

KONINKLIJK NEDERLANDS  
METEOROLOGISCH INSTITUUT

Wetenschappelijk Rapport W.R. 57-010 (II-011)

Dr. H.M. de Jong

Gecomponeerde hoogtestromingskaarten.



De Bilt, 1957

All Rights Reserved.

Nadruk zonder toestemming van het K.N.M.I. is verboden.

Dr. H.M. de Jong

Gecomponeerde hoogtestromingskaarten.

<u>Inhoud:</u>	<u>Pag.</u>
Summary	2
0. Inleiding	3
1. Gecomponeerde kaarten	3
2. Het windveld in gecomponeerde kaarten	6
3. Speciale gevallen	11
4. Analytisch voorbeeld	12
5. Differentiële analyse bij gecomponeerde kaarten	14
6. Toepassingen	16
A. Omhullende compositie van de stormvloeddepressie van 31 januari - 1 februari 1953	
B. Een gecomponeerde kaart voor een transatlantische vlucht	20
7. Gecomponeerde kaarten in de praktijk	21
Literatuur	23

Summary

In aeronautical meteorology upper air charts are prepared in order to investigate the navigational aspects of long range flights. For this purpose two types of charts are taken into use, i.e. fixed time and composite forecast charts. In the latter the distribution of winds, temperature and other aerological elements which are subject to considerable variations in time, are presented in concordance with the progress of the flight. There exists, however, no clear interpretation on the concept of composite charts. As a consequence only some qualitative features of these charts are known.

In this report an attempt has been made to clarify some points. The concept of composite charts is described by introducing a "time function" with appropriate field of isochronals. Especially those composite charts are considered where like in fixed time charts the winds may be approximated by means of the geostrophic wind equations. It turns out that in such charts the isochronals should coincide at each moment with isallohypeses and that the charts can be constructed by applying the well-known addition method of Maxwell. Besides it is shown that in general the conventional method of differential analyses fails. Finally the theoretical results are worked out in some examples.

## 0. Inleiding

In de luchtvaart is het essentieel bij de toepassing van aeronevignatie op lange afstandsvluchten de variabiliteit van het windveld in de tijd in rekening te brengen. De veranderingen van het windpatroon zijn binnen een tijdsinterval, dat overeenkomt met de vliegduur, gewoonlijk zo omvangrijk en snel, dat een vluchtvoorbereiding met inbegrip van het samenstellen van een vliegplan, gebaseerd op een "fixed time forecast chart", onvolledig is. De berekende vliegduur en vliegbaan zullen dientengevolge aanzienlijk kunnen afwijken van de werkelijke vliegtijd en actueel doorlopen vliegroute. Indien men in staat zou zijn de variabiliteit van het windpatroon en dat van andere fysische grootheden, zoals het temperatuurveld, enigermate te elimineren, dan zou de tijdfactor in de vluchtanalyse grotendeels uitgeschakeld kunnen worden. Men kan dit bereiken door zgn. "composite forecast charts" in te voeren. In de ICAO-documenten wordt hiervan de volgende definitie gegeven:

"a composite forecast chart is a forecast chart constructed so that the meteorological situation depicted for any point on the route is that, which it is expected will exist there at the time at which the aircraft is expected to be at that point." <sup>\*)</sup>

Bij de constructie van dergelijke "gecomponeerde kaarten" wordt er naar gestreefd de kaart zodanig aan de vluchtkarakteristieken aan te passen, dat lange afstandsvluchten kunnen worden geanalyseerd in een "stationair" model van de hoogtestroming.

In dit rapport worden enkele eigenschappen van deze kaarten nader onderzocht, waarbij het begrip "composite chart" wat ruimer is genomen dan in de luchtvaartmeteorologie gebruikelijk is.

## 1. Gecomponeerde kaarten

Omdat in de praktijk de windgegevens en temperatuurwaarden langs een vliegroute gewoonlijk in vijfgraadszônes worden opgegeven, wordt het begrip "composite chart" wel als volgt aan de zônale verdeling vastgeknoopt. Men verdeelt het beschouwde gebied van de kaart in  $n$  zônes ter breedte van  $\Delta x$  graden ( $n\Delta x = a$ , zie fig. 1). In de eerste zône neemt men de contourlijnen met de daarbij behorende geodynamische hoogte  $\phi$  van het isobarisch vlak over op het tijdstip  $t_0 + \Delta t$ . In de tweede zône de contourlijnen met de geodynamische hoogte op het tijdstip  $t_0 + 2\Delta t$  enz., tot men in de  $n^e$  zône de analyse overneemt op het tijdstip  $t_0 + n\Delta t$ . Vervolgens vermeerdert men het aantal zônes  $n$  door de

---

\*) Doc. 7605 - MET/526.

zônebreedte  $\Delta x$  zodanig te verkleinen dat  $n\Delta x$  onveranderd blijft, terwijl gelijktijdig het increment  $\Delta t$  zodanig wordt verkleind, dat bij limietovergang voor  $n \rightarrow \infty$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\lim. \frac{\Delta x}{\Delta t}$  met de eigensnelheid van het vliegtuig overeenkomt. De composite chart bestaat dan uit het veld van isochronen  $t = \text{const.}$ , het veld van contourlijnen van de gecomponeerde geodynamische hoogte  $(\phi)_t$  en eventueel het veld van isoplethen voor de gecomponeerde temperatuur  $(T)_t$  of andere grootheid.

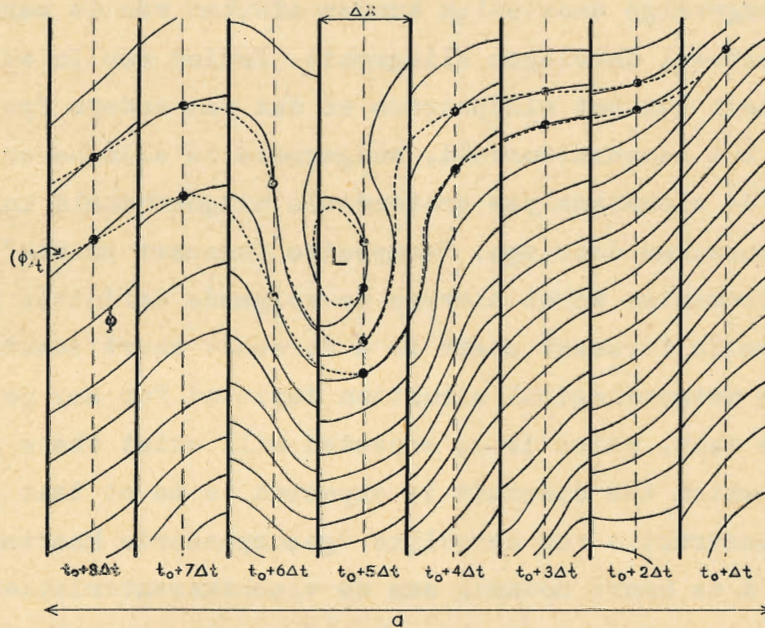


fig. 1

Deze constructie is uiteraard niet volledig aan de praktijk aangepast, immers  $\lim. \frac{\Delta x}{\Delta t}$  zou eerder met de grondsnelheid moeten overeenkomen. Wegens de richtingsafhankelijkheid van de grondsnelheid - de grondsnelheid hangt immers af van de vliegrichting - rijst dan echter de vraag of de constructie van composite charts wel mogelijk is. Nog om een andere reden is het begrip van composite charts, zoals de luchtvaart deze vereist, problematisch. Beschouw namelijk een vlucht die op het tijdstip  $t_0$

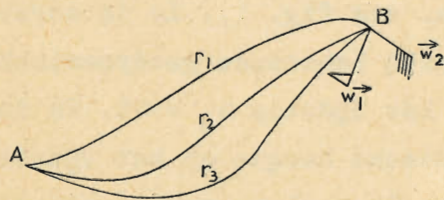


fig. 2

in het punt A begint langs de route  $r_1$  naar een punt B (fig. 2). Het vliegtuig komt op het tijdstip  $t_1$  in B aan. Op dit tijdstip heerst er een wind  $\vec{w}_1$ . Als hetzelfde vliegtuig op hetzelfde tijdstip  $t_0$  uit het punt A vertrokken zou zijn, maar nu langs

de route  $r_2$  B zou bereiken dan kwam het in B op een ander tijdstip  $t_2$  aan. De wind die op dit ogenblik in B heerst is  $\vec{w}_2$ . Een zelfde rede-  
nering kan men houden langs een derde route  $r_3$  enz. Het is dan niet  
mogelijk een hoogtekaart te tekenen die een eenduidige vluchtanalyse  
toelaat. Eerst wanneer een bepaald navigatiesysteem wordt geïntroduceerd,  
bijv. "single heading navigatie", "minimum flight path navigatie", wanneer  
dus de mogelijke vliegbanen vanuit A een veld vormen, kan een gecomponeer-  
de kaart zinvol worden gemaakt, door namelijk de kaart aan het navigatie-  
systeem aan te passen. In andere gevallen is de composite chart in  
wezen een route kaart.

Uit de boven weergegeven beschrijving, hoe een gecomponeerde kaart  
tot stand komt, kan worden afgeleid, dat de contourlijnen van  $(\phi)_t$  geen  
omhullenden zijn van de oorspronkelijke contourlijnen. Bovendien kan de  
windsnelheid in het  $(\phi)_t$  veld niet meer geostrofisch worden opgemeten.

De keuze van de zónale verdeling is vanzelfsprekend willekeurig.  
Men kan hetzelfde betoog houden voor concentrische ringvormige zônes  
(fig. 3).

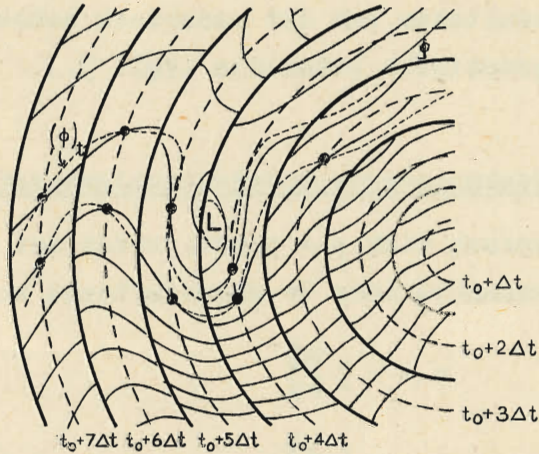


fig. 3

Een dergelijke constructie is al iets beter aangepast aan vluchten, die  
vanuit een vlieghaven in het middelpunt beginnen. Het veld van iso-  
chronen  $t = \text{const.}$  wordt hier een stelsel concentrische cirkels. Nog  
een stap verder in de goede richting is de keuze van een willekeurig  
isochronenveld, waarbij er naar gestreefd wordt om de kaart aan de  
werkelijke tijdsvoortschrijding van een speciaal navigatiesysteem aan te  
passen (fig. 4).

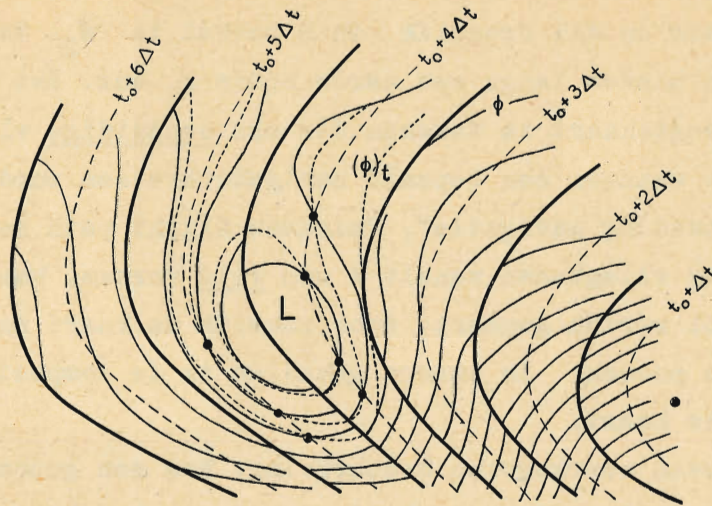


fig. 4

Er komen dus een aantal problemen naar voren waarvan de oplossing nuttig kan zijn voor de praktijk, in de eerste plaats om de waarden van grootheden, die uit de isoplethenvelden in de gecomponeerde kaart worden afgeleid, met de werkelijke waarden van de grootheden zelf te vergelijken, en in de tweede plaats om middelen te vinden een voor de praktijk zo eenvoudig mogelijke gecomponeerde kaart samen te stellen. De resultaten van dit onderzoek hebben ook uit zuiver fysisch oogpunt praktische betekenis (vgl. 5.).

## 2. Het windveld in gecomponeerde hoogtestromingskaarten

In een isobarisch vlak  $p = \text{const.}$  wordt het windveld  $\vec{u}$  ( $u, v$ ) zeer goed geapproximeerd door de geostrofische windvergelijkingen:

$$u = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$v = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

of in vectornotatie:

$$\vec{u} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{k} \times \nabla_p \Phi$$

(2.1)

$$\nabla_p \Phi = \mathbf{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  en  $\mathbf{k}$  zijn de eenheidsvectoren in de  $x$ ,  $y$  en  $z$ -richting.

$\Phi$  is de geopotential en  $\lambda$  de Coriolis parameter. Deze vergelijkingen gelden op elk tijdstip, zodat  $\Phi$  behalve van  $x$  en  $y$  nog van  $t$  afhangt.



Als de langzame verandering van  $\lambda$  met de breedte verwaarloosd wordt, kunnen de geostrofische vergelijkingen ook als volgt worden geschreven:

$$\vec{u} = -k \times \nabla \psi = k \times \nabla_p \frac{\phi}{\lambda} \quad (2.2)$$

$\psi$  is een stroomfunctie die op een additieve constante na gelijk wordt aan:

$$\psi = -\frac{\phi}{\lambda}$$

Beschouw nu een "gecomponeerde kaart", welke verkregen wordt door invoering van een eenduidige continu differentieerbare tijdfunctie  $t(x,y)$ . Deze tijdfunctie bepaalt in de kaart een veld van isochronen.

Het windveld in de gecomponeerde kaart wordt dan met (2.1):

$$\vec{u}_{\text{gec.}} = \frac{1}{\lambda} k \times (\nabla_p \phi)_t$$

Hierbij betekent het symbool  $( )_t$  een substitutie van de tijdfunctie  $t(x,y)$ .

Na invoering van de scalarnotatie vindt men echter:

$$(\nabla \phi)_t = \nabla(\phi)_t - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_t \nabla t$$

zodat met  $\nabla(\phi)_t = \nabla_t \phi$  de wind in de gecomponeerde kaart wordt:

$$\vec{u}_{\text{gec.}} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_t \phi - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_t k \times \nabla t \quad (2.3)$$

Het vectorveld van de wind in de gecomponeerde kaart wordt dus samengesteld uit een "topografie" windveld, dat door de gecomponeerde stroomfunctie  $(\phi)_t$  wordt bepaald en een vectorveld waarvoor de isochronen vectorlijnen zijn (fig. 5).

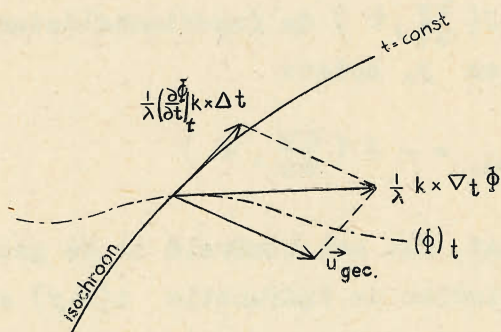


fig. 5

In het algemeen heeft het vectorveld voor de windstructuur in de gecomponeerde kaart dus geen stroomfunctie. Het vectorveld zal dus niet door een veld van isoplethen van een grootheid  $\chi$  in beeld gebracht kunnen worden, zodat men het met andere middelen moet beschrijven, bijv. door het tekenen van stroomlijnen en isotachen, divergentie-, convergentie- en neutrale punten, divergentie- en convergentielijnen enz.

Men kan zich echter afvragen onder welke voorwaarden het gecomponeerde windveld toch weer een stroomfunctie bezit en hoe deze stroomfunctie van de geodynamische hoogte en de tijdfunctie afhangt.

Het gecomponeerde windveld bezit een stroomfunctie als de uitdrukking  $u_{\text{gec.}} dy - v_{\text{gec.}} dx$  een totale differentiaal is. De analytische uitdrukking hiervoor luidt, dat

$$\nabla \cdot \vec{u}_{\text{gec.}} = \frac{\partial u_{\text{gec.}}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\text{gec.}}}{\partial y} = 0.$$

Nu is 
$$\frac{\partial u_{\text{gec.}}}{\partial x} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_t + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_t \frac{\partial t}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v_{\text{gec.}}}{\partial y} = \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_t + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_t \frac{\partial t}{\partial y},$$

zodat 
$$\nabla \cdot \vec{u}_{\text{gec.}} = (\nabla \cdot \vec{u})_t + \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_t \cdot \nabla t$$

Aangezien op elk tijdstip het geapproximeerde windveld divergentievrij is, geldt:  $(\nabla \cdot \vec{u})_t = 0$ , waardoor de vergelijking zich reduceert tot:

$$\nabla \cdot \vec{u}_{\text{gec.}} = \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_t \cdot \nabla t \tag{2.4}$$

Met (2.2) is het rechterlid te herleiden tot:

$$\left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_t \cdot \nabla t = -k \times \left( \frac{\partial \nabla \psi}{\partial t} \right)_t \cdot \nabla t = -k \times \left( \nabla \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_t \cdot \nabla t = -J \left( \frac{\partial \psi}{\partial t}, t \right),$$

waarbij de Jacobiaan  $J \left( \frac{\partial \psi}{\partial t}, t \right)$  de functionaaldeterminant voorstelt van  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  en  $t$  naar  $x$  en  $y$ , zodat:

$$\nabla \cdot \vec{u}_{\text{gec.}} = -J \left( \frac{\partial \psi}{\partial t}, t \right)$$

Men vindt als resultaat, dat het windveld in de gecomponeerde kaart een stroomfunctie heeft, indien de tijdfunctie  $t(x,y)$  een oplossing is van de homogene lineaire differentiaalvergelijking

$$J \left( \frac{\partial \psi}{\partial t}, t \right) = 0$$

of wegens (2.2):

$$\boxed{J \left( \frac{\partial \phi}{\partial t}, t \right) = 0} \tag{2.5}$$

Geometrisch houdt deze voorwaarde in, dat de isochronen in de kaart met isallohypsen moeten samenvallen (fig. 6).

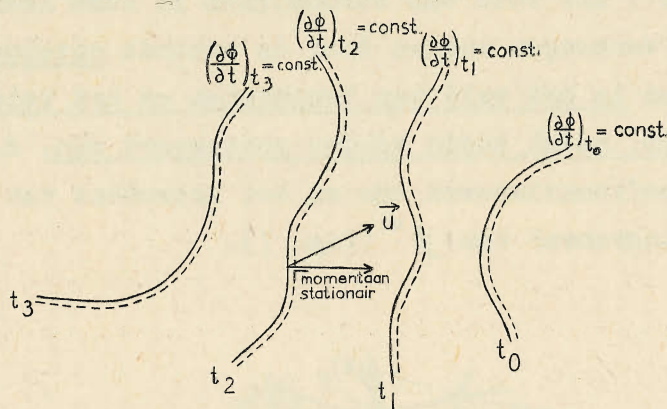


fig. 6

Uitgeschreven luidt de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial y} \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

Langs de met isallohypsen samenvallende isochronen geldt de eigenschap, dat de component van de windvector normaal op een isochroon (momentaan) stationair is. Immers uit (2.4) volgt dat de isochronen wegens  $(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t})_t \cdot \nabla t = 0$  samenvallen met de vectorlijnen voor  $(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t})_t$ , zodat de component van deze vector loodrecht op een isochroon nul wordt (fig. 6).

De volledige oplossing van de differentiaalvergelijking (2.6) kan geschreven worden in de gedaante:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{d\phi^*}{dt} \quad (2.7)$$

als  $\phi^*$  een willekeurige naar  $t$  differentieerbare functie van  $t$  voorstelt:  $\phi^* = \phi^*(t)$

Substitueert men dit resultaat in (2.3) dan vindt men:

$$\vec{u}_{\text{gec.}} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_t \phi + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{d\phi^*}{dt} \right)_t k \times \nabla t$$

of

$$\vec{u}_{\text{gec.}} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_t \phi + \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_t \phi^*$$

of

$$\vec{u}_{\text{gec.}} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_t (\phi + \phi^*) \quad (2.8)$$

zodat de stroomfunctie  $\chi$  in de gecomponeerde kaart gelijk wordt aan

$$\chi = - \frac{\phi + \phi^*}{\lambda} \quad (2.9)$$

Omdat de isoplethen van  $\bar{\phi}^*$  samenvallen met isochronen, zietmen, dat het geostrofische windveld in de gecomponeerde kaart bestaat uit het somveld van een geostrofisch "topografie windveld" en een (geostrofisch) "isochronen windveld". Het veld van stroomlijnen in deze kaart kan derhalve volgens (2.9) verkregen worden door de bekende optelmethode van Maxwell toe te passen in het veld van isochronen en het veld van gecomponeerde contourlijnen, nadat beide velden genormeerd zijn, d.w.z. nadat beide velden gelijk gedimensioneerd zijn en het increment van  $\bar{\phi}$  gelijk gesteld is aan het increment van  $\bar{\phi}^*$  (fig. 7).

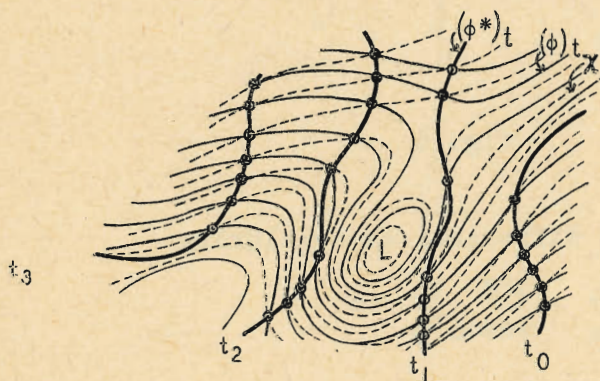


fig. 7

Het resultaat kan als volgt worden samengevat:

In gecomponeerde kaarten van isobarische vlakken, waarin het windveld geapproximeerd is door de geostrofische windvergelijking  $\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_p \bar{\phi}$ , is het windveld eveneens geostrofisch als de tijdfunctie  $t(x, y)$ , die de gecomponeerde kaart definieert, een oplossing is van de partiële differentiaalvergelijking  $J(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t}, t) = 0$ . De vergelijking van het windveld wordt dan:

$$\vec{u}_{\text{gec.}} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_t (\bar{\phi} + \bar{\phi}^*)$$

Hierbij is  $\bar{\phi}$  de gecomponeerde geopotential van het isobarisch vlak en  $\bar{\phi}^*$  een willekeurige (naar  $t$  differentieerbare) functie van  $t$ , die met  $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} = \frac{d\bar{\phi}^*}{dt}$  de tijdfunctie bepaalt. De isochronen van de tijdfunctie vallen momentaan met isallohypsen samen.

Opmerking: Men kan zich van de beperking, dat de verandering van de Coriolisparameter  $\lambda$  met de breedte verwaarloosd wordt, abstraheren door formule (2.1) te schrijven in de gedaante:  $\lambda \vec{u} = k \times \nabla_p \bar{\phi}$  om daarna hetzelfde betoog te houden voor het vectorveld  $\lambda \vec{u}$ .

### 3. Speciale gevallen

Beschouwt men de differentiaalvergelijking (2.6), dan heeft deze alleen zin, als niet gelijktijdig  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t} = 0$ , m.a.w. als  $\phi$  niet in de vorm

$$\phi = \phi(x, y) + \bar{\phi}(t)$$

geschreven kan worden. In dat geval is de stroming stationair, terwijl het isobarisch vlak als star geheel rijst of daalt. Gecomponeerde kaarten zijn dan triviaal.

De vergelijking heeft als nuloplossing:

$$t = t(x, y) \equiv \text{const.}$$

De gecomponeerde kaart is dan identiek met de oorspronkelijke kaart van het isobarisch vlak.

Een particuliere oplossing wordt gevonden door  $t$  op te lossen uit de betrekking  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ .

Differentieert men deze vergelijking naar  $x$  en  $y$  en elimineert men de term  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ , dan blijkt  $t$  aan de differentiaalvergelijking  $J\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, t\right) = 0$  te voldoen. Eliminatie van  $t$  uit  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$  en  $\phi$  beschrijft, zoals bekend, het proces waarbij men van de contourlijnen  $\phi = \text{const.}$  in chronologische orde, de omhullenden vormt (fig. 8).

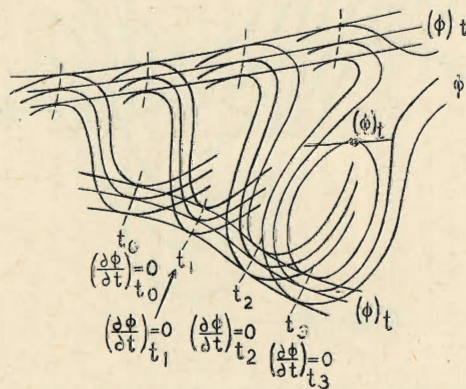


fig. 8

Deze speciale gecomponeerde kaart heeft de volgende eigenschappen:

- 1) De isochronen vallen samen met de nul-isallohypsen.
- 2) De stroomfunctie is op een constante na gelijk aan de gecomponeerde stroomfunctie.
- 3) De stroomlijnen zijn de omhullenden van de contourlijnen van de oorspronkelijke isobarische vlakken.

Het tweede punt volgt uit de betrekking (2.7), die zich hier herleidt tot:

$$\frac{d\phi^*}{dt} = 0 \quad \phi^* = \text{const.}$$

zodat de vergelijking van het windveld in de gecomponeerde kaart volgens (2.8) luidt:

$$\vec{u}_{\text{gec.}} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla \phi$$

In 6.A is een voorbeeld uitgewerkt.

#### 4. Analytisch voorbeeld

Stel dat de stroming bepaald wordt door de vergelijking:

$$\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla \{y - f(x-ct)\},$$

met stroomfunctie

$$\psi = -\frac{\phi}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda} \{y - f(x-ct)\}$$

Het isobarisch vlak is in de ruimte een cilindervlak waarvan de beschrijvende lijnen zich als rechten evenwijdig met de y-as projecteren (fig. 9).

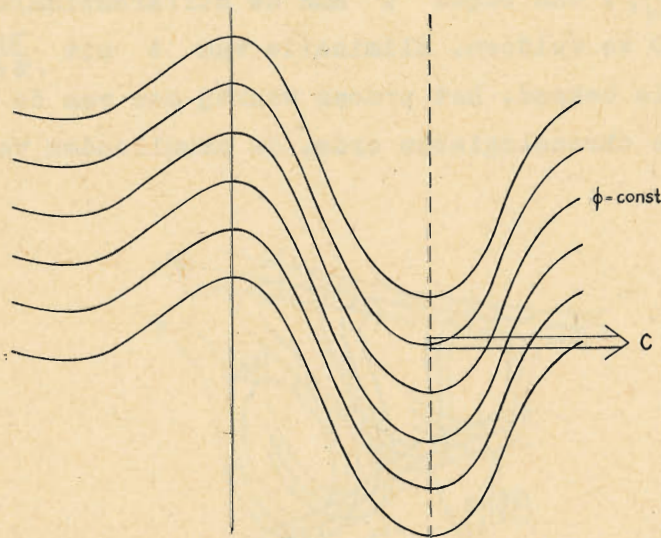


fig. 9

Het vlak beweegt zich als een star geheel met eenparige snelheid  $c$  in de x-richting. Een gecomponeerde kaart van deze niet stationaire stroming, waarin het windveld weer een stroomfunctie bezit en de wind dus geostrofisch kan worden opgemeten, wordt verkregen door een tijdfunctie in te voeren die voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$J \left( \frac{\partial \phi}{\partial t}, t \right) = 0$$

Deze herleidt zich hier tot de eenvoudige gedaante:

$$\frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

waarvoor de oplossing luidt:

$$t = g(x) \quad , \quad g \text{ willekeurig.}$$

Men vindt dus dat het windveld in elke willekeurig in de x-richting geïmponeerde kaart met een stroomfunctie beschreven kan worden.

De tijdfunctie  $t(x, y)$  wordt ook bepaald door de vergelijking (2.7)

of

$$c \frac{\partial f(x-ct)}{\partial (x-ct)} = - \frac{d\phi^*}{dt},$$

indien  $\phi^*$  een willekeurige (differentieerbare) functie van  $t$  voorstelt.

We preciseren het voorbeeld door een zich in de x-richting voortplantende sinusvormige golfstroming te beschouwen met de stroomfunctie

$$\psi = - \frac{1}{\lambda} \left\{ y - a \sin \frac{2\pi}{L}(x-ct) \right\}.$$

Het windveld is dus:

$$\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla \left\{ y - a \sin \frac{2\pi}{L}(x-ct) \right\}$$

$a$  is de amplitude,  $c$  de golfsnelheid en  $L$  de golflengte.

Voor de tijdfunctie kiezen we  $t = x$ . Dan wordt volgens (2.7):

$$\frac{2\pi a c}{L} \cos \frac{2\pi}{L}(x-ct) = - \frac{d\phi^*}{dt} = \frac{2\pi a c}{L} \cos \frac{2\pi}{L}(1-c)t,$$

zodat

$$\phi^* = - \frac{a c}{1-c} \sin \frac{2\pi}{L}(1-c)t.$$

De vergelijking voor het windveld in de geïmponeerde kaart wordt dan

$$\vec{u}_{\text{gec.}} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_{t=x} (\phi + \phi^*)$$

$$= \frac{1}{\lambda} k \times \nabla \left\{ y - a \sin \frac{2\pi}{L}(1-c)x - \frac{a c}{1-c} \sin \frac{2\pi}{L}(1-c)x \right\}$$

of

$$\vec{u}_{\text{gec.}} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla \left\{ y - \frac{a}{1-c} \sin \frac{2\pi}{L}(1-c)x \right\}$$

In fig. 10 is een momentopname van de oorspronkelijke stroming op het tijdstip 0 en de geïmponeerde stroming  $t = x$  geschetst.

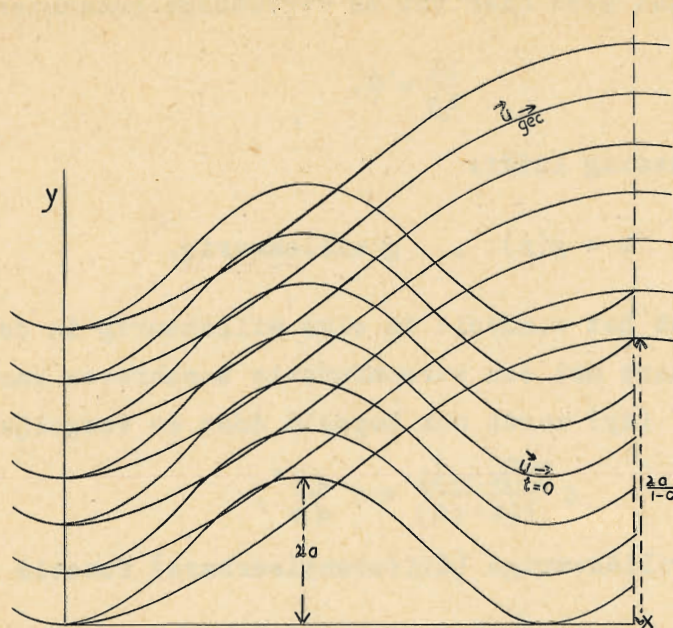


fig. 10

5. Differentiële analyse bij gecomponeerde kaarten

In de praktijk worden isobarische kaarten getekend hetzij volgens de directe methode hetzij volgens de indirecte methode. Bij de directe methode wordt de kaart geanalyseerd aan de hand van het aerologische waarnemingsmateriaal, te weten windsnelheid, windrichting, geopotentiaal en temperatuur. Bij de indirecte methode wordt de isobarische kaart van een drukvlak  $p_2$  verkregen door bij een isobarische kaart van een drukvlak  $p_1$  de "diktekaart" van de laag tussen de drukvlakken  $p_1$  en  $p_2$  grafisch op te tellen (differentiële analyse en methode van Maxwell). De theorie hiervan berust op de bekende formule voor de thermische wind.

De vraag doet zich nu voor of in geval van een gecomponeerde kaart, waarin de stroming weer door een stroomfunctie gedefinieerd is ook de differentiële analyse kan worden toegepast. Dit blijkt in het algemeen niet het geval te zijn. Slechts wanneer het isallohypsenpatroon van de diktekaart op elk moment morfologisch is met het isallohypsenpatroon in het drukvlak  $p_1$  en dus met dat in het drukvlak  $p_2$  heeft de differentieële analyse nog betekenis.

Bewijs. Veronderstel dat de geopotential  $\phi_2$  van het windveld in een isobarisch vlak  $p_2$  samengesteld is uit de geopotential  $\phi_1$  van het windveld in een isobarisch vlak  $p_1$  en de stroomfunctie  $\phi$  van het thermische windveld in de laag tussen de drukvlakken  $p_1$  en  $p_2$ . Dan geldt op ieder moment:

$$\phi_2 = \phi + \phi_1$$



In het isobarisch vlak  $p_2$  vervaardigen we een gecomponeerde kaart door middel van een tijdfunctie, die voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$J \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial t}, t \right) = 0$$

De tijdfunctie  $t(xy)$  die aan deze vergelijking voldoet kan worden bepaald uit de betrekking  $\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \frac{d\phi_1^*}{dt}$  als  $\phi_1^*$  een willekeurige functie van  $t$  voorstelt. Vervolgens vervaardigen we in de diktekaart eveneens een gecomponeerde kaart met uiteraard dezelfde tijdfunctie als in het drukvlak  $p_1$ .  $t(xy)$  moet dus ook een oplossing zijn van

$$J \left( \frac{\partial \phi}{\partial t}, t \right) = 0$$

$t(xy)$  moet dan ook afgeleid kunnen worden uit de betrekking

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{d\phi^*}{dt}$$

Dit is, omdat  $\phi_1^*$  en  $\phi^*$  alleen functies van  $t$  zijn, slechts mogelijk als

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = G(t) \frac{\partial \phi_1}{\partial t}, \quad G \text{ willekeurig.} \quad (5.1)$$

Daarbij is de keuze van  $\phi^*$  niet vrij, want  $\phi^*$  moet zodanig gekozen worden dat

$$\frac{d\phi^*}{dt} = G(t) \frac{d\phi_1^*}{dt},$$

$$\text{of} \quad \phi^* = \int G(t) d\phi_1^*(t)$$

de voorwaarde (5.1) betekent, dat de differentiële analyse alleen mogelijk is als op elk moment het isallohypsenpatroon in de diktekaart morfologisch is met het isallohypsenpatroon in het drukvlak  $p_1$ .

De tijdfunctie die in de diktekaart en het drukvlak  $p_1$  gedefinieerd is, voldoet ook aan de voorwaarde in het drukvlak  $p_2$ , immers

$$J \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial t}, t \right) = J \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t}, t \right) = J \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial t}, t \right) + J \left( \frac{\partial \phi}{\partial t}, t \right) = 0,$$

wat vereist is.

In de praktijk zijn de tendenskaarten op verschillende niveaus nooit morfologisch. De patronen van de tendenskaarten zijn niet gelijkvormig, zodat de conventionele optelmethode niet meer van toepassing is op de beschouwde speciale gecomponeerde kaarten.

## 6. Toepassingen

### A. Omhullende compositie van de stormvloeddepressie van 31 januari - 1 februari 1953

Van de depressie, die uitvoerig werd beschreven door van der Ham [1] werden omhullende kaarten getekend, te weten in de grondkaart en in de 700- en 500 mb kaart. Deze kaarten, die speciale composities zijn, waarbij de isochronen met O-isallobaren of O-isallohypsen samenvallen, bezitten een stroomfunctie, welke op een constante na gelijk is aan de gecomponeerde geopotential.

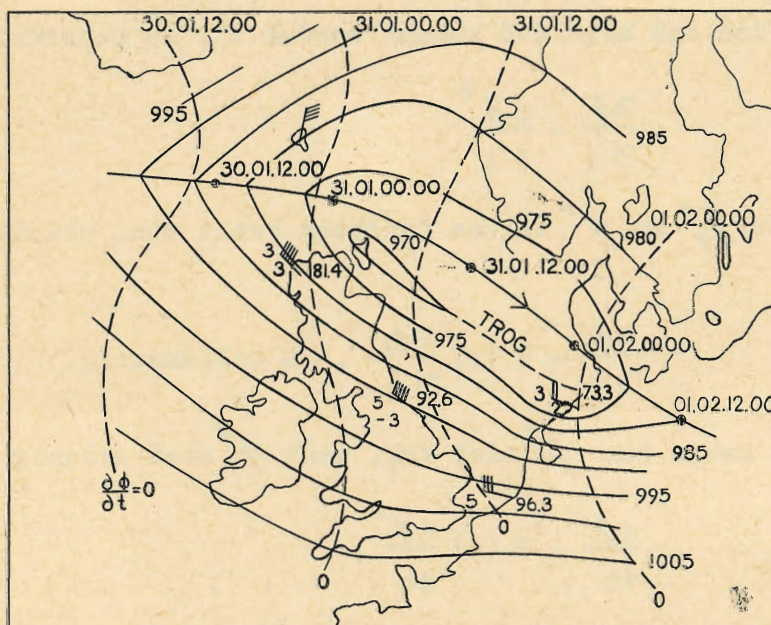


fig. 11

Fig. 11 toont het resultaat voor de grondkaart met daarin enkele waarnemingen van temperatuur, wind en luchtdruk op de met O-isallobaren corresponderende tijdstippen. De baan van de stormdepressie verbindt de knikpunten van omhullenden. Uitdieping van de depressie manifesteert zich langs de baan door een divergeren van de omhullenden en een achterblijven van de O-isallobaren bij de beweging van het centrum; opvullen van de depressie door een convergeren van de omhullenden en vooruitlopen van de isallobaren ten opzichte van de beweging van het centrum. Ten noordoosten van Schotland ontstaat een afzonderlijke lagedrukkern. Deze heeft een kortstondig bestaan en trekt als trog naar de Duitse Bocht.

Bij de Nederlandse kust heeft een sterk samendringen van de omhullenden plaats. Het hierbij behorende krachtige stormveld was reeds aan de westzijde van de depressie aanwezig en is daarna rond het centrum gedraaid.

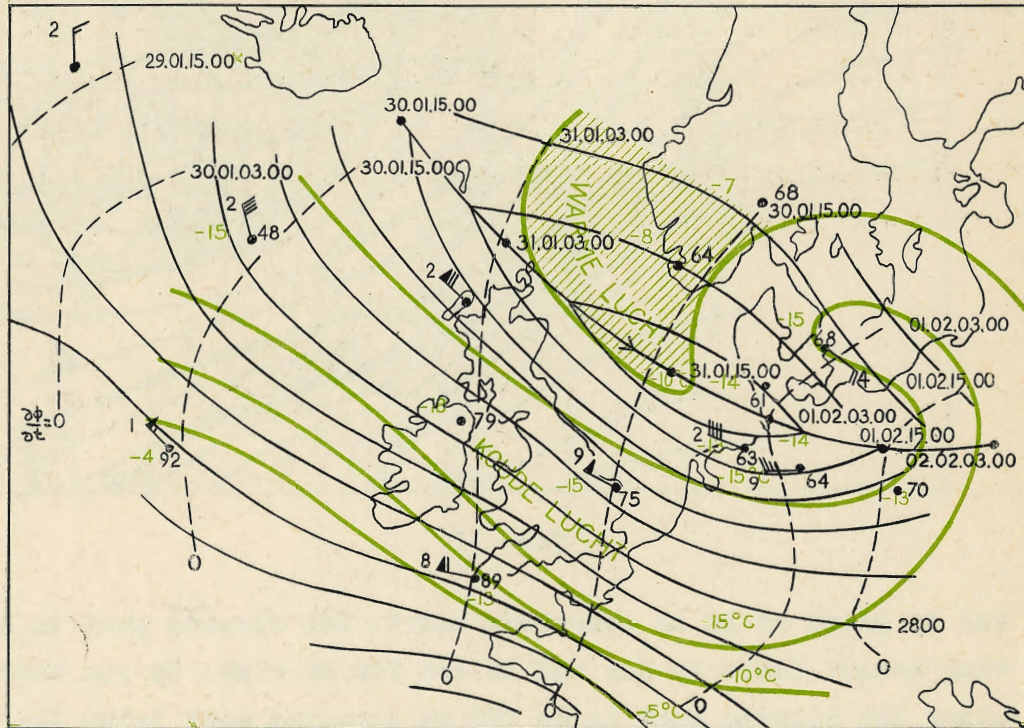


fig 12.

Fig. 12 toont de gecomponeerde kaart voor het 700 mb vlak, eveneens met enkele waarnemingen van wind, temperatuur en geopotentiala op de 0-isallohypsen. Behalve het stelsel omhullenden en de depressiebaan zijn in rood de isothermen getrokken voor de gecomponeerde temperatuurwaarden. Heel duidelijk komt hier tot uiting, hoe enerzijds een tong van koude lucht op enige afstand van de kern rond de depressie heen draait en hoe anderzijds een tong van warme lucht tussen de kern en de tong koude lucht inschuift, een situatie die veelvuldig aanleiding geeft tot zware stormen (Bijvoet [27]).

Ten slotte vindt men in fig. 13 het resultaat van de analyse van omhullenden in de 500 mb kaart. Opnieuw wordt het proces in beeld gebracht dat een tong koude lucht ( $T < -35^{\circ}\text{C}$ ) op een bepaalde afstand van de kern rond de kern heen draait en hoe een tong met warme lucht ( $T > -30^{\circ}\text{C}$ ) zich als een wig tussen de kern en de tong koude lucht inschuift.

Als men de drie figuren met elkaar vergelijkt vindt men nog enkele markante bijzonderheden. Zo blijkt, dat de depressie zich als het ware

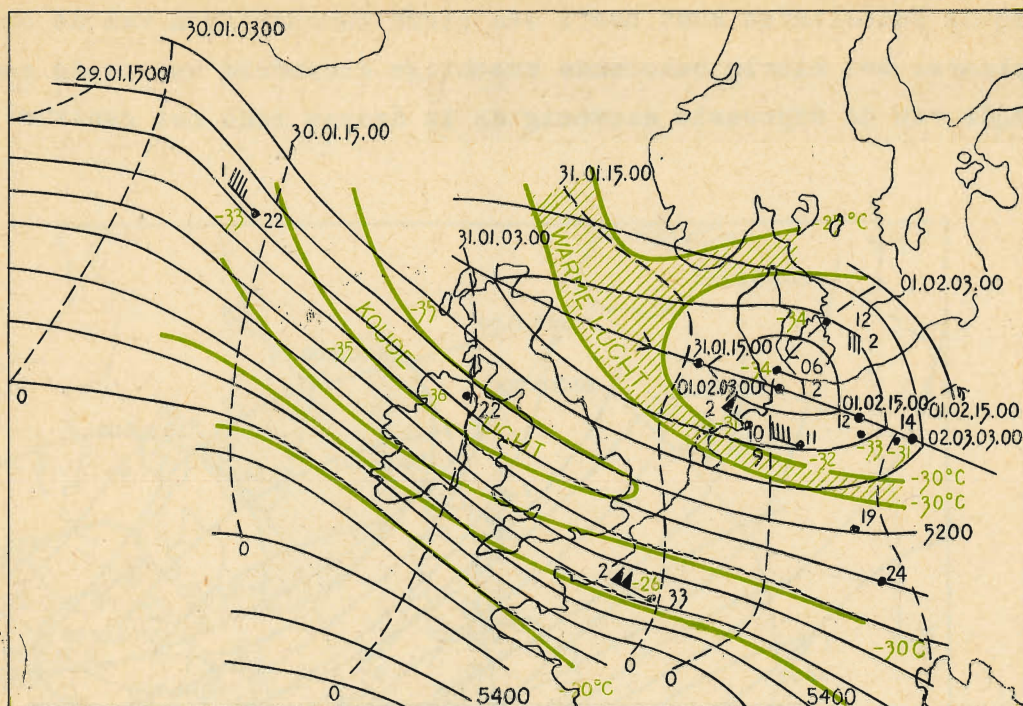


fig. 13

van de grond af in de atmosfeer boort. Het diepste punt in het 500 mb vlak treedt later op dan dat in het 700 mb vlak. Op zijn beurt ontstaat het diepste punt in de 700 mb stroming weer later dan dat in de grondkaart.

De baan van het centrum in het 500 mb vlak valt practisch met de baan van het centrum in het 700 mb vlak samen. Ook is de baan van de kleine secundaire storing op de grondkaart vrijwel coïncident met de banen in het 700- en 500 mb vlak. De depressiekern in de grondkaart zelf volgt een noordelijker gelegen koers. De versnelling in de beweging van de kern in het 500 mb vlak komt later dan de versnelling van de kern in het 700 mb vlak en deze op zijn beurt treedt later op dan de versnelling van de beweging van de kern in de grondkaart.

Dit zijn alle kernmerken, die erop wijzen, dat in het atmosferisch proces de stormdepressie in de onderste lagen van de troposfeer overheersend is. Voorts blijkt uit de kaart, dat de banen van de centra vrijwel parallel lopen met de omhullende contourlijnen, een sturingsprincipe dat reeds uit ervaring bekend was.

De omhullende compositie van synoptische en aerologische kaarten heeft, zoals boven uit het voorbeeld duidelijk blijkt, het voordeel dat allerlei details van belangrijke weersontwikkelingen op overzichtelijke wijze kunnen worden samengevat.

B. Een gecomponeerde kaart voor een transatlantische vlucht

In 1. werd er reeds op gewezen, dat men in een gecomponeerde kaart voor een vluchtanalyse de tijdfunctie moet aanpassen aan de tijdsvoortschrijding van de vlucht. Dit dient zodanig te geschieden, dat de isochronen samenvallen met de tijdfronten van een vooraf vastgesteld navigatiesysteem. Het is duidelijk dat de aldus geselecteerde isochronen niet nog eens zullen samenvallen met isallohypsen, zodat gecomponeerde kaarten in deze zin doorgaans niet met een stroomfunctie  $\chi$  beschreven kunnen worden en het windveld dus niet in beeld kan worden gebracht door een veld van "contourlijnen", waarin de wind geostrofisch kan worden opgemeten.

Men kan als compromis de eis stellen, dat de met de isallohypsen samenvallende isochronen ten naaste bij ook met tijdfronten samenvallen. In fig. 17 is een voorbeeld uitgewerkt waarbij zoveel mogelijk aan de eis is voldaan. Het voorbeeld heeft betrekking op een denkbeeldige vlucht van Gander naar Shannon met een Super=Constellation, waarvoor de eigen snelheid gemiddeld 275 knopen bedraagt. Het tijdstip van vertrek is 0300 GMT. Fig. 14 toont de 500 mb kaart van 11 Juli 1957 00,00 GMT, fig. 15 de 500 mb kaart van 06,00 GMT en fig. 16 de 500 mb kaart van 12,00 GMT. De 06,00 GMT kaart, evenals die voor 03,00 en 09,00 GMT, die niet zijn gereproduceerd, zijn door interpolatie uit de andere kaarten verkregen. De hoogtestroming is vooral op het oostelijk deel van de Oceaan sterk veranderlijk, omdat er bij weerschip J een cyclogenese optreedt, die om 1200 GMT zo ver is gevorderd, dat er een goed ontwikkelde depressie is ontstaan.

Om een bij de geprojecteerde vlucht passende gecomponeerde kaart te vervaardigen wordt de tijdfunctie zodanig gekozen, dat de isochronen een progressie in de tijd vertonen, die overeenkomt met de tijdsvoortschrijding van de vlucht. De 0300 GMT isochroon valt met de isallohyp  $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{03-06} = -2 \text{ gpm/3hr}$  samen. Evenzo valt de 0600 GMT isochroon met de isallohyp  $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{06-09} = +1 \text{ gpm/3hr}$  samen enz. Daarna werden op de isochronen de contourlijnelementen van de desbetreffende 500 mb kaarten overgenomen en ten slotte is uit de vrije hand met inachtneming van de volgende regels het veld van contourlijnen  $\chi = \text{const.}$  getekend.

- a) De contourlijnen  $\chi = \text{const.}$  raken aan de contourlijnelementen  $(\Phi)_t = \text{const.}$
- b) De numerieke waarde van  $\chi$  is niet van betekenis, wel het increment  $\Delta\chi$ , zodat op elke isochroon het increment van  $\chi$  gelijk moet zijn aan het increment van  $\Phi$ .

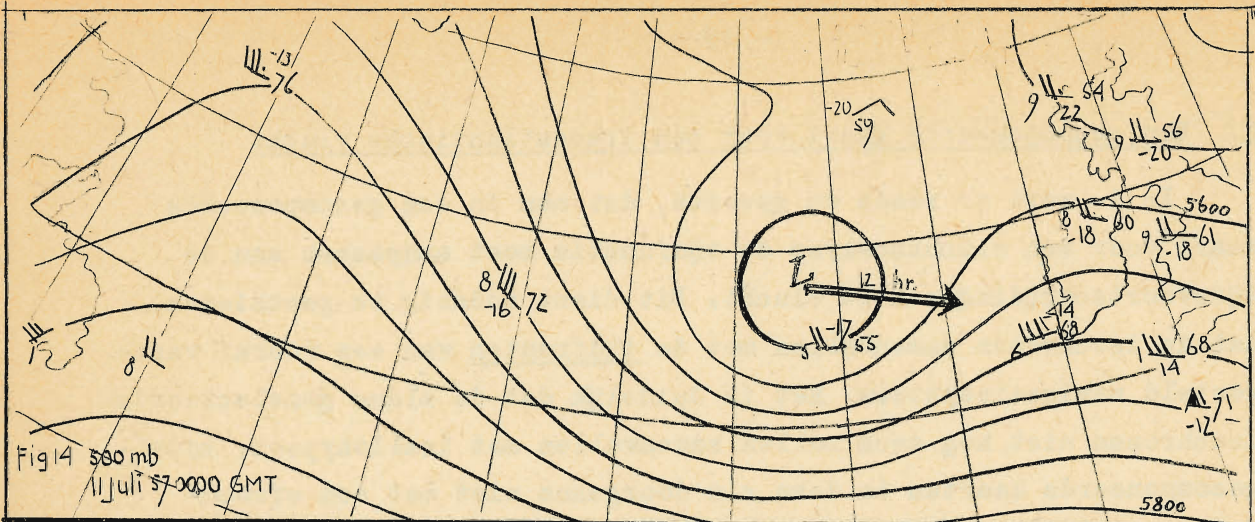


Fig 14 500 mb  
11 Jul 57 0000 GMT

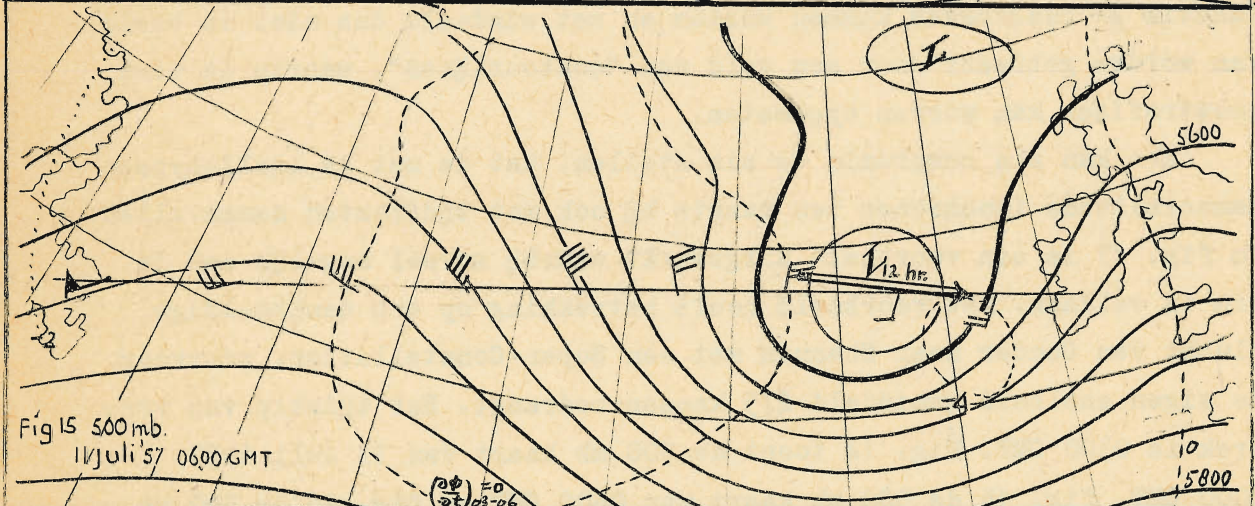


Fig 15 500 mb  
11 Jul 57 0600 GMT

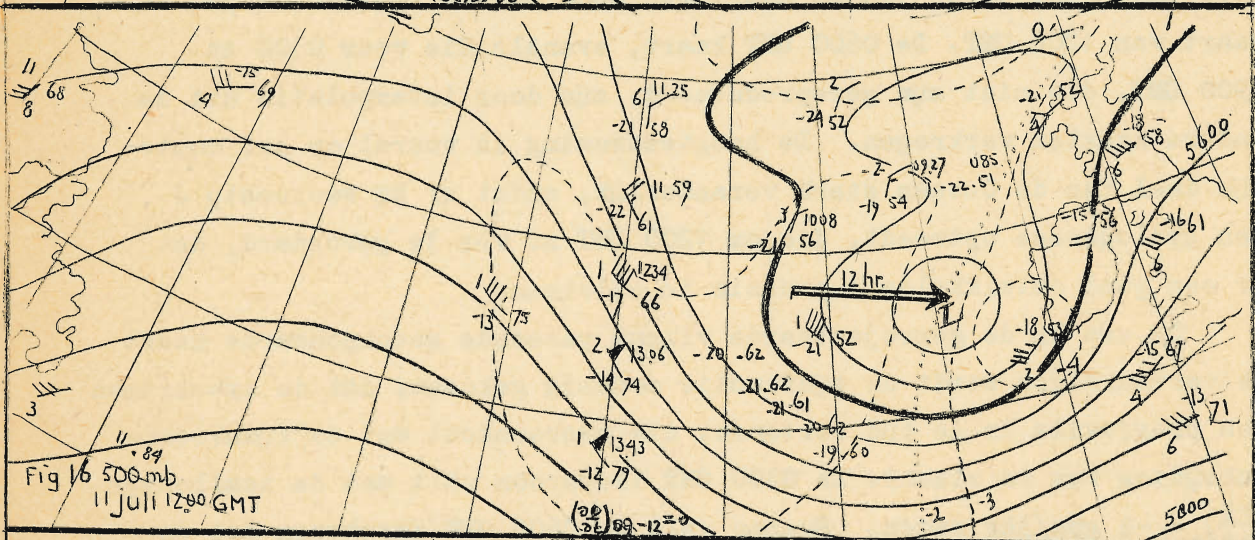


Fig 16 500 mb  
11 Jul 57 1200 GMT

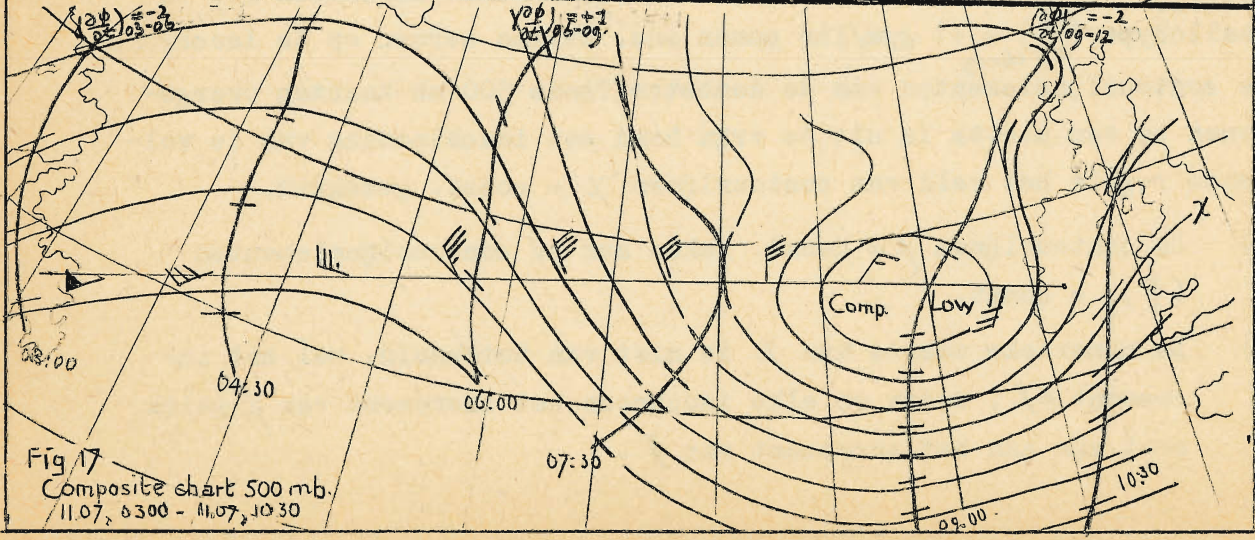


Fig 17  
Composite chart 500 mb.  
11.07, 0300 - 11.07, 1030

c) De contourlijnen  $\chi = \text{const.}$  snijden een isochroon in punten van gelijke  $\phi$ -waarden.

In het voorbeeld is  $\chi$  zodanig genormeerd, dat de contourlijnen  $\chi = \text{const.}$  door de lijnelementen op de isochroon van 0730 GMT gaan. Het analyseren van de gecomponeerde kaart is minstens zo eenvoudig als het direct analyseren van een standaarddrukvlak. Men zou volgens de theorie ook een optelmethode kunnen toepassen, maar volgens (2.9) moeten dan eerst de velden  $\phi$  en  $\phi^*$  worden genormeerd. Dit is echter zeer tijdrovend, zodat de directe methode de voorkeur verdient.

Het resultaat van de directe analyse methode is in fig. 17 weergegeven. Opmerkelijk is dat de depressie L in oostelijke richting is uitgerekt. Dit effect treedt in gecomponeerde kaarten voor oceaanelvluchten herhaaldelijk op. Zodra een vliegtuig de oceaan oversteekt in oostelijke richting, zullen depressies, die met de westcirculatie eveneens een oostelijke bewegingscomponent bezitten, in deze richting op de gecomponeerde kaart worden uitgerekt. Als daarentegen een vliegtuig de oceaan oversteekt in westelijke richting, dan zullen dezelfde depressies in de bewegingsrichting worden ingedrukt.

In de kaart van fig. 17 zijn verder de windgegevens per 5-gradsvak langs de grootcirkelroute Gander-Shannon genoteerd. De overeenkomstige gegevens zijn eveneens aangegeven in de "fixed time" kaart voor 0600 GMT. Een vergelijking van beide kaarten toont aan, dat de windgegevens sterk uiteenlopen in het laatste gedeelte van de vlucht, waar de tendens  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  groot is.

Bovenstaand voorbeeld is te beschouwen als een epignose van een snelle oceaanelvlucht. Het blijft vooralsnog een moeilijke opgave een praktische werkwijze aan te geven om verwachte kaarten te vervaardigen. De moeilijkheden die hierbij optreden zijn van dezelfde aard als bij de grafische, statistische en numerieke methoden.

## 7. Gecomponeerde kaarten in de praktijk

Op vele meteorologische stations construeert men composite charts voor de geopotential  $(\phi)_t = \phi\{x, y, t(xy)\}$ . Het geostrofisch windveld vertegenwoordigt in deze kaarten, zoals in 2. werd aangetoond, slechts een deel van het werkelijke windveld. Het resterende deel hangt samen met een "windveld", waarin de isochronen vectorlijnen zijn. Het in het  $(\phi)_t$  veld opgemeten topografiewindveld moet volgens formule (2.3) worden aangevuld met een term bestaande uit de vector  $\frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_t \times \nabla t$ , waarvan de magnitudo evenredig is met de tendens van de geopotential

en omgekeerd evenredig met de tijdsvoortschrijding of omgekeerd evenredig met de eigensnelheid van het vliegtuig, aangezien de tijdsvoortschrijding is aangepast aan de eigensnelheid van het vliegtuig.

In onderstaande tabel is de snelheidscorrectie (in knopen) opgenomen, als functie van de eigensnelheid T.A.S.  $\sim \frac{1}{|\text{grad } t|}$  en de tendens  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  (gpm/hr).

T.A.S. (knots) tendens (gpm/hr)	200	250	300	350	400	450	500
0	0	0	0	0	0	0	0
8	3.6	2.9	2.4	2.0	1.8	1.6	1.4
16	7.2	5.8	4.8	4.1	3.6	3.2	2.8
24	10.8	8.7	7.2	6.1	5.4	4.8	4.3
*)	piston engined				turbo, prop jet		

De tabel toont aan, dat de snelheidscorrectie voor jets en turbo props minder dan 10 knopen bedraagt, ook voor zeer hoge waarden van de tendens. Bij jets en turbo props kan dus worden volstaan met de geostrofische approximatie in het gecomponeerde geopotentialveld, te meer omdat een nauwkeurigheid van 10 knopen in een prontour moeilijk te verwezenlijken is. Bij piston engined machines wordt de correctieterm aanzienlijk in gebieden van de kaart waar de tendens zeer hoog is. Daar zou eventueel de correctiefactor in rekening kunnen worden gebracht.

Ingeval men alleen de geopotential componeert, kan men bij de vervaardiging van composite prontours de indirecte methode van de differentiële analyse blijven toepassen.

-o-o-o-

\*) In de tabel zijn de snelheidsintervallen voor "piston engined"-, "turbo prop"- en "jet"-vliegtuigen aangegeven.



LITERATUUR

- [1] van der Ham, C.J. Meteorologisch Rapport stormvloed 1 februari 1953.  
K.N.M.I. (voorlopig).
- [2] Bijvoet, H.C. Over het ontstaan van zware stormen aan de achter-  
zijde van depressies inzonderheid op de Noordzee.  
K.N.M.I. W.R. 55-007 (II-005).

