)$$

We kunnen de Poisson-vergelijking dus als volgt uitschrijven:

$$\sum_{k,l} \left\{ \left[\left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b} \right)^2 \right] B_{kl} + \frac{4}{ab} \int_0^a d\xi \int_0^b d\eta \sin k\pi \xi/a \sin l\pi \eta/b F(\xi,\eta) \right\} \sin k\pi x/a \sin l\pi y/b = 0 \quad (3.25)$$

(3.25) geldt identiek in x en y , zodat

$$B_{kl} = - \frac{4/ab}{\left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b} \right)^2} \int_0^a d\xi \int_0^b d\eta \sin k\pi \xi/a \sin l\pi \eta/b F(\xi,\eta) \quad (3.26)$$

Als we deze waarde voor B_{kl} in (3.22) invullen en de volgorde van som- en integraalteken verwisselen, komt er:

$$\psi(x,y) = - \int_0^a d\xi \int_0^b d\eta G(x,y|\xi,\eta) F(\xi,\eta), \quad (3.27)$$

waarin $G(x,y|\xi,\eta)$ voldoet aan:

$$G(x,y|\xi,\eta) = \frac{4}{ab} \sum_{k,l} \frac{\sin \frac{k\pi \xi}{a} \sin \frac{l\pi \eta}{b} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b}}{\left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b} \right)^2} \quad (3.28)$$

G is symmetrisch:

$$G(x,y|\xi,\eta) = G(\xi,\eta|x,y) \quad (3.29)$$

We merken nog op, dat voor het bijzondere geval

$$F(x,y) = -\delta(x-x_0) \delta(y-y_0)$$

waarin δ de deltafunctie van Dirac, voor ψ gevonden wordt:

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= \int_0^a d\xi \int_0^b d\eta G(x,y|\xi,\eta) \delta(\xi-x_0) \delta(\eta-y_0) \\ &= G(x,y|x_0,y_0) \end{aligned} \quad (3.30)$$

G is dus de Greenfunctie voor de Poisson-vergelijking met randvoorwaarden (3.20) en (3.21)

We zoeken nu voor het niet-continue geval een soortgelijke oplossing als (3.27). De Poissonvergelijking luidt nu, met de notaties van (3.14) en (3.16)

$$d^2 H \psi(m,n) = \psi(m+1,n) + \psi(m-1,n) + \psi(m,n+1) + \psi(m,n-1) - 4\psi(m,n) = d^2 \hat{F}(m,n) \quad (3.31)$$

Nu is b.v.

$$\begin{aligned} &\psi(m+1,n) + \psi(m-1,n) - 2\psi(m,n) = \\ &= \sum_{k,l} B_{kl} \left(\sin k\pi \frac{m+1}{p} + \sin k\pi \frac{m-1}{p} - 2 \sin k\pi \frac{m}{p} \right) \sin l\pi \frac{n}{q} = \\ &= \sum_{k,l} 2 B_{kl} \sin k\pi m/p (\cos \frac{\pi k}{p} - 1) \sin l\pi n/q = \\ &= - \sum_{k,l} 4 B_{kl} \sin^2 \frac{\pi k}{2p} \sin k\pi m/p \sin l\pi n/q \end{aligned} \quad (3.32)$$

zodat

$$d^2 H \psi(m,n) = - \sum_{k,l} 4 \left(\sin^2 \frac{\pi k}{2p} + \sin^2 \frac{\pi l}{2q} \right) B_{kl} \sin k\pi m/p \sin l\pi n/q \quad (3.33)$$

Verder is

$$\hat{F}(m,n) = \sum_{k,l} P_{k,l} \sin k\pi m/p \sin l\pi n/q \quad (3.34)$$

met

$$P_{k,l} = \frac{4}{pq} \sum_{\substack{\mu=1 \\ \nu=1}}^{p,q} \hat{F}(\mu,\nu) \sin k\pi \frac{\mu}{p} \sin l\pi \frac{\nu}{q}$$

We kunnen (3.31) dus als volgt uitschrijven:

$$0 = \sum_{k,l} \sin k\pi m/p \sin l\pi n/q \left[4 B_{kl} \left(\sin^2 \frac{\pi k}{2p} + \sin^2 \frac{\pi l}{2q} \right) + \frac{4d^2}{pq} \sum_{\mu, \nu=0}^{p,q} \hat{F}(\mu, \nu) \sin k\pi \mu/p \sin l\pi \nu/q \right] \quad (3.35)$$

Het is duidelijk dat men de sommatie over k en l kan beperken tot $k = 1, \dots, p-1$; $l = 1, \dots, q-1$, daar $k = 0$, p en $l = 0$, q de sinusfactoren nul maken en alle overige waarden een periodieke herhaling geven van het reeds gesommeerde gebied.

Zo vinden we nu

$$B_{kl} = -\frac{d^2}{pq} \sum_{\mu, \nu=1}^{p-1, q-1} \hat{F}(\mu, \nu) \frac{\sin k\pi \mu/p \sin l\pi \nu/q}{\sin^2 \frac{\pi k}{2p} + \sin^2 \frac{\pi l}{2q}} \quad (3.36)$$

De oplossing van de Poisson-vergelijking kan hiermee expliciet worden geschreven als een eindige som

$$\psi(m, n) = -\frac{d^2}{pq} \sum_{\mu, \nu, k, l=1}^{p-1, q-1} \hat{F}(\mu, \nu) \frac{\sin k\pi \mu/p \sin l\pi \nu/q \sin k\pi m/p \sin l\pi n/q}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p} + \sin^2 \frac{l\pi}{2q}} \quad (3.37)$$

De bijbehorende Greenfunctie $G(m, n | \mu, \nu)$ vinden we weer door te stellen:

$$\hat{F}(\mu, \nu) = -\delta_{\mu m_0} \delta_{\nu n_0}$$

waarin de δ ditmaal het Kronecker symbool. We vinden dan

$$G(m, n | m_0, n_0) = \frac{d^2}{pq} \sum_{k, l=1}^{p-1, q-1} \frac{\sin k\pi m_0/p \sin l\pi n_0/q \sin k\pi m/p \sin l\pi n/q}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p} + \sin^2 \frac{l\pi}{2q}} \quad (3.38)$$

Met behulp daarvan kunnen we schrijven:

$$\psi(m, n) = -\sum_{\mu, \nu=1}^{p-1, q-1} G(m, n | \mu, \nu) \hat{F}(\mu, \nu) \quad (3.39)$$

Wanneer niet met een vierkant gebied gewerkt wordt en dus $p \neq q$, zal

$$G(m, n | \mu, \nu) \neq G(m, n | \nu, \mu) \quad (3.40)$$

Voor de waarde $\psi(m, n)$ in één punt moet men dan beschikken over

$$(p-1) (q-1)$$

verschillende waarden van de Greenfunctie. Er is symmetrie om de beide diagonalen, zodat elke G-waarde 4 keer voorkomt.

Voor alle $(p-1) (q-1)$ inwendige punten (m, n) heeft men dus nodig

$$\frac{1}{4} (p-1)^2 (q-1)^2$$

waarden van G. Voor een grof rooster zijn p en q van de orde van 20, zodat het geheugen van een rekenmachine minstens ca. 4000 plaatsen zou moeten bevatten voor de Greenfunctie alleen. Het oplossen van de Poisson-vergelijking komt dan neer op $(p-1) (q-1)$ optellingen en vermenigvuldigingen per punt, in totaal dus (exclusief de berekening van G zelf) op

$$(p-1)^2 (q-1)^2 \text{ optellingen en vermenigvuldigingen}$$

Men heeft dan een exakte oplossing van de benaderende vergelijking (3.31).

De methode met de Greenfuncties is in 1950 gebruikt door J. von Neumann, J. Charney en R. Fjörtoft voor de ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer).

Deze machine had een zeer beperkt geheugen, zodat het niet mogelijk was de G-waarden daarin onder te brengen. Deze werden telkens opnieuw berekend, zodat feitelijk (3.31) direkt gesommeerd werd. Dit omslachtige procédé, dat met tijdsintervallen $t = 2$ uur 12 maal herhaald moest worden voor een voorspelling over 24 uur, kostte de machine ca. 24 uur. Desondanks zal het principiële belang van deze eerste numerieke voorspellingen duidelijk zijn. De resultaten waren bemoedigend. De optredende fouten waren in hoofdzaak als volgt te rubriceren:

- 1) Differentiefouten, veroorzaakt door het invoeren van differentiequotienten voor differentiaalquotienten. Deze zijn gemakkelijk te herkennen, doordat b.v. de grootheid \hat{h} , niet invariant bleek, wat in de oorspronkelijke vergelijkingen uiteraard wel zo is (\hat{h} is immers de absolute vortichtheid)
- 2) Barokliene effecten. In gebieden waar $\vec{k}_0 \cdot \vec{\nabla}_A (\omega^2 \partial \psi / \partial A) \neq 0$ traden soms flinke afwijkingen op, welke gepaard gingen met creatie van absolute vortichtheid.

2. Algemene matrixmethoden, eliminatie volgens Gauss.

We vatten (3.31) op als een stelsel van $N = (p-2)(q-2)$ lineaire vergelijkingen met N onbekenden. Laten we de roosterpunten doorlopend nummeren:

1	2	3	...	p-1	p
p+1	p+2	p+3	...	2p-1	2p

$$(q-1)p+1 \quad (q-1)p+2 \quad (q-1)p+3 \quad \dots \quad (q-1)p+p-1 \quad qp$$

In een of ander punt r noteren we nu kortweg $\hat{\psi}_r$ en F_r .

We beschouwen nu de kolommatrix $\hat{\psi}$, waarvan de elementen de waarden $\hat{\psi}_r$ zijn voor alle inwendige punten. Met $\hat{\psi}_p$ duiden we in het volgende de randwaarden aan.

Voor een geheel in het inwendige gelegen punt r wordt (3.31):

$$4\hat{\psi}_r - \hat{\psi}_{r'} - \hat{\psi}_{r''} - \hat{\psi}_{r'''} - \hat{\psi}_{r''''} = -d^2 \hat{F}_r \quad (3.41a)$$

Voor een aan de rand gelegen punt (b.v. $p + 3$) wordt (3.31):

$$4\hat{\psi}_p - \hat{\psi}_{r'} - \hat{\psi}_{r''} - \hat{\psi}_{r'''} = \hat{\psi}_p - d^2 \hat{F}_r \quad (3.41b)$$

Voor een in een hoek liggend punt (b.v. $p + 2$):

$$4\hat{\psi}_r - \hat{\psi}_{r'} - \hat{\psi}_{r''} = \hat{\psi}_p + \hat{\psi}_{p'} - d^2 \hat{F}_r \quad (3.41c)$$

We beschouwen nu de (bekende) rechterleden van de vergelijkingen (3.41abc) als de elementen b_r van een kolommatrix b . Zij nu L een N -bij- N matrix met louter getallen 4 op de hoofddiagonaal en verder op elke regel en kolom minstens 2 en hoogstens 4 getallen -1 , zodanig dat

$$L\hat{\psi} = b \quad (3.42)$$

het stelsel van N lineaire vergelijkingen van het type (3.41) representeert,

dat met (3.31) overeenkomt. We gaan nu de oplossing van (3.42) bestuderen. Als we deze methode met de analytische methode vergelijken, kunnen we twee voordelen opmerken:

1. Aangezien we niet op eenvoudige eigenfuncties aansturen, mag de vorm van de rand willekeurig zijn.
2. Om dezelfde reden hoeven we niet te veronderstellen dat in de randpunten zal gelden:

$$\hat{F}_\rho = 0.$$

Alvorens een schatting te maken van het aantal vermenigvuldigingen en optellingen, dat bij (3.42) nodig is voor de oplossing van de Poisson-vergelijking zullen we eerst nog even aantonen dat er een éénduidige oplossing bestaat. Hiertoe beschouwen we eerst het bijzondere geval

$$b = 0$$

dat zich voordoet voor de Laplacevergelijking met homogene randvoorwaarden, dus $\hat{F}_r = \hat{\psi}_\rho = 0$. We beweren, dat (3.42) in dit geval alleen de triviale oplossing heeft, nl.

$$\hat{\psi} = 0$$

Stel dat er elementen van $\hat{\psi}$ waren, die $\neq 0$ waren. Onder deze was er een grootste $\hat{\psi}_r$, waarvoor echter zou gelden:

$$4 \hat{\psi}_r = \hat{\psi}_{r^I} + \hat{\psi}_{r^{II}} + \hat{\psi}_{r^{III}} + \hat{\psi}_{r^{IV}}$$

zodat ook in alle naburige punten $\hat{\psi}$ gelijk $\hat{\psi}_r$ moest zijn. Deze redenering voortzettend zou ook in de randpunten $\hat{\psi}_\rho = \hat{\psi}_r \neq 0$ moeten zijn, in strijd met de onderstelling.

Daarmee is bewezen, dat

$$L \hat{\psi} = 0$$

alleen de triviale oplossing heeft. Dus is L niet-singulier. Daaruit volgt weer, dat (3.42) een éénduidige oplossing heeft. Dat wil zeggen, dat (3.42) bij gebruik van dezelfde randvoorwaarden (3.20) en (3.21) als bij de Greenfuncties, dezelfde oplossing zal geven. De Greenfuncties (3.40) zijn derhalve niets anders dan de elementen van de inverse matrix L^{-1} .

Noteren we nu de Greenfunctie even als

$$G (r | r_0)$$

dan geldt wegens de symmetrie van G in $r \leftrightarrow r_0$ blijkbaar ook

$$(L^{-1}) r r_0 = (L^{-1}) r_0 r$$

Dus de inverse matrix L^{-1} is symmetrisch, dus geldt ook, als L' de gespiegelde van L is

$$L = L' \quad (3.43)$$

De daadwerkelijke oplossing van (3.42) wordt niet uitgevoerd met behulp van de formele oplossing

$$\psi = L^{-1} b$$

want dit proces vereist de berekening van $N^2 (N-1)$ bij $(N-1)$ determinanten ¹⁾, hetgeen circa N^5 vermenigvuldigingen vergt. Gebruikt men de regel van Cramer, dan wordt dit aantal van de orde N^4 .

Voordeliger werkt men met de bekende eliminatiemethode van Gauss (de H.B.S.-methode !), waarbij men de oorspronkelijke N vergelijkingen herleidt tot een stelsel van $(N-1)$ vergelijkingen met $(N-1)$ onbekenden. Dit kost $2 N (N-1)$ vermenigvuldigingen en $N (N-1)$ optellingen in het geval van een algemene matrix. Dit proces wordt $N-1$ maal herhaald met steeds kleiner wordend aantal vergelijkingen.

Het werk is in het algemene geval (Zie b.v. Booth, 1955)

$$2 \left[N (N-1) + (N-1) (N-2) + \dots + 2 \cdot 1 \right] = (2/3) N (N^2 - 1) \text{ vermenigvuldigingen}$$

en de helft van dit aantal optellingen. Het zo verkregen stelsel vergelijkingen laat zich met $\frac{1}{2} N^2$ vermenigvuldigingen en $\frac{1}{2} (N-1)^2$ optellingen oplossen. Het totale werk is dus voor grote N van de orde

$$N^3 \text{ optellingen \& n vermenigvuldigingen.}$$

Door de eenvoudige vorm van L zal dit bij schatting gereduceerd worden tot:

$$N^2 \sqrt{N}$$

Aangezien N bij de barotrope voorspellingsvergelijking van de orde 10^3 is, springt het voordeel van het eliminatieproces volgens Gauss duidelijk in het oog.

1) N is van de orde 10^3 .

We hebben ook hier weer een exakte oplossing. De methode volgens Gauss is bij schatting een faktor

$$10 \sqrt{N}$$

voordeliger dan de methode van direkte sommatie van (3.37) maar eist een groter geheugen. Daarentegen is de methode Gauss onvoordeliger dan de sommatie van (3.39), waarvoor, als de Greenfunctie eenmaal in het geheugen is ondergebracht, slechts ongeveer

$$N^2$$

vermenigvuldigingen en optellingen zijn vereist. Het is echter gebleken, dat de niet-exakte oplossingen van (3.42) welke langs iteratieve weg worden verkregen, nog aanmerkelijk sneller zijn, n.l. ongeveer (zie (3.74))

$$10 N \sqrt{N} \quad \text{optellingen en vermenigvuldigingen}$$

De convergentie van deze methoden is echter een punt dat nauwkeurige overweging vereist.

3. Iteratie methoden.

a) Algemeen convergentie criterium.

We zoeken de oplossing van (3.42) als limiet van een rij benaderingen

$$\hat{\psi}^{(0)}, \hat{\psi}^{(1)}, \dots, \hat{\psi}^{(j)}, \dots$$

$$\text{Laat } L \hat{\psi}^{(j)} - b \equiv a^{(j)} \quad (3.44)$$

dan noemen we $a^{(j)}$ de residuvektor van de j -de benadering.

Onze oplossing is bereikt, zodra

$$a^{(j)} = 0$$

Nodig en voldoende daartoe is, dat het inproduct van $a^{(j)}$ met zichzelf verdwijnt:

$$(a^{(j)}, a^{(j)}) = 0 \quad (3.45)$$

Hoe we onze benaderingen $\hat{\psi}^{(j)}$ krijgen is in beginsel willekeurig.

We willen echter een algemene methode zoeken, om uit $\hat{\psi}^{(j)}$ een $\hat{\psi}^{(j+1)}$ af

te leiden, waarvan we zeker weten, dat

$$(a^{(j+1)}, a^{(j+1)}) < (a^{(j)}, a^{(j)}) \quad (3.46)$$

Stel nu
$$\hat{\psi}^{(j+1)} = \hat{\psi}^{(j)} - \lambda_j c^{(j)}, \quad (3.46a)$$

waarin λ_j een nader te bepalen scalar en $c^{(j)}$ een voorlopig ongespecificeerde correctievector. De voorwaarde (3.46) kunnen we m.b.v. (3.44) omzetten in

$$(a^{(j)} - \lambda_j L c^{(j)}, a^{(j)} - \lambda_j L c^{(j)}) < (a^{(j)}, a^{(j)})$$

of

$$- 2 \lambda_j (a^{(j)}, L c^{(j)}) + \lambda_j^2 (L c^{(j)}, L c^{(j)}) < 0 \quad (3.47)$$

We zijn echter met de voorwaarde (3.47) nog niet tevreden.

We wensen λ_j zó te bepalen, dat we $(a^{(j+1)}, a^{(j+1)})$ als functie van λ_j beschouwd, zo klein mogelijk maken. We zoeken dus ook nog het minimum van

$$f(\lambda_j) \equiv \lambda_j^2 (L c^{(j)}, L c^{(j)}) - 2 \lambda_j (a^{(j)}, L c^{(j)}) + (a^{(j)}, a^{(j)})$$

Aangezien $(L c^{(j)}, L c^{(j)}) > 0$ is er inderdaad een minimum, dat juist halverwege de beide wortels

$$(\lambda_j)_1 = 0 \text{ en } (\lambda_j)_2 = \frac{2 (a^{(j)}, L c^{(j)})}{(L c^{(j)}, L c^{(j)})} \quad (3.48)$$

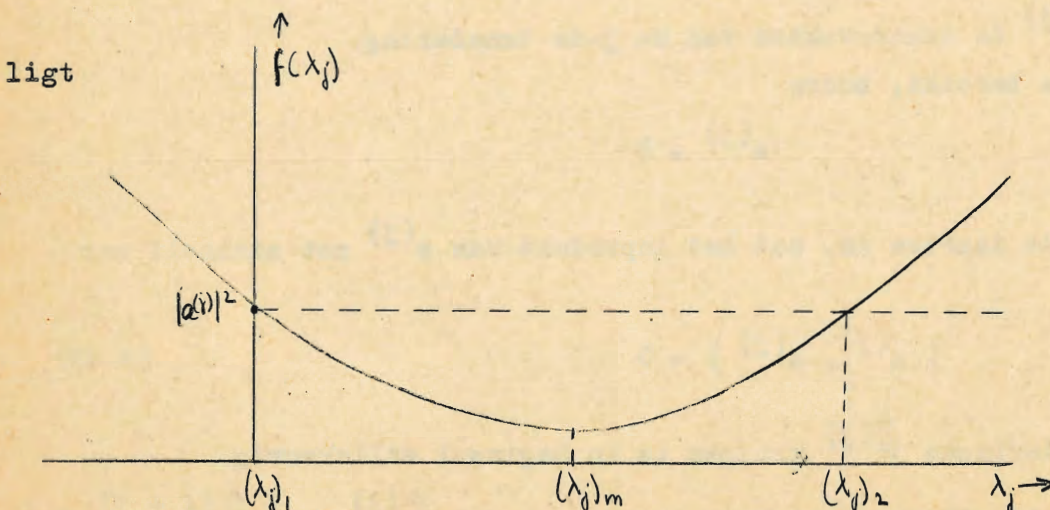


fig. 3.5

Hiermee is bewezen, dat voor een willekeurige matrix L en voor willekeurig gekozen correctievectoren $c^{(j)}$ de rij

$$\hat{\psi}^{(0)}, \hat{\psi}^{(1)}, \dots, \hat{\psi}^{(j)} \text{ convergeert naar } \hat{\psi},$$

mits steeds $\lambda_j = \frac{(a^{(j)}, L c^{(j)})}{(L c^{(j)}, L c^{(j)})}$ gekozen wordt.

Er bestaat nu een grote verscheidenheid numerieke procédés, welke ieder hun speciale keuze van $c^{(j)}$ voorschrijven. Voor zover bekend is niet algemeen te zeggen, welk proces het beste is voor een gegeven vergelijking met gegeven rand en randvoorwaarden.

In de rekenpraktijk voor de Poisson-vergelijking zijn echter twee methoden op de voorgrond getreden. De oudste methode is die van L.F. Richardson (1911), welke in de handen van R.V. Southwell uitgegroeid is tot de relaxatiemethode. Daarnaast wint door de elektronische rekenautomaat de methode Liebmann (1918) en speciaal de door S.P. Frankel (1950) gepropageerde "geextrapoleerde methode-Liebmann" veld. Kenmerkend voor beide methoden is de simpele keuze van de correctievector: $c^{(j)}$ heeft in beginsel slechts één element dat ongelijk nul is. Door de eenvoudige vorm van L kan voor $(\lambda_j)_m$ een constante, onafhankelijk van j gekozen worden, wat een groot voordeel is. De relaxatiemethode, die niet geschikt is voor rekenautomaten, bevat geen starre voorschriften. Aan het inzicht van de rekenaar wordt overgelaten om zonedig λ iets groter of kleiner dan de vastgestelde constante te kiezen ("onder relaxatie" resp. "over relaxatie") en eventueel zelfs voor $c^{(j)}$ een vektor te nemen met een groter aantal elementen ongelijk nul ("blokrelaxatie").

Gezien de ruime voorwaarden (3.48) waarbinnen convergentie heerst en de één-duidigheid van de oplossing van de Poisson-vergelijking, zijn in de praktijk geen foutieve uitkomsten te vrezen. Eventuele fouten vertragen de convergentie, maar leiden niet tot verkeerde oplossingen, omdat ze bij volgende benaderingen voortdurend verkleind worden.

b) De methode Richardson; relaxatiemethode.

We zullen nu de methode van Richardson behandelen toegepast op de Poissonvergelijking (3.31) met randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\text{rand}) &= 0 \quad (\text{niet essentieel!}) \\ \hat{F}(\text{rand}) &= \text{willekeurig} \end{aligned}$$

We gebruiken in elk inwendig punt (m,n) een correctie, bestaande uit een positieve faktor λ maal het residu in (m,n)

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^{(j+1)}_{(m,n)} &= \hat{\psi}^{(j)}_{(m,n)} + \lambda [d^2 H \hat{\psi}^{(j)}_{(m,n)} - d^2 \hat{F}_{(m,n)}] = \\ &= \hat{\psi}^{(j)}_{(m,n)} + \lambda [\hat{\psi}^{(j)}_{(m-1,n)} + \hat{\psi}^{(j)}_{(m+1,n)} + \hat{\psi}^{(j)}_{(m,n+1)} + \hat{\psi}^{(j)}_{(m,n-1)} - 4\hat{\psi}^{(j)}_{(m,n)} - d^2 \hat{F}_{(m,n)}] \text{ voor } (m,n) \text{ inwendig,} \\ \hat{\psi}^{(j+1)}_{(m,n)} &= \hat{\psi}^{(j)}_{(m,n)} = 0 \text{ voor } (m,n) \text{ op de rand.} \end{aligned} \quad (3.49)$$

....

We beschouwen nu niet de residuvektor a , maar de fout ϵ t.o.v. de ware oplossing $\hat{\psi}$:

$$\epsilon^{(j)}_{(m,n)} \equiv \hat{\psi}^{(j)}_{(m,n)} - \hat{\psi}_{(m,n)}$$

Als we deze relatie in (3.49) substitueren, krijgen we een recurrente betrekking voor $\epsilon^{(j)}_{(m,n)}$:

$$\begin{aligned} \epsilon^{(j+1)}_{(m,n)} &= \epsilon^{(j)}_{(m,n)} + \lambda d^2 H \epsilon^{(j)}_{(m,n)} && (m,n) \text{ inwendig} \\ \epsilon^{(j+1)}_{(m,n)} &= 0 && (m,n) \text{ rand} \end{aligned}$$

want voor de ware oplossing $\hat{\psi}$ is de vorm tussen [] nul.

We gaan nu ϵ ontwikkelen naar eigenfuncties van de operator $d^2 H$ bij een rechtehoekige rand. Aangezien op de rand $\epsilon = 0$, zijn de eigenfuncties (vgl. (3.22)) :

$$\epsilon_{kl}(m,n) = \sin k\pi m/p \sin l\pi n/q \quad (3.50)$$

met $m = 1, 2, \dots, p-1$

$n = 1, 2, \dots, q-1$

Uit (3.33) zien we, dat de bijbehorende eigenwaarden van $d^2 H$ zijn:

$$(d^2 H)_{kl} = -4 \left(\sin^2 \frac{\pi k}{2p} + \sin^2 \frac{\pi l}{2q} \right) \quad (3.51)$$

Deze eigenwaarden zijn alle negatief. De kleinste en grootste in absolute waarde behoren bij $k = l = 1$ resp. $k = p-1$ en $l = q-1$. Deze geven we aan met $(d^2 H)_0$ en $(d^2 H)_m$ resp.

$$\left. \begin{aligned} (d^2H)_0 &\cong -\pi^2 (p^{-2} + q^{-2}) \\ (d^2H)_m &\cong -8 + \frac{2}{\pi} (p^{-2} + q^{-2}) \end{aligned} \right\} (3.52)$$

Deze eigenfuncties (3.50) zijn ook de eigenfuncties voor de "iteratieoperator"

$$K \equiv 1 + \lambda d^2H$$

De corresponderende eigenwaarden zijn

$$K_{kl} = 1 + \lambda (d^2H)_{kl} \quad (3.53)$$

We kunnen nu voor de eerste benadering $\hat{\psi}^{(0)}$ de fout in het punt (m,n) schrijven als:

$$\epsilon^{(0)}(m,n) = \sum_{k,l} g_{kl} \epsilon_{kl}(m,n) \quad (3.54)$$

waarin g_{kl} de ontwikkelingscoëfficiënten zijn. Dan is

$$\epsilon^{(j)}(m,n) = \sum_{k,l} g_{kl} \epsilon_{kl}(m,n) K_{kl}^j \quad (3.55)$$

Naarmate j toeneemt verdwijnen de componenten ϵ_{kl} , waarvoor

$$|K_{kl}| < 1 \quad (3.56)$$

des te sneller, naarmate $|K_{kl}|$ kleiner is. Deze iteratiemethode met zijn vaste waarde van λ is dus alleen convergent, indien (3.56) voor alle k en l geldt. De uiteindelijke convergentiesnelheid wordt bepaald door de grootste waarde onder de $|K_{kl}|$, noem deze K^* .

Letten we alleen op de algebraïsche waarde, dan hebben we voor K_{kl} het interval (zie (3.52)):

$$K_m \equiv 1 + \lambda (d^2H)_m \leq K_{kl} \leq 1 + \lambda (d^2H)_0 \equiv K_0 \quad (3.57)$$

De = tekens gelden voor $k, l = 1, 1$ en $k, l = p-1, q-1$. Dus is

$$K^* = \text{grootste van } (|K_m|, |K_0|)$$

voor $\lambda = 0$ is $K^* = 1$. Laten we nu λ aangroeien, dan daalt K_0 langzaam vanaf 1 en K_m snel. Voor kleine λ zal dus $K^* = K_0 > 0$. Voor grotere waarden van λ wordt K_m zo sterk negatief, dat $|K_m| > K_0$. Dan is dus $K^* = |K_m|$. Verdere toename van λ maakt K^* nog groter.

De kleinste waarde van K^* (dus de snelste convergentie) bereiken we voor die λ , waarvoor juist

$$K_0 = 1 + \lambda(d^2H)_0 = |K_m| = -(1 + \lambda(d^2H)_m)$$

$$\text{Dus } \lambda = \frac{-2}{(d^2H)_0 + (d^2H)_m} = \frac{1}{4}$$

Bij deze optimale keuze van λ zullen de "hardnekkigste" eigenfuncties voor \mathcal{E} , n.l. $\mathcal{E}_{1,1}$ en $\mathcal{E}_{p-1,q-1}$ juist met gelijke snelheid afnemen, en wel volgens:

$$K^* = 1 - \sin^2 \frac{\pi}{2p} - \sin^2 \frac{\pi}{2q} = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{p} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{q} \cong \\ \cong 1 - \frac{1}{4} (p^{-2} + q^{-2}) \pi^2 \quad (3.58)$$

De methode Richardson werkt dus met het iteratievoorschrift:

$$\hat{\psi}^{(j+1)}(m,n) = \hat{\psi}^{(j)}(m,n) + \frac{1}{4} (d^2H^{(j)}(m,n) - d^2 \hat{F}(m,n)) \quad (3.59)$$

Variaties op dit starre voorschrift worden bij niet machinale berekeningen veelvuldig toegepast. Men spreekt dan van relaxatie. Enkele punten zijn hierbij van belang.

Het is nuttig, de eerste benadering $\hat{\psi}^{(0)}$ zo te kiezen, dat de fouten $\mathcal{E}_{1,1}^{(0)}$ (de "grondtoon") en $\mathcal{E}_{p-1,q-1}^{(0)}$ (de "hoogste boventoon") klein zijn. Als $p \cong q \cong 20$, worden per iteratie de hierbij behorende fouten slechts enkele procenten kleiner. Door ervaring is het mogelijk een goede $\hat{\psi}^{(0)}$ te kiezen. Blijkt tijdens de berekening (die uit de hand wordt gedaan) dat toch een vrij grote grondtoonfout aanwezig is, dan kan deze door blokrelaxatie worden verminderd.

Verder wordt de convergentie aanmerkelijk bespoedigd door telkens het punt uit te zoeken met het grootste residu

$$d^2H \hat{\psi}^{(j)}(m,n) - d^2 \hat{F}(m,n)$$

en dáárop de correctie toe te passen.

Dit opsporen van het grootste residu gaat zeer snel met behulp van het menselijk oog; voor de rekenautomaat is het echter een uitvoerige bewerking. Voor het oplossen van de barotrope voorspellingsvergelijking is de relaxatiemethode verschillende malen toegepast. Aangezien de "relaxatietijd" volgens (3.58) ongeveer kwadratisch toeneemt met het aantal roosterpunten gebruikt men meestal een grof rooster. Het berekenen van $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ uit de beginvoorwaarden kost dan ongeveer 6 uur voor een ervaren rekenaar. Vgl. Bolin en Charney (1951). Het relaxatieproces is alleen geschikt om, zonder rekenautomaat, een speciaal geval te onderzoeken. Voor routinevoorspellingen is het ten ene male ongeschikt.

c). De geëxtrapoleerde methode-Liebmann.

De methode Liebmann is een correctieproces, dat evenals de methode Richardson op individuele punten wordt toegepast. Men werkt hier echter systematisch rij na rij af. Reeds aangebrachte verbeteringen worden, anders dan bij Richardson, direkt bij de volgende benaderingen mee verwerkt.

Met dezelfde probleemstelling en notaties als in b), wordt nu het iteratievoorschrift:

$$\hat{\psi}^{(j+1)}(m,n) = \hat{\psi}^{(j)}(m,n) + \lambda \left[\hat{\psi}^{(j+1)}(m-1,n) + \hat{\psi}^{(j)}(m+1,n) + \hat{\psi}^{(j+1)}(m,n-1) + \hat{\psi}^{(j)}(m,n+1) - 4\hat{\psi}^{(j)}(m,n) - d^2 F(m,n) \right]$$

voor (m,n) inwendig, } (3.60)

$$\hat{\psi}^{(j+1)}(m,n) = \hat{\psi}^{(j)}(m,n) = 0$$

voor (m,n) randpunt }

Het oorspronkelijk door Liebmann voorgestelde procédé werkte met $\lambda = \frac{1}{4}$, zodat

$$\hat{\psi}^{(j+1)}(m,n) = \frac{1}{4} \left[\hat{\psi}^{(j+1)}(m-1,n) + \hat{\psi}^{(j)}(m+1,n) + \hat{\psi}^{(j+1)}(m,n-1) + \hat{\psi}^{(j)}(m,n+1) - d^2 F(m,n) \right]$$

Dit komt er dan op neer, dat men punt voor punt tracht de Poissonvergelijking te bevredigen, waardoor in de buurpunten nieuwe (kleinere) fouten ontstaan.

We zullen echter aantonen, dat $\lambda = \frac{1}{4}$ niet de optimale keuze is.

We beschouwen daartoe weer de fout

$$\varepsilon^{(j)}(m,n) = \hat{\psi}^{(j)}(m,n) - \psi(m,n)$$

hetgeen bij substitutie in (3.60) de volgende recurrente relatie oplevert:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(m,n)}^{(j+1)} &= \mathcal{E}_{(m,n)}^{(j)} + \lambda \left[\mathcal{E}_{(m-1,n)}^{(j+1)} + \mathcal{E}_{(m+1,n)}^{(j+1)} + \mathcal{E}_{(m,n-1)}^{(j+1)} + \mathcal{E}_{(m,n+1)}^{(j+1)} - 4\mathcal{E}_{(m,n)}^{(j+1)} \right] \\ \mathcal{E}_{(m,n)}^{(j+1)} &= \mathcal{E}_{(m,n)}^{(j)} = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{inwendige punten} \\ \text{randpunten} \end{array} \right\} (3.61)$$

We schrijven kortweg

$$\mathcal{E}_{(m,n)}^{(j+1)} = K(\lambda) \mathcal{E}_{(m,n)}^{(j)} \quad (3.62)$$

waarin de lineaire operator $K(\lambda)$ afhangt van λ . We zullen weer het eigenwaarden-
spektrum van $K(\lambda)$ onderzoeken en de grootste absolute waarde beschouwen als
maat voor de snelheid, waarmee het proces convergeert.

Laat K_{kl} een eigenwaarde zijn van $K(\lambda)$. We proberen nu eigenfuncties voor \mathcal{E}
van de volgende vorm, waarvan zal blijken dat zij een volledig orthogonaal
vormen:

$$\mathcal{E}_{kl}(m,n) = A_{kl}^m B_{kl}^n \sin k\pi m/p \sin l\pi n/q \quad (3.63)$$

met $k = 1, 2, \dots, p-1$; $l = 1, 2, \dots, q-1$

Hierbij komen in elke \mathcal{E}_{kl} twee constante factoren A_{kl} en B_{kl} voor tot mach-
ten (m resp. n), die van de positie van het roosterpunt afhangen.

De waarden hiervan zullen blijken te worden bepaald door de eis, dat op de
rand $\mathcal{E} = 0$ moet zijn. We zullen (3.63) substitueren in de met behulp van (3.62)
herschreven vergelijking (3.61):

$$K \mathcal{E}(m,n) = \mathcal{E}(m,n) + \lambda \left[K\mathcal{E}(m-1,n) + \mathcal{E}(m+1,n) + K\mathcal{E}(m,n-1) + \mathcal{E}(m,n+1) - 4\mathcal{E}(m,n) \right]$$

Voor zekere eigenfunctie $\mathcal{E}_{kl}(m,n)$ moet dan gelden

$$\begin{aligned} K_{kl} \mathcal{E}_{kl}(m,n) &= \mathcal{E}_{kl}(m,n) + \lambda \left[K_{kl} \mathcal{E}_{kl}(m-1,n) + \mathcal{E}_{kl}(m+1,n) + K_{kl} \mathcal{E}_{kl}(m,n-1) + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{E}_{kl}(m,n+1) - 4\mathcal{E}_{kl}(m,n) \right] \end{aligned} \quad (3.64)$$

of, met (3.63) en weglating van de indices k, l :

$$(K-1+4\lambda) A^m B^n \sin k\pi m/p \sin \ell\pi n/q = \lambda A^{m-1} B^n \sin \ell\pi n/q \left[K \sin(k\pi m/p - k\pi/p) + A^2 \sin(k\pi m/p + k\pi/p) \right] \\ + \lambda A^m B^{n-1} \sin k\pi m/q \left[K \sin(\ell\pi n/q - \ell\pi/q) + B^2 \sin(\ell\pi n/q + \ell\pi/q) \right] \quad (3.65)$$

De factoren tussen [] kunnen we nog uitwerken. De eerste wordt:

$$K \sin \frac{k\pi m}{p} \cos \frac{k\pi}{p} - K \sin \frac{k\pi}{p} \cos \frac{k\pi m}{p} + A^2 \sin \frac{k\pi m}{p} \cos \frac{k\pi}{p} + A^2 \sin \frac{k\pi}{p} \cos \frac{k\pi m}{p}$$

Neem nu een randpunt met $m = p$. Dan houden we over:

$$+ (-K + A^2) \sin k\pi/p$$

(3.65) wordt nu voor $m = p$

$$0 = \lambda A^{m-1} B \sin \ell\pi n/q \cdot (-K + A^2) \sin k\pi/p,$$

zodat $K_{kl} = A_{kl}^2$ gesteld moet worden. Evenzo blijkt $K_{kl} = B_{kl}^2$.

Aangezien het veranderen van het teken A of B neerkomt op het vervangen van m door (p-m), resp. n door (q-n) (zie (3.63)) kunnen we $A = B$ stellen.

(3.65) wordt nu

$$A^2 - 1 + 4\lambda = 2\lambda A \left(\cos \pi \frac{k}{p} + \cos \pi \frac{1}{q} \right)$$

of, met de afkorting $t_{kl} = \cos \pi \frac{k}{p} + \cos \pi \frac{1}{q}$,

$$A^2 - 2\lambda tA + (4\lambda - 1) = 0. \quad (3.66)$$

Hieruit vinden we i.h.a. twee waarden A_{kl} bij iedere eigenfunctie. Deze dupliciteit is echter slechts schijn, omdat de verwisseling

$$(m,n) \longleftrightarrow (p-m, q-n)$$

het teken van t omdraait en daarmee dat van A, hetgeen, zoals reeds werd opgemerkt, geen gevolgen heeft. (3.36) is dus inderdaad een volledig, orthogonaal stelsel.

We gaan nu weer de optimale waarde van λ bepalen, dat wil zeggen, die waarde λ_0 , waarvoor de grootste absolute waarde $|K_{kl}(\lambda_0)|$ voor alle k en l (notatie: K^*) minimaal wordt. We hebben

$$K_{kl} = A_{kl}^2 ; A_{kl} = \lambda t_{kl} \pm \sqrt{\lambda^2 t_{kl}^2 - 4\lambda + 1} \quad (3.67)$$

We onderscheiden twee gevallen.

1°. De vierkantsvergelijking (3.66) heeft twee complex geconjugeerde wortels met absolute waarden

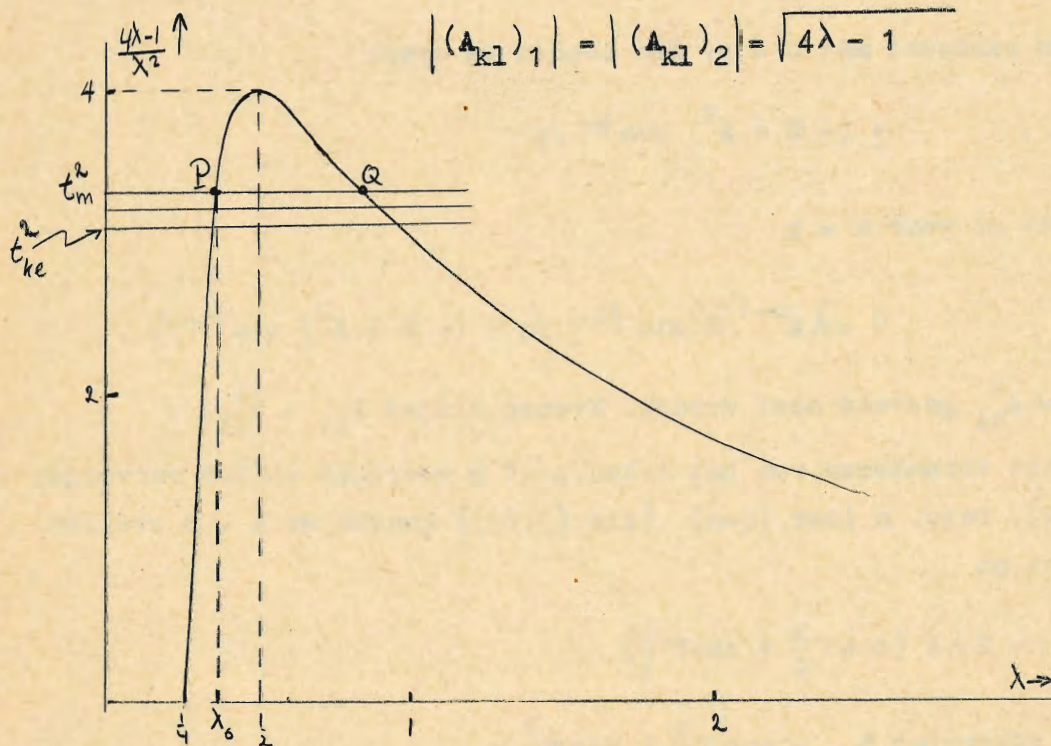


fig. 3.6

Dus $|K_{kl}| = 4\lambda - 1 \quad (3.68)$

Dit geval doet zich voor indien

$$\lambda^2 t_{kl}^2 \leq 4\lambda - 1 \quad \text{of} \quad t_{kl}^2 \leq (4\lambda - 1)\lambda^{-2} \equiv f(\lambda) \quad (3.69)$$

De grafiek van fig. 3.6 geeft het verloop van $f(\lambda)$. Verder zijn enkele horizontale lijnen getekend voor de niveaus

$$t_{kl}^2 = (\cos \pi k/p + \cos \pi l/q)^2$$

Het hoogste niveau is

$$t_m^2 = (\cos \pi/p + \cos \pi/q)^2 \cong 4 - 2\pi^2(p^{-2} + q^{-2})$$

Blijkens (3.69) geldt (3.68) in het gebied tussen de snijpunten van de kromme met de niveaulijnen, het "binnengebied".

We zien uit (3.68), dat $|K_{kl}|$ afneemt met afnemende λ .

De kleinste waarden van $|K_{kl}|$ in het geldigheidsgebied van (3.68) (bij vaste k en l) vinden we dus, door voor λ juist de abscis te kiezen van het linkersnijpunt van de niveaulijn t_{kl}^2 met de kromme. De grootste van deze waarden zal de gezochte K^* zijn, waarbij we anticiperen dat in het buitengebied geen kleinere K^* te halen valt. De bijbehorende λ_0 is dus de kleinste wortel van

$$t_m^2 \lambda^2 - 4 + 1 = 0$$

zodat

$$\lambda_0 = 2 t_m^{-2} - \sqrt{4 - t_m^2} \cong \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \pi^2 (p^{-2} + q^{-2}) - \sqrt{2} \cdot \pi \sqrt{p^{-2} + q^{-2}}$$

of, voor grote p en q :

$$\lambda_0 \cong \frac{1}{2} - \sqrt{2} \sqrt{p^{-2} + q^{-2}} \quad (3.70)$$

$$\text{Met (3.68) wordt } K^* \cong 1 - \pi \sqrt{2} \sqrt{p^{-2} + q^{-2}} \text{ voor } p, q \gg 1 \quad (3.71)$$

2°. We zullen nu nog aantonen dat in het geval (3.66) twee reële wortels heeft, de kleinste K^* eveneens in het punt λ_0 gevonden wordt.

Twee reële wortels voor A_{kl} treden op als λ in het "buitengebied" ligt, immers, als

$$\lambda^2 t_{kl}^2 > 4\lambda - 1$$

We moeten nu hebben de grootste absolute waarde welke een van beide wortels van (3.66) oplevert bij vaste λ , k en l .

We kiezen dus uit (3.67) de wortel met het + teken:

$$A_{kl}^+ = \lambda t_{kl} + \sqrt{\lambda^2 t_{kl}^2 - 4\lambda + 1}$$

$$\text{Dus } |A_{kl}^+| = \left| \lambda t_{kl} + \sqrt{t_{kl}^2 \lambda^2 - 4\lambda + 1} \right| > \left| t_{kl} \lambda \right| > \sqrt{4\lambda - 1} \quad (3.72)$$

Dus hier vinden we een $K_{kl}(\lambda) > 4\lambda - 1$

Het rechter buitengebied (voorbij Q) is dus zeker niet interessant.

We moeten onze eventuele K^* dus in het linker buitengebied zoeken.

Als we (3.66) differentiëren naar λ krijgen we

$$\frac{d}{d\lambda} A_{kl} = \frac{A_{kl} t_{kl} - 2}{A_{kl} - \lambda t_{kl}} \quad (3.73)$$

Nu is $A_{kl}^+ < 1$, immers

$$t_{kl} \lambda + \sqrt{t_{kl}^2 \lambda^2 - 4\lambda + 1} < 1, \text{ omdat}$$

$$t_{kl}^2 \lambda^2 - 4\lambda + 1 < 1 - 2 t_{kl} \lambda + t_{kl}^2 \lambda^2$$

en dit geldt wegens

$$\lambda > 0 \text{ en } t_{kl} < 2$$

Dus is de teller van het rechterlid van (3.73) negatief. Voor A_{kl}^+ is de noemer echter positief. Derhalve zal A_{kl}^+ kleiner worden bij toenemende λ . De kleinste $|A_{kl}^+|$ vinden we daarom weer in het punt P.

Hiermee is bewezen, dat het optimale iteratierecept voor de geëxtrapoleerde methode Liebmann is (voor grote p en q):

$$\hat{\psi}^{(j+1)}(m,n) = \hat{\psi}^{(j)}(m,n) + \left(\frac{1}{2} - \pi \sqrt{2} \sqrt{p^{-2} + q^{-2}} \right).$$

$$\cdot \left[\hat{\psi}^{(j+1)}(m-1,n) + \hat{\psi}^{(j)}(m+1,n) + \hat{\psi}^{(j+1)}(m,n+1) + \hat{\psi}^{(j)}(m,n+1) - 4 \hat{\psi}^{(j)}(m,n) - d F(m,n) \right] \quad (3.60a)$$

terwijl bij elke iteratie de hardnekkigste fouten gereduceerd worden met een factor (grote p en q)

$$K^* \cong 1 - \pi \sqrt{2} \sqrt{p^{-2} + q^{-2}} \cong 1 - \frac{\pi}{p} \quad (3.71a)$$

waarin $p^{-2} = \frac{1}{B} (p^{-2} + q^{-2})$

en dus P het kwadratisch harmonisch gemiddelde van p en q .

Is $p = q$, dan is $P = p = q$.

Vergelijken we dit resultaat met (3.58), dan blijkt dat vooral voor grote p en q de methode Richardson veel trager convergeert.

We moeten nu nog de op blz. 51 gedane bewering waar maken, dat iteratiemethoden een "werk" geven van de orde

$$10 N \sqrt{N} \text{ optellingen en vermenigvuldigingen.}$$

Neem een vierkant rooster, dan is $P = p = q = \sqrt{N}$ en eis dat de fouten in $\hat{\psi}^{(0)}$ minstens een faktor e^{-j} kleiner gemaakt moeten worden. Het aantal iteraties i vinden we nu uit

$$\left(\frac{K^*}{P}\right)^i = \left(1 - \frac{\pi}{P}\right)^i = e^{-j} \quad (\text{b.v. } e^{-7} = 10^{-3})$$

Dus, als $P \gg \pi$,

$$i = \frac{-j}{\ln(1 - \pi/P)} \approx \frac{j}{\pi} P \quad (3.74)$$

Het werk per iteratie bestaat i.h.a. uit 3 vermenigvuldigingen en 7 optellingen per roosterpunt. Dus het totale werk voor P^2 punten is

$$7 \frac{j}{\pi} P^3 = \frac{7j}{\pi} N \sqrt{N} \text{ optellingen en}$$
$$3 \frac{j}{\pi} P^3 = \frac{3j}{\pi} N \sqrt{N} \text{ vermenigvuldigingen}$$

We zijn hiermee gekomen aan het eind van ons overzicht van de numerieke oplossingsmethoden voor de barotrope voorspellingsvergelijking. Als praktische gevolgtrekking geven we nog:

- d) Een schatting van de benodigde rekentijd voor een 48-uurs barotrope voorspelling met behulp van de Nederlandse P.T.T. rekenautomaat Zebra.

We gaan uit van een 500-millibaarkaart met $25 \times 40 = 1000$ roosterpunten, waarin de aanvangsgeopotential $\phi(m,n,0)$ gegeven is. De invoertijd van 10 sec. is verwaarloosbaar.

Per punt moeten nu berekend worden:

	optellingen	vermenigvuldigingen
$\hat{\eta}(m,n,o)$ volgens (3.15)	6	1
$d^2 \hat{F}(m,n,0)$ (3.16)	8	2
$\hat{\psi}(m,n,o)$ voor i iteraties (3.60a)	$7i$	i
$\phi(m,n,\Delta t)$ (3.17)	1	1
<hr/>		
per t-cyclus per punt	$15 + 7i$	$4 + i$
per 24 cycli voor 1000 punten:	$10^3 (360 + 168i)$	$10^3 (96 + 24i)$

In deze schatting zijn vermenigvuldigingen met een faktor 4 niet meegeteld, omdat de Zebra deze onder ander werk door kan uitvoeren. Verder is aangenomen, dat een vaste faktor zoals $m^2 f^{-1} d^2$ uit (3.15) direkt uit het geheugen kan worden gehaald en dus voor 1 vermenigvuldiging telt.

Bij verstandig programmeren hoeft bij een machine als de Zebra geen tijd voor het inlezen van instructies te worden berekend.

Bij willekeurige plaatsing op de trommel van de op te tellen getallen bedraagt de gemiddelde opteltijd $5\frac{1}{6}$ msec. Door optimale plaatsing in het geheugen kan deze tijd vermoedelijk tot 3 msec. worden teruggebracht. Op eenzelfde wijze geldt als vermenigvuldigtijd bij optimaal programmeren waarschijnlijk 13 msec. Met deze getallen komen we op

$$38,8 + 20,8i \text{ minuten}$$

voor de 48-uur voorspelling.

We zien hieraan, dat het aantal benodigde iteraties i van groot praktisch belang is. We willen (3.73) toepassen. Voor P vinden we

$$P = \sqrt{2} : \sqrt{25^{-2} + 40^{-2}} = 30$$

We gaan nu j schatten. Ter voorkoming van accumulatie van afrondingsfouten willen we één decimaal nauwkeuriger rekenen dan het uitgangsmateriaal. We eisen een nauwkeurigheid in $\partial\phi/\partial t$ van 3 potentiële meters per 12 uur of van 0.5 pot. meter per 2 uur. Als we onze eerste benadering $\epsilon^{(0)}(m,n) = 0$ stellen, zal er in 1000 roosterpunten ergens een grootste fout $\epsilon(o)$ zitten van zeg 20 pot. meters per 2 uur (overeenkomend met een tendens van 12 pot. dekame- ter per 12 uur).

Deze $\epsilon^{(0)}$ mag zeker niet tevens als de hardnekkigste fout $\epsilon_{1,1}^{(0)}$ beschouwd worden. Laten we (tamelijk wild) schatten, dat de hardnekkigste component hiervan 1/10 bedraagt, dus 2 pot. meter per 2 uur.¹⁾ Deze moet nu teruggebracht worden tot een fout van 0.5, dus vermenigvuldigd met een faktor

$$\frac{1}{4} = e^{-j} \rightarrow j = 1,4$$

Dus is $i = \frac{j}{\pi} P = \frac{1,4}{\pi} 30 \approx 14$

Voor de volgende cycli gaan we iets anders te werk. Als eerste benadering voor $\psi(m, n, \Delta t)$ nemen we nu

$$\hat{\psi}^{(0)}(m, n, \Delta t) = \hat{\psi}(m, n, 0),$$

waardoor de beginfout aanmerkelijk verkleind wordt. Voor de derde en volgende cycli werken we met een lineaire extrapolatie van

$$\hat{\psi}(m, n, (\nu-2)\Delta t) \text{ en } \hat{\psi}(m, n, (\nu-1)\Delta t)$$

Bij Zweedse barotrope voorspellingen is in de praktijk gebleken, dat dan $i = 4 \text{ à } 5$ wordt. We zullen daarom de gemiddelde waarde

$$i = 5$$

aannemen.

De geschatte rekentijd voor een 48-uurs barotrope voorspelling met behulp van de Zebra wordt dan ruim 2 uur.

- 1) Aan de faktor 1/10 komen we als volgt: We vragen ons af wat in (3.54) de coëfficiënt zal zijn van $\epsilon_{1,1}$ en $\epsilon_{p-1, q-1}$. d.z. de hardnekkigste fouten eigenfuncties. Nu bevat een 500 mb kaart die een flink gedeelte van het N. halfrond bestrijkt, rond 3 daal- en 3 stijgebieden, zodat $g_{3,1}$ en $g_{k,3}$ groter zullen zijn dan de overige. Zeker zal dus $g_{1,1}$ onder de eerste negen coëfficiënten niet de grootste zijn. We stellen nu grofweg

$$g_{1,1} \approx \frac{1}{9} \sum_{k,l=1}^3 g_{kl}$$

en nemen alle $g_{kl} = 0$ voor $k, l > 3$. Dan is $|\epsilon_{1,1}| = \frac{1}{9} \epsilon^{(0)} \approx 0.1 \epsilon^{(0)}$. Het zal overigens nuttig zijn, de optimale λ_0 aan te passen aan het spektrum van $\epsilon^{(0)}$. Uit fig. 3.6 is te zien, dat men dan een iets kleinere λ_0 dient te proberen.

Ten slotte nog enkele opmerkingen over de praktische resultaten, die in Zweden zijn verkregen (Bolin, 1955).

- 1°. De resultaten zijn in het centrale kaartgedeelte (west-Europa) het beste. Dit is een gevolg van de fiktieve randvoorwaarden, waarvan de invloed geleidelijk verder naar het binnenste kaartgebied doordringt. Als gevolg hiervan is soms na 48 uur bij hoge windsnelheden ook in west-Europa al een be-
derf van de oplossing te constateren.
- 2°. Bepaalde gebieden, zoals de omgeving van New-Foundland, die in de meteorologische praktijk bekend staan om hun grote temperatuurgradiënt (baroklinie!), geven een systematische fout van het theoretisch te verwachten teken.
- 3°. 48-uur voorspellingen steken verhoudingsgewijs gunstig af bij 24-uur voorspellingen. Bij de verificatie wordt de voorspelde verandering in ϕ vergeleken met de opgetreden verandering. Men berekent veelal de correlatiecoëfficiënt van beide grootheden. Deze wordt verlaagd, door de fouten in de kaartanalyse zelf en door radiosondefouten. Voor 12-uur voorspellingen is dit effect zeer hinderlijk, bij 48-uur voorspellingen is het niet meer belangrijk. Bij 72-uur voorspellingen lopen de resultaten sterk terug.

4. De grafische methode-Fjörtoft.

R.Fjörtoft (1952) heeft een methode ontwikkeld om de barotrope voorspellingsvergelijking zonder rekenautomaat geheel grafisch te integreren in een tijd van enkele uren. Theoretisch vertoont de methode een zekere zwier. De praktische resultaten zijn iets minder goed dan van de machinale voorspellingen, maar het verschil is verrassend klein. Voor een deel is de oorzaak wellicht te zoeken in het slechte waarnemingsmateriaal. Anderzijds kan de oorzaak gezocht worden in de grote aandacht, die Fjörtoft besteedt aan de ruimtelijke roosterconstante $d = \Delta x = \Delta y$. Een voordeel van de methode Fjörtoft is verder dat men "ziet wat er gebeurt".

We schrijven de barotrope voorspellingsvergelijking voor willekeurige coördinaten als:

$$\text{div. grad } \frac{\partial \phi}{\partial t} (\vec{r}, t) = -\vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \text{grad } \left[\bar{f}^{-1}(\vec{r}) \text{ div. grad } \phi(\vec{r}, t) + f(\vec{r}) \right] \quad (3.75)$$

waarin \vec{r} de positievector op een voorlopig nog niet gespecificeerd oppervlak en $f(\vec{r})$ als van ouds de Coriolisparameter, die nu op nog niet voorgeschreven wijze van de plaats afhangt. De schaalfactor $m^{\#}(\vec{r})$ zit impliciet in de differentiaaloperatoren.

De numerieke methoden knippen het integratieprobleem in drie stukken, n.l.

- a) De berekening van het rechterlid $F(\vec{r}, 0)$ uit de beginvoorwaarden
- b) Het oplossen van de Poissonvergelijking

$$\text{div. grad } \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, 0) = F(\vec{r}, 0)$$

- c) De stapsgewijze integratie van de gevonden functie $\partial \phi / \partial t$ naar de tijd.

Fjörtoft werkt echter met het schema:

- a) Berekening van $\int_0^t F^{\#} dt$ (3.76)

uit de beginvoorwaarden. Hierin is $F^{\#}$ een soort ruimtelijk gemiddelde van $F(\vec{r}, 0)$

- b) Oplossing van de Poissonvergelijking

$$\text{div grad } [\phi(\vec{r}, t) - \phi(\vec{r}, 0)] = \int_0^t F^{\#} dt$$

Doordat er slechts één tijdscyclus is, kan de methode in verhoudingsgewijs korte tijd uitgevoerd worden.

Ruimtelijk middelen.

We behandelen eerst in het algemeen het ruimtelijk middelingsproces.

Hoewel dit ook op een boloppervlak met poolcoördinaten kan worden beschouwd, zullen we ons hier beperken tot functies, die in een cartesisch vlak gedefinieerd zijn. Dit is in de praktijk een kaart van het noordelijk halfrond.

We hebben dus een cartesische positievector.

$$\vec{r} = (x, y)$$

Als lengte-eenheid in dit vlak gebruiken we één radiaal van de parallelcirkel van 60° n.-breedte. Dit noemen we de theoretische eenheid (t.e.).

Dus

$$1 \text{ t.e.} = \frac{1}{2\pi} 20.000 \text{ km} = \pi^{-1} 10^4 \text{ km.}$$

Van de in dit vlak gedefiniëerde functie (doorgaans de geopotential van het 500-mb vlak) interesseert ons alleen de ruimtelijke afhankelijkheid.

We beschouwen dus

$$\phi(\vec{r}) = \phi(x, y),$$

waarvan we onderstellen, dat hij in een Fourierreeks ontwikkeld kan worden.

We nemen bovendien aan, dat ϕ een zodanig "rustige" funktie is, dat men de reeks na zeker aantal termen kan afbreken:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{k_1, k_2=0}^N \alpha(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad \vec{k} = (k_1, k_2) \quad (3.77)$$

Voor de componenten k_1, k_2 van de golfvektor \vec{k} geldt:

$$k_{1,2} = 2\pi/L_{1,2}$$

waarin $L_{1,2}$ de golflengtes in resp. x- en y-richting. Met $k=1$ correspondeert $L = 2\pi$ t.e. of $L = 20.000$ km.

We voeren nog de kortere notatie in

$$\phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \alpha(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

Het afbreken van de reeks bij golfgetal $k_{1,2} = N$ kan eventueel vervangen worden door de iets ruimere voorwaarde

$$|\phi_{\vec{k}}(\vec{r})| < M |\vec{k}|^{-(2+\epsilon)}, \text{ voor grote } |\vec{k}|$$

waarin M en $\epsilon > 0$, constant. De hierna volgende beschouwingen behouden dan hun geldigheid. Het is de vraag of zelfs aan deze minder stringente voorwaarde door de geopotential van het 500-mb vlak wordt voldaan.

Aangezien echter de barotrope voorspellingsvergelijking toch niet meer geldig is voor grote $|\vec{k}|$, omdat storingen met golflengte $L = 10^3$ km en kleiner niet meer met een horizontale stroming beschreven kunnen worden zullen we ons op het standpunt stellen dat de reeks afbreekt. Voor het afbreekgetal vinden we ongeveer

$$N = \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{10^3 \cdot \pi \cdot 10^{-4}} = 20$$

De ruimtelijke middeling wordt nu gedaan door een afvlakkingsoperator A_m , vgl. Fjörtoft (1955). Hiervoor geldt:

$$A_m \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4} \left[\phi\left(x + \frac{\pi}{2m}, y\right) + \phi\left(x - \frac{\pi}{2m}, y\right) + \phi\left(x, y + \frac{\pi}{2m}\right) + \phi\left(x, y - \frac{\pi}{2m}\right) - 4\phi(x, y) \right] \quad (3.78)$$

In plaats van $\phi(\vec{r})$ levert deze het ruimtelijk gemiddelde van ϕ over 4 punten, op afstanden

$$\frac{\pi}{2m} \equiv d_m \quad (\text{t.e.}).$$

$d_1 = 5000$ km, $d_2 = 2500$ km etc. Overigens hoeft m niet geheel te zijn.

We kunnen nu schrijven

$$A_m \phi(\vec{r}) = \sum_{k_1, k_2}^N a_m(\vec{k}) \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad (3.79)$$

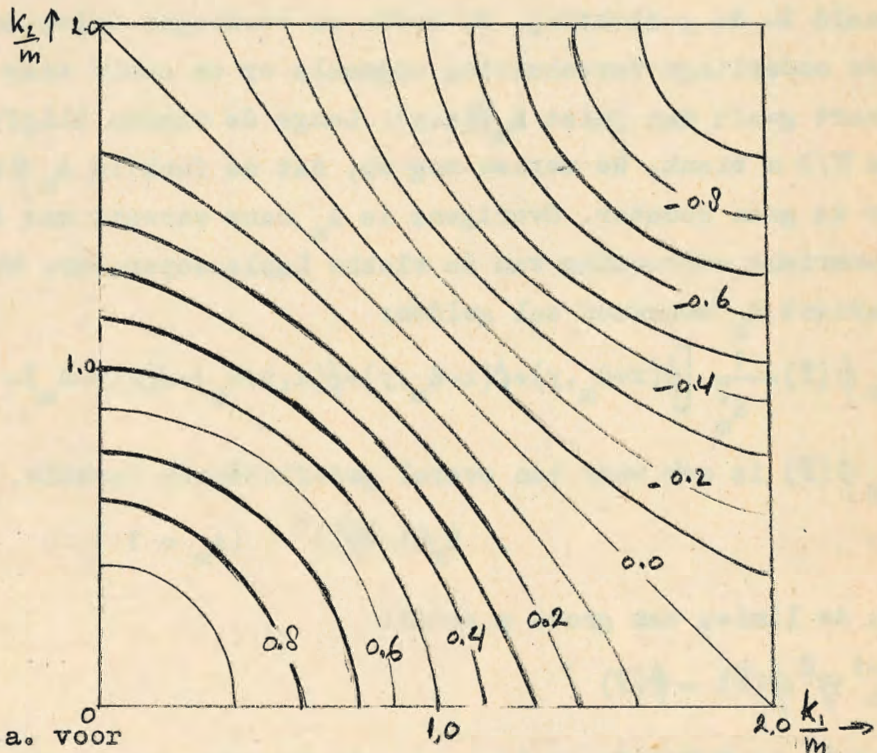
waarin

$$a_m(\vec{k}) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{k_1 \pi}{m} + \cos \frac{k_2 \pi}{m} \right) \quad (3.80)$$

Isolijnen voor deze eigenwaarde zijn afgebeeld in fig. 3.7

fig. 3.7

De waarde van $a_m(\vec{k})$



We vinden $a_m(\vec{k}) = 0$ o.a. voor

$$k_1 \pm k_2 = 2m$$

Aangezien $|a_m(\vec{k})| \leq 1$, worden bijna alle Fouriercomponenten van ϕ afgezwakt. In het bijzonder worden de $\phi_{\vec{k}}$ met $k_1 \pm k_2 = 2m$ geheel uitgedoofd. We merken nog in het bijzonder op, dat

$$A_m \phi_{(m,m)}(\vec{r}) = 0$$

De afvlakkingsoperator A_m dooft dus speciaal de Fouriercomponent uit de golfgetallen $k_1 = k_2 = m$, dus met beide golflengtes $L_1 = L_2 = \frac{2\pi}{m} = 4 d_m$. Het is duidelijk, dat een herhaalde afvlakking A_m^2 de meeste componenten $\phi_{\vec{k}}(\vec{r})$ nog meer zal verzwakken dan A_m alleen. Een herhaalde afvlakking $A_n A_m$ met $n \neq m$ zal in dit opzicht nog effectiever zijn, omdat nu volledig uitgedoofd worden de componenten met

$$k_1 \pm k_2 = 2m \quad \text{en} \quad k_1 \pm k_2 = 2n$$

De operatie A_m kan grafisch worden uitgevoerd.

Laat het $\phi(\vec{r})$ veld gegeven zijn door getekende niveaulijnen. (500- mil-libarkkaart). Boven de lichtbak kopiëren we deze kaart op een tweede. We verschuiven beide kaarten dan t.o.v. elkaar over een afstand $2 d_m = \pi/m$ in de x-richting en leggen er een derde, blanke kaart bovenop, die t.o.v. beide anderen over een afstand d_m in de x-richting is verschoven.. De beide scalaire velden telt men volgens de methode van Maxwell op. Deling door 2 komt neer op een andere nummering van de somniveaulijnen. Deze manipulatie wordt herhaald in de y-richting. De beide zo verkregen halve-som kaarten telt men zonder onderlinge verschuiving nogmaals op en deelt weer door 2. Deze laatste kaart geeft dan juist $A_m \phi(x,y)$. Langs de randen blijft een strook ter breedte $\pi/2 m$ blank. We merken nog op, dat de functie $A_m \phi$ overal gedefiniëerd is, er is geen rooster. Overigens is A_m nauw verwant met de in (3.14) gebruikte numerieke uitvoering van de vlakke Laplaceoperator. We beschouwen hiervan de variant H_m waarvoor zal gelden:

$$H_m \phi(\vec{r}) = \frac{1}{d_m^2} \left[\phi(x+d_m, y) + \phi(x-d_m, y) + \phi(x, y+d_m) + \phi(x, y-d_m) - 4\phi(x, y) \right] \quad (3.81)$$

$H_m \phi(\vec{r})$ is ook weer een overal gedefiniëerde functie. Blijkbaar geldt

$$H_m = \left(\frac{4m}{\pi} \right)^2 (A_m - 1) \quad (3.82)$$

In de limiet van grote m geldt:

$$H_m^{-1} \nabla^2 \phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) \quad (3.83)$$

Het is er Fjörtoft om begonnen, de "roosterconstante" $d_m = \pi/2 m$ zo groot mogelijk te kiezen. Hoe groot we d_m kunnen kiezen hangt af van het Fourier-spektrum van ϕ . Als d_m zodanig is, dat de belangrijkste F.-component met het rooster gaat interfereren, zal (3.83) ook bij benadering niet meer gelden.

We stellen

$$H_m^{-1} \nabla^2 \phi(\vec{r}) = C_m \phi(\vec{r}) \quad (3.84)$$

waarin C_m i.h.a. nog van \vec{r} afhankelijk zal zijn. Eigenfuncties voor (3.84) zijn juist de $\phi_{\vec{k}}$. De eigenwaarden zijn:

$$C_{m, \vec{k}} = \frac{(\pi k_1/4m)^2 + (\pi k_2/4m)^2}{\sin^2 \pi k_1/4m + \sin^2 \pi k_2/4m}$$

Voor twee positieve getallen p en q, waarvoor geldt

$$0 < p < q \pi ,$$

geldt algemeen

$$1 < \frac{p^2}{\sin^2 p} < \frac{p^2 + q^2}{\sin^2 p + \sin^2 q} < \frac{q^2}{\sin^2 q}$$

Als dus $\kappa = \max(k_1, k_2)$, dan geldt voor $\kappa < 4m$

$$1 \leq c_{m, \vec{k}} \leq (\pi \kappa / 4m)^2 \sin^{-2} (\pi \kappa / 4m) \quad (3.85)$$

Het verloop van het rechterlid als functie van κ/m is grafisch voorgesteld in fig. 3.8. Voor $\kappa/m = 4$ vertoont de kromme een "resonantiepiek".

Hier moeten we in elk geval buiten blijven, door (betrekkelijk willekeurig) voor te schrijven dat m zo groot moet worden gekozen dat steeds

$$\kappa \leq N \leq 3m \quad (3.86)$$

zal gelden. Om de gedachten te bepalen stellen we eens even

$$m = 6 \approx \frac{1}{3} N.$$

Een volledig, 2-dimensionaal Fourierspektrum van $\phi_{500 \text{ mb}}$ is, voor zover bekend, nog nooit berekend. Als men echter de eerste 12 termen van het 1-dimensionale F-spektrum (genomen langs 55° n.b.) berekent, vindt men doorgaans een verloop zoals met de $|\phi_{\vec{k}}|$ -kromme in fig. 3.8 is aangegeven. De onderste kromme geeft een typisch spektrum voor de verandering van $\phi_{500 \text{ mb}}$ per 24 uur, $|\psi_{\vec{k}}|$

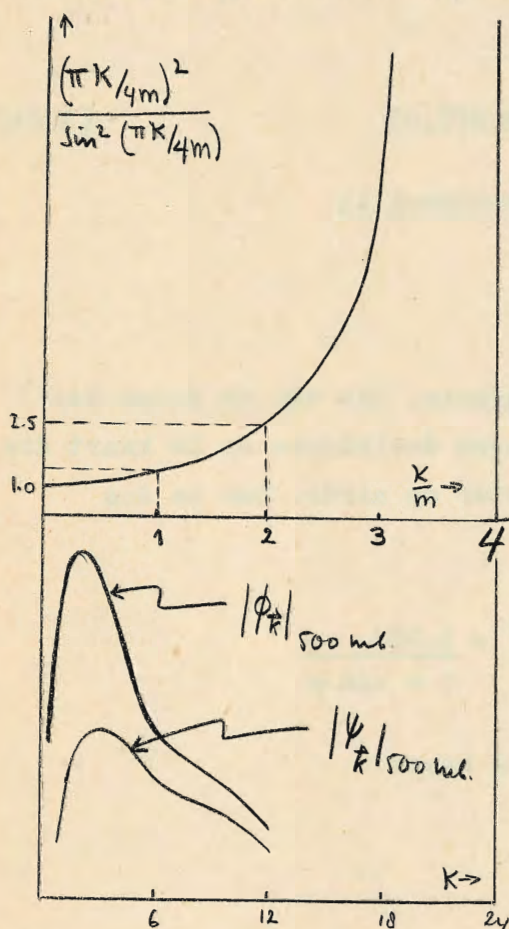


fig. 3.8

We kunnen nu (3.84) als volgt schrijven:

$$H_m^{-1} \nabla^2 \phi(\vec{r}) = H^{-1} \nabla^2 \sum_{k_1, k_2}^N \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{k_1, k_2}^N c_{m, \vec{k}} \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = c_m \phi(\vec{r}) \quad (3.87)$$

C_m is dus een gemiddelde van $C_{m,k}$ met de gewichten $\phi_k(\vec{r})$. Voor de functies ϕ die ons zullen interesseren, blijkt uit de grafiek, dat het gewicht van de $C_{m,k}$ voor kleine $|k|$ sterk overweegt. Het blijkt in de praktijk, dat

$$C_m = 1,1 \text{ à } 1,2$$

We beschouwen voortaan C_m als een onbekende, empirisch te bepalen constante en schrijven

$$\nabla^2 \phi = C_m H_m \phi = C_m \left(\frac{4m}{\pi}\right)^2 (A_m - 1) \phi \quad (3.88)$$

Na deze inleiding beginnen we nu met de eerste stap van de grafische methode, n.l. de berekening van het rechterlid van (3.75) (a.))

We schrijven dit als volgt:

$$-\vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \text{grad} \left[\frac{m^{\#2}(\vec{r})}{f(\vec{r})} \nabla^2 \phi(\vec{r}, t) + f(\vec{r}) \right] \equiv F(\vec{r}, 0) \quad (3.89)$$

Voor een stereografische projectie vanuit de zuidpool is

$$m^{\#}(\vec{r}) = m^{\#}(\varphi) = \frac{C}{1 + \sin \varphi}$$

waarin φ de geografische breedte en C een constante, die van de keuze der lengteëenheden afhangt. We kiezen voor praktische doeleinden op de kaart die lengte op 60° n.b., welke overeenkomt met 1 meter op aarde. Dan is dus

$$m^{\#}(60^\circ) = 1, \text{ dus}$$

$$m^{\#}(\varphi) = \frac{1 + \sin 60^\circ}{1 + \sin \varphi} = \frac{1.866}{1 + \sin \varphi}$$

$m^{\#}$ is dus niet afhankelijk van de schaal van de kaart.

We herschrijven nu (3.75)

$$\begin{aligned} & C_m \frac{m^{\#2}}{f(\vec{r})} \left(\frac{4m}{\pi}\right)^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[A_m \phi(\vec{r}, t) - \phi(\vec{r}, t) \right] = \\ & = -\vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \text{grad} \left[C_m \frac{m^{\#2}}{f(\vec{r})} \left(\frac{4m}{\pi}\right)^2 \left\{ A_m \phi(\vec{r}, t) - \phi(\vec{r}, t) \right\} \right] - \vec{V}(\vec{r}, t) \text{grad} f(\vec{r}) \quad (3.90) \end{aligned}$$

We beschouwen nu $m^{\#2}(\vec{r}) f^{-1}(\vec{r})$ als zwak afhankelijk van \vec{r} , vergeleken bij $A_m \phi(\vec{r}, t) - \phi(\vec{r}, t)$. Langs parallelcirkels is dit zeker waar, want $m^{\#}$ en f hangen alleen van de breedte af.

We brengen nu de factor

$$C_m \left(\frac{4m}{\pi}\right)^2 m^{\#2}(\vec{r}) f^{-1}(\vec{r}) \quad (3.91)$$

in (3.90) voor het grad-teken en delen vervolgens deze hele vergelijking erdoor.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [A_m \phi(r, t) - \phi(r, t)] &= -\vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \text{grad} [A_m \phi(\vec{r}, t) - \phi(\vec{r}, t)] \\ &= -\vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \left(\frac{\pi}{4m} \right)^2 \frac{f(\vec{r})}{m^{\frac{3}{2}}(\vec{r}) C_m} \cdot \text{grad} f(\vec{r}) \end{aligned} \quad (3.92)$$

Nu heeft grad $f(\vec{r})$ alleen een component in de noord-zuidrichting.

Als we de noord-zuidcomponent van \vec{V} met V_φ aanduiden, kunnen we de tweede term in het rechterlid van (3.92) dus ook schrijven als

$$\begin{aligned} &= -V_\varphi \left(\frac{\pi}{4m} \right)^2 \frac{f}{m^{\frac{3}{2}} C_m} \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \\ &= -V_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left(\frac{\pi}{4m} \right)^2 \frac{f(\varphi)}{m^{\frac{3}{2}} C_m} f'(\varphi) d\varphi \equiv \\ &\equiv \vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \text{grad} f_m(\vec{r}) \end{aligned} \quad (3.93)$$

Hierin is $f_m(\vec{r}) = \left(\frac{\pi}{4m} \right)^2 \frac{4\Omega}{C_m}^2 (1,866)^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi (1 + \sin \varphi)^2 d\varphi$,

$\Omega = 0,729 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$, de hoeksnelheid van de aarde.

(3.92) wordt dus

$$\frac{\partial}{\partial t} (1 - A_m) \phi(\vec{r}, t) = -\vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \text{grad} [\phi(\vec{r}, t) - A_m \phi(\vec{r}, t) - f_m(\vec{r})] \quad (3.94)$$

De grootheid $\eta_m(\vec{r}, t) \equiv (1 - A_m) \phi(\vec{r}, t) - f_m(\vec{r})$ is op de faktor (3.91) na gelijk aan de "absolute vortciteit". We kunnen (3.94) nog schrijven als

$$\frac{D}{Dt} \eta_m(\vec{r}, t) = 0, \quad (3.95)$$

waarmee het behoud van $\eta_m(\vec{r}, t)$ in formule is uitgedrukt.

We kunnen het rechterlid van (3.94) nu nog wat herleiden. In de eerste plaats zullen we, zoals gebruikelijk, voor $\vec{V}(\vec{r}, t)$ weer de geostrofische wind invoeren

$$\vec{V}(\vec{r}, t) \cong \vec{V}_g(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k}_0}{f(\vec{r})} \wedge \text{grad} \phi(\vec{r}, t)$$

waarin \vec{k}_0 de verticale eenheidsvektor.

Naast \vec{V}_g beschouwen we nu ook nog de geostrofische wind $\vec{V}_m(\vec{r}, t)$, behorend bij het "gemiddelde geopotentialveld" $A_m \phi + f_m$

$$\vec{V}_m(\vec{r}, t) \equiv \frac{\vec{k}_0}{f(\vec{r})} \wedge \text{grad} \left[A_m \phi(\vec{r}, t) + f_m(\vec{r}) \right] \quad (3.96)$$

Nu is

$$\begin{aligned} \vec{V}_g(\vec{r}, t) &= \vec{V}_m(\vec{r}, t) + \frac{\vec{k}_0}{f(\vec{r})} \wedge \text{grad} \left[\phi(\vec{r}, t) - A_m \phi(\vec{r}, t) - f_m(\vec{r}) \right] \\ &= \vec{V}_m(\vec{r}, t) + \frac{\vec{k}_0}{f(\vec{r})} \wedge \text{grad} \eta_m(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

We kunnen het rechterlid van (3.94) dus ook schrijven:

$$\vec{V}_m + \left(\frac{\vec{k}_0}{f} \right) \wedge \text{grad} \eta_m(\vec{r}, t) \cdot \text{grad} \eta_m(\vec{r}, t) = \vec{V}_m(\vec{r}, t) \cdot \text{grad} \eta_m(\vec{r}, t) \quad (3.97)$$

waarmee de barotrope voorspellingsvergelijking de gedaante heeft gekregen

$$\frac{\partial}{\partial t} (1 - A_m) \phi(\vec{r}, t) = -\vec{V}_m(\vec{r}, t) \cdot \text{grad} \eta_m(\vec{r}, t) \quad (3.98)$$

Het ruimtelijk gemiddelde veld $A_m \phi(\vec{r}, t)$ bevat niet meer de component $\phi_{(m,m)}$ en de naburige componenten zijn sterk afgevlakt. Nu blijkt uit fig. 3.8, dat componenten met golfgetallen tussen 6 en 12 sterk tijdsafhankelijk zijn, immers, de amplitude der 24 uren verandering is bijna even groot als de amplitude $|\phi_{\vec{k}}|$ zelf.

Voor golfgetallen kleiner dan ongeveer 6 is de tijdsafhankelijkheid veel minder groot. Stel dat we m nu zo kunnen kiezen, dat $A_m \phi(\vec{r}, t)$ niet meer de sterk tijdsafhankelijke componenten bevat. We kunnen dan bij benadering zeggen dat $A_m \phi(\vec{r}, t)$ stationair is.

De fundamentele onderstelling van Fjörtoft is nu,

$$A_m \phi(\vec{r}, t) = A_m \phi(\vec{r}, 0) \quad \text{voor } t \leq 24 \text{ uur}$$

Dan is ook $\vec{V}_m(\vec{r}, t) = \vec{V}_m(\vec{r}, 0)$

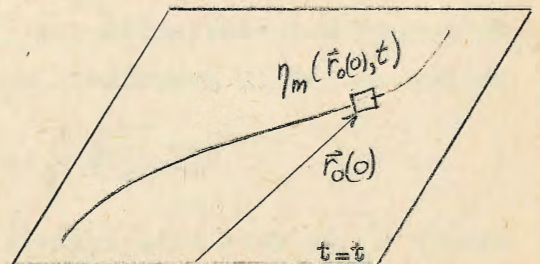
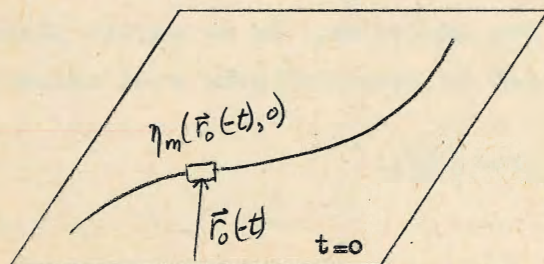


fig. 3.9

Beschouw nu een punt \vec{r}_0 . Het deeltje, dat zich hier ten tijde $t = 0$ bevindt, beschrijft een baan, die we $\vec{r}_0(t)$ noemen.

Uit (3.95) volgt dan $\eta_m(\vec{r}_0(0), t) = \eta_m(\vec{r}_0(-t), 0)$

We integreren nu (3.98) voor het punt $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(0)$.

$$(1-A_m) \phi(\vec{r}_0, t) \Big|_{t=0}^t = - \int_{\tau=0}^t \vec{\nabla}_m(\vec{r}_0(0), \tau) \cdot \text{grad } \eta_m(\vec{r}_0(0), \tau) d\tau =$$

$$= - \int_{\tau=0}^t \vec{\nabla}_m(\vec{r}_0(0), 0) \cdot \text{grad } \eta_m(\vec{r}_0(0), \tau) d\tau$$

$$= - \int_{\tau=0}^t \text{grad } \eta_m(\vec{r}_0(-\tau), 0) \cdot \frac{d\vec{r}_0}{d\tau} d\tau =$$

$$= + \eta_m(\vec{r}_0(0), 0) - \eta_m(\vec{r}_0(-t), 0).$$

We vinden dus

$$(1-A_m) [\phi(\vec{r}_0, t) - \phi(\vec{r}_0, 0)] = \eta_m(\vec{r}_0(0), 0) - \eta_m(\vec{r}_0(-t), 0) \quad (3.99)$$

Het rechterlid kan nu eenvoudig grafisch worden bepaald.

Het η_m veld krijgt men door het $f_m(\vec{r})$ veld op te tellen bij $A_m \phi(\vec{r}, 0)$ en dit somveld af te trekken van het oorspronkelijke veld $\phi(\vec{r}, 0)$. De banen \vec{r}_0 van de (fictieve) $\vec{\nabla}_m$ stroming vallen samen met de niveaulijnen van het veld $A_m \phi + f_m$, dat immers stationair is. (niveaulijnen = stroomlijnen = trajektorien). De snelheid waarmee de banen doorlopen worden, volgt in elk punt uit de onderlinge afstand der niveaulijnen van $A_m \phi + f_m$.

De onderstelling dat $A_m \phi(\vec{r}, t)$ stationair is, vormt het zwakke punt van Fjörtofts methode. Speciaal bij veranderingen in de algemene circulatie boven het noordelijk halfrond, welke vaak gepaard gaan met een omslag van het hele weertype, is $A_m \phi(\vec{r}, t)$ niet stationair. Deze hypothese is alleen ingevoerd om de bewerkingstijd van de methode binnen redelijke grenzen te houden. Machinale methoden maken geen gebruik van deze aanvechtbare aanname. Een voordeel van Fjörtofts methode is, dat door de afvlakkingsoperator A_m eventuele fouten (ook fouten in de oorspronkelijke analyse!) uitgesmeerd worden. De discussie van de beste keuze van m (en dus ook d_m , de roosterkonstante, alias

halve verschuivingsafstand van de kaarten) stellen we uit tot we besproken hebben de tweede stap van de methode, n.l.

Het oplossen van de "Poissonvergelijking"

$$(1 - A_m) \psi(\vec{r}) = F_m(\vec{r}) \quad (3.100)$$

We hebben hier gewoon (3.99) in andere notatie herschreven,

$$\psi(\vec{r}) \equiv \phi(\vec{r}_0, t) - \phi(\vec{r}_0, 0) \text{ en } F_m(\vec{r}) \equiv \eta_m(\vec{r}_0(0), 0) - \eta_m(\vec{r}_0(-t), 0) \quad (3.100a)$$

De tijd is nu geen variabele meer, die in de vergelijking optreedt.

Toepassing van de operator $(1 - A_m)^{-1}$ geeft direkt:

$$\psi(\vec{r}) = F_m(\vec{r}) + A_m F_m(\vec{r}) + A_m^2 F_m(\vec{r}) + \dots \quad (3.101)$$

Naar aanleiding van (3.80) werd al opgemerkt, dat de meeste componenten door een herhaalde afvlakkingsoperatie verdwijnen. Er zijn echter ook hardnekkige componenten, zodat (3.101) slecht convergeert.

Sneller convergente uitdrukkingen bereikt men, door gebruik te maken van verschillende afvlakkingsoperatoren A_m, A_n, A_p, \dots

We hebben: $(1 - A_m) \psi(\vec{r}) = F_m(\vec{r})$ of $\psi(\vec{r}) = A_m \psi(\vec{r}) + F_m(\vec{r}) \quad (3.102)$

Zo ook $(1 - A_n) \psi(\vec{r}) = F_n(\vec{r})$ of $\psi(\vec{r}) = A_n \psi(\vec{r}) + F_n(\vec{r}) \quad (3.103)$

Pas hierop A_m toe: $A_m \psi(\vec{r}) = A_m A_n \psi(\vec{r}) + A_m F_n(\vec{r}) \quad (3.104)$

Met substitutie uit (3.102):

$$\psi(\vec{r}) = F_m(\vec{r}) + A_m F_n(\vec{r}) + A_m A_n \psi(\vec{r})$$

Op analoge wijze kan men verkrijgen:

$$\psi(\vec{r}) = F_m(\vec{r}) + A_m F_n(\vec{r}) + A_m A_n F_p(\vec{r}) + A_m A_n A_p \psi(\vec{r})$$

Bij geschikte keuze van m, n en p zal $A_m A_n A_p$ een groot aantal verschillende componenten van $\psi(\vec{r})$ uitdoven en de rest afzwakken. Zijn m en n onderling ondeelbaar, dan zijn er geen hardnekkige componenten meer, zodat

$$|A_m A_n A_p \psi(\vec{r})| \ll |\psi(\vec{r})|$$

Om echter niet $F_n(\vec{r})$ en $F_p(\vec{r})$ apart te hoeven construeren, zoeken we een relatie van deze met $F_m(\vec{r})$. (Een exakt verband is er niet, maar we kunnen ons met een benadering tevreden stellen, omdat er nog A -operatoren vóór staan, die eventuele fouten zullen verkleinen).

Wanneer $\psi(\vec{r})$ slechts bestond uit één component $\psi_k(\vec{r})$, dan gold:

$$\frac{F_n(\vec{r})}{F_m(\vec{r})} = \frac{(1-A_n)\psi_k(\vec{r})}{(1-A_m)\psi_k(\vec{r})} = \frac{\sin^2 \frac{k_1\pi}{4n} + \sin^2 \frac{k_2\pi}{4n}}{\sin^2 \frac{k_1\pi}{4m} + \sin^2 \frac{k_2\pi}{4m}} \approx$$

$$\sin^2 \frac{K}{n} \frac{\pi}{4} / \sin^2 \frac{K}{m} \frac{\pi}{4} \quad \text{waarin weer } K = \max(k_1, k_2)$$

Aangezien voor $K \leq n, m$ deze laatste uitdrukking zwak afhankelijk is van K , mogen we aannemen, dat ook voor de algemene functie $\psi(\vec{r})$ deze relatie geldt, zodat we, de sinus door zijn argument vervangende, krijgen:

$$F_n(\vec{r}) \approx \frac{m^2}{n^2} F_m(\vec{r}) \quad (3.105)$$

$$\text{Dus } \psi(\vec{r}) \approx F_m(\vec{r}) + \frac{m^2}{n^2} A_m F_m(\vec{r}) + \frac{m^2}{p^2} A_m A_n F_m(\vec{r}) + A_m A_n A_p \psi(\vec{r})$$

Het komt nu aan op een geschikte keuze van m , n en p .

De grootste componenten van $\psi(\vec{r})$ liggen (zie fig. 3.8) doorgaans bij $K = 3$. Om $\psi(\vec{r})$ klein te krijgen zullen we dus een A_3 moeten toepassen. Dit mag echter niet zonder meer, omdat er dan moeilijkheden rijzen met de eis (3.86). In verband daarmee kunnen we eigenlijk geen effectievere A -operator gebruiken dan A_6 . Nu is

$$A_m A_n A_p = A_p A_n A_m$$

en de functie $A_6 \psi(\vec{r})$ is voorbij $K = 6$ op de meeste punten afgevlakt, zodat er een veel kleinere bijdrage in de resonantiepiek zit. Op deze afgevlakte functie kunnen we dan wel een A_5 of $A_{4,5}$ toepassen. En op $A_5 A_6 \psi(\vec{r})$ kan weer een sterkere A -operator worden losgelaten.

Wat is nu de beste verhouding tussen de m , n en p ?

$m : n = 1 : 1$ is zo inefficiënt mogelijk.

Laten we de verhouding aangroeien, dan bereiken we bij $m : n = 2 : 1$ weer een inefficiënte waarde, omdat de helft van de componenten die door A_n worden

uitgedoofd, reeds door A_m uitgedoofd waren. We kiezen daarom

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2} \text{ en } \frac{n}{p} = \sqrt{2}$$

Dan wordt $\psi(\vec{r}) = F_6(\vec{r}) + 2 A_6 F_6(\vec{r}) + 4 A_6 A_{4.25} \psi(\vec{r}) + A_6 A_{4.25} A_3 \psi(\vec{r})$

Met verwaarlozing van de laatste term en een kleine verschuiving in m van 6 naar 6.25, waardoor $d_m = \frac{\pi}{2m}$ theoretische eenheden = $\frac{\pi}{12.5} \cdot \pi^{-1} 10^4 \text{ km}$ juist op het ronde bedrag van 800 km op 60° n.b. uitkomt:

$$\psi \cong \tilde{\psi}(\vec{r}) \cong F_{6.25}(\vec{r}) + 2A_{6.25} F_{6.25}(\vec{r}) + 4A_{6.25} A_{4,4}(\vec{r}) \quad (3.105a)$$

(met de tilde geven we hier benaderingsfuncties aan)

Een andere benadering is nog

$$\tilde{\psi}(\vec{r}) = F_m(\vec{r}) + 3 A_m F_m(\vec{r}) \quad (3.105b)$$

waarin $n = m/\sqrt{3}$ genomen is. De kwaliteit van deze benadering schatten we als volgt. Laat $\tilde{\psi}_{\vec{k}}$ een F-component zijn van het linkerlid van (3.105b).

Nu is

$$\tilde{\psi} = (1 + 3 A_m) F_m = (1 + 3 A_m) (1 - A_m) \psi$$

en, wegens (3.80) voor $\vec{k} = (K, K)$

$$\frac{\tilde{\psi}_{\vec{k}}}{\psi_{\vec{k}}} = \left(1 + 3 \cos \frac{K}{12.5} \pi\right) \left(1 - \cos \frac{K}{12.5} \pi\right)$$

Zoals blijkt uit figuur 3.10 geeft $\tilde{\psi}$ bij $m = 6.25$ een goede weergave van componenten met K tussen 4 en 6, waarmee correspondeert het voor de winterpraktijk belangrijkste golflengtegebied van ca 3000 tot 6000 km.

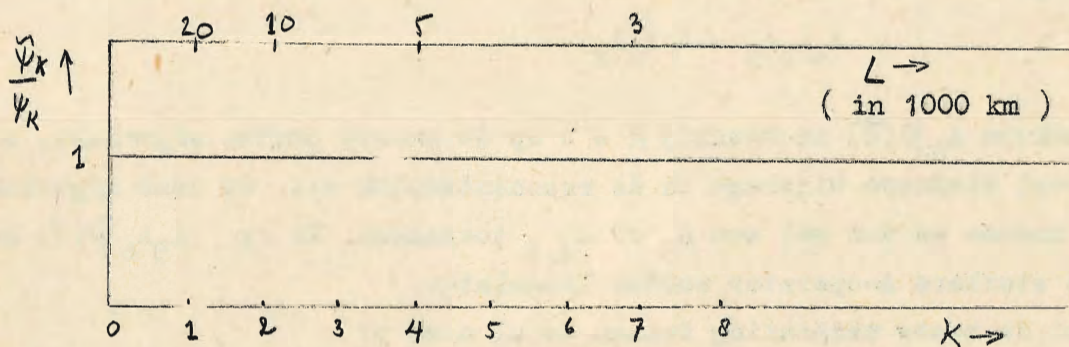


fig. 3.10

In de zomer is $m = 8,3$ met $d_m = 600 \text{ km}$ beter.

E. Algemene opmerking over de reversibiliteit van het barotrope model.

Om een inzicht te krijgen in de aard van de fouten, die in de barotrope voorspellingen optreden, kan het nuttig zijn de vergelijking te integreren van $t = 0$ naar $-t$, dus uit een gegeven eindtoestand de begintoestand terug te berekenen.

De vraag rijst of dit mag. Het is bekend, dat de diffusievergelijking geen tekenomkering van t toelaat, omdat dan onstabiele golfoplossingen verkregen worden.

We onderzoeken nu eerst het gedrag van de gelineariseerde barotrope voorspellingsvergelijking (3.4). Als we hierin het teken van de ruimtelijke differentiaal en dat van de tijdsdifferential omkeren, dan blijft hij geldig.

Voor kleine storingen is het barotrope model dus in mathematische zin omkeerbaar. Voor grote storingen moet men de oorspronkelijke barotrope voorspellingsvergelijking beschouwen, die niet lineair is en waarvan de oplossing dus niet in vlakke golven kan worden uitgedrukt. Een mathematisch bewijs van de reversibiliteit van de barotrope voorspellingsvergelijking stuit daardoor op grote moeilijkheden. Fysisch kan men argumenteren, dat het barotrope model geen omzetting van potentiële in kinetische energie kent en dat processen met konstante kinetische energie in het algemeen omkeerbaar zijn.

-o-o-o-o-o-o-o-

LITERATUUR.

- BEST, W.H. 1956. Differences in numerical prognoses resulting from differences in analyses. *Tellus* 8, no.3.
- BJERKNES, V. 1904. Das Problem der Wettervorhersage, betrachtet vom Standpunkte der Mechanik und Physik. *Met. Z.*
- BOLIN, B. and J.G.CHARNEY. 1951. Numerical tendency computations from the barotropic vorticity equation. *Tellus* 3.
- BOLIN, B. 1955. Numerical forecasting with the barotropic model. *Tellus* 7 no.1
- BOLIN, B. 1956. An improved barotropic model and some aspects of using the balance equation for 3-dimensional flow. *Tellus* 8, no.1.
- BOOTH, A.D. 1955. Numerical methods. Butterworth, London.
- BUSHBY, F.H. and M.K.HINDS. 1955. Further computations of 24 hr pressure changes based on a two-parameter model. *Q.J.* 81, no.349.
- CHARNEY, J.G. 1948.^{xxx}) On the scale of atmospheric motions. *Geof.Publ.* 17, no.2.
- CHARNEY, J.G. 1949.^{xxx}) On a physical basis for numerical prediction of large-scale motions in the atmosphere.
- CHARNEY, J.G., R.FJÖRTOFT and J.VON NEUMANN. 1950. Numerical integration of the barotropic vorticity equation. *Tellus* 2, no.4.
- CHARNEY, J.G. 1951.^{xx}) Dynamic forecasting. *Compendium of meteorology.*
- CHARNEY, J.G. and N.A.PHILLIPS. 1953.^{xx}) Numerical integration of the quasi-geostrophic equations for barotropic and simple baroclinic flows. *J.M.* 10.
- CHARNEY, J.G. 1954. Numerical prediction of cyclogenesis. *Proc. Nat. Acad. of Sciences. Washington* 40.
- COURANT, R., K.O.FRIEDRICHS und H.LEVY. 1928. Ueber die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. *Math. Ann.* 100.
- EADY, E.T. 1952. Note on weather computing and the so-called $2\frac{1}{2}$ dimensional model. *Tellus* 4.
- EDELMANN, W. 1956. Eine nicht geostrophische Windapproximation und ihre Anwendungen auf dem beginnenden Occlusionsprozess. *Met. Abh. der freien Univ. Berlin. Band* 3, Heft 4.
- ELIASSEN, A. 1949. The quasi-static equations of motion with pressure as independent variable. *Geof. Publ.* 17, no.3.

- ELIASSEN, A. 1952. Simplified models of the atmosphere designed for the purpose of numerical weather prediction. *Tellus* 4.
- ELIASSEN, A. 1956.^x) Hoofdstuk in Pettersens' "Synoptic analysis and forecasting." 2e editie.
- FJÖRTOFT, R. 1952.^{xxx}) On a numerical method of integrating the barotropic vorticity equation. *Tellus* 4, no.3.
- FJÖRTOFT, R. 1955.^{xxx}) On the use of space smoothing in physical weather forecasting. *Tellus* 7.
- FLEAGLE, R.G. 1948. Quantitative analysis of factors influencing pressure change. *J.M.* 5.
- FRANKEL, S.P. 1950. Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations. *Math. tables and other aids to computation*, 4, no.30.
- GATES, W.L. 1953. A method of numerical forecasting by juxtaposition of one-dimensional solutions and its application to the equivalent barotropic model. *J.M.* 10.
- HEYNA, B. 1955. De toepassing van elektronische rekenmachines. Coll. Versl. K.N.M.I.
- HINKELMANN, K. 1951. Der Mechanismus des Meteorologischen Lärmes. *Tellus* 3.
- JEFFREYS, H. 1919. *Phil. Mag.* p.1.
- LIEBMANN, H. 1918. Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und konformer Abbildungen. *Bayer. Akad. Wiss., Math. Phys. Klasse, Sitz.* 1918, p.385...416.
- MARGULES, M. 1903. Ueber die Beziehung zwischen Barometerschwankungen und Kontinuitätsgleichung. *Boltzmann Festschrift*, 1904, Leipzig.
- POEL, W.L. van der, 1956. The logical principles of some simple computers. Diss. Amsterdam.
- PHILLIPS, N.A. 1951.^{xxx}) A simple 3-dimensional model for the study of large-scale extratropical flow patterns. *J.M.* 8.
- PHILLIPS, N.A. 1956. General circulation of the atmosphere, a numerical experiment. *Q.J.* 82.

- RICHARDSON, L.F. 1911. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with application to the stresses in a masonry dam. Phil. Trans. Roy. Soc., A, London.
- RICHARDSON, L.F. 1922.^{xxx)} Weather prediction by numerical process. Cambridge.
- REUTER, H. 1954.^{x)} Methoden und Probleme der Wettervorhersage, Wien.
- SAWYER, J.S. and F.H. BUSHBY. 1953. A baroclinic model suitable for numerical integration. J.M. 10.
- SCHLEGEL, M. 1956. Weitere Beobachtungen von Druckwellen bei Wasserstoffbombenexplosionen im Frühjahr 1954. Met. Rundschau 9.
- THOMPSON, P.D. 1956. A theory of large-scale disturbances in non-geostrophic flow. J.M. 13.
- THOMPSON, P.D. 1956^a. Uncertainty of initial state as factor in the predictability of large-scale atmospheric flow patterns. Joint numerical Pred. Unit. Washington.

x) Geschikt als inleiding
xx) Goed overzichtsartikel
xxx) Van principiële betekenis

Aanhangsel.

Voorbeeld van een 24-uurs voorspelling volgens Fjörtoft.

In de hierna volgende 14 kaarten wordt een voorbeeld gegeven van de methode Fjörtoft. De oorspronkelijke constructie werd op volledig geanalyseerde kaarten, model W17, uitgevoerd.

Door verschillende oorzaken is het gebied, waarvoor een voorspelling wordt verkregen, kleiner dan dat wat in de oorspronkelijke analyse bekend is. Het inschriepelen van dit gebied is op de hier gebruikte kaartjes model W 13 niet meer te zien, omdat het hierop afgebeelde deel van het aardoppervlak vrijwel samenvalt met het "voorspellingsgebied".

De kaartjes stellen achtereenvolgens voor:

1. ϕ_{500} mb, het 500 mb patroon voor 11.12.56, 1500 Z. Hoogtelijnen hier en in alle volgende kaartjes om de 8 dam.
2. $\frac{1}{2} [\phi(x, y+d_m) + \phi(x, y-d_m)]$ met $d_m = 800$ km. Het gemiddelde van de twee 500-mb patronen die men verkrijgt door een onderlinge verschuiving over 1600 km in noord-zuid richting.
3. $\frac{1}{2} [\phi(x+d_m, y) + \phi(x-d_m, y)]$ hetzelfde als 2, maar nu met oost-west verschuiving.
4. $A_m \phi(x, y)$, het gemiddelde van 2 en 3. Stippellijnen geven de waarden van f_m (vgl. 3.93), waarbij de integratieconstante zo is gekozen, dat $f_m = 0$ op 80° n.b.
5. $A_m \phi + f_m$. Deze kaart geeft de som der beide velden in 4.
6. $\eta_m = \phi - A_m \phi - f_m$. η_m is evenredig met de absolute vorticititeit, (vgl. 3.94).
7. Het η_m veld verplaatst over 24 uur volgens de "gemiddelde" stroming $A_m \phi + f_m$ (5).
8. Het verschil van de velden 7 en 6. Dit is de voorspelde verandering in η_m , waarvoor in (3.100) de notatie $F_m(x, y)$ gebruikt wordt.
9. $\frac{1}{2} [F_m(x+d_m, y) + F_m(x-d_m, y)]$
10. $\frac{1}{2} [F_m(x, y+d_m) + F_m(x, y-d_m)]$
11. $3 A_m F_m$, verkregen door de som van 9 en 10 met een factor $3/2$ te vermenigvuldigen.
12. $F_m + 3 A_m F_m$. We gebruiken hier (3.105b), volgens welke deze kaart de 24-uurs isallohypsen voorstelt.

13. Voorspelde 500-mb kaart voor 11.12.56, 1500 Z., verkregen door 12 bij 1 op te tellen.

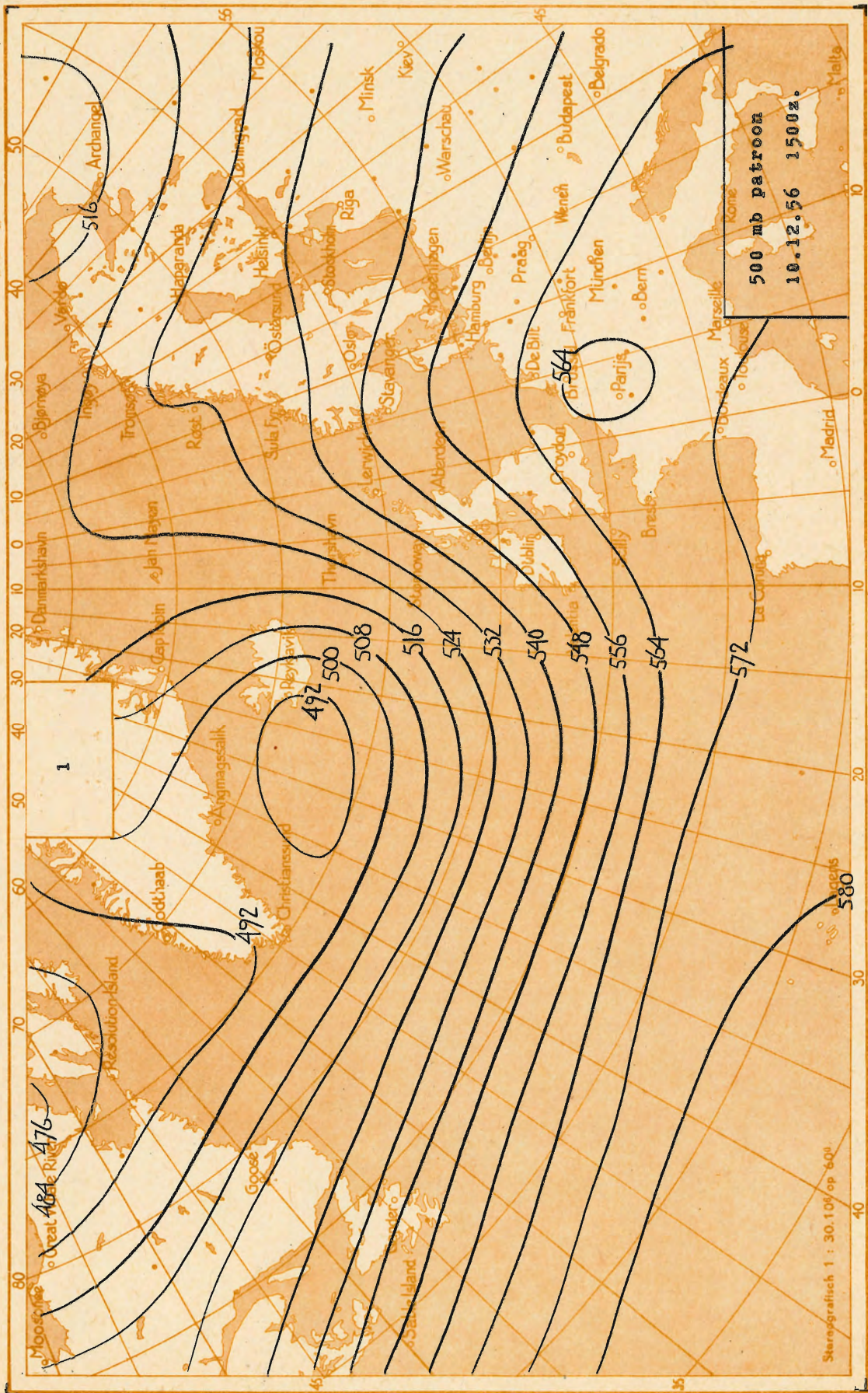
14. Werkelijk opgetreden 500-mb patroon voor 11.12.56, 1500 Z.

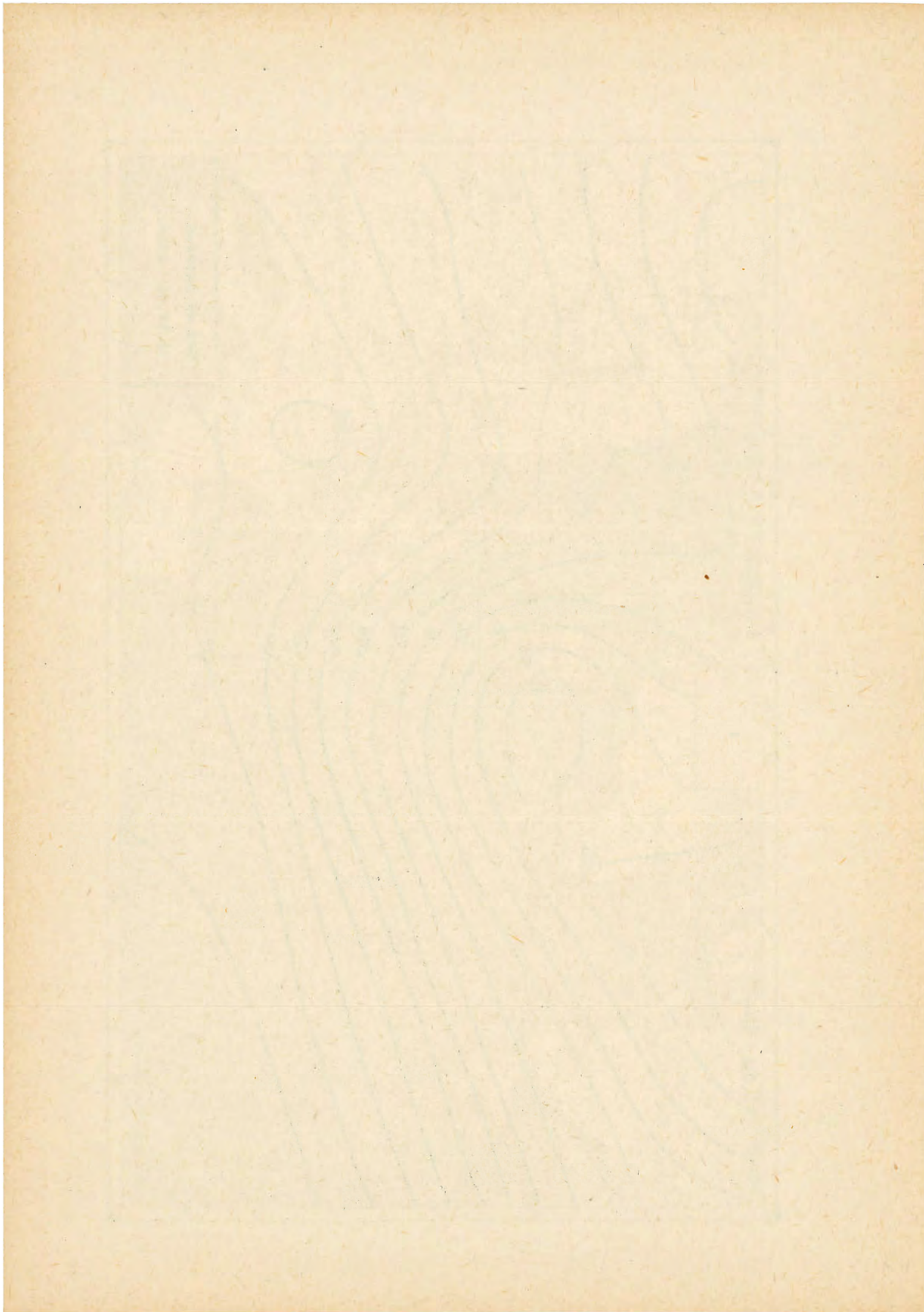
Opmerking 1.

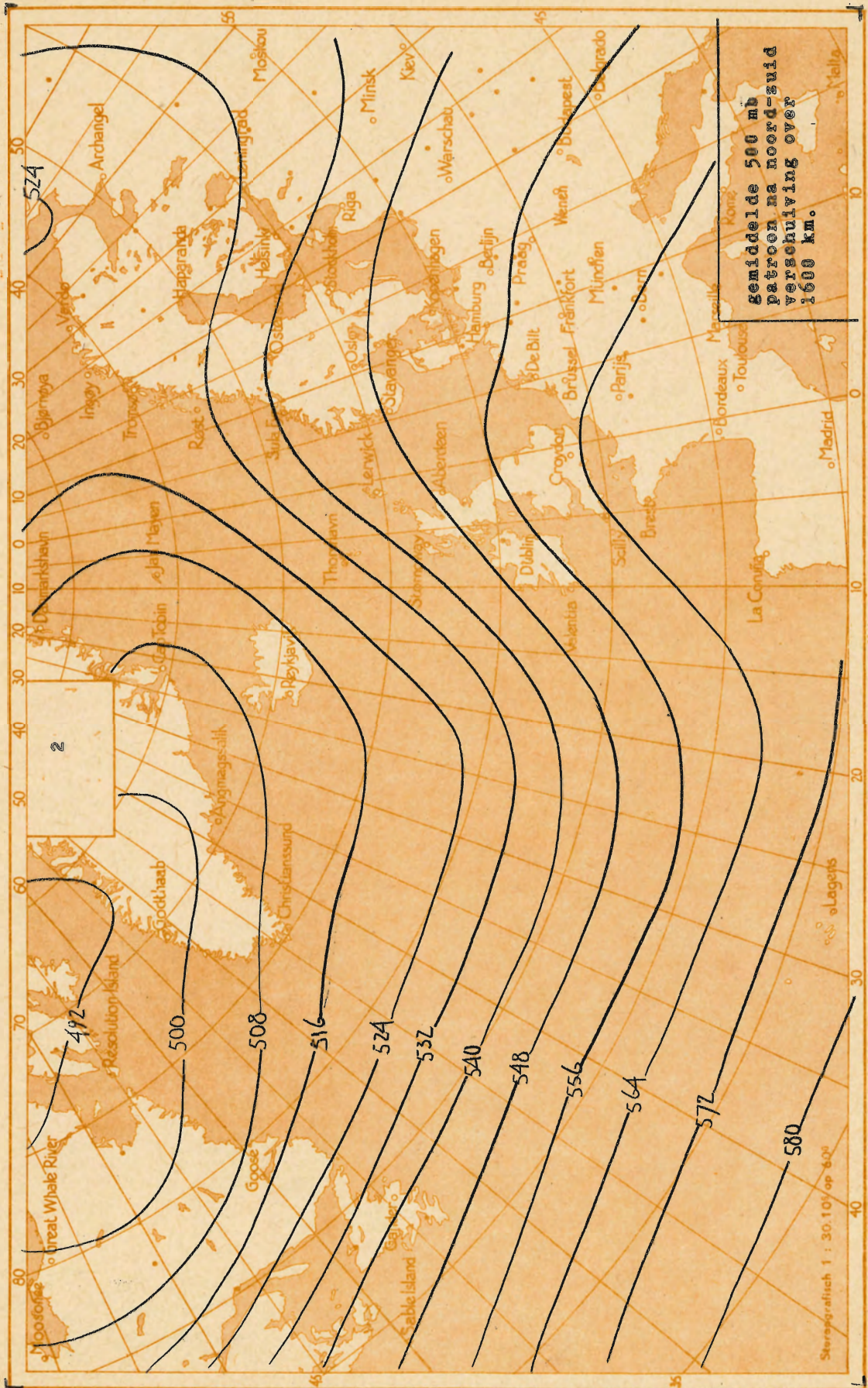
Het aantal kaarten, dat extra moet worden getekend om tot een voorspeld 500-mb patroon te komen volgens de methode Fjörteft is 14, twee copieën inbegrepen.

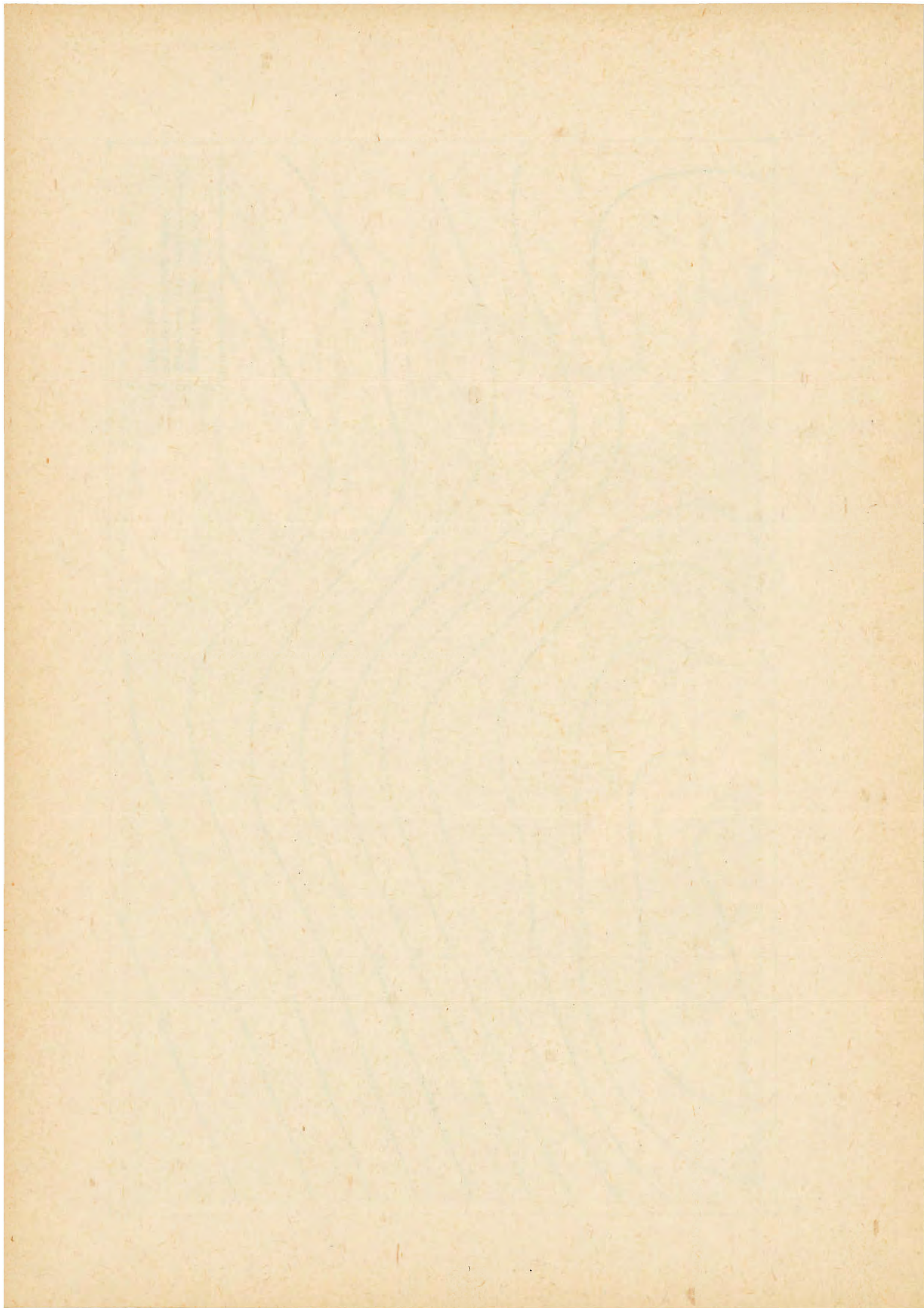
Opmerking 2.

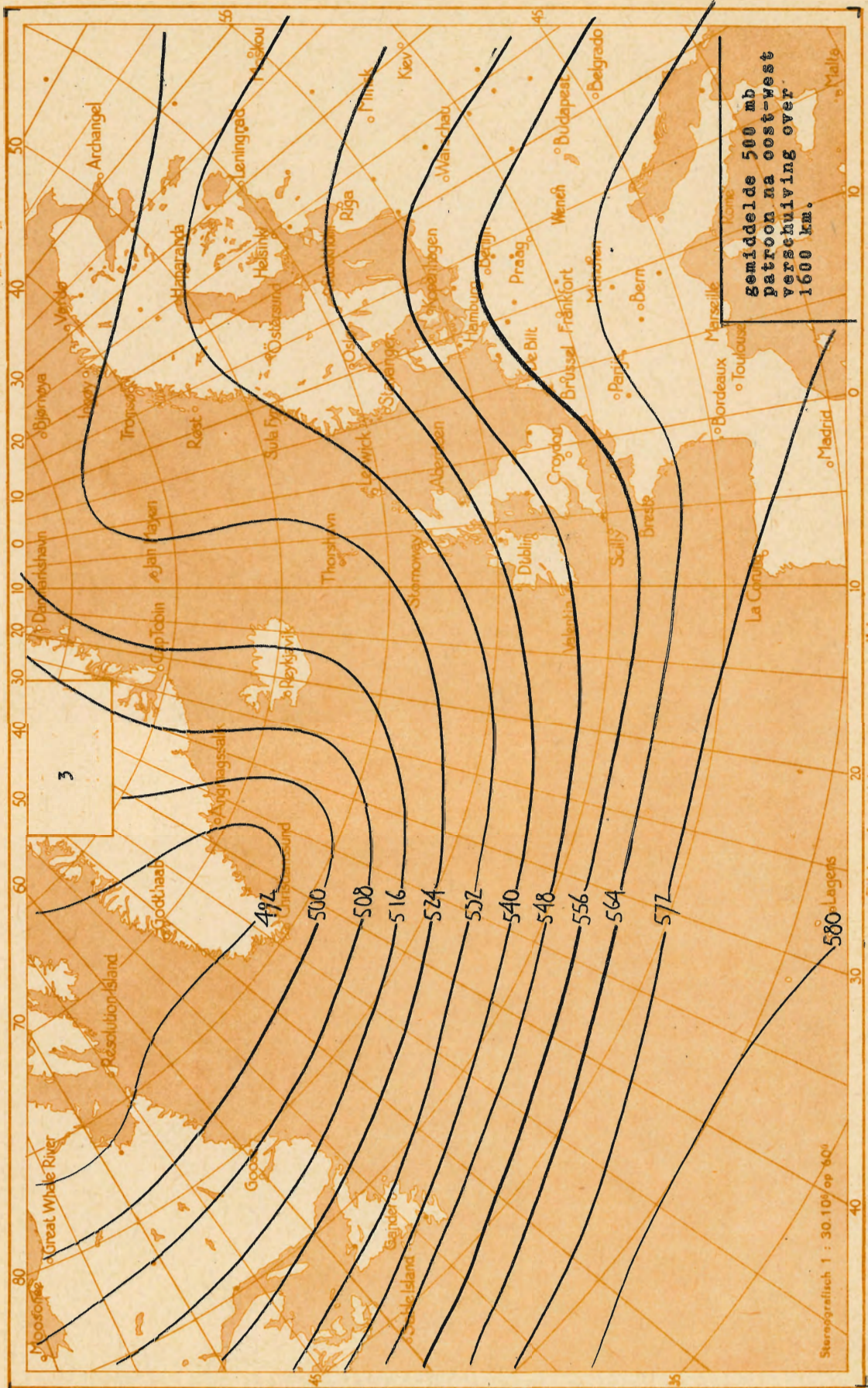
Hoewel het procédé in principe objectief is, is er in de praktijk bij de constructie van kaart 7 niet voldoende tijd om werkelijk puntsgewijs de advectie van η_m uit te voeren. Daardoor kan een persoonlijke visie worden geïntroduceerd.





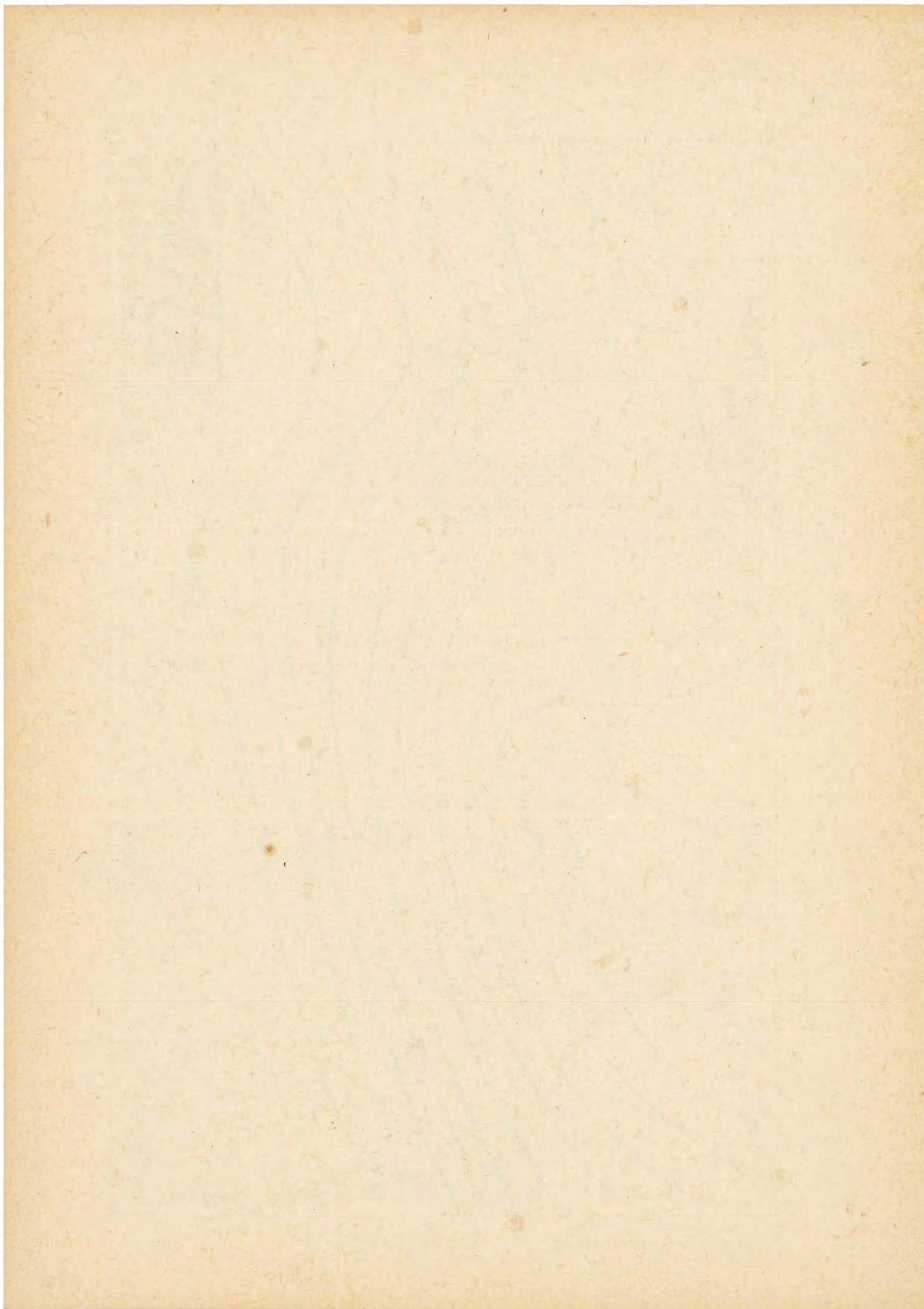


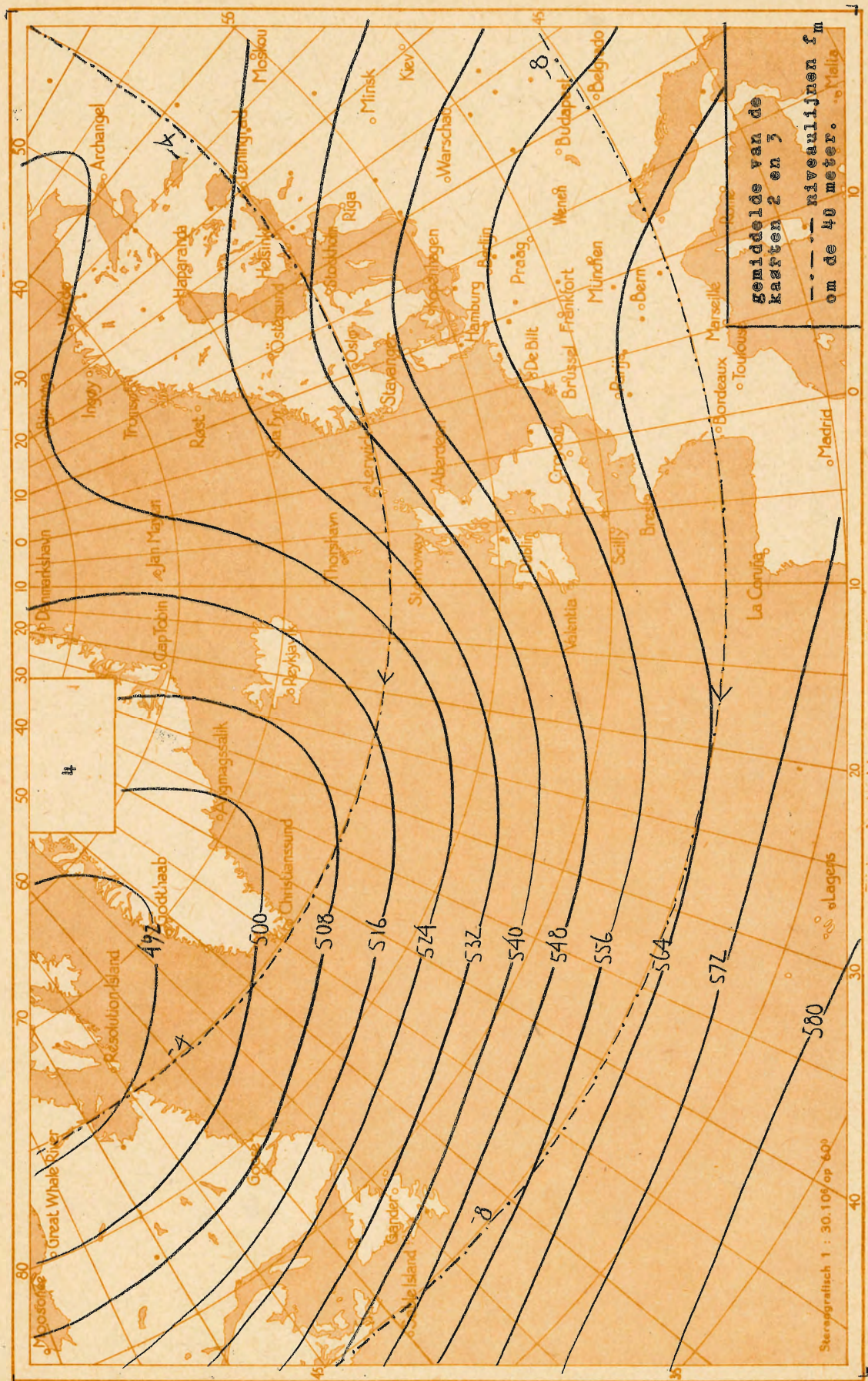


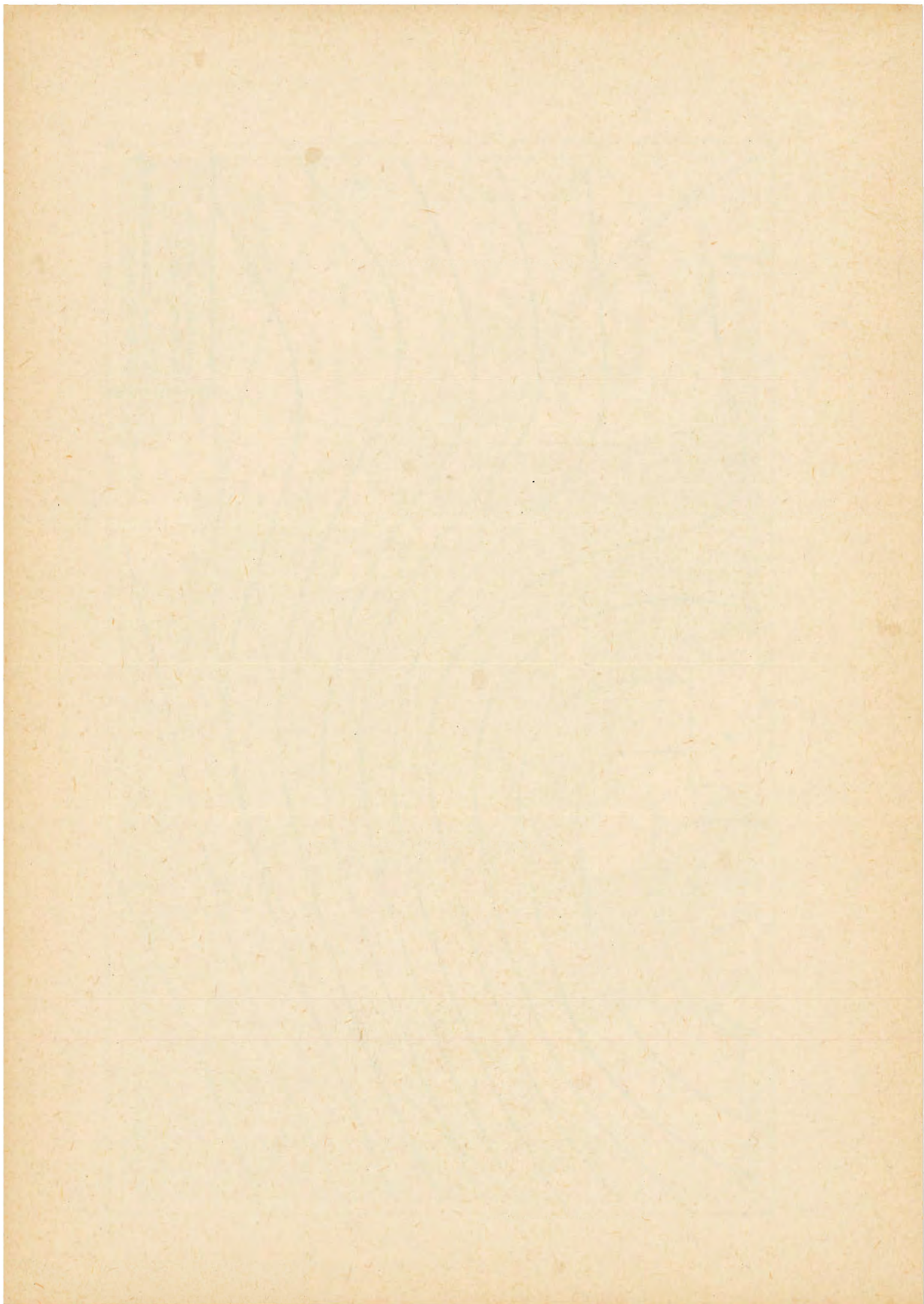


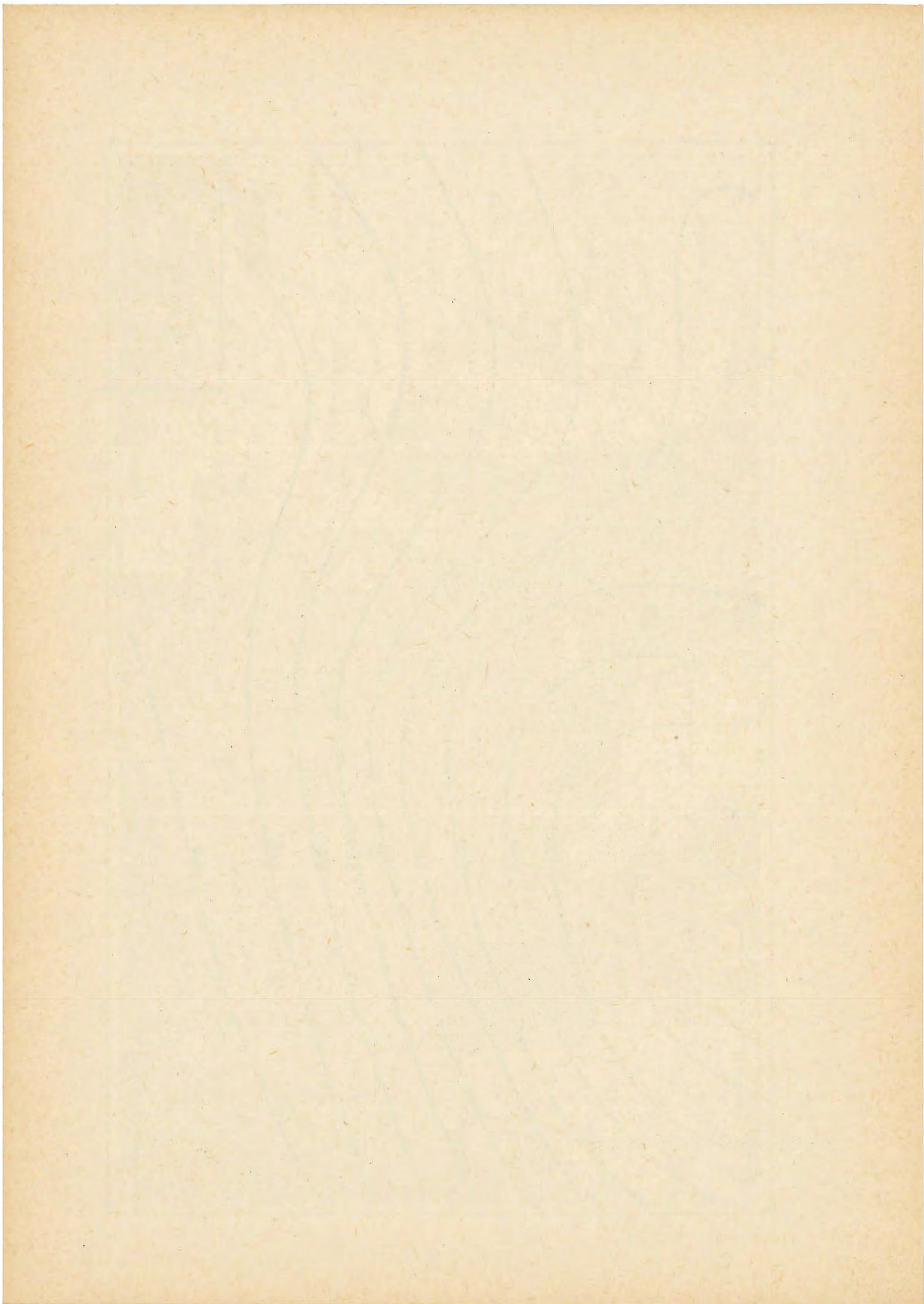
Gemiddelde 500 mb
 patroon na oost-west
 verstuwving over
 1600 km.

Stereografisch 1 : 30.100 op 80°

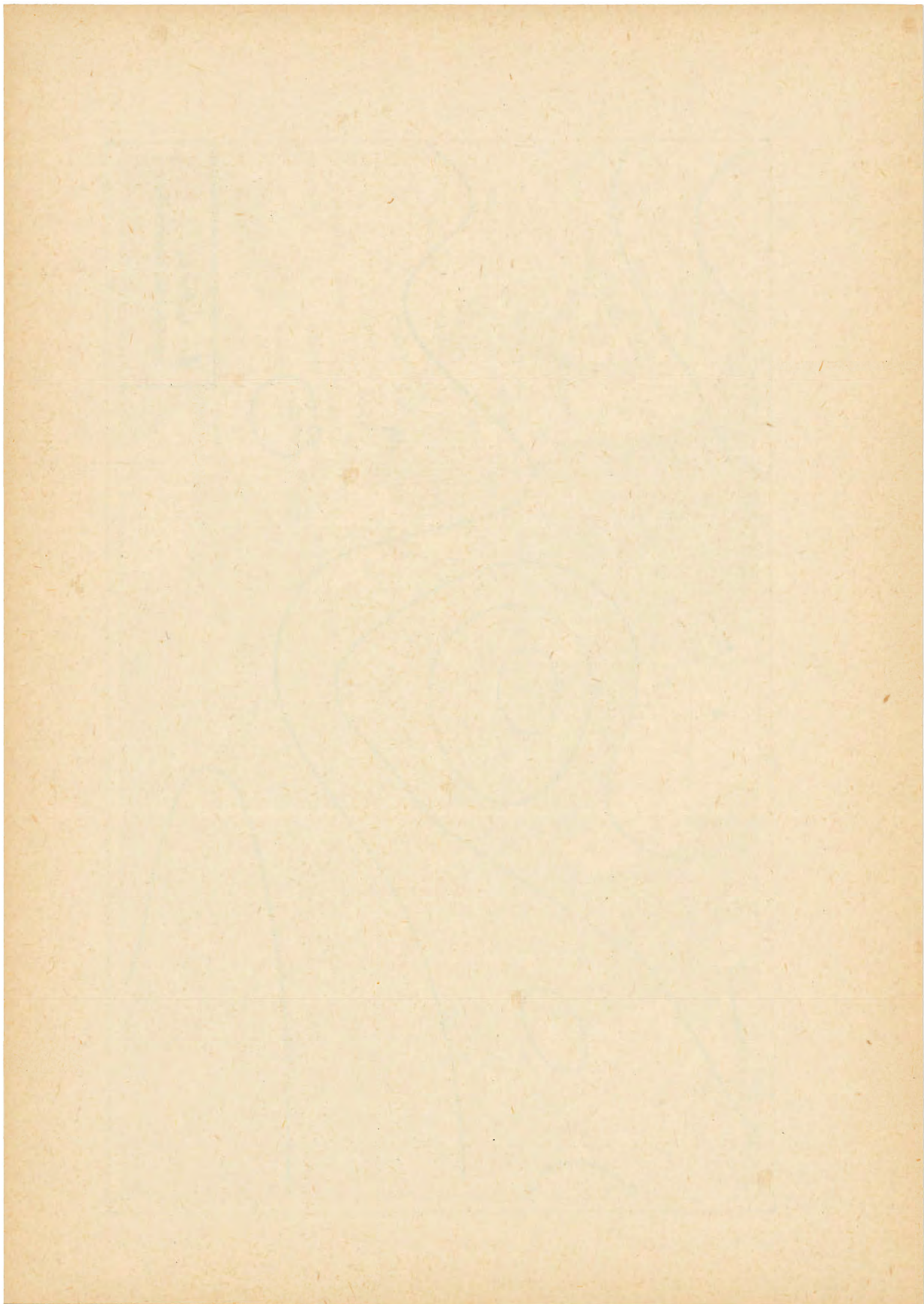








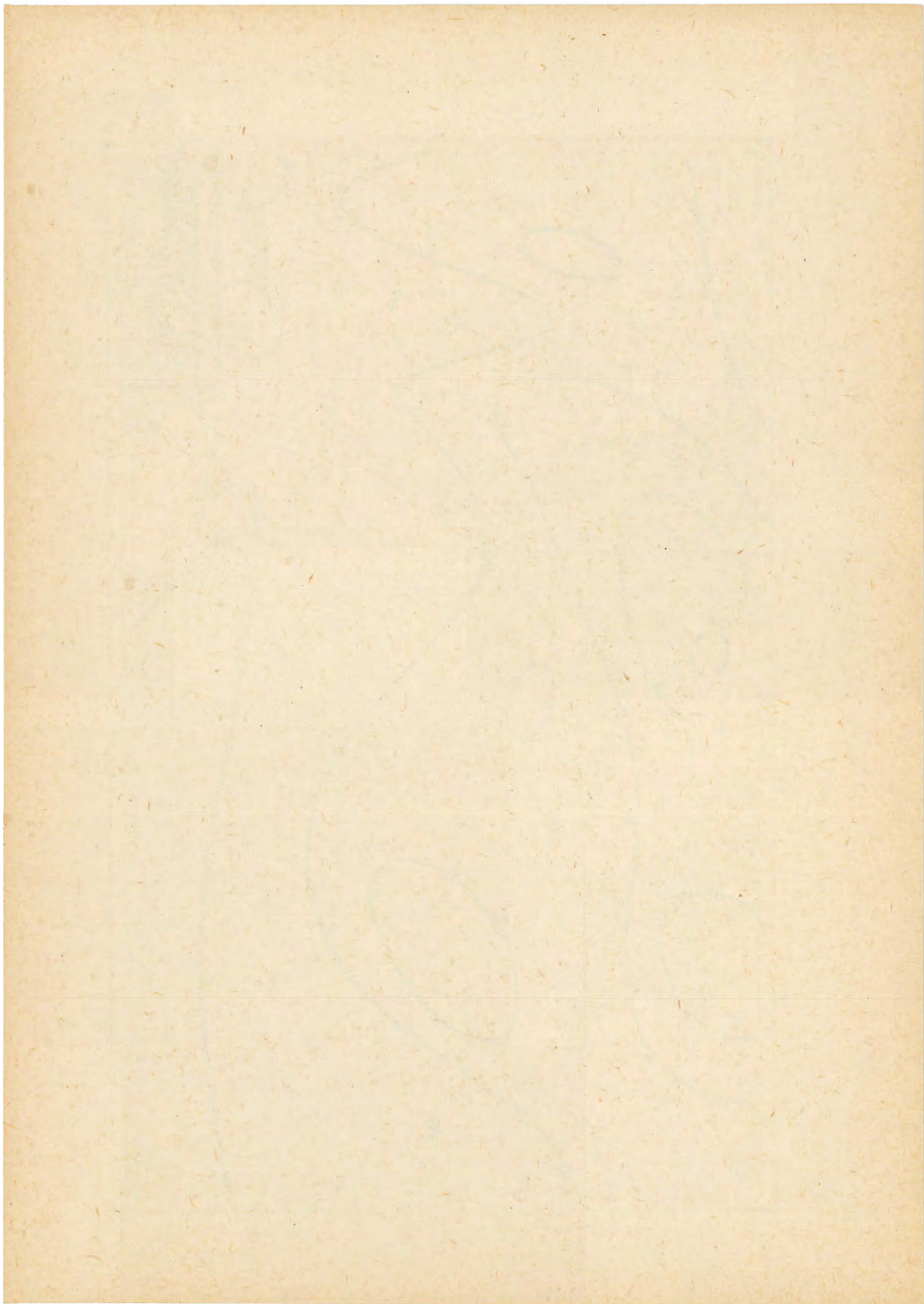


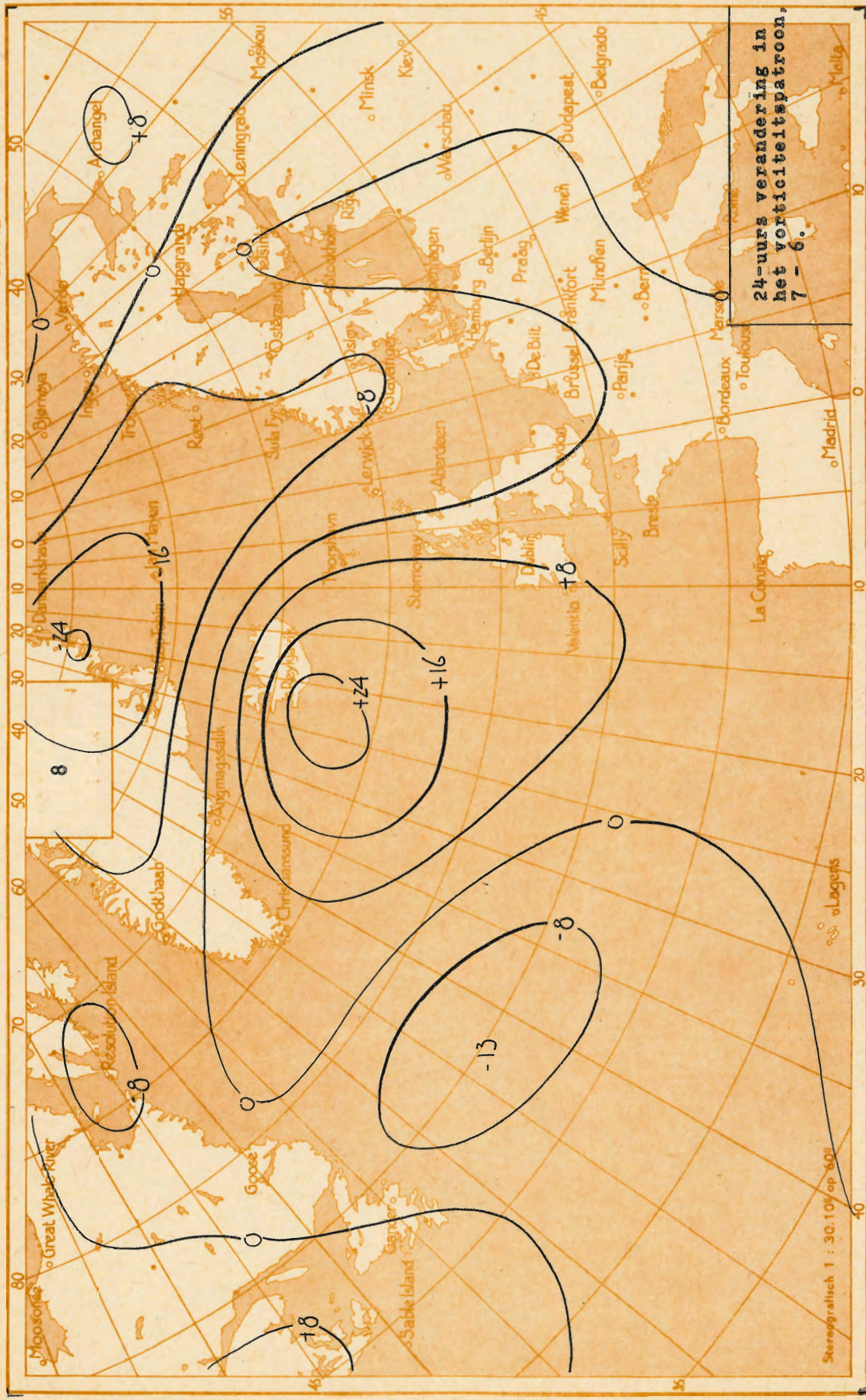




verticiteitstroon
 over 24 uur, verplaatst
 volgens de gemiddelde
 stroming (5).

Stereografisch 1 : 30.10⁴ op 60°



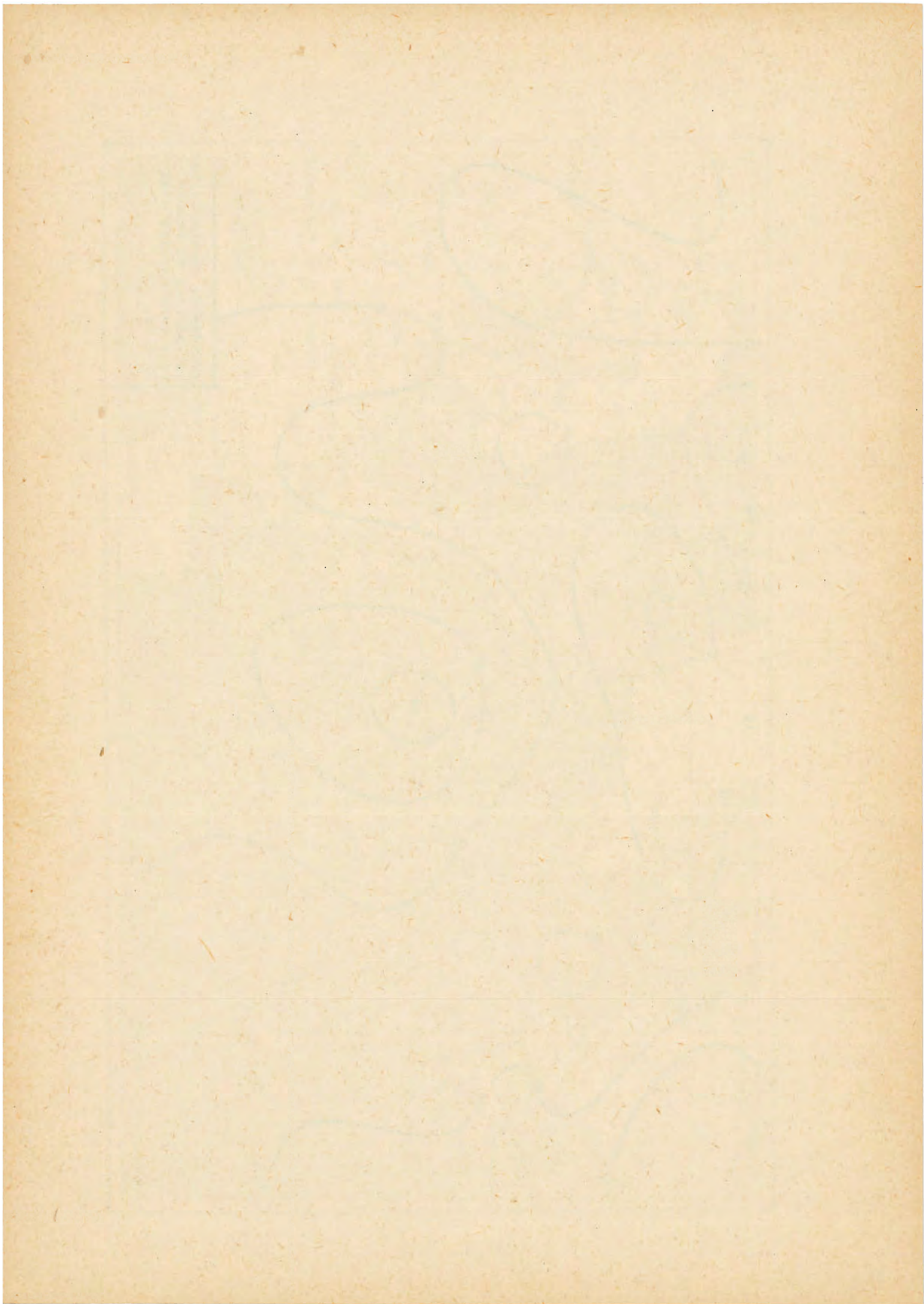


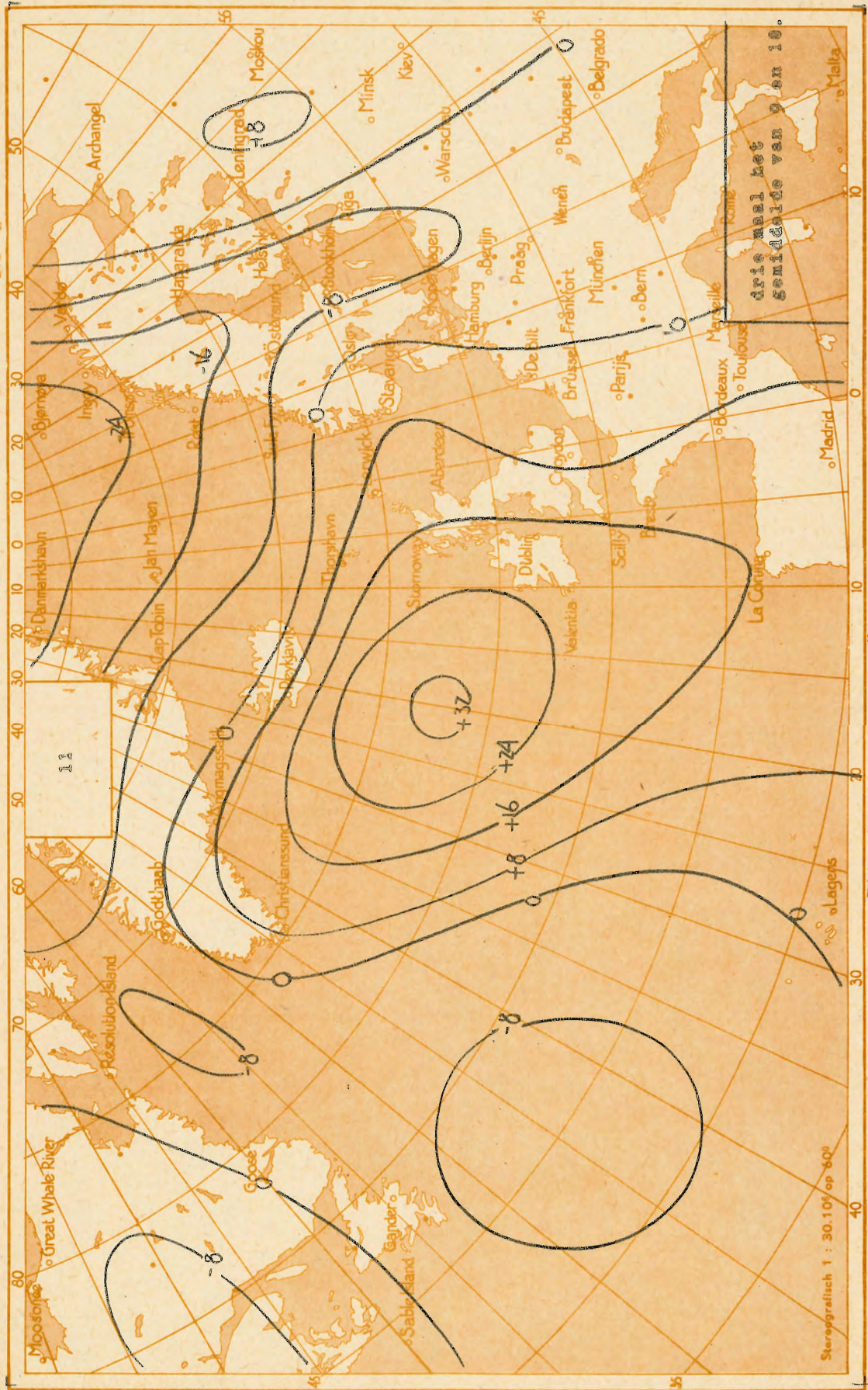
24-uurs verandering in
het vortciteitpatroon,
7 - 6.

Stereografisch 1 : 30.100 op 600



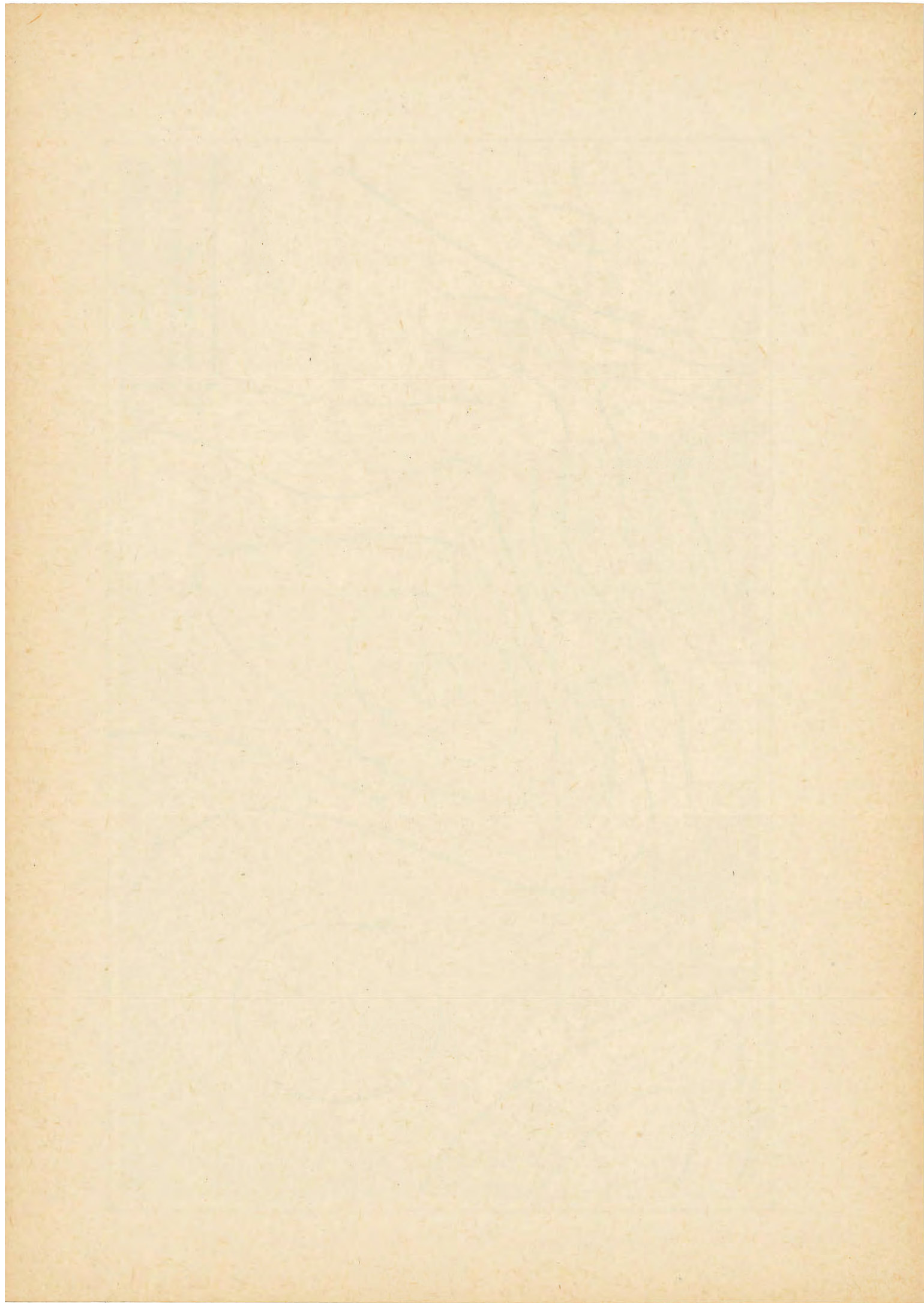


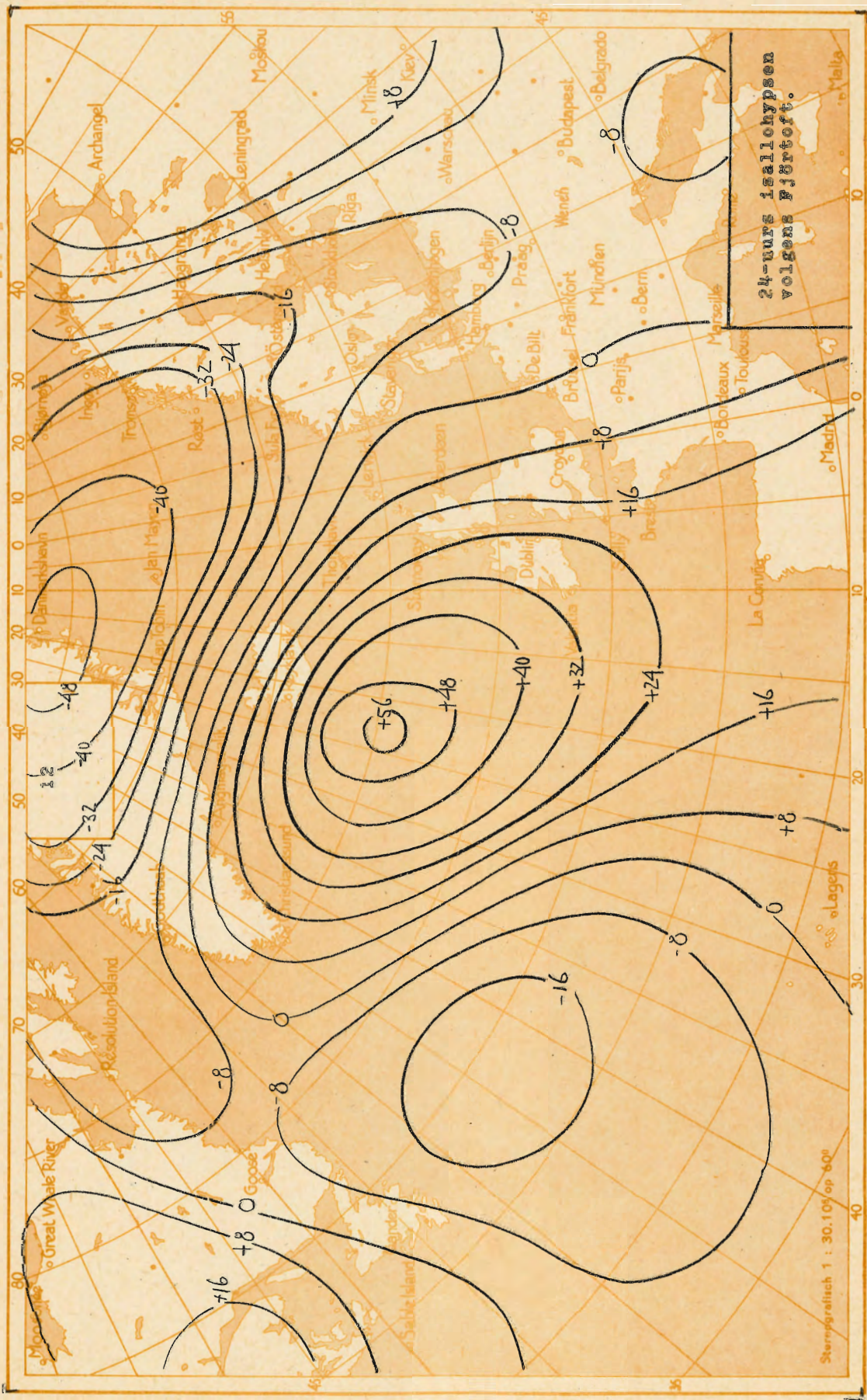


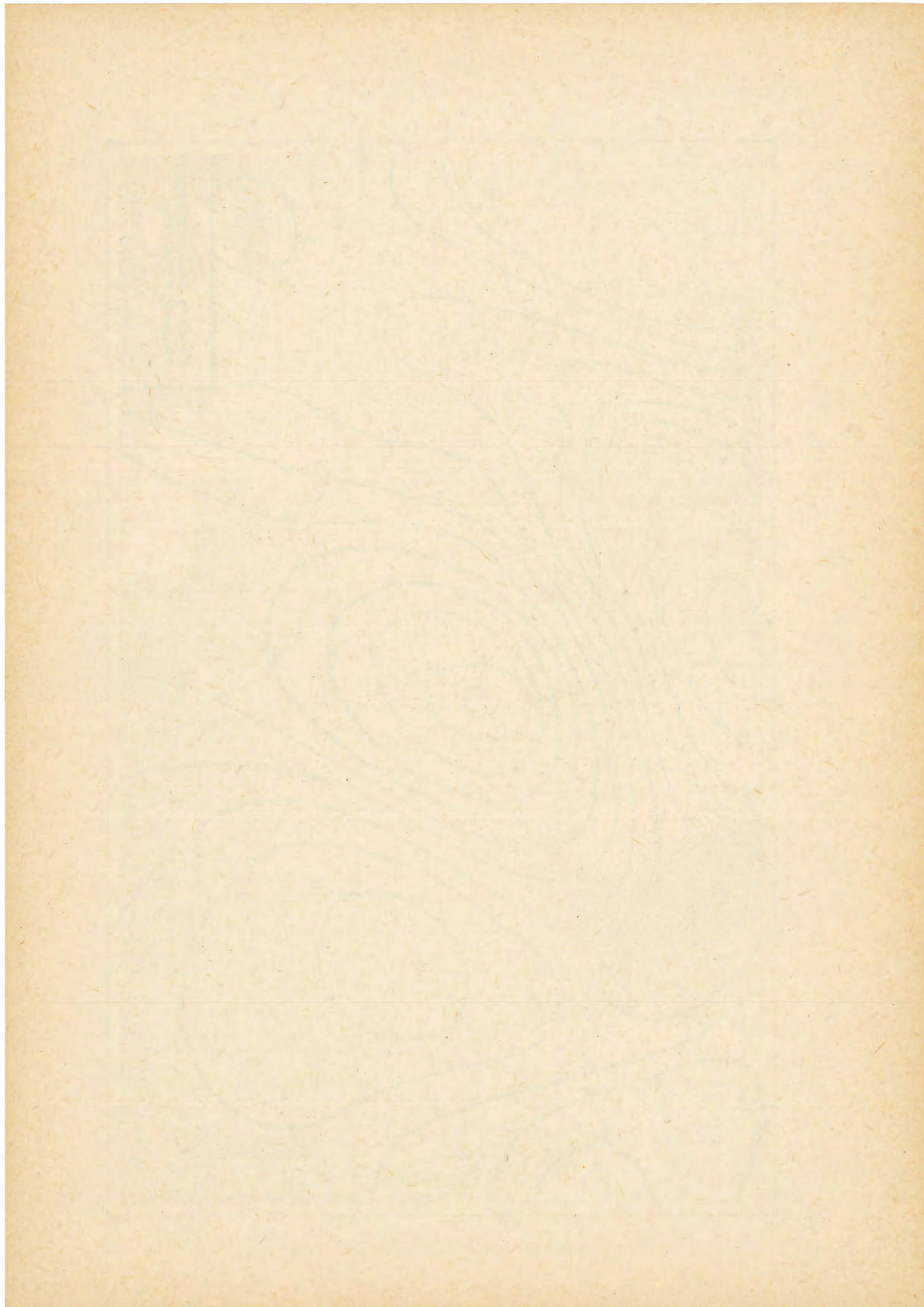


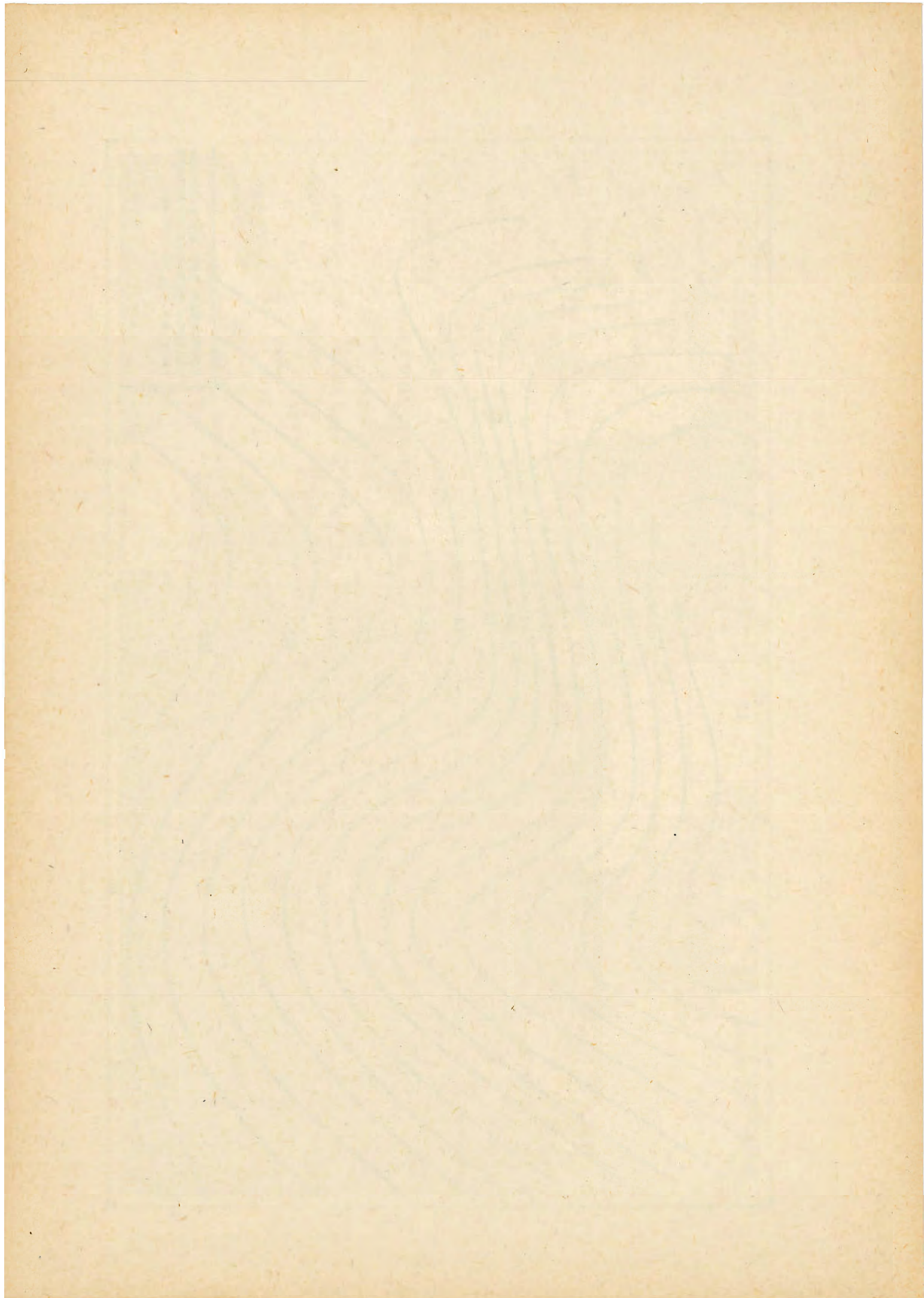
drie maal het
Gemiddelde van den 18.

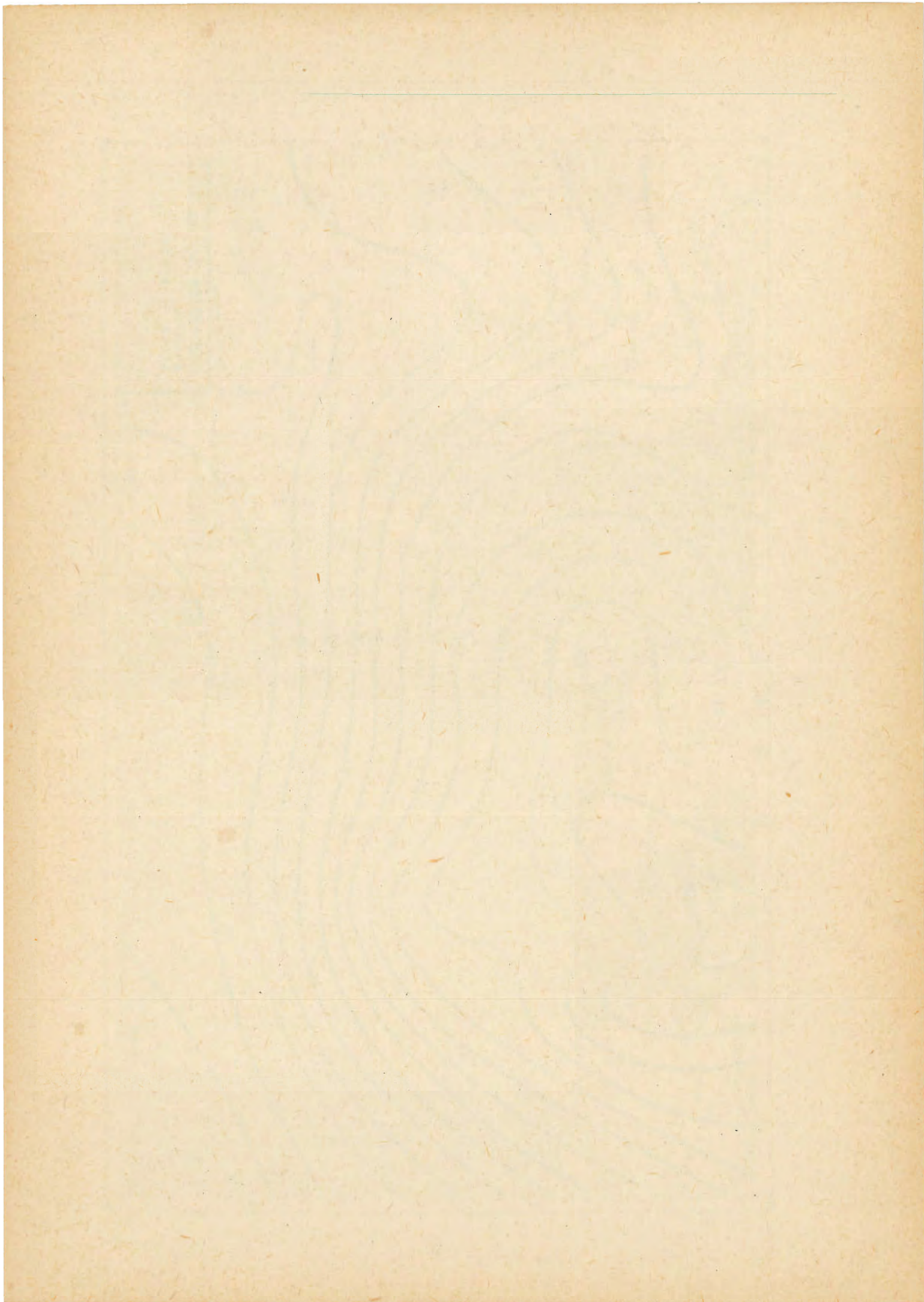
Stereograafisch 1 : 30.100 op 60°











Numerieke integratie van de barotrope voorspellingsvergelijking

Lijst van storende fouten

Blz.	Regel:	Staat:	Moet zijn:
8	5 vo	$(ikr - i t)$	$(ikr - i\omega t)$
9	6 vb	$w \frac{\partial}{\partial x}$	$w \frac{\partial}{\partial z}$
9	7 vb	$\omega \frac{\partial}{\partial z}$	$\omega \frac{\partial}{\partial p}$
9	26 vb	$(1.866)^2$	$(1,866)^{-2}$
10	23 vb	m	m^*
11	0 vb		Toevoegen: R gasconstante
11	16 vb	$A_m + f_m$	$A_m \phi + f_m$
11	4 vo	(j)	$\epsilon^{(j)}$
13	3 vo	$\frac{\partial \chi}{\partial z}$	$\frac{\partial \chi}{\partial p}$
14	8 vb	v	\vec{v}
14	8 vo	$2 \vec{\Omega} \cos \varphi$	$2 \vec{\Omega} u \cos \varphi$
16	9 vo	dx dy d	dx dy dz
16	7 vo	in	is
16	6 vo	dx dy dz	dx dy dp
17	10 vo	$ \vec{v} ^2 c$	$\frac{1}{2} \vec{v} ^2 c$
18	5 vb	(1.6)	(1.7)
19	11 vb	$\vec{k}_0 \cdot \vec{\nabla}_\lambda \omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial p}$	$\underbrace{\vec{k}_0 \cdot \vec{\nabla}_\lambda \omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial p}}_{\text{III}}$
19	6 vb	derde	vierde
20	11 vo	$1 \leq p \leq 0$	$0 \leq p \leq 1$
23	16 vo	$-\frac{\Delta \ln p}{\Delta y}$	$-v \frac{\Delta \ln p}{\Delta y}$
31	10 vb	$Z^2 - 2(\dots) Z - 1$	$Z^2 - 2(\dots) Z + 1$
32	3 vo	$-\frac{(\dots)}{d^2}$	$-4 \frac{(\dots)}{d^2}$
32	2 vo	$+ i\beta \frac{\sin K d}{d}$	$+ i\beta \frac{\sin K d}{d} \phi(x,y,t)$

Blz. Regel: Staat:

Moet zijn:

33	6 vb	$\frac{d}{\Delta t} \geq U_0 \sin \kappa d + \dots$	$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{\Delta t} \geq \left(U_0 - \frac{\beta d^2/4}{\sin^2 \frac{\kappa d}{2} + \sin^2 \frac{\mu d}{2}} \right) \sin \kappa d \\ &\text{Hieraan is zeker voldaan indien} \\ &1) \quad \sin \kappa d > 0, \\ &\quad \text{zodat } 2d \text{ kleiner moet zijn dan} \\ &\quad \text{de golflengte.} \\ &2) \quad d/\Delta t \geq U_0 \end{aligned} \right.$
	t/m	
		
	7 vo	$\frac{d}{\Delta t} \geq U_0$	
35	11 vb	$+ [\chi(t) - \chi(t-y)]$	$- [\chi(t) - \chi(t-y)]$
36	12 vb	van af	van ϕ af
46	4 vb	$1 = 1, \dots$	$1 = 1, \dots$
48	7 vb	F_r	\hat{F}_r
52	8 vb	$-2 j(\dots) +$	$-2 \lambda_j (\dots) +$
55	2 vo	$k, 1 = 1, 1$	$k, 1 = 1, 1$
58	10 vb	orthogonaal	orthogonaal stelsel
59	7 vo	$-2 \lambda t A$	$-2 t_{k1} A$
59	2 vo	(3.36)	(3.63)
61	15 vb	$t_m^2 \lambda^2 - 4 + 1 = 0$	$t_m^2 \lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$
68	5 vo	$A_m \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4} [\dots - 4 \phi(x,y)]$	$A_m \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4} [\dots]$, weglaten: $- 4 \phi(x,y)$
69	4 vb	$\frac{1}{2} (\dots)$	$\frac{1}{2} \left(\cos \frac{k_1 \pi}{m} + \cos \frac{k_2 \pi}{m} \right)$
69	5 vo	$k^{(r)}$	$\phi_{\vec{k}}(\vec{r})$
73	12 vo	$(1,866)^2$	$(1,866)^{-2}$
80	16 vb		toevoegen: J.M. <u>6</u>
83	12 vb	11.12.56	10.12.56

78 onderaan,

in fig. 3.10 is de kromme weggevallen.

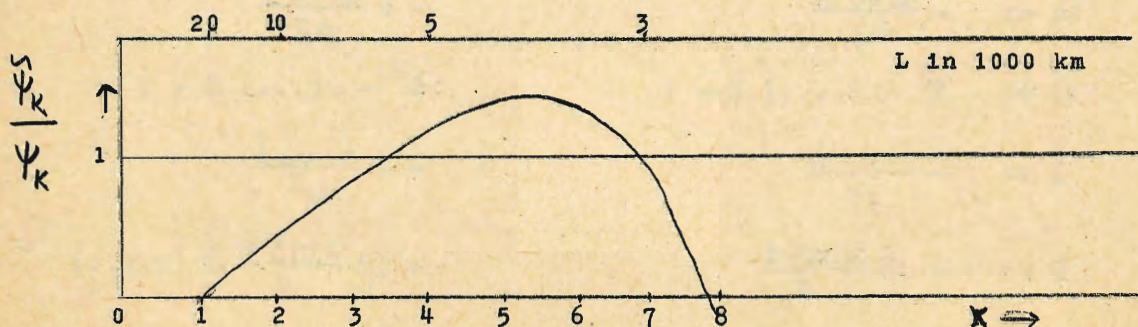


fig. 3.10

