

18 dec. 1961

KONINKLIJK NEDERLANDS  
METEOROLOGISCH INSTITUUT

Wetenschappelijk Rapport W.R. 61-4

C.P.J. Alewijnse

Magnetohydrodynamische theorieën ter verklaring van  
het aardmagnetisch veld

De Bilt, 1961

Kon. Ned. Meteor. Inst.  
De Bilt

All Rights Reserved

Nadruk zonder toestemming van het K.N.M.I. is verboden.

1

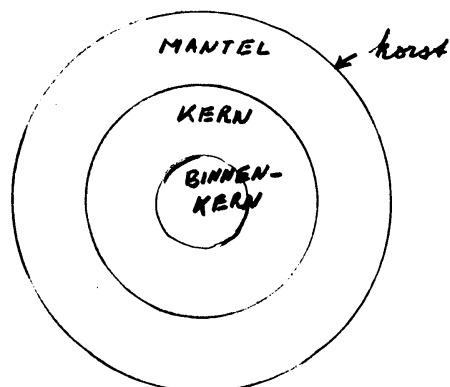
C.P.J. Alewijnse

Magnetohydrodynamische theorieën ter verklaring van  
het aardmagnetisch veld

1. Inleiding

Het is de bedoeling een overzicht te geven van de problemen die optreden bij hydromagnetische beschouwingen, voor zover deze van belang kunnen zijn voor het aardmagnetisme. Onder magnetohydrodynamica, ook wel genoemd hydromagnetisme verstaat men de wetenschap die zich bezig houdt met het samenspel van vloeistofbewegingen en magnetische velden, zoals dit in een vloeibare geleider optreedt. We zullen eerst nagaan welke overwegingen tot een hydromagnetische verklaring van het aardmagnetisme geleid hebben.

Voor directe metingen is het inwendige der aarde niet toegankelijk. Toch kan men uit vele verschijnselen inlichtingen verkrijgen omtrent de opbouw, samenstelling en natuurkundige eigenschappen van de aarde. Een van de belangrijkste methoden van onderzoek is de seismologie. De looptijden en amplitudes van door de aarde voortgeplante longitudinale en transversale trillingsgolven geven een beeld van de dichtheidverdeling en toestanden die in de aarde voorkomen. In fig. 1 zien we een schematisch overzicht van de gevonden resultaten.



Onder de korst, met dikte van 10 - 30 km, die uit gesteenten bestaat met een dichtheid van ongeveer  $2,7 \text{ g/cm}^3$  bevindt zich de mantel met een dichtheid in de orde van  $5 \text{ g/cm}^3$ . Deze mantel gedraagt zich ten opzichte van seismische trillingen als een vaste stof. Wel zijn er waarschijnlijk langzame plastische stromingen in mogelijk zoals afgeleid kan worden uit het hydrostatisch evenwicht dat er volgens gravimetrische waarnemingen op enige diepte in de mantel moet bestaan. De mantel bestaat waarschijnlijk voornamelijk uit silicaten. Binnen de mantel bevindt zich de kern met een straal van ongeveer 3500 km. De kern heeft een veel grotere dichtheid dan de mantel en wel ongeveer  $11 \text{ g/cm}^3$ . De dichtheidsovergang van mantel naar kern is zeer abrupt. Het gedrag van de kernmaterie is als dat van een vloeistof. Alleen de longitudinale golven kunnen zich er door voortplanten. Ook langs andere weg heeft men aanwijzingen gekregen dat de kern zich als een vloeistof gedraagt. Als men namelijk de getijbewegingen wil verklaren die de aarde als gevolg van de invloed van zon en maan ondergaat, komt men tot de conclusie dat het kernmateriaal ten opzichte van de mantel een zeer kleine stijfheid moet hebben. Over de aard van het kernmateriaal zijn veel speculaties geweest. Een onderzoek van de verschillende mogelijkheden heeft het vermoeden doen rijzen dat de kern voornamelijk uit ijzer bestaat. Aanleiding tot deze hypothese zijn; de grote dichtheid van de kern, het voorkomen van meteorieten met een groot ijzergehalte en een vergelijking van de verhouding van het voorkomen van verschillende elementen op aarde en op de zon.

Binnen de kern bevindt zich de binnenkern met een straal van 1300 km. Hiervan is niet veel bekend, men vermoedt dat hij vast is.

Het geleidingsvermogen van ijzer is  $10^{-4} \text{ e m e}$ , bij normale druk en temperatuur. Men schat dat bij de omstandigheden die in de kern heersen, het geleidingsvermogen verminderd zal zijn tot  $3 \cdot 10^{-6} \text{ e m e}$ . Uit de optredende fourierperioden der seculaire variatie schat men het geleidingsvermogen van de mantel op  $10^{-10} \text{ e m e}$ .

Het magnetisch veld, dat aan het aardoppervlak wordt waargenomen komt in grove trekken overeen met dat veroorzaakt door een dipool die zich in het centrum van de aarde bevindt. De as van de dipool maakt een hoek van ongeveer  $12^\circ$  met de rotaties van de aarde. De veldsterkten aan het aardoppervlak zijn in de orde van 0,5 gauss.

In de periode waarin directe waarnemingen van het aardmagnetisch veld zijn gedaan is de sterkte van deze dipool met ongeveer 5 % per eeuw afgenomen.

Het veld dat men overhoudt na aftrekking van de dipool is zeer grillig van vorm en kan in de loop van enkele tientallen jaren zeer sterk veranderen. (men noemt dit de seculaire variatie). In het algemeen bewegen de storingssystemen in westelijke richting.

Hun snelheid ligt in de orde van 0,2 lengtegraad per jaar. Men probeert om uit het remanent magnetisme, aanwezig in gesteenten, lava's, sedimenten en bakstenen een indruk te krijgen van het magnetisch veld dat aanwezig was bij de vorming van deze materialen. Deze onderzoeken verkeren nog in een beginstadium. Wel zijn er aanwijzingen dat het dipoolveld kan omklappen met een periode in de orde van 20000 jaar.

Een uitvoerige beschouwing over het inwendige der aarde en het aardmagnetisme treffen we aan in een overzichtsartikel van Elsasser [1].

We kunnen ons nu gaan afvragen door welke verschijnselen het aardmagnetisch veld veroorzaakt wordt. Uit een harmonische analyse van het waargenomen veld volgt dat het overgrote deel zijn oorsprong heeft onder het aardoppervlak. Voor permanente magnetisatie komt alleen dat gedeelte van de korst in aanmerking, waarvan de temperatuur lager is dan het curiepunt van de aanwezige ferromagnetische materialen. Het blijkt niet mogelijk op deze manier een kwantitatieve verklaring van het magnetisch veld te geven. Andere onderzoekers (Blackett [2] en Berlage [3]) onderstelden dat er, nog onbekende, fysische processen moeten bestaan, die bij een groot roterend lichaam een magnetisch veld opwekken.

De laatste decennia heeft de hydromagnetische theorie van het aardmagnetisch veld veel aanhang gevonden. Zij berust op de interactie van het magnetisch veld en de vloeistofstromingen in de geleidende kern van de aarde.

Het is nuttig eerst enkele verschijnselen te noemen, waarvoor de theorie ons een verklaring moet geven:

- a) Het feit waarover we ons het meest kunnen verbazen is dat er nog een magnetisch veld aanwezig is. Bij het ontbreken van bewegingen in de kern zou het veld verdwijnen met een halfwaardetijd in de orde van 14000 jaar. Deze tijd is zeer kort in verhouding tot de leeftijd van de aarde.

Men moet dus concluderen dat er door magnetohydrodynamische processen gemiddeld voldoende energie wordt toegevoerd opdat het magnetisch veld niet geheel verdwijnt. Het bewijs hiervan is nog niet geleverd.

Een engere eis, namelijk het bestaan van een stabiele stationaire configuratie van vloeistofstromingen en magnetisch veld werd zeer diepgaande onderzocht door Bullard en Gellman [ 4 ] en Rikitake [ 5-10 ] maar leverde geen in alle opzichten sluitend resultaat. Zoals uit het bovenstaande blijkt is deze eis te beperkt. Stelt men deze eis echter niet dan komt men op het terrein van de magnetohydrodynamische turbulentie. Op dit gebied wordt veel theoretisch en experimenteel onderzoek verricht.

- b) Het dipoolveld heeft een orientatie die weinig afwijkt van de aardrotatieas. Als deze overeenstemming niet toevallig is in onze betrekkelijk korte waarnemingsperiodes, zullen we hiervoor een verklaring moeten vinden. Dit betekent dat in de bewegingsvergelijking de corioliskracht verwerkt moet worden.
- c) De seculaire variatie. We moeten hiervoor de oorzaak zoeken in de buitenste lagen van de kern. Een geleider werkt als een scherm voor de elektromagnetische veranderlijke velden. Bij een fouriercomponent met hoekfrequentie  $\omega$  is de indringdiepte volgens de theorie van het skineffect  $d = (2\pi \mu \sigma \omega)^{-\frac{1}{2}}$ . Als we voor  $\frac{2\pi}{\omega} = 100$  jaar nemen en het geleidingsvermogen  $\sigma = 10 \cdot 10^{-6} \text{ e m e}$ , dan is deze diepte 50 km. Men beschouwt de seculaire variatie als het gevolg van wervelachtige bewegingen van de kernvloeistof nabij het oppervlak van de kern. Publikaties hierover verschenen van de hand van Bullard [ 11 ] en Scholte [ 12 ].
- d) Op de zon en andere sterren neemt men magnetische velden waar, sommige van grote sterkte en wisselend met korte periode. Zonnevlekken worden ook vergezeld door magnetische verschijnselen. Van de planeet Jupiter heeft men cyclotronstraling menen waar te nemen, waarschijnlijk afkomstig uit haar Van Allen stralings gordels. Men moet zich afvragen of er overeenkomst bestaat tussen de magnetische verschijnselen in de aarde, en die in sterren andere planeten en satellieten.

TABEL I

Gebruikte symbolen

D	doorschuiving
E	electricische veldsterkte
H	magnetische veldsterkte
B	magnetische inductie
$\rho$	ladingsdichtheid
$\epsilon$	dielectriciteitsconstantie
$\mu$	permeabiliteit
$\sigma$	geleidingsvermogen
v	vloeistofsnelheid
J	stroombichtheid

II. De magnetohydrodynamische vergelijkingen

De beschouwing van hoofdstuk I hebben ons er toe geleid om als eenvoudigste model ter verklaring van het aardmagnetisch veld een bolvormige vloeibare geleider met een straal van 3500 km en een geleidingsvermogen van  $3 \cdot 10^{-6}$  e m e te nemen. Ter verdere vereenvoudiging kunnen we de vloeistof homogeen en onsamendrukbaar denken door vacuum, alles in de hoop dat dit geen invloed heeft op de essentiële processen die we willen bestuderen.

De maxwell vergelijkingen luiden:

$$\begin{array}{ll} 1) \operatorname{div} \vec{B} = 0 & 2) \operatorname{div} \vec{E} = - \frac{\rho}{\epsilon} \\ 3) \operatorname{rot} \vec{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{J} & 4) \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array}$$

Verder hebben we de vergelijking voor de electricische stroom nodig:

$$5) \vec{J} = \sigma \vec{E} + \sigma [ \vec{v}, \vec{B} ] + \rho \vec{v}$$

Voor de betekenis der gebruikte symbolen wordt verwezen naar tabel I.

Bij processen met een voortplantingssnelheid, veel kleiner dan de lichtsnelheid, kan in vergelijking 3) de term  $\mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  verwaarloosd worden. Uit een schatting van de grootte ordes van de optredende grootheden blijkt dat de term  $\rho \vec{v}$  van vergelijking 5) verwaarloosd mag worden

en dat de grootte orde van de energie van het elektrische veld veel kleiner is dan die van het magnetisch veld. Voor een uitvoeriger behandeling van deze schattingen zie Elsasser [13].

Elimineert men  $\vec{E}$  en  $\vec{J}$  uit de vergelijkingen 3), 4) en 5) dan krijgt men de z.g. inductievergelijking:

$$6) \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} [\vec{v}, \vec{B}] - \frac{1}{\mu \sigma} \text{rot rot } \vec{B}$$

met behulp van vergelijking 1) kunnen we dit ook schrijven als

$$7) \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} [\vec{v}, \vec{B}] + \frac{1}{\mu \sigma} \Delta \vec{B}$$

De verandering van het magnetisch veld wordt dus bepaald door de configuratie van het magnetisch veld en de vloeistofstroming.

We zullen de betekenis van de inductievergelijking nu nader onderzoeken.

a) Als er geen vloeistofstromingen zijn luidt formule 7)

$$8) \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu \sigma} \Delta \vec{B}.$$

Dit is de vergelijking voor het gedrag van het magnetisch veld in een vaste geleider. Stratton [14] heeft dit voor een bol nader uitgewerkt.

We splitsen het veld in componenten, die ieder afzonderlijk exponentieel in de tijd afnemen.

Voor een dergelijke component geldt dus:  $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}, 0) \exp(-\frac{t}{\tau})$

Toepassing van vergelijking 8) geeft:

$$-\frac{1}{\tau} \vec{B}(\vec{r}, 0) = \frac{1}{\mu \sigma} \Delta \vec{B}(\vec{r}, 0)$$

Stellen we  $k^2 = \frac{\mu \sigma}{\tau}$  dan moeten we oplossen:

$$9) \quad \Delta \vec{B} + k^2 \vec{B} = 0$$

De oplossing van de vergelijking

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0$$

waarbij  $\psi$  een scalarveld is, luiden in bolcoördinaten

$$10) \quad \psi_n^{m, \phi} = \frac{1}{\sqrt{k r}} Z_{n+\frac{1}{2}}(k r) P_n^m(\cos \theta) \cdot \cos m \phi$$

Z is een besselfunctie en P een legendrefunctie.



Deze formule wordt ook wel afgekort als:

$$\psi_n^{m,s} = \frac{1}{\sqrt{k r}} Z_{n+\frac{1}{2}}(-kr) Y_n^{m,s}(\theta, \phi)$$

$\psi$  wordt bolfunctie genoemd.

Het blijkt dat de vectorvelden:

$$\vec{L} = \text{grad } \psi, \quad \vec{T} = \text{rot } \psi \vec{a}, \quad \vec{S} = \text{rot } \vec{T}$$

met vaste vector  $\vec{a}$  aan vergelijking 9) voldoen.

Nemen we in plaats van  $\vec{a}$  de radiusvector  $\vec{r}$  dan wordt ook aan 9) voldaan. We bewijzen dit als volgt; substitueer in de in de identiteit.

$$\begin{aligned} (\vec{b}, \text{grad } \vec{a}) \vec{a} &= \frac{1}{2} (\text{rot } [\vec{a}, \vec{b}] + \text{grad } (\vec{a}, \vec{b}) - \vec{a} \cdot \text{div } \vec{b} + \vec{b} \cdot \text{div } \vec{a} \\ &\quad - [\vec{a}, \text{rot } \vec{b}] - [\vec{b}, \text{rot } \vec{a}]) \end{aligned}$$

,  $\vec{a} = \vec{r}$  en  $\vec{b} = \text{grad } \psi$ , dan krijgen we:

$$11) \text{ grad } \psi = \frac{1}{2} (\text{rot } [\vec{r}, \text{grad } \psi] + \text{grad } (\vec{r}, \text{grad } \psi) - \vec{r} \cdot \text{div } \text{grad } \psi + 3 \text{ grad } \psi)$$

We weten dat  $\text{div grad } \psi = -k^2 \psi$

Vullen we dit in en nemen we de rotatie van 11) dan krijgen we

$$12) 0 = \frac{1}{2} \text{rot rot } [\vec{r}, \text{grad } \psi] + \frac{1}{2} k^2 \text{rot } (\vec{r} \psi)$$

Nu is  $\text{rot } \vec{r} \psi = \psi \text{rot } \vec{r} - [\vec{r}, \text{grad } \psi] = -[\vec{r}, \text{grad } \psi]$ .

Vullen we dit in 12) in en schrijven we voor  $\text{rot } (\vec{r} \psi) = \vec{T}$  dan vinden we.

$$- \text{rot rot } \vec{T} + k^2 \vec{T} = 0$$

Uit  $\Delta \vec{T} = \text{grad div } \vec{T} - \text{rot rot } \vec{T}$  en  $\text{div } \vec{T} = \text{div rot } (\vec{r} \psi) = 0$

volgt dan:

$$13) \Delta \vec{T} + k^2 \vec{T} = 0$$

hiervan nemen we de rotatie, we krijgen dan na substitutie  $\vec{S} = \text{rot } \vec{T}$

$$\Delta \vec{S} + k^2 \vec{S} = 0$$

Het vectorveld  $\vec{L}$  is voor ons niet interessant omdat in het algemeen  $\text{div } \vec{L} \neq 0$

Substitueren we in  $\vec{T}$  en  $\vec{S}$  de uitdrukking voor  $\psi$  die door formule

10) gegeven wordt, dan vinden we:

$$15) T_r = 0; T_\theta = \frac{T(r)}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial Y}{\partial \phi}; T_\phi = -\frac{T(r)}{r} \frac{\partial Y}{\partial \theta}$$

$$16) S_r = \frac{n(n+1)}{r^2} \cdot S(r) \cdot Y; S_\theta = \frac{1}{r} \frac{dS(r)}{dr} \frac{\partial Y}{\partial \theta}; S_\phi = \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{dS(r)}{dr} \frac{\partial Y}{\partial \phi}$$

Waarbij  $S(r)$  en  $T(r)$  functie zijn van de vorm  $\frac{1}{\sqrt{k r}} Z_{n+\frac{1}{2}}(k r)$

Men noemt de velden  $\vec{T}$  de toroidale componenten en de velden  $\vec{S}$  de poloidale componenten. Nu moeten we nog rekening gaan houden met de randvoorwaarden voor de metalen bol. Buiten de bol geldt in benadering voor langzaam variërende velden het B=0. Een dergelijk veld kan samengesteld worden uit de componenten

$$17) B_r = \frac{n(n+1)}{r^2} \left(\frac{1}{r^n}\right) Y ; B_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^n}\right) \frac{\partial Y}{\partial \theta} ;$$

$$B_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^n}\right) \frac{\partial Y}{\partial \phi}$$

Zien we af van oppervlaktestromen, dan eisen de randvoorwaarden dat  $\vec{B}$  continu is aan het oppervlak.

Noemen we de straal van de bol  $R$  en vergelijken we de uitdrukkingen 15), 16) en 17) dan komen we tot de volgende randvoorwaarden:

voor  $T_n^{m, S}$  :  $Z_{n+\frac{1}{2}}(k R) = 0$

voor  $S_n^{m, S}$  :  $Z_{n-\frac{1}{2}}(k R) = 0$

De kleinste  $k$  die op kan treden blijkt te zijn  $k = 1,43 \pi / R$  behorende bij  $\vec{S}_0^0$  het dipoolveld.

De halfwaardetijd hiervan is

$$T = \frac{\mu \sigma}{k^2} = \frac{R^2 \mu \sigma}{(1,43 \pi)^2}$$

De optredende constanten zijn voor de aardkern:

$$R = 3500 \text{ km}, \mu = 1 \text{ e m e}, \sigma = 3 \cdot 10^{-6} \text{ e m e}.$$

dan komen we in de orde van 14000 jaar.

De voornaamste reden waarom we het veld van een massieve bol zo uitgebreid behandeld hebben is het feit dat het mogelijk is met behulp van de componenten  $\vec{T}_n^{m, S}$  en  $\vec{S}_n^{m, S}$  een willekeurig veld in een bol te beschrijven. Tot nu toe is er geen andere ontwikkeling gevonden en de meeste onderzoekers op het gebied van de hydromagnetisme theorieën ter verklaring van het aardmagnetisme hebben er dan ook van gebruik gemaakt. Bij de behandeling van de stationaire dynamo zullen we echter met de schaduwzijden van deze ontwikkeling kennismaken.

b)

We keren terug tot de inductievergelijking

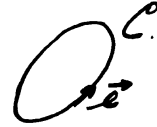
$$6) \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} [\vec{v}, \vec{B}] - \frac{1}{\mu\sigma} \text{rot rot } \vec{B}$$

Eerst hadden we het geval  $\vec{v} \equiv 0$  bestudeerd

Een ander uiterste is  $\frac{1}{\mu\sigma} = 0$ , dus een oneindig geleidings vermogen. We krijgen dan

$$18) \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} [\vec{v}, \vec{B}].$$

Voor een contour  $C$  die vast in in de ruimte is geldt:



$$19) \frac{\partial}{\partial t} \int_{opp} B_n dO = \int_{opp} \text{rot}_n [\vec{v}, \vec{B}] dO = \oint_C [\vec{v}, \vec{B}] d\vec{e} = \oint_C \vec{B} [d\vec{e}, \vec{v}]$$

We hebben hier gebruik gemaakt van formule 18 en de stelling van Stokes. Aangezien  $\text{div } \vec{B} = 0$  geldt voor elk gesloten oppervlak:

$$20) \oint_{opp} B_n dO = 0$$

Hieruit kunnen we bewijzen dat over een met de vloeistof meebewegende contour  $C^1$  geldt:

$$21) \frac{d}{dt} \int_{opp C^1} B_n dO' = \frac{\partial}{\partial t} \int_{opp C} B_n dO - \oint_C \vec{B} [d\vec{e}, \vec{v}].$$



De vergelijkingen 19) en 21) geven samen

$$22) \frac{d}{dt} \int B_n dO = 0 \quad \text{voor een oppervlak dat met de vloeistof meebeweegt.}$$

Een wand van een veldbuis blijft wand van een veldbuis en de flux door die buis blijft gelijk. Men zegt ook wel; krachtlijnen zijn in de vloeistof vastgevroren. Deze beschouwingwijze heeft het voordeel dat men zich een beeld kan vormen van de vloeistofstromingen die nodig zijn om een magnetisch veld te versterken. Deze zullen zo moeten zijn dat de veldbuizen uitgerekt worden.

c)

Beschouwen we nu de inductievergelijking in zijn geheel :

$$6) \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} [\vec{v}, \vec{B}] - \frac{1}{\mu\sigma} \text{rot rot } \vec{B}$$

Deze formule vertoont veel overeenkomst met de vorticitetsvergelijking uit de hydrodynamica, zoals we in hoofdstuk II zullen zien.

Men noemt daarom de factor  $\frac{1}{\mu \sigma} = \nu_m$  de magnetische viscositeit en  $\frac{\lambda v}{\nu_m}$  het magnetisch reynoldsgetal  $R_m$ .  $\lambda$  geeft de grootte orde van de lineaire afmetingen van de processen aan en  $v$  de orde van grootte van de snelheden. Men schat voor de aardkern  $R_m$  een waarde heeft in de orde van 100. Het getal  $R_m$  geeft de verhouding aan van de grootteordes van de eerste en tweede term van het rechterlid van formule 6). Als  $R_m < 1$  zal de productie van het magnetisch veld kleiner zijn dan het verlies door diffusie. Naarmate de vloeistromingen die het magnetisch veld opwekten minder effectief zijn zullen we voor een dynamoproses en hoger magnetisch reynoldsgetal moeten eisen.

III. De kracht die het veld op de vloeistof uitoefent

Deze kracht is  $\vec{K} = [\vec{j}, \vec{B}] = \frac{1}{\mu} [\text{rot} \vec{B}, \vec{B}]$

De kracht staat dus altijd loodrecht op het magnetisch veld  $\vec{B}$ .

Bij pogingen om de magnetohydrodynamische vergelijkingen te vereenvoudigen hebben veel onderzoekers zich met bijzondere krachtvelden bezig gehouden. Deze zijn:

a)  $\text{rot} \vec{K} = \frac{1}{\mu} \text{rot} [\text{rot} \vec{B}, \vec{B}] = 0$

In dit geval krijgt de vorticitateitsvergelijking een vorm die analoog is aan de inductie vergelijking. In een artikel van Chopra [15] worden deze velden behandeld voor het geval dat het magnetisch veld rotatiesymmetrisch is.

b) Een verdere beperking is:  $\vec{K} = \frac{1}{\mu} [\text{rot} \vec{B}, \vec{B}] = 0$

dit noemt men krachtloze magneetvelden. Hiervoor moet dus gelden  $\text{rot} \vec{B} = \alpha \vec{B}$  waarbij  $\alpha$  een scalarveld is. Door de divergentie van deze laatste formule te nemen, vinden we  $(\vec{B}, \text{grad } \alpha) = 0$ .

c) Om de zaak nog eenvoudiger te maken kunnen we nog stellen dat  $\alpha$  constant is in de ruimte. Uit  $\text{rot} \vec{B} = \alpha \vec{B}$  volgt dan  $\Delta \vec{B} + \alpha^2 \vec{B} = 0$

Zoals we in hoofdstuk II zagen zijn de oplossingen van deze vergelijking een som van componenten  $\Sigma (T + S)$  die allen de zelfde halfwaardetijd hebben. Als er in de vloeistof geen stromingen zijn, zal het veld dus exponentieel met de tijd maar met behoud van vorm afnemen: Krachtloze magneetvelden komen waarschijnlijk in de interstellaire ruimte voor, zij werden bestudeerd door Lüst en Schlüter [16], Carstou [17], Woltjer [19] Richter [18] en vele anderen.

We zullen nu een theorema over krachtloze velden afleiden. Daartoe bewijzen eerst de indentiteit van Lamb en Thomson. Deze luidt:

Voor een vectorveld  $\vec{B}$ , met een  $\text{div } \vec{B} = 0$  geldt

$$23) \frac{1}{2} \int_V \vec{B}^2 dV = \int_0 \left( d\vec{0}, \left\{ \frac{1}{2} \vec{B}^2 \vec{r} - \vec{B}(\vec{B}, \vec{r}) \right\} + \int_V (\vec{r}, [\text{rot } \vec{B}, \vec{B}]) dV \right) dV$$

,  $\vec{r}$  is radinsvector.

We maken gebruik van de volgende vectoridentiteiten:

a)  $\text{div } \vec{r} = 3$  ; b)  $\text{rot } \vec{r} = 0$  ; g)  $(\vec{a}, \text{grad}) \vec{r} = \vec{a}$  ;

δ)  $(\vec{b}, \text{grad}) \vec{a} = \frac{1}{2} \left\{ \text{rot} [\vec{a}, \vec{b}] + \text{grad} (\vec{a}, \vec{b}) - \vec{a} \cdot \text{div } \vec{b} + \vec{b} \cdot \text{div } \vec{a} - [\vec{a}, \text{rot } \vec{b}] - [\vec{b}, \text{rot } \vec{a}] \right\}$  ;

ε)  $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$  ;

κ)  $\text{div} [\vec{a}, \vec{b}] = (\vec{b}, \text{rot } \vec{a}) - (\vec{a}, \text{rot } \vec{b})$  ;

ρ)  $\text{div } \theta \vec{a} = \theta \text{div } \vec{a} + (\vec{a}, \text{grad } \theta)$  ;

σ)  $(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]) = (\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}])$

Uit δ) vinden we, gebruikmakend van a), β) en g) en  $\text{div } \vec{B} = 0$

$$\vec{B} = (\vec{B}, \text{grad}) \vec{r} = \frac{1}{2} \left\{ \text{rot} [\vec{r}, \vec{B}] + \text{grad} (\vec{r}, \vec{B}) + 3\vec{B} - [\vec{r}, \text{rot } \vec{B}] \right\} ;$$

dus: τ)  $\text{rot} [\vec{r}, \vec{B}] + \text{grad} [\vec{r}, \vec{B}] = [\vec{r}, \text{rot } \vec{B}] - \vec{B}$

Nu is:  $\text{div} \left\{ \frac{1}{2} (\vec{B}, \vec{B}) \vec{r} - \vec{B}(\vec{B}, \vec{r}) \right\} =$  (gebruik ε)  
 $= \text{div} \left\{ \frac{1}{2} [\vec{B}, [\vec{r}, \vec{B}]] - \frac{1}{2} \vec{B}(\vec{B}, \vec{r}) \right\}$

na toepassing van κ), ρ) en  $\text{div } \vec{B} = 0$

$$= -\frac{1}{2} (\vec{B}, \text{rot} [\vec{r}, \vec{B}]) + \frac{1}{2} ([\vec{r}, \vec{B}], \text{rot } \vec{B}) - \frac{1}{2} (\vec{B}, \text{grad} (\vec{B}, \vec{r})) -$$

$$\begin{aligned}
 & \text{gebruik makend van } \sigma). \\
 & = -\frac{1}{2} (\vec{r}, [\text{rot } \vec{B}, \vec{B}]) - \frac{1}{2} (\vec{B}, \{ \text{rot } [\vec{r}, \vec{B}] + \text{grad } (\vec{r}, \vec{B}) \}) \quad (\text{gebruik } \tau) \\
 & = -\frac{1}{2} (\vec{r}, [\text{rot } \vec{B}, \vec{B}]) + \frac{1}{2} (\vec{B}, \vec{B}) - \frac{1}{2} (\vec{B}, [\vec{r}, \text{rot } \vec{B}]) \quad (\text{gebruik } \sigma) \\
 & = \frac{1}{2} (\vec{B}, \vec{B}) - (\vec{r}, [\text{rot } \vec{B}, \vec{B}])
 \end{aligned}$$

Als we op deze gelijkheid de formule van Gauss  $\int_{\partial V} \vec{a} \cdot d\vec{v} = \int_V (\vec{a}, d\vec{v})$  toepassen, volgt de identiteit van Lamb en Thomson. Stel we hebben een lichaam, waarin zich een stationair magnetohydrodynamisch proces afspeelt. We veronderstellen dat er geen oppervlaktestroom is, dus het magnetisch veld is ook continu aan het oppervlak van het lichaam. Voor de totaal aanwezige magnetisch energie geldt.

$$24) W_i + W_u = \frac{1}{2} \int_{\infty} \frac{1}{\mu} B^2 dV = \frac{1}{2} \int_{V_i} (\vec{r}, \frac{1}{\mu} [\text{rot } \vec{B}, \vec{B}]) dV = \frac{1}{2} \int_{V_i} (\vec{r}, \vec{K}) dV$$

De oppervlakte integraal verdwijnt, omdat een stationair veld minstens met  $\frac{1}{r^2}$  in het oneindige verdwijnt, en de volume integraal over het vacuum is 0 omdat in een stationaire toestand in vacuum geldt  $\text{rot } \vec{B} = 0$ .  $W_u$  wordt volkomen bepaald door het veld aan het oppervlak van het lichaam, en is evenals  $W_i$  nooit negatief. In een stationaire toestand kan het veld dus nooit volkomen krachtloos zijn. Dit zelfde resultaat volgt ook uit de energie vergelijking, die we in hoofdstuk IV zullen behandelen. Het interessante van vergelijking 23) is echter dat uit het veld aan de oppervlakte van de kern en de totale magnetische energie in de kern iets te zeggen valt over de optredende krachten. Deze zullen altijd een "explosieve" component hebben  $((\vec{r}, \vec{K}) > 0)$ .

Volgens een artikel van Deutsch in het Handbuch der Physik [20] heeft Woltjer aangetoond dat, "aan de rand van een gebied met  $\vec{K} = 0$  geldt, dat de normale component van  $\vec{B}$  op het oppervlak  $\vec{B}_n = 0$ . Als er geen stromen buiten het gebied zijn en ook geen oppervlaktestromen, dan moet aan het oppervlak gelden  $\vec{B} = 0$ ".

Het bewijs van deze stelling heb ik echter niet kunnen vinden. Het zou interessant zijn dit met de door mij gevonden resultaten te vergelijken. Het laatste gedeelte van de uitspraak die door Deutsch aan Woltjer toegeschreven wordt is echter niet juist. Volgens de identiteit van Lamb en Thomson volgt immers uit  $\vec{E} = 0$  en  $\vec{K} = 0$  dat  $\int_V B^2 dV = 0$ , dus dat in een dergelijk lichaam geen magnetisch veld kan bestaan.

Een andere betrekking voor divergentievrije velden, die verwant is met de identiteit van Lamb en Thomson luidt :

$$23a) \int_V [\vec{r}, [\text{rot} \vec{B}, \vec{B}]] = \oint_0 \{ (\text{div} \vec{B}, \vec{B}) \cdot [\vec{r}, \vec{B}] + \frac{1}{2} (\vec{B}, \vec{B}) [\text{div} \vec{r}] \}$$

zie Truesdell [ ]

Deze betrekking stelt ons in staat om het moment uit te rekenen, dat door de krachten  $\mu [\text{rot} \vec{B}, \vec{B}]$  op een roterende geleider wordt uitgeoefend.

#### IV

##### De energie vergelijking.

De energiedichtheid van het magnetisch veld is  $\frac{1}{2\mu} (\vec{B}, \vec{B})$

We berekenen eerst

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} (\vec{B}, \vec{B}) = (\vec{B}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \quad \text{pas toe: vgl 6).}$$

$$= (\vec{B}, \text{rot} [\vec{v}, \vec{B}]) - \frac{1}{\mu\sigma} (\vec{B}, \text{rot} \text{rot} \vec{B}) \quad \text{pas toe K) uit hoofdstuk III.}$$

$$= ([\vec{v}, \vec{B}], \text{rot} \vec{B}) + \text{div} [[\vec{v}, \vec{B}], \vec{B}] - \frac{1}{\mu\sigma} (\text{rot} \vec{B}, \text{rot} \vec{B}) - \frac{1}{\mu\sigma} \text{div} [\text{rot} \vec{B}, \vec{B}]$$

pas toe  $\sigma$ ), 3) en 5)

$$= -(\vec{v}, [\text{rot} \vec{B}, \vec{B}]) + \text{div} [[\vec{v}, \vec{B}], \vec{B}] - \frac{\mu}{\sigma} \vec{j}^2 - \text{div} [\vec{E}, \vec{B}] - \text{div} [[\vec{v}, \vec{B}], \vec{B}]$$

$$= -(\vec{v}, [\text{rot} \vec{B}, \vec{B}]) - \frac{\mu}{\sigma} \vec{j}^2 + \mu \text{div} [\vec{E}, \vec{H}]$$

We vinden hieruit de betrekking voor de verandering van de totale magnetische energie in een lichaam waarin zich magneto-hydrodynamisch processen afspelen.

$$25) \frac{\partial W_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2\mu} B^2 dV \\ = - \int_V (\vec{v}, \frac{1}{\mu} [\text{rot} \vec{B}, \vec{B}]) dV - \int_V \frac{\mu}{\sigma} \vec{j}^2 dV - \int_0 [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{\sigma}$$

De termen in het rechterlid hebben de volgende betekenis:

1)  $\int_V (\vec{v}, \frac{1}{\mu} [\text{rot } \vec{B}, \vec{B}]) dV = \int_V (\vec{v}, \vec{K}) dV$  is de arbeid die door de magnetische krachten op de vloeistof verricht wordt.

2)  $\frac{1}{\sigma} \int_V j^2 dV$  is de energie die door Joule warmte verdwijnt.

3)  $\int_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{\sigma}$  is de oppervlakte integraal over de poynting vector,

die de stroom aangeeft van de electromagnetische energie. Dit is dus de energie die door het oppervlak verdwijnt.

#### V. De bewegingsvergelijking.

Deze luiden:

$$26) m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + m (\vec{v} \text{ grad}) \vec{v} + 2m [\vec{\omega}, \vec{v}] = \frac{1}{\mu} [\text{rot } \vec{B}, \vec{B}] - \text{grad } p + m \nu \Delta \vec{v}$$

Voor een onsamendrukbare vloeistof is de continueitsvergelijking:

$$27) \text{div } \vec{v} = 0$$

De zwaartekracht en de centripetale kracht zijn niet in de bewegingsvergelijkingen genoemd, omdat deze geen invloed hebben op de dynamische processen die we gaan beschouwen.

Nemen we de rotatie van formule 26) dan krijgen we:

$$28) m \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = m \text{rot} [\vec{v}, \vec{w} + 2\vec{\omega}] + m \nu \Delta \vec{w} + \frac{1}{\mu} \text{rot} [\text{rot } \vec{B}, \vec{B}]$$

Hierin is  $\vec{w} = \text{rot } \vec{v}$  de vorticititeit.

Zoals in hoofdstuk III reeds werd opgemerkt, komt in het geval  $\text{rot}[\text{rot } \vec{B}, \vec{B}] = 0$ , formule 28) formeel overeen met de inductievergelijking 7).  $\vec{w} + 2\vec{\omega}$  correspondeert met het magnetisch veld  $\vec{B}$ .

Een schatting van de grootte ordes van de termen van vergelijking 26) leert dat, voor de aardkern, de term  $m \nu \Delta \vec{v}$  waarschijnlijk verwaarloosd mag worden. Dit betekent dat bij een dynamoproces de energie voornamelijk via Joule dissipatie en magnetische uitstraling verdwijnt.

De meest onderzoekers zien thermische convectie als oorzaak van de vloeistofbewegingen. Over de aard van de vloeistofbewegingen in een verwarmde draaiende bol is nog weinig bekend.





Dit is analoog aan de vectorvelden 15) en 16) uit hoofdstuk II Bullard en Gellman gebruiken echter de functie  $T(r)$  en  $S(r)$  als willekeurige functies. Men kent geen andere geschikte manieren om een algemeen magnetisch veld in een holvormige geleider te ontbinden.

De vraag rijst of we niet met een eenvoudige veldconfiguratie kunnen beginnen en hier een bewegingsveld bijzoeken. Reeds in 1934 heeft Cowling [22] aangetoond dat eenvoudige configuraties van het magnetisch veld, met gesloten krachtlijnen, in het algemeen aanleiding geven tot een neutraal punt. Dit is een punt waar  $\vec{B}=0$  en  $\text{rot rot } \vec{B} \neq 0$  zodat aan 6a) niet voldaan is.

De ontbinding in componenten 29) heeft de volgende eigenschappen:

- a) Elk divergentieloos veld  $\vec{B}$  kan één-éénduidig ontbonden worden 
$$\vec{B} = \sum_a (\vec{T}_a + \vec{S}_a)$$
, waarbij gesommeerd wordt over combinaties van  $n$  en  $m$ .
- b)  $\text{div } \vec{T} = 0$  en  $\text{div } \vec{S} = 0$
- c) Toepassing van de operator  $\text{rot rot}$  op een veld dat bestaat uit één klasse ( $S$  of  $T$ , één bepaalde  $n$  en  $m$ ) geeft een veld uit dezelfde klasse.
- d) De randvoorwaarden voor een stationair magnetisch veld zijn eenvoudig als voorwaarden aan de functies  $T(r)$  en  $S(r)$  aan te geven.
- e) Voor de intergratie van inproducten van veldvectoren over de hele bol bestaan eenvoudige formules.

Tegenover al deze fraaie eigenschappen staat echter een groot nadeel. In de vergelijking 6a) komt de term  $\text{rot}[\vec{v}, \vec{B}]$  voor. Stel dat we de ontbinding in componenten van de vectorvelden  $\vec{v}$  en  $\vec{B}$  kennen. Dan moet het vectorveld  $\text{rot}[\vec{v}, \vec{B}]$  ook in componenten te ontbinden zijn. Bij het berekenen van deze term stuiten we op de moeilijkheid om het product van twee bolfuncties in een somreeks van bolfuncties uit te drukken.

Het is wel mogelijk om te zeggen welke termen zullen optreden, maar de coëfficiënten zijn niet bekend. In de meteorologie treffen we hetzelfde probleem aan. Voor het bestuderen van de algemene circulatie is het prettig de luchtbewegingen met behulp van bolfuncties te beschrijven. Bij dynamische beschouwingen van de interacties tussen de verschillende componenten treden dan weer producten van bolfuncties op die niet in algemene vorm oplosbaar zijn.

Voor literatuur omtrent producten van legendrefuncties en bol-functies verwijzen we naar [ 23 ].

Bovengenoemde moeilijkheden zijn dan ook de reden dat Bullard en Gellman wel combinaties van velden en stromingen kunnen aangegeven, die bijna een stationaire dynamo opleveren, maar geen algemene oplossing kunnen vinden.

De eenvoudigste combinatie die bijna stationair kan zijn is een  $S_1^{2c}$  en  $T_1^0$  beweging met een  $S_1^0, T_2^0, T_2^{2c}$  en  $T_2^{2c}$  veld. Rikitatie [ 6-10 ] heeft een onderzoek ingesteld naar de stabiliteit van een dergelijk systeem. Hij komt tot de conclusie dat dit soort dynamos stabiel is als de grootte orde van het magnetisch veld de  $10^5$  gauss niet te boven gaat. Hij acht daarom zeer sterke toroidale velden in de aardkern mogelijk.

## VI

### Magnetohydrodynamische turbulentie

Het probleem van de magnetohydrodynamische turbulentie kan als volgt geformuleerd worden:

"Stel we hebben een geleidende vloeistof in turbulente beweging. Laten we aannemen, dat er altijd zwakke magnetische velden in aanwezig zijn. De vraag is nu of deze velden gemiddeld verstrekt of verzwakt worden door de turbulente bewegingen".

Het onlangs verschenen boek van Landau en Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, [24], wijdt hier enkele bladzijden aan. Hieruit, en uit andere publikaties [25,26] blijkt dat deze tak van de hydrodynamica de fase der subjectieve redenatie nog niet te boven is. Het grote knelpunt is de onvolmaaktheid van de theorie der turbulentie in het algemeen.

Men redeneert ongeveer als volgt; Stel dat de magnetische velden zo zwak zijn dat zij geen invloed op de turbulente bewegingen hebben. We kunnen twee oorzaken aangeven voor de veranderingen in het magnetisch veld. Dit is in de eerste plaats het verdwijnen van het magnetisch veld door diffusie. Dit effect neemt af naarmate de afmetingen van de veld configuraties groter zijn. In de tweede plaats hebben we de invloed van de turbulente beweging op de veldbuizen. We verwijzen hiervoor naar blz. 9. Twee deeltjes van de vloeistof die in elkaars nabijheid liggen zullen gemiddeld in de loop van de tijd van elkaar afbewegen. Dit zal tot gevolg hebben dat de veldbuizen uitgerekt worden, en dus dat het magnetisch veld versterkt wordt.

Deze redenering is zeer subjectief, men kan evengoed zeggen dat een platte veldbuis in de loop van de tijd een groter oppervlak krijgt, en dus het veld gemiddeld verzwakt wordt. We zullen daarom dit probleem wat nader gaan beschouwen. We gaan uit van een onsamendrukbare vloeistof met een oneindig geleidingsvermogen. Stel dat we ten tijde  $t$  een kubus vormig stuk veldbuis hebben met een homogeen magnetisch veld  $\vec{B}_0$  in de richting van de  $z$  as. De magnetische energie in deze kubus is evenredig met  $B_0^2 a^3$  en de flux door het bovenstuk is evenredig met  $B_0 a^2$ .

Na verloop van enige tijd, op het tijdstip  $t_1$  is deze kubus vervormd tot een parallelipedum.

We nemen de  $z$  as weer in de richting van het veld. We veronderstellen dat de lengte van de opstaande zijden nu  $a + \alpha a$  is. Het oppervlak van het bovenvlak noemen we  $O_1$ , en de hoek van dit vlak met het  $xy$  vlak noemen we  $\theta$ . Daar de vloeistof onsamendrukbaar is, is het volume in beide gevallen hetzelfde, dus  $a^3 = (a + \alpha a) O_1 \cos \theta$ .

Ook de flux door het bovenvlak blijft gelijk, dus  $B_0 a^2 = B_1 \cdot O_1 \cdot \cos \theta$ .

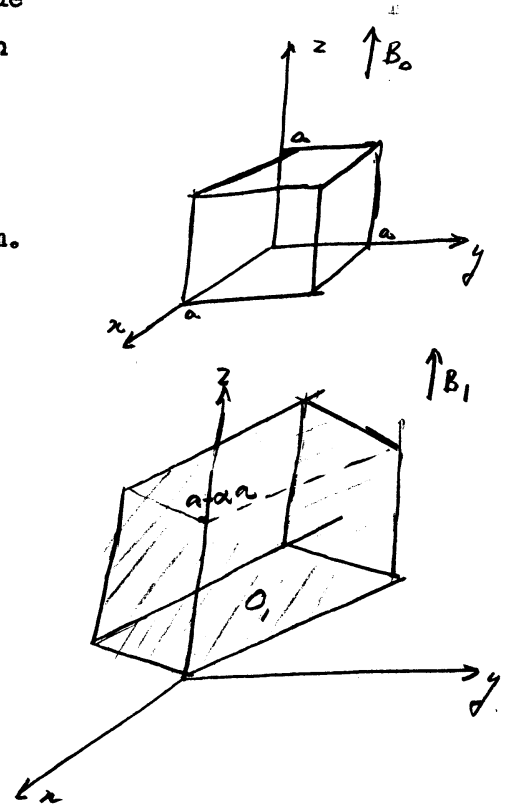
We kunnen nu de verhouding van de energie op de tijd  $t_1$ , en die op tijd  $t_0$  eenvoudig berekenen. We vinden dan:

$$30) \frac{W_1}{W_0} = (1 + \alpha)^2.$$

We merken op dat de hoek  $\theta$  geen invloed heeft op de energieverandering in het vloeistof-elementje. Wat we willen weten is de gemiddelde energieverandering

$$31) \overline{\frac{W_1}{W_0}} = 1 + 2\overline{\alpha} + \overline{\alpha^2}$$

Het hangt van de waarschijnlijkheidsverdeling van  $\alpha$  af, of de energie in het vloeistof-elementje gemiddeld zal toenemen of niet.



In een vloeistof zal deze waarschijnlijkheidsverdeling,  $P(\mathbf{a})$  een functie van de tijd en de afstand  $a$  zijn. Zoals reeds eerder werd vermeld is de diffusie van het magnetisch veld per tijdseenheid afhankelijk van de afmetingen van de veldconfiguraties. Er is dus bij een bepaalde dissipatiesnelheid een afstand aan te geven waarover het veld ongeveer homogeen is.

Als de functie  $P(\mathbf{a}, a)$  bekend is kunnen we een indruk krijgen van de wervelafmetingen die geschikt zijn voor turbulente versterking van magnetische velden.

Zijn de magnetische velden in de vloeistof sterker dan zullen deze de stroming gaan beïnvloeden en in het algemeen de turbulentie onderdrukken. Vele onderzoekers vermoeden dat er in de evenwichtsstoestand een equipartitie bestaat tussen de energie van het magnetisch veld en de kinetische energie van de vloeistofstromingen.

Een andere benadering van de magneto-hydrodynamische turbulentie is het geval waarbij men de wervels als massieve roterende bollen beschouwt en de omgevende vloeistof in rust. Bullard [29] en later Herzenberg en Lowes [27] hebben dit geval uitvoering onderzocht.

Hoe eenvoudig het ook lijkt, een turbulente wervel door een massieve bol voor te stellen, we zullen nog enkele vereenvoudigende veronderstellingen moeten maken, voordat we tot een mathematisch aanpak van dit probleem over kunnen gaan. Voorlopig nemen we aan dat het primair aanwezige magneetveld  $\vec{B}_0$  homogeen is, de omringende geleidende vloeistof in rust en van oneindige uitgestrektheid. Een bolvormig gedeelte van de vloeistof is in eenparig roterende beweging. Dit geeft aanleiding tot een secundair magneetveld  $\vec{b}$ . We nemen aan dat de toestand stationair is. Het totaal aanwezige veld duiden we aan met  $\vec{B} = \vec{b} + \vec{B}_0$ . Waar nodig, zullen we de velden in de rotator met een accent aangeven. We zullen gebruik maken van cartesische coördinaten,  $x, y, z$ , bolcoördinaten,  $r, \theta, \varphi$ , en cylinder coördinaten,  $\rho, \varphi, z$ . De eenheidsvectoren van deze stelsels worden respectievelijk aangegeven door  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{r}, \vec{\theta}, \vec{\varphi}, \vec{\rho}, \vec{\varphi}, \vec{z}$ . De rotatievector van de bol wordt aangegeven door  $\vec{\omega}$  met absolute waarde  $\omega$ .

Het veld  $\vec{B}$  buiten de bol zal moeten voldoen aan de vergelijkingen:

$$32) \quad \Delta \vec{B} = 0 \quad \text{en} \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

Voor het veld binnen de bol  $\vec{B}^1$  leiden we uit de inductie vgl (6) af.  
 33)  $\text{rot} [\vec{\omega}, \vec{r}], \vec{B}^1] + \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \vec{B}^1 = 0$

terwijl ook hier moet gelden  $\text{div} \vec{B}^1 = 0$

Als randvoorwaarden eisen we in de eerste plaats dat op grote afstand van de rotator  $\vec{B}$  tot  $\vec{B}_0$  nadert. Een tweede stelsel randvoorwaarden zijn die welke optreden aan het oppervlak van de bol. Hier geldt  $\vec{B} = \vec{B}^1$  en  $\vec{E} = \vec{E}^1$ . Voor een klein gedeelte van het oppervlak kunnen we dit wel als vlak beschouwen. We richten hier een rechthoekig assenstelsel op met de z as naar buiten gericht en de y as in een richting loodrecht op  $\vec{\omega}$ . Daar langs het oppervlak  $\vec{B} = \vec{B}^1$  geldt hier ook  $\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial E'_x}{\partial x}$  en  $\frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\partial E'_y}{\partial y}$ . Nu is  $\text{div} \vec{B} = \text{div} \vec{B}^1 = 0$  dus  $\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial E'_x}{\partial x} + \frac{\partial E'_y}{\partial y} + \frac{\partial E'_z}{\partial z}$ .

We kunnen dus concluderen dat aan het oppervlak geldt

34) 
$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial E'_z}{\partial z}$$

Volgens vgl 3 en 5 geldt in een geleider

$$\text{rot} \vec{B} = \mu\sigma (\vec{E} + [\vec{\omega}, \vec{B}])$$

Nemen we hiervan de y component aan het oppervlak van de rotator dan krijgen we

$$(\text{rot} \vec{B}^1)_y = \mu\sigma (E'_y + [\vec{\omega}, \vec{B}^1]_y) = \mu\sigma E'_y$$

$$(\text{rot} \vec{B})_y = \mu\sigma E_y$$

dus  $(\text{rot} \vec{B}^1)_y = (\text{rot} \vec{B})_y$

of wel  $\frac{\partial B'_z}{\partial z} - \frac{\partial B'_x}{\partial x} = \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{\partial B_x}{\partial x}$

en daar uit  $\vec{B} = \vec{B}^1$  aan het oppervlak volgt dat

$$\frac{\partial B'_z}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

is dus

35) 
$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B'_x}{\partial z}$$

Een strengere afleiding van deze randvoorwaarden, met behulp van orthogonale kromlijnige coördinaten treffen we bijvoorbeeld aan in Stratton [14].

Nemen we cylinder coördinaten met de z as in de richting van  $\vec{\omega}$ , dan

$$\begin{aligned} \text{geldt in de bol } \Delta B'_z &= (\Delta \vec{B}^1)_z = -\mu\sigma \text{rot}_z [\omega \rho \vec{e}_\phi, \vec{B}^1] \\ &= -\mu\sigma \omega \text{rot}_z [\rho B'_z \vec{e}_\phi - \rho B'_\rho \vec{e}_z] \\ &= +\mu\sigma \omega \frac{\partial B'_z}{\partial \rho} \end{aligned}$$

en buiten de bol  $\Delta B_2 = 0$

Vermenigvuldigen we met  $B_2'$  resp.  $B_2$  en integreren we over de gehele ruimte, dan krijgen we

$$\int B_2 \cdot \Delta B_2 dV = \mu \tau \omega \int_{\text{rot}} B_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} B_2 dV$$

$$= \mu \tau \omega \int_{\text{rot}} \frac{\partial}{\partial \phi} (B_2^2) dV = 0$$

Het laatste zien we in door eerst over de coördinaat  $\phi$  te integreren. Het linkerlid kunnen we met behulp van de formule van Green transformeren.

$$\int B_2 \cdot \Delta B_2 dV = \int_{\text{opp}} B_2 (\text{grad } B_2)_n dO - \int (\text{grad } B_2)^2 dV = 0$$

Als we de randvoorwaarden  $\vec{B} \rightarrow \vec{B}_0$  op grote afstand van de rotator streng genoeg kiezen ( $b_0 = O(r^{-2})$ ) dan verdwijnt de oppervlakte integraal en volgt uit de andere integraal dat overal  $\text{grad } B_2 = 0$ . Aangezien voor het homogene veld  $B_0$  geldt  $\text{grad } B_0 = 0$ , moet dus ook overal  $\text{grad } b_2$  dus  $b_2$  is constant gelden. Op grote afstand moet  $b_2$  tot nul naderen, dus geldt overal

36) 
$$\underline{b_2 = 0}$$

Deze stelling geldt voor elke rotatiesymmetrische rotator.

Superpositie van oplossingen.

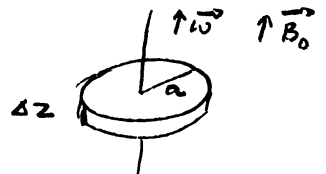
De inductievergelijking, de vergelijking  $\text{div } \vec{B} = 0$  en de randvoorwaarden, bestaan allen uit lineaire operatoren werkend op het veld  $\vec{B}$ . Hieruit volgt dat, als het primaire veld  $\vec{B}_I$  een secundair veld  $b_I$  opwekt en het primaire veld  $\vec{B}_H$  een secundair veld  $b_H$  een primair veld  $\vec{B}_0 = \vec{B}_{0I} + \vec{B}_{0H}$  een secundair veld zal teweegbrengen  $\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}_H$

Homogeen veld in de richting van  $\vec{w}$

In het geval dat het veld  $\vec{B}_0$  dezelfde richting heeft als de rotatie-as heerst er symmetrie ten opzichte van deze as. Nemen we een dunne cirkelschijf met straal  $a$  en dikte  $\Delta z$ , concentrisch om deze as dan geldt, volgens Gauss:

$$0 = \iiint_{\text{schijf}} \text{div } \vec{B} dV = \iint_{\text{schijf}} \vec{B} \cdot d\vec{O} = 2\pi a b_\rho(a, z) \cdot \Delta z$$

dus  $b_\rho = 0$



We hebben hierbij gebruik gemaakt van de stelling dat  $b_z$  overal 0 is  $\vec{B}$  heeft dus alleen een component in de richting van  $\vec{\phi}$ .

Uit  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$ ,  $\text{div } \vec{B} = 0$ ,  $\text{div } \vec{B}_0 = 0$ ,  $\Delta \vec{B}_0 = 0$ ,  $\vec{b} = b \vec{\phi}$   
 en  $\Delta \vec{B} = -\mu \sigma \text{rot} [\vec{v}, \vec{B}]$  vinden we

$$\Delta \vec{b} = -\mu \sigma \text{rot} [\vec{v}, \vec{B}_0] \text{ en } \text{div } \vec{b} = 0$$

We gaan over tot bolcoördinaten en vatten  $\omega$  op als een functie van de plaats. Dan is  $\vec{v}(r, \theta, \phi) = r \cdot \sin \theta \cdot \omega(r, \theta) \vec{\phi}$

$$\begin{aligned} \text{dus } \Delta \vec{b} &= -\mu \sigma \text{rot} [r \cdot \sin \theta \cdot \omega \vec{\phi}, \vec{B}_0] \\ &= -\mu \sigma r \sin \theta (\vec{B}_0, \text{grad } \omega) \vec{\phi} \end{aligned}$$

De oplossing van deze vergelijking is

$$\vec{b}(\vec{r}) = \frac{\mu \sigma}{4\pi} \int \frac{r' \sin \theta' (\vec{B}_0, \text{grad}' \omega)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\phi}' dV'$$

Voor een massieve rotator verandert  $\omega$  alleen aan het oppervlak van de rotator en we vinden dñs

$$\vec{b}(\vec{r}) = \frac{-\mu \sigma \omega}{4\pi} \int \frac{r' \sin \theta' B_{0n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\phi}' d\Omega'$$

waarbij  $B_{0n}$  de component van het primaire veld in de richting van de naar buiten gerichte normaal is.

Stellen we de straal van de bol a dan gaat de laatste formule over in:

$$\begin{aligned} \vec{b}(\vec{r}) &= -\frac{\mu \sigma \omega a}{4\pi} B_0 \int \frac{\sin \theta' \cos \theta'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\phi}' d\Omega' \\ &= -\frac{\mu \sigma \omega a}{4\pi} B_0 \vec{\phi} \int \frac{\sin \theta' \cos \theta' \cos(\phi - \phi')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\Omega' \\ &= -\frac{\mu \sigma \omega a^3}{4\pi} B_0 \vec{\phi} \int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2 \theta' \cos \theta' \cos(\phi - \phi') \times \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{r^{n+1}} [P_n(\cos \theta') P_n(\cos \theta) + 2 \sum_{j=1}^n P_n^j(\cos \theta') P_n^j(\cos \theta) \cos(\phi - \phi')] d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

dus

$$37) \vec{b}(\vec{r}) = -\frac{1}{5} \mu \sigma \omega a^5 B_0 \vec{\phi} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^3}$$

De hierbij gebruikte ontwikkeling van  $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$  in bolfuncties geldt alleen voor  $r > a$ .



Homogeen veld loodrecht op  $\vec{u}$ , lage hoeksnelheid

Een eenvoudige, algemeen geldende oplossing is in het geval van een transversaal primair veld niet mogelijk. De exacte oplossingen van dit probleem zijn gevonden door Bullard [29]. We zullen hier de benaderde oplossing afleiden voor grote en kleine hoeksnelheden.

Het ligt voor de hand om te veronderstellen dat bij lage snelheden de oplossing geschreven kan worden als een machtreeks in  $\vec{u}$ . We zullen eerst onderzoeken onder welke voorwaarden dit toegelaten is.

Het totale veld  $\vec{B}$  moet voldoen aan de vergelijking:  
 $\Delta \vec{B} = -\mu\sigma \text{ rot } [\vec{v}, \vec{B}]$ .

We kunnen deze vergelijking, met randvoorwaarde  $\vec{B} = \vec{B}_0$  op grote afstand van de rotator, vervangen door de integraal vergelijking:

$$38) \quad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0 + \frac{\mu\sigma}{4\pi} \int \frac{\text{rot}' [\vec{v}, \vec{B}]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

na partiele integratie wordt dit

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0 - \frac{\mu\sigma}{4\pi} \int [\text{grad}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, [\vec{v}, \vec{B}]] dV'$$

We vervangen  $\vec{v}$  door  $\omega \vec{u}$  en proberen de oplossing:

$$\vec{B} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \vec{B}^{(n)}$$

en krijgen dan de recurrente betrekking:

$$\vec{B}^{(n+1)} = -\frac{\mu\sigma}{4\pi} \int [\text{grad}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, [\vec{u}, \vec{B}^{(n)}]] dV'$$

De convergentie voorwaarden krijgen we als volgt:

$$|\vec{B}^{(n+1)}| \leq \frac{\mu\sigma}{4\pi} \int |[\text{grad}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, [\vec{u}, \vec{B}^{(n)}]]| dV' \leq \frac{\mu\sigma}{4\pi} \int \frac{|\vec{u}| |\vec{B}^{(n)}|}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dV' \\ \leq \frac{\mu\sigma}{4\pi} |\vec{u}|_{\text{max}} |\vec{B}^{(n)}|_{\text{max}} \left( \int \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right)_{\text{max}}$$

$$\text{dus: } |\vec{B}^{(n+1)}|_{\text{max}} \leq \frac{\mu\sigma}{4\pi} |\vec{u}|_{\text{max}} \cdot |\vec{B}^{(n)}|_{\text{max}} \left( \int \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right)_{\text{max}}$$

Voor een bolvormige rotator met straal  $a$  blijkt het maximum van op te treden bij  $\vec{r} = 0$  en gelijk te zijn aan  $\frac{4}{3}\pi a^3$ . Verder geldt  $|\vec{u}|_{\text{max}} = \omega a$  dus we hebben de betrekking

$$|\vec{B}^{(n+1)}|_{\text{max}} \leq \mu\sigma a^2 |\vec{B}^{(n)}|_{\text{max}}$$

Herhaalde toepassing van deze betrekking geeft:

$$|\vec{B}^{(n)}|_{\text{max}} \leq (\mu\sigma a^2)^n |\vec{B}_0|$$

De reeks  $\sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \vec{B}^{(n)}$  zal dus absoluut convergeren als  $\mu\sigma a^2 \omega = \alpha < 1$ .

We zullen nu het secundaire veld berekenen van een geleidende bol in een oneindig uitgestrekte geleider, met het primaire veld, homogeen en loodrecht op de rotatieas, de bol langzaam draaiend. ( $\alpha \ll 1$ )

We kunnen volgens het voorafgaande dan volstaan met de eerste orde benadering in  $\omega$ .

Voorlopig veronderstellen we dat de snelheid  $\vec{v}$  een vector veld is dat continu van de plaats afhangt Volgens formule 38) mogen we in eerste benadering schrijven:

$$\begin{aligned} \vec{b}(\vec{r}) &= \frac{\mu\sigma}{4\pi} \int \frac{rd' [\vec{v}, \vec{B}_0]}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \\ &= \frac{\mu\sigma}{4\pi} r\omega \int \frac{[\vec{v}', \vec{B}_0]}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' + \frac{\mu\sigma}{4\pi} \int \frac{rd' [\vec{v}', \vec{B}_0]}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \\ &= \frac{\mu\sigma}{4\pi} r\omega \int \frac{[\vec{v}', \vec{B}_0]}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \end{aligned}$$

Het tweede lid verdween om dat de term  $\frac{[\vec{v}', \vec{B}_0]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$  in de continue benadering geacht kan worden sneller dan  $|\vec{r}'|^{-2}$  naar 0 te gaan. Hierna kunnen we  $\vec{v}$  de eerste integraal de in ons geval optredende discontinue waarde laten aannemen.

Nu is  $[\vec{v}', \vec{B}_0] = \omega [ [\vec{z}, \vec{r}'], \vec{B}_0 ] = -\omega \vec{z} (\vec{B}_0 \cdot \vec{r}')$

dus

$$\begin{aligned} \vec{b}(\vec{r}) &= -\frac{\mu\sigma}{4\pi} \omega r\omega \int \vec{z} \cdot \frac{(\vec{B}_0 \cdot \vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \\ &= \frac{\mu\sigma}{4\pi} \omega B_0 \vec{z} \int \frac{r' \sin \theta' \cos \phi'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \end{aligned}$$

Evenals bij het geval  $\vec{B}_0 \parallel \vec{a}$  lossen we deze integraal op door de functie  $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$  in bolfuncties te ontwikkelen. We vinden van voor  $r > a$ ,  $\alpha \ll 1$

39)

$$\vec{b}(\vec{r}) = \frac{1}{15} a^5 \mu\sigma \omega B_0 \vec{z} \int \frac{\sin \theta \cos \phi}{r^2}$$

### Homogeen veld loodrecht op de as grote hoeksnelheid

Voor een waarnemer die met de rotator meebeweegt wordt er nu op de bol een wisselveld met kleine periode uitgeoefend. Vanwege het "skin" effect zal dit slechts een kleine indringdiepte hebben. De verschijnselen in de rotator zullen zich nabij het oppervlak afspelen. Het primaire  $\vec{B}_0$  staat loodrecht op de rotatieas  $\vec{a}$ .

Eerder is bewezen dat ook het secundaire veld  $\vec{b}$  loodrecht op  $\vec{a}$  staat.

Nemen we cylinder coördinaten, met z as in de richting van  $\vec{a}$  en voor  $\vec{B}$  een complexe vector die voldoet aan  $\text{div } \vec{B} = 0$  en als reële deel het gezochte veld heeft, dan is het uit symmetrie overwegingen aannemelijk dat de velden afhankelijk zijn van de hoek  $\phi$  met de factor  $e^{i\phi}$ . De componenten van  $\vec{B}$  in de richtingen,  $\rho, \phi, z$  zijn dan.

$$\vec{B} = \{ B_\rho(\rho, z) e^{i\phi}, B_\phi(\rho, z) e^{i\phi}, 0 \}$$

Voor de snelheid geldt  $\vec{v} = \{ 0, \omega\rho, 0 \}$

Hieruit volgt  $\text{rot} [\vec{v}, \vec{B}] = -i\omega \vec{B}$

Als we eisen dat deze complex  $\vec{B}$  aan de maxwell vgl voldoet, dan geldt binnen de rotator

39a)  $\Delta \vec{B}' - i\mu\sigma\omega \vec{B}' = 0$   $\text{div } \vec{B}' = 0$

en eruidens  $\Delta \vec{B} = 0$   $\text{div } \vec{B} = 0$

De "skin" diepte d is  $d = (\frac{1}{2}\mu\sigma\omega)^{-\frac{1}{2}}$

We zullen nu een benaderde oplossing binnen de rotator trachten te vinden. Op een punt van het oppervlak richten we een carthesisch assenstelsel op, met de z as naar buiten gericht en de y as in de richting van  $\vec{v}$ .

Stel l is een karakteristieke lengte waarin  $\vec{B}'$  langs het rotator oppervlak varieert, dan is  $\frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial y^2} = 0 (\frac{1}{l^2}) \vec{B}'$

vergelijking 39 a wordt nu dus  $\frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial z^2} - \frac{1+i}{\alpha^2} [1 + 0(\frac{\alpha^2}{l^2})] \vec{B}'$

De oplossing van deze vergelijking is:

$$\vec{B}'(0,0,z) = \vec{B}'(0,0,0) \exp \left\{ +z \frac{(1+i)}{d} [1 + 0(\frac{\alpha^2}{l^2})]^{1/2} \right\}$$

In de exponent hebben we alleen het + teken genomen in de veronderstelling dat het veld naar binnen toe zal afnemen. Uit de laatste vergelijking leiden we af dat aan het oppervlak geldt

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial z} = \frac{1+i}{d} [1 + 0(\frac{\alpha^2}{l^2})]^{1/2} \vec{B}'$$

Volgens de eerder afgeleide randvoorwaarden geldt aan het oppervlak

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B'_z}{\partial z} \text{ en } \vec{B} = \vec{B}'$$

aus:  $\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{1+i}{d} [1 + 0(\frac{\alpha^2}{l^2})]^{1/2} B_z$

Buiten de rotator geldt  $\text{rot } \vec{B} = 0$  er is dus een potentiaal  $\Psi$  zodanig dat  $\vec{B} = -\text{grad } \Psi$ . De laatste vergelijking wordt dus:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{d}{1+\epsilon} \left[ 1 + O\left(\frac{d^2}{\rho^2}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}$$

Uit  $\text{div } \vec{B} = 0$  volgt  $\Delta \Psi = 0$ , dus nabij het oppervlak  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = O\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \Psi$ .

Vullen we dit in dan krijgen we

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= \frac{d}{1+\epsilon} \left[ 1 + O\left(\frac{d^2}{\rho^2}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} O\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \Psi \\ &= \frac{d}{1+\epsilon} \left[ 1 + O\left(\frac{d^2}{\rho^2}\right) \right] O\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \Psi \\ &= \frac{1}{\rho} O\left(\frac{d}{\rho}\right) \Psi \end{aligned}$$

Hieruit leiden we af dat aan het oppervlak  $B_z \rightarrow 0$  als  $d \rightarrow 0$  dus  $\omega^{-\frac{1}{2}} \rightarrow 0$  onder voorwaarde dat  $l$  eindig blijft bij toenemende hoeksnelheid.

Als verdere randvoorwaarden hebben we nog:  $\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_z'}{\partial z}$

aan het oppervlak van de rotator.

Analoog aan de afleiding van de vorige betrekking vinden we dat aan het oppervlak  $B_z \rightarrow 0$  als  $\omega^{-\frac{1}{2}} \rightarrow 0$ .

We zullen nu het uitwendig veld van de rotator trachten te vinden.

De  $\rho$  component van de vergelijking  $\Delta \vec{B} = 0$  in cylinder coördinaten, met de oorsprong in het centrum van de bol en de  $\vec{z}$  as in de richting van  $\vec{\omega}$  luidt:

$$-\frac{1}{\rho} \left\{ \Delta (\rho B_\rho) + 2 \frac{\partial B_z}{\partial z} \right\} = 0$$

Hierbij is gebruik gemaakt van  $\text{div } \vec{B} = 0$

Omdat  $B_z = 0$  geldt  $\Delta (\rho B_\rho) = 0$

Als randvoorwaarden hebben we dat

$$\rho B_\rho \rightarrow B_0 \cdot r \cdot \sin \theta \cos \phi \text{ als } r \rightarrow \infty$$

$$(\rho B_\rho)_{r=a} = 0 \quad \text{want volgens de afgeleide voorwaarden}$$

heerst er aan het grensvlak alleen een component van  $\vec{B}$  in de richting van



De oplossing van deze vergelijking is:

$$\rho B_\rho = B_0 a \cdot \sin \theta \cos \phi - B_0 a^3 \sin \theta \cos \phi / r^2$$

$$\text{dus } B_\rho = B_0 \cos \phi - B_0 a^3 \cos \phi / r^3$$

De divergentie vergelijking is in cylinder coördinaten:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} = 0$$

Nu is  $B_z = 0$  dus:

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) = B_0 \cos \phi - B_0 \frac{a^2}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \phi)$$

dus

$$B_\phi = -B_0 \sin \phi + B_0 \frac{a^2}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \theta) \sin \phi$$

waarbij gebruik gemaakt is van de rand voorwaarde

$$B_\phi = -B_0 \sin \phi \text{ als } r \rightarrow \infty$$

Het secundaire veld van een sneldraaiende bol omringd door een geleider en met een homogeen primair veld loodrecht op de rotatieas kunnen we samenvatten in:

$$40) \quad \vec{B} = B_0 a^3 \frac{\vec{\omega}}{r^2} \frac{1}{2} \text{grad} \left( \frac{\sin \theta \sin \phi}{r^2} \right) + O(\omega^{-1})$$

Uit dit resultaat zien we dat de karakteristieke lengte  $\delta$  van de orde  $a$  is.

We mochten deze benadering toepassen als  $\frac{a}{\delta} \ll 1$

$$\text{Nu is } \frac{a}{\delta} \approx \left( \frac{1}{2} \mu \sigma \omega \right)^{-1/2}, \quad \frac{1}{\delta} \approx \left( \mu \sigma \omega a^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

De benadering is dus geldig voor  $\alpha \gg 1$

Dit zijn de gevallen waarin de "skin" diepte tot een dunne laag aan het oppervlak van de rotator beperkt blijft.

Alvorens over te gaan tot het geval dat de omringende geleider zich niet tot het oneindige uitstrekt geven we een korte samenvatting van de gevonden resultaten, tesamen met de velden van roterende bollen omgeven door vacuum.

De componenten aanduiding is volgens  $\{b_r, b_\theta, b_\phi\}$ , en geeft het veld buiten de rotator.

a)  $\vec{B}_0 \parallel \vec{\omega}$ , geleider, alle waarden van  $\alpha$

$$\vec{B} = -\frac{1}{5} \mu \sigma \omega \frac{a^5}{r^3} B_0 \{0, 0, \sin \theta \cos \theta\}$$

b)  $\vec{B}_0 \parallel \vec{\omega}$ , vacuum, alle  $\alpha$

$$\vec{B} = 0$$

c)  $\vec{B}_0 \perp \vec{\omega}$ , geleider,  $\alpha \ll 1$

$$\vec{B} = \frac{1}{15} \mu \sigma \omega \frac{a^5}{r^3} B_0 \{ \sin \theta \sin \phi, \cos \theta \sin \phi, (\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta) \cos \phi \}$$

d)  $\vec{B}_0 \perp \vec{\omega}$ , vacuum,  $\alpha \ll 1$

$$\vec{B} = \frac{1}{30} \mu \sigma \omega \frac{a^5}{r^3} B_0 \{ 2 \sin \theta \sin \phi, -\cos \theta \sin \phi, \cos \phi \}$$

e)  $\vec{B}_0 \perp \vec{\omega}$ , geleider,  $\alpha \gg 1$

$$\vec{B} = \frac{a^3}{r^3} B_0 \{ \sin \theta \cos \phi, \cos \theta \cos \phi, -(\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta) \sin \phi \}$$

f)  $\vec{B}_0 \perp \vec{\omega}$ , vacuum,  $\alpha \gg 1$

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} B_0 \{ 2 \sin \theta \cos \phi, -\cos \theta \cos \phi, \sin \phi \}$$

Het veld van een rotator in een bolvormige geleider.

Tot nu toe hebben we gewerkt met omhullende geleiders van oneindige uitgestrektheid. Als de omhullende geleider begrensd is zal dit tot gevolg hebben dat er in de geleider een zogenaamd gereflecteerd veld optreedt.

In onze benaderingen zullen we de invloed van het gereflecteerde veld op de rotator verwaarlozen.

In de geleider buiten de rotator moeten de velden voldoen aan de volgende voorwaarden:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu \sigma \vec{E} ; \text{div } \vec{B} = 0 ; \text{rot } \vec{E} = 0 \text{ en } \text{div } \vec{E} = 0$$

In het omringende vacuum zijn de voorwaarden:

$$\text{rot } \vec{B} = 0 ; \text{div } \vec{B} = 0 ; \text{rot } \vec{E} = 0 \text{ en } \text{div } \vec{E} = 0$$

We nemen nu aan dat de omringende geleider een bol is en werken met bolcoördinaten ten opzichte van het centrum van deze bol.

Behalve voor het geval er velden optreden van de vorm  $\text{grad}(\frac{1}{r})$  kan het electrisch veld in de geleider worden geschreven als  $\vec{E} = \text{grad}(\frac{\partial}{\partial r} (r\psi))$  en het magnetisch veld als  $\mu \sigma [\text{grad } \psi, \vec{r}] + \text{grad}[\frac{\partial}{\partial r} (r\phi)]$  met  $\Delta \psi = 0$  en  $\Delta \phi = 0$ .

Buiten de geleider kunnen de velden afgeleid worden uit:

$$\vec{E}' = \text{grad}[\frac{\partial}{\partial r} (r\psi')] \text{ en } \vec{B}' = \text{grad}[\frac{\partial}{\partial r} (r\phi')] \text{ met } \Delta \psi' = 0 \text{ en } \Delta \phi' = 0$$

We rangschikken deze velden als volgt binnen de geleider:

$$\text{Type } \alpha: \vec{B}_\alpha = \mu \sigma [\text{grad } \psi, \vec{r}] \quad \vec{E}_\alpha = \text{grad}(\frac{\partial}{\partial r} (r\psi))$$

$$\text{Type } \beta: \vec{B}_\beta = \text{grad}[\frac{\partial}{\partial r} (r\phi)] \quad \vec{E}_\beta = 0$$

in het vacuum:

$$\text{Type } \alpha': \vec{B}_{\alpha'} = 0 \quad \vec{E}_{\alpha'} = \text{grad}(\frac{\partial}{\partial r} (r\psi'))$$

$$\text{Type } \beta': \vec{B}_{\beta'} = \text{grad}(\frac{\partial}{\partial r} (r\phi')) \quad \vec{E}_{\beta'} = 0$$

De randvoorwaarden aan het oppervlak van de geleider zijn

$$\vec{B} = \vec{B}' ; [\vec{E}, \vec{r}] = [\vec{E}', \vec{r}] ; (\vec{E}, \vec{r}) = 0$$

Zetten we deze om in voorwaarden voor de potentialen, dan vinden we:

$$\left. \begin{array}{l} \psi = 0 \\ \phi = \phi' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) = \frac{\partial}{\partial r} (r\psi') \\ \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \phi'}{\partial r} \end{array} \text{ als } r = r_0$$

We stellen ons nu eerst een oneindig uitgestrekte geleider voor waarin de secundaire velden  $\vec{b}_\infty$  en  $\vec{e}_\infty$ .

We verwijderen nu de geleider in  $r > r_0$ .

Dat gedeelte van het veld, dat van het type  $\beta$  is blijft ongewijzigd. Binnen de bol moeten we een extra veld van het type  $\alpha$  (het gereflecteerde veld) toevoegen om te voldoen aan de voorwaarde  $\mathcal{V}_{z=0}$  als  $r=r_0$ . De velden van het type  $\alpha$  buiten de bol geven alleen een electricisch veld.

De componenten in de richting  $\vec{r}$  van het veld  $\vec{b}_\alpha$  zijn alleen voor de velden van het type  $\beta$  ongelijk aan nul. We kunnen dus concluderen dat in onze benadering geldt:

$$(\vec{b}, \vec{r}) = (\vec{b}_\alpha, \vec{r}) \text{ voor } r > r_0$$

Aangezien  $\vec{b}_\alpha$  bekend verondersteld wordt en het magnetischveld in vacuum divergentie- en rotatievrij is hebben we nu voldoende gegevens om  $\vec{b}$  voor  $r > r_0$  te berekenen.

Stel voor  $r > r_0$  geldt  $b = -\text{grad } \chi$

dan is

$$\begin{aligned} \chi(r, \theta, \phi) &= \chi(\infty, \theta, \phi) + \int_{\infty}^r \frac{\partial \chi(r', \theta, \phi)}{\partial r'} dr' \\ &= \chi(\infty, \theta, \phi) - \int_{\infty}^r (\vec{r}, \vec{b}_\alpha) dr' \end{aligned}$$

Als  $\vec{b} = O(r^{-n})$  voor  $n > 1$ , dan is  $\chi$  constant in een concentrisch oppervlak met  $r = \infty$ . We kunnen  $\chi$  daar 0 stellen. Het resultaat is dus

$$41) \quad \chi(r, \theta, \phi) = - \int_{\infty}^r (\vec{r}, \vec{b}_\alpha(r', \theta, \phi)) dr'$$

Opmerking:

Bij de velden van het type  $\beta$  treden buiten de rotator geen electricische stromen op. In dit geval maakt het geen verschil of er buiten de rotator een geleider of vacuum is.

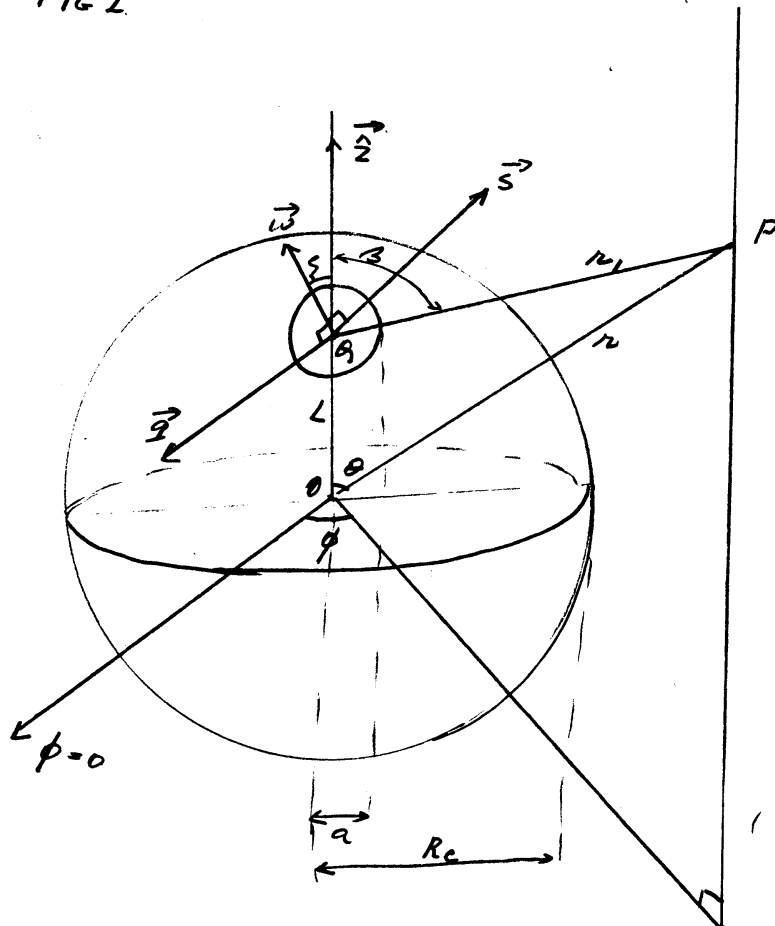
Als we een massieve geleidende bol hebben, met straal  $R_0$ , waarin een massieve bolvormige geleidende rotator draait, en op deze rotator werkt een homogeen primair magnetisch veld, dan vragen we ons af welk secundair magnetisch veld in het vacuum buiten de bol waargenomen wordt.

Als we afzien van de effecten die het gespiegelde veld op de rotator uitoefend, hebben we in het voaafgaande voldoende betrekkingen afgeleid om het probleem op te lossen.

We gebruiken bolcoördinaten  $r, \phi, \theta$  met de oorsprong in het centrum van de omhullende bol  $O$ , en zo gekozen dat het middelpunt  $B$  van de rotator in de richting van  $\theta = 0$  ligt, terwijl het vectoriele product  $\vec{q} = \vec{z} \wedge \vec{\omega}$  de richting heeft van  $\phi = 0$  (Zie fig 2) De afstand  $OB$  noemen we  $L$ .  $\phi$  is de hoek tussen de richting van  $\vec{\omega}$  en  $\vec{z}$ . We definiëren de vector  $\vec{s}$  als  $\vec{\omega} \wedge \vec{I}$ . In een punt  $P$  buiten de omhullende bol willen we het veld  $\vec{b}$  weten. De afstand  $OP$  noemen we  $r$  en de afstand  $BP$   $r_1$ .

We kunnen nu drie gevallen onderscheiden betreffende de orientatie van het primair magnetisch veld  $\vec{B}_0$ .

FIG 2.





Dit zijn: 1e  $\vec{B}_0 \parallel \vec{\omega}$ ; 2e  $\vec{B}_0 \parallel \vec{a}$ ; 3e  $\vec{B}_0 \parallel \vec{s}$

We zullen alleen de gevallen nagaan met grote rotatiesnelheden,  $d \gg 1$ . Het geval  $d \ll 1$  is hier op eenvoudige wijze uit af te leiden. We veronderstellen eerst dat de omhullende geleider van oneindige uitgestrektheid is. Het secundaire veld  $\vec{b}_\infty$  is in dit geval bekend. Uit de eerder verkregen formules kunnen we dit veld beschrijven in een carthesisch coördinatenstelsel met oorsprong  $\zeta$ . Vervolgens voeren we een coördinatentransformatie uit, bestaande uit een rotatie over de hoek  $\zeta$  en een translatie naar 0. Dan nemen we het inproduct met de vector  $\vec{r}$  en we krijgen  $(\vec{b}_\infty, \vec{r})$ .

De hier aangegeven procedure is nog al bewerkelijk en we volstaan met het geven van de einduitkomst:

1e  $\vec{B}_0 \parallel \vec{\omega}$

$$(\vec{b}_\infty, \vec{r}) = -\frac{1}{3} \mu \tau a^5 B_0 \omega \frac{1}{r_1^5} \frac{L}{2} \left\{ 2 \cos \zeta (r \cos \theta - L) \sin \theta \cos \phi - r \sin \zeta \sin^2 \theta \sin 2\phi \right\}$$

2e  $\vec{B}_0 \parallel \vec{a}$

$$(\vec{b}_\infty, \vec{r}) = -B_0 \frac{a^3}{r_1^3} \cos \phi \sin \theta - \frac{1}{2} B_0 \frac{a^3}{r_1^5} \cdot 3L \sin \zeta \left\{ \cos \zeta \sin^2 \theta \right.$$

$$\left. + r \sin 2\phi + 2 \sin \zeta (r \cos \theta - L) \sin \theta \cos \phi \right\}$$

3e  $\vec{B}_0 \parallel \vec{s}$

$$(\vec{b}_\infty, \vec{r}) = -B_0 \cdot \frac{a^3}{r_1^3} \cos \zeta \sin \theta + B_0 \frac{a^3}{r_1^5} \left( \frac{3L}{r_1^2} r \sin^2 \theta \cos^2 \phi - \cos \theta \right)$$

Is de omhullende geleider een bol omgeven door vacuum, dan kunnen we de potentiaal van het magnetisch veld buiten de bol vinden met de formule 41):

$$\chi = (r, \theta, \phi) = - \int_{\infty}^r (\vec{r}, \vec{b}_\infty(r', \theta, \phi)) dr'$$

Het resultaat is:

1e  $\vec{B}_0 \parallel \vec{\omega}$

$$42) \chi = \frac{1}{15} \mu \tau \omega a^5 B_0 \sin \zeta \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r_1^2} \left\{ 2 \cos \zeta \left[ \frac{2 \sin \theta}{1 + \cos(\beta - \theta)} - \cos \beta \right] \cos \phi + \right.$$

$$\left. + \sin \zeta \left[ \frac{2 \cos \theta}{1 + \cos(\beta - \theta)} - \cos \beta \right] \sin 2\phi \right\}$$

2<sup>e</sup>  $\vec{B}_0 \parallel \vec{q}$

43<sup>e</sup> 
$$\chi = -\frac{B_0 a^3}{r^2} \frac{\cos \phi \cdot \sin \theta}{1 + \cos(\beta - \theta)} + \frac{1}{2} \frac{B_0 a^3}{r^2} \sin \phi \left\{ \cos \phi \left[ \cos \beta + \frac{-2 \cos \theta}{1 + \cos(\beta - \theta)} \right] - \sin 2\phi + 2 \sin \phi \left[ -\sin \beta + \frac{2 \sin \theta}{1 + \cos(\beta + \theta)} \right] \cos \phi \right\}$$

3<sup>e</sup>  $\vec{B}_0 \parallel \vec{s}$

44<sup>e</sup> 
$$\chi = -\frac{B_0 a^3}{r^2} \cos \phi \frac{\sin \phi \cdot \sin \theta}{1 + \cos(\beta - \theta)} - \frac{1}{2} \frac{B_0 a^3}{r^2} \sin \phi \left\{ \left[ \cos \beta - \frac{2 \cos \theta}{1 + \cos(\beta - \theta)} \right] \cos 2\phi + \cos \beta \right\}$$

De hoek  $\beta$  is de hoek tussen de richtingen  $(\theta = 0)$  en  $(OP)$

In het geval dat de rotator zich in het centrum van de omhullende bol bevindt is  $\beta = \theta$  en kunnen we zonder de algemeenheid te schaden stellen dat  $\phi = 0$

We vinden van voor  $\vec{B}_0 \parallel \vec{w}$   $\chi = 0$

en voor  $\vec{B}_0 \perp \vec{w}$   $\chi = -\frac{B_0 a^3}{r^2} \cdot \frac{\cos \phi \cdot \sin \theta}{2}$

een resultaat dat reeds eerder door Bullard [29] gevonden werd.

Herzenberg en Lowes [27] hebben met behulp van de hierboven afgeleide formules de velden berekend die aan het aardoppervlak zouden optreden als er nabij het oppervlak van de kern een bolvormige wervel in een homogeen veld zou draaien. Vergelijken we deze velden met de afwijkingen van het dipoolveld die op aarde waargenomen worden, dan valt op dat de berekende velden een veel grotere uitgestrektheid hebben.

Uit schattingen van de maximale vloeistof snelheden in de kern, het geleidingsvermogen van de kern en de afwijkingen van het dipoolveld aan het aardoppervlak, berekenden Herzenberg en Lowes het verband tussen het primair veld  $B_0$  en de straal van de wervel.

De resultaten treffen we aan in tabel 1.

tabel 1

$B_0$ (Gauss)	straal van de wervel (km)	
	$\vec{B}_0 // \vec{w}$	$\vec{B}_0 \perp \vec{w}$
4	1700	1290
20	930	760
100	490	440
500	260	260

De vraag rijst nu in hoeverre dit model met de werkelijkheid kan overeenkomen. We zullen daarom de gemaakte veronderstellingen eens nader bekijken:

a) De vorm van de rotator

Het is gebleken dat zolang de lengte en de breedte afmetingen van de rotator ongeveer overeenstemmen het veld op grotere afstand van de rotator weinig beïnvloed wordt door de vorm van de rotator. Herzenberg en Lowes hebben ook de secundaire velden veroorzaakt door een zeer lange cilindrische rotator berekend. De uitkomsten bleken niet geschikt om het aardmagnetisch veld beter te verklaren.

b) Het gereflecteerde veld

Herzenberg en Lowes menen te moeten concluderen dat het gereflecteerde veld weinig invloed had op hun uitkomsten zolang de wervel niet te dicht bij het oppervlak van de kern gelegen is. Het zou interessant zijn om te weten welke processen er optreden als het gereflecteerde veld zo sterk is, dat het in staat is om het primaire veld te vervangen. In dit geval zou er een dynamoprocess kunnen optreden. In dit verband wijzen we op de onderzoeken naar de wederzijdse inductie van twee nabijgelegen rotatoren zoals die door Billard zijn gedaan.

c) In onze beschouwingen is gewerkt met een vaste rotator en een vaste omhullende geleider. Herzenberg en Lowes zijn van mening dat de door het magnetisch veld op de vloeistof uitgeoefende krachten de bewegingen zodanig zouden kunnen modificeren dat de opgewekte secundaire velden niet meer met het door hen gevonden resultaat overeenkomen.

- d) tijdsafhankelijkheid  
De invloed die een niet eenparige rotatie en een beweging van de rotator in zijn geheel op de velden zal hebben is niet bekend.
- e) Verder is niet bekend welke invloed het niet homogeen zijn van het primair veld op de secundaire velden heeft.

#### LITERATUUR.

- 1 Elsasser - The earth's interior and geomagnetism -  
Revs. Mod. Phys - 22 , 1-35 , 1950.
- 2 Blackett - Nature 159 , 658-666 , 1947.
- 3 Berlage - The fundamental relation between the magnetic moment and  
the structure of rotating celestial bodies -  
Nature 165 , 242-243 , 1950.
- 4 Bullard en Gellman - Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism  
Phil Trans Roy Soc A 247 , 213-278 , 1954.
- 5 Rikitake - Magnetohydrodynamic oscillations in the earth's core -  
Bul Earthsq Res Inst. 33 , pt 1 , 1-27 , 1955.
- 6 Rikitake - Growth of the magnetic field of the self exciting dynamo in the  
earth's core -  
Bul Earthsq Res Inst 33 , pt 4 , 572-583 , 1955.
- 7 Rikitake - Magnetohydrodynamic oscillations of finite amplitude of a  
conducting fluid sphere -  
Bul Earthsq Res Inst 33 pt 4, 583-593 , 1955.
- 8 Rikitake - Magnetohydrodynamic oscillations of a conducting fluid sphere  
under the influence of the coriolis force -  
Bul Earthsq Res Inst 34 , pt 2 , 139-157 , 1956.
- 9 Rikitake - Stability of the earth's dynamo -  
Bul Earthsq Res Inst 34 , pt 4 , 283-291 , 1956
- 10 Rikitake - Forced oscillations of the earth's dynamo -  
Bul Earthsq Res Inst 37 pt 2 , 245-265 , 1959.
- 11 Bullard - The secular change in the earth's magnetic field -  
Geoph Supp. Mo. Wo. Roy Astr. Soc. 5 , no 7 , 248-257 , 1948.
- 13 Elsasser - Hydromagnetic dynamo theory -  
Revs Mod Phys 28 , 135-164 , 1956.

- 14 Stratton - Electromagnetic theory -  
Mc Graw Hill N Y 1941.
- 15 Chopra - Magnetic fields in a conducting fluid sphere with volume currents -  
Journ Geoph. Res 62, 573-581, 1957.
- 16 Hilt en Schlüter - Zeitschr. Astro phys 34 263-2, 1954.
- 17 Carstou - Comtes Rendus Acad Sci, 248, 73-75, 1959.
- 18 Richter - Zur Theorie kraftfreier Magnetfelder -  
Zeitschr. f. Phys 159, 194-211, 1960.
- 19 Weltjer - A theorem on force free magnetic fields -  
Proc. Nat. Acad Sci U S A 44 no 6, 1958.
- 20 Deutsch - Magnetic fields of stars -  
Handbuch der Physik bd 51 pag 717.
- 21 Elsasser - Phys Rev 69, 106-116, 1946.
- 22 Cowling - Month Wo's Roy Astr. Soc 94, 39-48, 1934.
- 23 Producten van legendrefuncties en van bolfuncties:
  - α) Petrashen - Solutions of vector boundary problems of mathematical physics for the sphere C.R. (Doklady) Acad Sci U R S S (N.S) 46, 266-269, 1945.
  - β) Bailey - On hermite polynomials and associated legendree functions J London Math Soc 14, 281-286 (1939).
  - γ) Meyer - Über Produkte von Legendreschen Funktionen - Ned Acad. Wetensch. Proc 42, 930-937, 1939 en Nieuw Arch Wisk. (2), 19, 207-234, 1938.
  - δ) Bailey - On the product of See Associated legendre functions - Q.J. Math, Oxford ser. 11, 30-35 (1940)
  - ε) De Castro - Recurrence formula for legendre polynomials - Rev. Mat. Hisp. Amer (4) 15, 153-160, 1955.
  - κ) Meidner - Entwicklung eines Produktes zweier Kugelfunktionen mit verschiedenem Argumentes nach Kugelfunktionen - Arch Math 1, 173-181, 1948.
  - λ) Hobson - The theory of spherical and ellipsoidal harmonics - blz. 83-87
- 24 Landau en Lifshitz - Electrodynamics of continuous media - Pergamon, London, 1960.
- 25 Chandrasekhar - Hydromagnetic turbulence - Proc Roy A 233, 322-350.
- 26 Cowling - Magnetohydrodynamics - New York 1957.

- 27 Herzenberg en Lowes - Electromagnetic induction in rotating conductors  
Phil Trans Roy Soc Lond. A 249 , 507-584 , 1957.
- 28 Allan en Bullard - Distortion of a toroidal field by convection -  
Revs Mod Phys vol 30 , 1087-1088 , 1958
- 29 Bullard - Electromagnetic induction in a rotating sphere -  
Proc Roy Soc A 1059 413-443 1949.