

KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT

Wetenschappelijk Rapport W.R. 62-5

Dr. D.J. Bouman en Dr. F.H. Schmidt

Het numeriek voorspellen van stromingspatronen
in de atmosfeer

De Bilt, 1962

All Rights Reserved

Nadruk zonder toestemming van het K.N.M.I. is verboden.

I N H O U D

	blz.
Inleiding	1
Hoofdstuk I. DE BAROTROPE ROUTINEVOORSPELLING	5
1. Het barotrope model	5
2. De balansvergelijking	8
3. De invloed van de orografie	11
4. De verticale bewegingen van dynamische oorsprong, thermodynamisch verklaard	12
5. De verticale bewegingen van dynamische oorsprong, hydrodynamisch verklaard	16
6. Noodzaak voor de dynamische modificatie	22
7. Verdere modificaties. Wrijving	24
8. Verdere modificaties. Dikte-advectie	32
Hoofdstuk II. BAROKLIENE MODELLEN MET GEFILTERDE VERGELIJKINGEN	34
1. Inleiding	34
2. De ω -vergelijking	35
3. The resolution in the vertical	37
4. Model met 3 niveaus (Cressman)	38
5. Barotroop versus baroklien	40
6. Waardebepaling	41
Hoofdstuk III. BAROKLIENE MODELLEN MET PRIMITIEVE VERGELIJKINGEN	43
1. Inleiding	43
2. Voorstudies aan eenvoudige modellen	45
3. Experimenten met de vergelijkingen van de atmosferische bewegingen	50
4. Kwasi-Lagrangiaanse coördinaten	52
5. Heranalyse van de situatie	54
6. Slotbeschouwingen	56
7. Aanhangsel A. De betekenis van het gladstrijken	57
8. Aanhangsel B. Afleiding van de krachtvergelijkingen	58
Hoofdstuk IV. AUTOMATIC DATA PROCESSING EN OBJECTIEVE ANALYSE	61
1. Data processing	61
2. Objectieve analyse	62
Hoofdstuk V. TOEPASSING VAN NUMERIEKE METHODES OP FUNDAMENTEEL ONDERZOEK	65
Hoofdstuk VI. TOEPASSINGEN OP DE LUCHTVAART	68
A. Military Air Transpost Service (MATS)	68
1. Inleiding	68
2. Het vroegere programma	68
3. Het huidige programma	69
4. Waardebepaling	70
B. American Airlines (AA)	70
Literatuur	73

Dr. D.J. Bouman en Dr. F.H. Schmidt

Het numeriek voorspellen van stromingspatronen
in de atmosfeer

INLEIDING

Na het beëindigen van de tweede wereldoorlog heeft een aantal meteorologen, met name in de Verenigde Staten, Scandinavië, Engeland, Duitsland en Japan, zich geworpen op het probleem dat het eerst door L.F. Richardson in 1922 [1] aan de orde werd gesteld, nl. het voorspellen van het "weer" met behulp van numerieke methodes.

Uiteraard liggen aan de pogingen om tot een voor de praktijk bruikbare oplossing van dit probleem te komen uitgebreide en veelal diepgaande theoretische beschouwingen ten grondslag. Met name is ook de overgang van differentiaalvergelijkingen op differentievergelijkingen, een overgang die noodzakelijk is om met behulp van elektronische rekenmachines tot een oplossing van het probleem te komen, uitvoerig op zijn toelaatbaarheid onderzocht.

In het volgende zal van dergelijke problemen in het algemeen worden geabstraheerd. Ze zijn voor een deel uitvoerig behandeld door B. Lopes Cardozo in W.R. 57-008(II-010) van het K.N.M.I.: "Numerieke integratie van de barotrope voorspellingsvergelijking" [2]. De bedoeling van het onderhavige geschrift is uitsluitend een overzicht te geven van de in de praktijk gebruikte modellen en na te gaan welke vereenvoudigingen en eventuele kunstgrepen zijn toegepast om deze modellen voor routinevoorspellingen bruikbaar te maken.

Een enkele opmerking moge nog worden gemaakt naar aanleiding van het betrekkelijk frequente gebruik van de, in bepaalde opzichten misleidende uitdrukking: numerieke weersvoorspelling. In het algemeen beperkt de toepassing van de numerieke voorspeltechniek zich tot het doen van uitspraken over de toekomstige ontwikkeling van het stromingspatroon in een of meer drukvlakken. Tot het eigenlijke "weer" moet dan nog uit dit

stromingspatroon en eventueel uit langs andere wegen afgeleide parameters worden geconcludeerd.

In dit licht gezien is de numerieke voorspelmethode niet meer dan een hulpmiddel voor de meteoroloog, die weersverwachtingen moet opstellen, zij het ook een hulpmiddel dat bezwaarlijk of in het geheel niet langs andere weg kan worden verkregen.

Het is dit laatste aspect, dat naar de mening van de samenstellers van dit rapport bij het vellen van een oordeel over de numerieke methoden nimmer uit het oog mag worden verloren. Deze methodes geven bepaald geen volkomen correcte resultaten maar zeker toch zodanige, dat in een groot aantal gevallen het doen van uitspraken mogelijk wordt gemaakt waaraan zonder de numerieke voorspelmethode niet te denken zou zijn geweest. In dit verband moge o.a. worden gewezen op de recente onderzoekingen, die op het K.N.M.I. zijn verricht met betrekking tot het opstellen van weersverwachtingen op middelbare termijn.

Inmiddels is men thans doende voorspellingen op te stellen met betrekking tot het vertikale bewegingsveld in de dampkring. Dergelijke voorspellingen zullen een hulpmiddel kunnen zijn bij het geven van neerslagverwachtingen al moet vooralsnog in twijfel worden getrokken of een voldoende grote gedetailleerdheid in de uitspraken langs deze weg zal kunnen worden verkregen.

Aangezien voorspellingen van het stromingspatroon op routinebasis met name in de Verenigde Staten (Numerical Weather Prediction Unit te Saitland[⊛]) worden gedaan, zullen in dit rapport zo niet uitsluitend dan toch wel in hoofdzaak de daar gebruikte methodes worden besproken.

o
o o

Men kan bij het numeriek voorspellen van stromingspatronen tussen drie groepen van methodieken onderscheiden.

In de eerste plaats kan men, in het voetspoor van Richardson gaande, trachten zijn doel te bereiken met behulp van de oorspronkelijke bewegingsvergelijkingen, de z.g. primitieve vergelijkingen. Onderzoek naar de mogelijkheden die hier liggen wordt vooral verricht in Saitland (F.G. Shuman) en West-Duitsland (K. Hinkelmann). Er liggen hier nog grote moeilijkheden, voor een deel dezelfde waar het experiment van Richardson op is gestrand,

[⊛] Tijdelijk heeft deze instelling geheten "Joint Numerical Weather Prediction Unit". Thans hebben echter Airforces en Navy zich hieruit wederom teruggetrokken.

het uitfilteren van niet gewenste storingen en het incorporeren van geschikte randcondities in het model.

Het elimineren van ongewenste storingen kan o.a. plaatsvinden door de rotatie-operator $\nabla \wedge$ op de horizontale bewegingsvergelijkingen toe te passen. Hierdoor verdwijnt de directe drukafhankelijkheid uit de vergelijkingen. Doet men dit nl. niet, en wil men toch de ongewenste storingen, bijv. de zwaartekrachtsgolven, elimineren, dan is de voor de hand liggende methode om dit te bereiken, nl. het invoeren van de geostrofische approximatie, ontoelaatbaar aangezien immers in de primitieve vergelijkingen bij geostrofische wind de versnelling van Coriolis en de gradiëntkracht elkaar neutraliseren. De versnelling wordt dan identiek gelijk aan 0, m.a.w. er treden in het geheel geen veranderingen op!

Na toepassing van de rotatie-operator kan men nog twee wegen inslaan. In de eerste plaats kan men veronderstellen, dat de atmosfeer barotroop is. Deze veronderstelling impliceert in zijn meest strikte vorm, dat de atmosfeer autobarotroop is, d.w.z. dat er geen thermische wind aanwezig is. Men kan deze onrealistische veronderstelling enigszins verzachten door wel een thermische wind toe te laten maar deze in ieder niveau parallel te laten waaien aan de totale (geostrofische) wind.

Dit leidt tot de windbetrekking $\vec{V}(x, y, p, t) = A(p) \vec{V}(x, y, p, t)$ waarbij $A(p)$ een skalar is die uitsluitend van de druk afhankelijk wordt gesteld. De waarde van $A(p)$ kan geacht worden van de grond tot het niveau van maximum wind groter dan 1 te zijn en ergens boven dit laatste niveau weer kleiner dan 1 te worden. Substitutie van deze uitdrukking voor $\vec{V}(x, y, p, t)$ en integratie van p_0 , de gronddruk tot $p = 0$, de rand van de atmosfeer, levert dan een vergelijking voor de beweging in een gemiddeld drukvlak waarvoor als goede benadering het 500 mb-vlak kan worden gekozen. Deze vergelijking is formeel geheel gelijk aan die, welke ten grondslag ligt aan het zuiver barotrope model. Men spreekt in het onderhavige geval van de equivalent-barotrope atmosfeer. Op zich zelf is deze benadering, die o.a. ten grondslag ligt aan het Amerikaanse barotrope voorspelsysteem, in vele gevallen fysisch betrekkelijk realistisch. Immers, met name voor omvangrijke druksystemen, zoals bijv. het Azoren-hogedrukgebied, geldt dat isohypsen en diktelijnen (een indicatie voor de temperatuurverdeling) ongeveer parallel lopen hetgeen ook evenwijdigheid van wind en thermische wind impliceert. Het blijft echter de vraag of de introductie van een $A(p)$ die niet afhangt van x , y of t niet voor een belangrijk deel verantwoordelijk moet worden geacht voor de onvolkomen resultaten, die het equivalent-barotrope model veelal geeft.

Zonder twijfel is er echter nog een ander tekort aan te wijzen in dit model, een tekort dat essentieel is voor de benadering.

In situaties met sterke ontwikkeling, bijv. bij het uitdiepen van depressies, zal potentiële energie worden omgezet in kinetische energie, ongeveer volgens het patroon dat het eerst door Margules is aangeduid. Bij dergelijke omzettingen zal de stroming niet langer evenwijdig kunnen zijn aan de diktelijnen en zal dus m.a.w. de relatie $\vec{V}(x,y,p,t) = A(p) \vec{V}(x,y,p_0,t)$ niet langer geldig zijn. Men vervangt deze relatie dan door de algemenere: $\vec{V}(x,y,p,t) = \vec{V}(x,y,t) + A(p) \vec{V}_p(x,y,t)$. De verdere procedure houdt dan weer een beperking in en wel deze, dat de vergelijking voor \vec{V} niet voor ieder willekeurig niveau wordt behandeld maar laagsgewijs. Men kan nu zowel de rechtstreekse invloed van de advectie van dikte in aanmerking nemen alsook de verticale bewegingen, die een gevolg zijn van deze advectie.

Een en ander zal in het hoofdstuk over de barokliene voorspelmetho-
dieken nader worden uitgewerkt.

HOOFDSTUK I

DE BAROTROPE ROUTINEVOORSPELLING, DIE TOT DUSVERRE DOOR DE NWP UNIT
IN SUITLAND WERD OPGESTELD

1. Het barotrope model

We gaan uit van de bewegingsvergelijkingen in vectorvorm:

$$\frac{d\vec{v}_3}{dt} = - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_3 + \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla_3 p + \vec{F}_3 \quad (1)$$

waarin de symbolen de gebruikelijke betekenis bezitten. (De index 3 geeft aan dat het hier om een drie-dimensionale beweging gaat). We beschouwen voortaan uitsluitend de beide horizontale componenten van de bewegingsvergelijkingen en kunnen daarmee afzien van \vec{g} . \vec{F}_3 wordt eveneens in eerste instantie verwaarloosd. De term in het linkerlid gaat dan over in $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla + \omega \frac{\partial}{\partial j}\right) \vec{v}$ waarbij ω de verticale snelheid is in een x,y,p-stelsel, waarbij \vec{v} nu verder de horizontale snelheidsvector voorstelt en $\nabla = \left\{ \vec{i} \frac{\partial}{\partial x}, \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ is. $\frac{1}{\rho} \nabla_3 p$ wordt met behulp van de statische grondvergelijking getransformeerd tot $g \nabla z$ waarbij z de hoogte van het p-vlak is.

De bewegingsvergelijking wordt hierdoor gereduceerd tot

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + f (\vec{k} \wedge \vec{v}) = - g \nabla z \quad (2)$$

waarbij $f \vec{k}$ de verticale component van de Coriolisparameter is en $f = 2 \omega \sin \varphi$, verder als een skalar wordt beschouwd. Deze vergelijking (2) is een voldoende benadering behoudens voor zeer lage breedte waar in de Coriolisparameter de component met $\cos \varphi$ een rol kan gaan spelen en behoudens het feit dat de wrijving is verwaarloosd. Op dit laatste punt zal nog nader worden teruggekomen.

Uitgaande van de veronderstelling dat de verticale component van de vorticititeit een conservatieve eigenschap is van het aldus gedefinieerde stromingsveld, wordt op (2) de operator $\nabla \wedge$ toegepast hetgeen als bijkomstig voordeel heeft dat het rechterlid nul wordt. We beschouwen

de verschillende termen van (2) achtereenvolgens

$$\nabla \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla \wedge \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial p} \right) \quad (3)$$

De eerste term in het rechterlid van (3) geeft $\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}$, waarbij $\vec{\xi} = \nabla \wedge \vec{v}$, de vorticheit is; $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ (zonder pijl) en ξ (zonder pijl) zijn hiervan de verticale componenten.

Voor de tweede term geldt, gebruikmakende van de bekende formule

$$\nabla \frac{v^2}{2} = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{\xi}$$

dat

$$0 = \nabla \wedge \left(\nabla \frac{v^2}{2} \right) = \nabla \wedge (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) + \nabla \wedge (\vec{v} \wedge \vec{\xi})$$

zodat

$$\begin{aligned} \nabla \wedge (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) &= -\nabla \wedge (\vec{v} \wedge \vec{\xi}) = \nabla \wedge (\vec{\xi} \wedge \vec{v}) = \vec{\xi} \nabla \cdot \vec{v} - \vec{v} \nabla \cdot \vec{\xi} = \\ &= \vec{\xi} \nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (\vec{\xi} \vec{v}) \quad \text{daar} \quad \nabla \cdot \vec{\xi} \equiv 0 \end{aligned}$$

Voor de derde term schrijven we voorlopig $\nabla \wedge \omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial p}$

Vervolgens passen we $\nabla \wedge$ toe op $f (\vec{k} \wedge \vec{v})$ hetgeen geeft

$$\nabla \wedge (\vec{k} f \wedge \vec{v}) = -(\nabla \cdot \vec{k} f) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{k} f = \nabla \cdot (\vec{k} f \vec{v})$$

omdat $\nabla \cdot (\vec{k} f) \equiv 0$.

Ten slotte geldt $\nabla \wedge (g \nabla z) = 0$.

Met $\vec{\xi} = \vec{k} \xi$ en $\xi + f = Q$ krijgen we dan

$$\vec{k} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{k} \nabla \cdot (Q \vec{v}) + \left(\nabla \wedge \omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial p} \right) = 0$$

of na skalare vermenigvuldiging met \vec{k} :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \cdot (Q \vec{v}) + \vec{k} \cdot \left(\nabla \wedge \omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial p} \right) = 0 \quad (4)$$

Uitwerken van de ∇ operator geeft

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla Q + Q \nabla \cdot \vec{v} + \vec{k} \cdot \left[\nabla \omega \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial p} + \omega \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial p} \right] = \\ & = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla Q + Q \nabla \cdot \vec{v} + \omega \frac{\partial Q}{\partial p} + \vec{k} \cdot \left[\nabla \omega \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial p} \right] = 0 \end{aligned}$$

(want $\frac{\partial \xi}{\partial p} = \frac{\partial(\xi + f)}{\partial p}$)

of

$$\boxed{\frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla Q + \omega \frac{\partial Q}{\partial p} + \vec{k} \cdot \left[\nabla \omega \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial p} \right] = - Q \nabla \cdot \vec{v}} \quad (5)$$

Dit is ten slotte de vergelijking voor de lokale verandering in ξ , die de basis is voor de barotrope numerieke weersvoorspellingen.

De termen kunnen als volgt worden geïnterpreteerd:

De lokale verandering van vorticiiteit (eerste term) hangt samen met de horizontale vorticiiteitsadvectie (2e term), de verticale vorticiiteitsadvectie (3e term), het omzetten van horizontale vorticiiteitscomponenten in de verticale component (4e term) en de divergentie (rechterlid). Zie voor een andere afleiding o.a. Thompson, Numerical Weather Analysis and Prediction, Hoofdstuk 7 [3], waarbij een meer correcte weg is gevolgd doordat rekening is gehouden met het verticale verloop van de wind, d.w.z. dat de in de inleiding genoemde equivalent barotrope redenering is toegepast. De hier gegeven vorm van de voorspelvergelijking vindt men in Hoofdstuk 9.

Vergelijking (5) laat zich nog op verschillende wijzen modificeren. In de eerste plaats heeft men geconstateerd, dat $\omega \frac{\partial Q}{\partial p}$, de term die de verticale advectie van vorticiiteit representeert en de laatste term van het linkerlid, de z.g. tilting term, elkaar vrijwel opheffen. Daarom - en ook omdat met name de tilting term moeilijk is te bepalen - laat men beide veelal weg. Een en ander is nader uitgewerkt door Årnason en Carstensen [4] met betrekking tot een twee-lagen model.

Voor de term $- Q \nabla \cdot \vec{v}$ in het rechterlid kan men op grond van de continuïteit ook schrijven $+ Q \frac{\partial \omega}{\partial p}$. Hiermee wordt de prognostische vergelijking waar men in Suitland van uitgaat ten slotte:

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla Q - Q \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0} \quad (6)$$

Bij een iets grovere benadering volstaat men met de eerste twee termen en ziet dus af van variaties in ω . Dit betekent dus dat $\text{div } \vec{v}$ wordt verwaarloosd. Het is in de praktijk echter gebleken, dat deze op zich zelf konsekwente verwaarlozing (zie paragraaf 2 hieronder) tot niet aanvaardbare resultaten leidt.

2. Balansvergelijking

Aangezien men bij de berekening uitgaat van het z-veld dienen Q en dus \vec{v} in dit z veld te worden uitgedrukt. De eenvoudigste methode is daarbij die waarbij \vec{v} wordt opgevat als de geostrofische wind. In dat geval geldt:

$$\vec{v}_g = \frac{g}{f} [\vec{k} \wedge \nabla z]$$

en $\zeta_g = \frac{g}{f} \nabla^2 z$, waarbij dus van de afhankelijkheid van f van de geografische breedte is afgezien. Men zou in dit geval de stroming kwasi-geostrofisch kunnen noemen.

Een betere benadering vinden we met behulp van de z.g. balansvergelijking.

Wij stellen daartoe $\vec{v} = \vec{v}_g + \vec{v}_p$ waarbij \vec{v}_g dat gedeelte van de snelheid is, dat een stroomfunctie ψ bezit en dat dus divergentievrij is, terwijl \vec{v}_p kan worden beschreven met behulp van een potentiaalfunctie χ en dus rotatievrij is. Wij krijgen zo:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{k} \wedge \nabla \psi + \nabla \chi} \quad (7)$$

of in componenten:

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

ζ is dan gegeven door

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \nabla^2 \psi,$$

en de horizontale divergentie door $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \nabla^2 \chi$

Past men de divergentie operator ∇ . toe op de vergelijking voor de horizontale beweging

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + f (\vec{k} \wedge \vec{v}) = -g \nabla z \quad (2)$$

dan krijgt men

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{v}) + \nabla \cdot [\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}] + \nabla \cdot (\omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial p}) + \nabla \cdot [f (\vec{k} \wedge \vec{v})] = -g \nabla^2 z \quad (8)$$

Bij uitschrijven blijkt het volgende:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}] &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \\ &+ u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned}$$

terwijl daarnaast geldt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(\nabla \cdot \vec{v}) \vec{v}] &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \\ &+ u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Uit vergelijking van beide ontwikkelingen blijkt:

$$\nabla \cdot [\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}] = \nabla \cdot [(\nabla \cdot \vec{v}) \vec{v}] - 2 \mathcal{J}(u, v) \quad (9)$$

waarbij $\mathcal{J}(u, v) \equiv \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$

De zin van deze transformatie is gelegen in het feit, dat de divergentie van de horizontale snelheid, $\nabla \cdot \vec{v}$, in het algemeen een grootte-orde kleiner is dan de vorticititeit (maximaal 10^{-5}sec^{-1} tegen maximaal 10^{-4}sec^{-1}). De omvorming stelt ons dus in staat een gedeelte van de oorspronkelijke term $\nabla \cdot [\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}]$ te verwaarlozen.¹⁾

Gebruik makend van de splitsing van \vec{v} in een divergentievrij en een rotatievrij gedeelte krijgen wij verder:

$$\nabla \cdot \left(f [\vec{k} \wedge \vec{v}] \right) = \nabla \cdot \left[f (\vec{k} \wedge \vec{k} \wedge \nabla \psi + \vec{k} \wedge \nabla \chi) \right] = -f \nabla^2 \psi - \nabla f \cdot \nabla \chi$$

1) Om dezelfde reden wordt verder ook de eerste term in vergelijking (8) verwaarloosd.

Voorts geldt in verband met $u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$ en $v = +\frac{\partial\psi}{\partial x}$ nog, dat

$$\begin{aligned} J(u, v) &= \left[\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial\psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial\psi}{\partial y} \right) \right] = \\ &= J \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Ten slotte vinden wij, wanneer we nog de term met ω verwaarlozen:

$$\boxed{g \nabla^2 z = f \nabla^2 \psi + 2 J \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) + \nabla f \cdot \nabla \psi} \quad (10)$$

Dit is de balansvergelijking, die het verband geeft tussen de velden van de geopotential gz en van de stroomfunctie ψ . Weglating van de tweede en de derde term in het rechterlid resulteert in

$$\vec{v} = \frac{g}{f} \left[\vec{k} \wedge \nabla z \right],$$

de geostrofische wind.

De term $2 J \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y} \right)$ houdt verband met de kromming van de stroomlijnen (of van de isohypsen), de laatste term met de afhankelijkheid van f van de geografische breedte.

Kuo [14] heeft aangetoond, dat de oplossing van de balansvergelijking voor het speciale geval dat de beweging eenparig verloopt langs cirkelvormige isohypsen identiek is met de gradiëntwindbenadering. Bij eenzelfde afstand van de isohypsen correspondeert dus in de balansvergelijking een hogere windsnelheid met anticyclonaal gekromde isohypsen dan met cyclonaal gekromde. De geostrofische benadering maakt zoals bekend geen onderscheid tussen anticyclonaal en cyclonaal gekromde isohypsen. Hiermede is in overeenstemming dat men met modellen waarin de balansvergelijking niet wordt toegepast, maar de geostrofische benadering wordt gebruikt, de ervaring heeft opgedaan, dat in de prognoses te intensieve hogedrukgebieden en te slappe lagedrukgebieden worden voorspeld bij een overigens redelijk correcte windprognose. Het gebruik van de balansvergelijking leidt dus tot het onderdrukken van het verschijnsel van "spurious anticyclogenesis" dat wordt waargenomen in modellen met geostrofische benaderingen.

3. De invloed van de orografie

De barotrope voorspelvergelijking (6) wordt nu nader gemodificeerd. Deze modificatie hangt in hoofdzaak samen met de uitwerking van de term $-Q \frac{\partial \omega}{\partial p}$. We willen er nogmaals op wijzen, dat de gelijktijdige handhaving van $Q \frac{\partial \omega}{\partial p}$ en de introductie van de stroomfunctie ψ in feite een inkonsekwentie betekent, die slechts door de resultaten achteraf wordt gerechtvaardigd.

De verticale snelheid ω wordt in eerste instantie geacht uit twee componenten te bestaan, een component die door de terreingesteldheid wordt geïnduceerd en een die van dynamische oorsprong is.

Indien wij veronderstellen, dat de verticale snelheid op de grond geheel moet worden toegeschreven aan de orografie, hebben wij

$$\omega_g = \vec{v}_g \cdot \nabla p_g$$

waarbij de index g slaat op het grondniveau waar een druk p_g heerst. Nemen we verder als benadering aan, dat de terreinvloed gelijkmatig naar nul gaat bij nadering van de "rand van de atmosfeer", dan geldt voor de bijdrage van het terrein tot de divergentie in het equivalente barotrope niveau:

$$-\frac{\partial \omega_g}{\partial p} \approx -\frac{\vec{v}_g \cdot \nabla p_g}{p_0}$$

waarbij $p_0 = 1000$ mb kan worden gesteld.

Later heeft Cressman, op grond van het feit dat het op deze wijze bepaalde orografische effect kennelijk te klein uitviel, een verbetering aangebracht, o.a. door $\frac{\vec{v}_g \cdot \nabla p_g}{p_0}$ te vervangen door $\frac{\vec{v}_g \cdot \nabla p_g}{p_g - p_t}$, waarin

p_t de druk aan de tropopause voorstelt, ongeveer 200 mb. Voor \vec{v}_g zette hij verder $\vec{v} \left[1 - 0,8 \left(\frac{p_g - 50}{50} \right) \right]$ waarbij de drukken zijn uitgedrukt in cb. Ook dit geeft nog een geringe verbetering t.o.v. de oorspronkelijk ingevoerde betrekking $\vec{v}_g = 0,2 \vec{v}$ die in de volgende paragraaf zal worden gebruikt.

Overeenkomstige correcties kunnen worden aangebracht voor de invloed van de wrijving op het verticale bewegingsveld en die van de temperatuur van het aardoppervlak. Aangezien het hier in het algemeen kleine correcties betreft zullen we eerst aandacht schenken aan de belangrijke dynamische bijdrage tot $\frac{\partial \omega}{\partial p}$.

4. Vertikale bewegingen van dynamische oorsprong, thermodynamisch verklaard

De dynamische component van de verticale beweging kan op twee manieren worden bepaald en wel in de eerste plaats met behulp van thermodynamische beschouwingen (Wiin-Nielsen [5]) en in de tweede plaats door te eisen dat geen ongewenste golfbeweging ontstaat aan de grens van troposfeer en stratosfeer (Cressman [6])

Wij geven hier allereerst de afleiding van Wiin-Nielsen, die iets simpeler is en bovendien de gelegenheid biedt de thermodynamische aspecten van de numerieke verwachtingsmethode en de equivalente barotrope veronderstellingen nader in beschouwing te nemen.

De equivalente barotrope veronderstelling kan worden geschreven als:

$$\vec{v}(p) = A(p) \vec{v}^* \quad \text{met} \quad \frac{dA}{dp} = \text{const}$$

waarbij de ster het barotroop equivalente niveau aangeeft, waarvoor men meestal gemakshalve 500 mb neemt. Er zij op gewezen dat de onderstelling $\frac{dA}{dp} = \text{const.}$ natuurlijk slechts tot een beperkte hoogte, in feite tot het niveau van maximum wind en dan nog slechts bij benadering correct is.

De equivalent barotrope veronderstelling als geheel impliceert, dat de thermische wind evenwijdig waait aan de wind zelf hetgeen betekent, dat geen warmteadvectie kan plaatsvinden.

Combinatie van de statische grondvergelijking

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha$$

met $\phi = gz$ en α het specifiek volume en de adiabatische vergelijking

$$\frac{d\theta}{dt} = 0$$

met $\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p}$ = de potentiële temperatuur, geeft in het algemeen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + \frac{\omega}{\theta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial p} \right) = 0 \quad (11)$$

Immers, volgens $\frac{d\theta}{dt} = 0$ geldt:

$$\frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{\partial \ln \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \ln \theta + \omega \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} = 0$$

en uit de definitie van θ volgt:

$$\ln \theta = \ln \alpha + \frac{c_p}{c_v} \ln p + \text{cst.}$$

Bij differentiatie naar t , x en y blijft p constant en dus geldt:

$$\frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{\partial \ln \alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \ln \alpha + \omega \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} = 0$$

of, na vermenigvuldiging met $\alpha = -\frac{\partial \phi}{\partial p}$ de vergelijking (11)

Bij het ontbreken van horizontale advectie krijgen wij

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + \sigma \omega = 0} \quad (12)$$

waarbij $\sigma = \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial \ln \theta}{\partial p} \right)$ een maat is voor de hydrostatische stabiliteit.

$\theta = \text{cst}$ met de hoogte geeft $\sigma = 0$.

Als benadering stelt Wiin - Nielsen nu

$$\vec{v} = \frac{1}{f} \vec{k} \wedge \nabla \phi = \frac{A}{f} \vec{k} \wedge \nabla \phi^*$$

Voorts geldt op grond van de barotropie:

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = \frac{dA}{dp} \phi^*$$

en dus

$$\omega = -\frac{1}{\sigma} \frac{dA}{dp} \frac{\partial \phi^*}{\partial t} = -\frac{f_0}{\sigma} \frac{dA}{dp} \frac{\partial \psi^*}{\partial t}$$

waarbij de stroomfunctie voor het equivalente barotrope niveau gegeven is door $\psi^* = \frac{\phi^*}{f_0}$. De stroming is dus weer kwasi-geostrofisch in verband met de constant genomen f_0 .

Om nu $\frac{\partial \omega}{\partial p}$ te vinden moet $\frac{\partial \sigma}{\partial p}$ nog bekend zijn.

$$\begin{aligned} \sigma &= -\alpha \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial p} = +\frac{RT}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left[\ln \alpha + \frac{c_v}{c_p} \ln p + \text{cst} \right] \frac{\alpha}{g} = \\ &= \frac{R^2 T^2}{p^2 g} \frac{\partial}{\partial z} \left[\ln \frac{RT}{p} + \frac{c_v}{c_p} \ln p \right] = \frac{R^2 T^2}{p^2 g} \left[\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{c_v}{c_p} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{R^2 T^2}{p^2 g} \left[-\frac{\gamma}{T} + \frac{1}{p} \left(\frac{c_v}{c_p} - 1 \right) \left(-\frac{g p}{RT} \right) \right] = \frac{R^2 T}{p^2 g} \left[-\gamma + \frac{g}{c_p} \right] = \frac{RT}{p^2} \frac{\gamma_d - \gamma}{\gamma_a}$$

waarbij $\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}$, de heersende temperatuurgradiënt, γ_d de droog-adiabatische gradiënt $\equiv \frac{g}{c_p}$ en γ_a de autoconvectiegradiënt $\equiv g/R$ is.

Differentiatie naar p geeft

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial p} &= -\frac{2RT}{p^3} \left[\frac{\gamma_d - \gamma}{\gamma_a} \right] + \frac{R}{p^2} \left[\frac{\gamma_d - \gamma}{\gamma_a} \right] \frac{\partial T}{\partial p} = \\ &= -\frac{2RT}{p^3} \left[\frac{\gamma_d - \gamma}{\gamma_a} \right] + \frac{R}{p^2} \left[\frac{\gamma_d - \gamma}{\gamma_a} \right] (-\gamma) \frac{\partial z}{\partial p} = \\ &= -\frac{2RT}{p^3} \left[\frac{\gamma_d - \gamma}{\gamma_a} \right] + \frac{RT}{p^3} \left[\frac{\gamma_d - \gamma}{\gamma_a} \right] \frac{\gamma}{\gamma_a} \end{aligned}$$

Aangezien onder normale omstandigheden $\gamma \sim 0,65$ °C/100 m en $\gamma_a = 3,42$ °C/100 m bedraagt, is de eerste term van de uitdrukking voor $\frac{\partial \sigma}{\partial p}$ in absolute zin een factor 10 groter dan de tweede.

Als goede benadering geldt derhalve in de buurt van p :

$$\sigma = \frac{RT}{p^2} \left[\frac{\gamma_d - \gamma}{\gamma_a} \right] = \sigma^* \left(\frac{p}{p^*} \right)^2 \quad \text{en} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial p} = -\frac{2\sigma^* (p^*)^2}{p^3}$$

En dus

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_{p^*} &= \frac{f_0}{\sigma^2} \frac{dA}{dp} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial p} = -\frac{2 f_0 p^4}{(\sigma^*)^2 (p^*)^4} \frac{dA}{dp} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\sigma^* (p^*)^2}{p^3} \approx \\ &\approx \frac{2 f_0}{\sigma^* p^*} \left(-\frac{dA}{dp} \right) \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \end{aligned} \quad (13)$$

Vullen wij dit nu in in de reeds voor de orografie gemodificeerde vergelijking en laten we daarbij verder gemakshalve de boven ingevoerde ster weer weg, dan vinden we als prognostische vergelijking voor het equivalente barotrope niveau:

$$\boxed{(\nabla^2 - q \cdot q) \frac{\partial \psi}{\partial t} = -J(\psi, q) + a \cdot q J\left(\psi, \frac{p}{p_0}\right)} \quad (14)$$

In deze vergelijking hebben de termen de volgende betekenis:

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = \frac{\partial}{\partial t} Q.$$

$q = \frac{2f_0}{\sigma p} \left(-\frac{dA}{dp} \right)$ en de term $-q Q \frac{\partial \psi}{\partial t}$ is dus gelijk aan de oorspronkelijke term $-Q \frac{\partial \omega}{\partial p}$ in vergelijking (6) voor zover het althans de bijdrage van de dynamische component van ω betreft.

De eerste term in het rechterlid luidt

$$-J(\psi, Q) = - \left[\frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] = - \left[v \frac{\partial Q}{\partial y} + u \frac{\partial Q}{\partial x} \right] = - \vec{v} \cdot \nabla Q$$

en in de laatste term is $a = \left| \frac{\vec{v}}{\vec{v}} \right|$ (waar \vec{v} de snelheid in het barotrope niveau is) en $J\left(\psi, \frac{p_g}{p_0}\right) = \frac{\vec{v} \cdot \nabla p_g}{p_0}$. In de vorige paragraaf is er reeds op gewezen dat Cressman later nog een modificatie in de "gebergteterm" aanbracht.

In de hier gegeven vorm geldt dus $a Q J\left(\psi, \frac{p_g}{p_0}\right) = \frac{\partial \omega_g}{\partial p} Q$, de term die de invloed van de orografie op de beweging weergeeft.

Uit het voorgaande valt af te leiden, dat de term $-q Q \frac{\partial \psi}{\partial t}$ dus een reductie oplegt aan de ontwikkeling in het ψ veld, een reductie die samenhangt met de normaliter in de atmosfeer heersende stabiliteit. We zien hier een voorbeeld van de correcties, die op de meeste modellen dienen te worden toegepast, die men wellicht achteraf kan begrijpen, maar die toch gewoonlijk eerst uit de ervaring naar voren zijn gekomen. Zie hiervoor paragraaf 6.

Stelt men $a = 0.2$, hetgeen ongeveer van de goede orde is, dan wordt \vec{v} (1000 mb) = $0.2 \vec{v}$ (500 mb) of $\frac{dA}{dp} = -\frac{0.8}{500 \text{ mb}} = 0,016 \text{ cb}^{-1} = 0,016 \text{ m t}^{-1} \text{ s}^2$.

Uit $\gamma = 5^\circ/\text{km}$ (de waarde die Wiin-Nielsen aanvaardt) volgt verder

$$\sigma = \frac{R^2 T}{p^2 g} (\gamma_d - \gamma) = \frac{287^2 \cdot 252}{2500 \times 9,8} (0,0099 - 0,005) = 4,15 \text{ m}^4 \text{ t}^{-2} \text{ s}^2$$

Hiermee vinden wij ten slotte:

$$q = \frac{2f_0}{\sigma p} \left| -\frac{dA}{dp} \right| = \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 0,016}{4,15 \times 50} = 1,54 \times 10^{-8} \text{ m}^{-2} \text{ sec.}$$

qQ is dus ongeveer van de orde 10^{-12} m^{-2} . Het is duidelijk uit een globale vergelijking van ∇^2 en qQ , dat de reductieterm vooral een rol speelt bij

de lange golven. Voor een sinus-vormige golf in het $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ patroon met een golflengte van 4000 km wordt de maximale "waarde" van ∇^2 : $2,5 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-2}$. We komen hier nog op terug.

Inmiddels blijven hier toch nog vele vragen over. Zo nadert de correctieterm tot ∞ wanneer $\gamma \rightarrow \gamma_d$.

Het is daarom goed de correctieterm die aan ∇^2 wordt toegevoegd ook nog langs een andere weg te introduceren, nl. die welke door Cressman is gevolgd.

5. De verticale bewegingen van dynamische oorsprong, hydrodynamisch verklaard.

Cressman is bij de afleiding uitgegaan van het tankmodel van Phillips [7]. Daarbij heeft een geheel andere overweging gegolden dan bij de vorige afleiding, nl. deze, dat het noodzakelijk is om golven in de stratosfeer in zekere mate te onderdrukken.

Beschouw twee homogene onsamendrukbare vloeistoflagen met dichtheden ρ_1 en $\rho_2 < \rho_1$, begrensd door horizontale platen op $z = 0$ en $z = H$. Voor elk van beide vloeistoffen geldt:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + f \vec{k} \wedge \vec{v} = -\alpha \nabla p$$

en $\nabla \cdot \vec{v} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

Laat nu de bovenste plaat een van x , y en t afhankende druk uitoefenen in het niveau $z = H$, die we voorstellen door:

$$P(x, y, H, t) = \rho_2 g Z_2$$

We kunnen deze relatie interpreteren als een aanwijzing voor het feit, dat zich boven $z = H$ nog wel vloeistof bevindt die drukgradiënten in lagere niveaus veroorzaakt maar die in $z = H$ geen aanleiding tot verticale bewegingen geeft en daarom verder niet expliciet in beschouwing wordt genomen.

Laat verder $h(x, y, t)$ de hoogte zijn van het grensvlak tussen beide vloeistoffen, dan geldt:

$$p_2(x, y, z, t) = \rho_2 g Z_2 + \rho_2 g (H-z) \quad (15a)$$

$$p_1(x, y, z, t) = \rho_2 g Z_2 + \rho_2 g (H-h) + \rho_1 g (h-z) \quad (15b)$$

De gradiëntkrachten worden gegeven door:

$$-\alpha_2 \nabla p_2 = -g \nabla z_2$$

en

$$-\alpha_1 \nabla p_1 = - \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} g \nabla z_2 + g \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \nabla h \right] = -g \nabla z_1$$

waarbij wij op grond van (15b) stellen:

$$z_1 \equiv \xi z_2 + (1-\xi) h + (\xi H - z) \quad (16)$$

met $\xi = \frac{\rho_2}{\rho_1}$

z_1 en z_2 geven dus respectievelijk de topografie van drukvlakken in de onderste en bovenste vloeistof. In verband met de onderstelde homogeniteit en incompressibiliteit - een speciaal geval van barotropie - zijn de topografieën van de drukvlakken in elk van de twee vloeistoffen onafhankelijk van de hoogte. Dit moet dan ook blijken in het linkerlid van de bewegingsvergelijkingen en dus is de horizontale snelheid in elk van de twee lagen onafhankelijk van de hoogte en de continuïteitsvergelijking kan zonder meer worden geïntegreerd:

$$\int_H^h dw_2 = - \int_h^H \nabla \cdot \vec{v}_2 dz$$

$$\int_0^h dw_1 = - \int_0^h \nabla \cdot \vec{v}_1 dz$$

Daarmee geldt voor het grensvlak:

$$w_2(h) = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{v}_2 \cdot \nabla h = - (H-h) \nabla \cdot \vec{v}_2 \quad (17a)$$

$$w_1(h) = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla h = - h \nabla \cdot \vec{v}_1 \quad (17b)$$

Passen we nu de operator $\vec{k} \cdot \nabla \wedge$ toe op de bewegingsvergelijking, dan krijgen we weer

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla Q + Q \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

(vergelijk vergelijking (6) voor een beoordeling van de ingevoerde benaderingen).

Bij geostrofische approximatie van de vorticititeit vinden we voor de onderste laag met (17b):

$$\frac{g}{f} \nabla^2 \frac{\partial Z_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla Q_1 - \frac{Q_1}{h} \frac{dh}{dt} = 0 \quad (18)$$

Er worden nu twee veronderstellingen ingevoerd, die op zichzelf misschien niet principieel zijn, vermoedelijk ook een te enge beperking betekenen, maar die noodzakelijk zijn om vergelijking (18) beter hanteerbaar te maken.

In de eerste plaats wordt ondersteld dat de "laag" boven de vaste plaat op hoogte $z = H$ "inert" is, d.w.z. dat Z_2 nagenoeg constant is in de tijd. Er kunnen in de hogere lagen van de "stratosfeer" dus wel golven worden aangetoond maar hun verandering vindt zo langzaam plaats, dat van tijd-afgeleiden van Z_2 kan worden afgezien. Dit is dus de tweede functie van de invoering van de bovenste vaste begrenzing op $z = H$.

Uit (16) volgt dan:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{1-\xi} \frac{\partial Z_1}{\partial t}$$

Veronderstellen we nu in de tweede plaats dat de beweging in de benedenste vloeistoflaag evenwijdig is aan de contouren van het grensvlak, dus bijv. boven een rug van hoge druk ligt het grensvlak hoog en boven een vore van lage druk laag (of omgekeerd), dan geldt verder $\vec{v}_1 \cdot \nabla h = 0$.

Vergelijking (18) gaat dan over in:

$$\frac{g}{f} \nabla^2 \frac{\partial Z_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla Q_1 - \frac{Q_1}{1-\xi} \frac{1}{h} \frac{\partial Z_1}{\partial t} = 0 \quad (19)$$

Vergelijken wij (19) met de meest simpele barotrope vergelijking

$(\frac{g}{f} \nabla^2 \frac{\partial Z_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla Q = 0)$ dan zien we dat er een term is toegevoegd die $\frac{1}{h} \frac{\partial Z_1}{\partial t}$ bevat en die de divergentie representeert, zij het ook gereduceerd volgens de factor $\frac{1}{1-\xi} = \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2}$. De aanwezigheid van $\frac{1}{h} \frac{\partial Z_1}{\partial t}$ is een gevolg van

het feit, dat het grensvlak vrij kan bewegen, de reductie hangt samen met de aanwezigheid van de bovenste vloeistoflaag met $\rho_2 \neq 0$ en krijgt zijn simpele gedaante ten gevolge van de inertie van de stroming boven $z = H$.

Om deze correctie toe te passen op ons voorspelprobleem voeren we onder verdere weglating van de index 1 weer de benaderde geostrofische stroomfunctie

$$\psi = \frac{gZ}{f} \text{ in.}$$

Samen met het oude terrein-effect krijgen we:

$$\left(\nabla^2 - \frac{\mu}{\psi} Q \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \mathcal{J}(\psi, Q) + aQ \mathcal{J}\left(\psi, \frac{p_g}{p_0}\right) \quad (20)$$

Kennelijk geldt dus voor de nieuw ingevoerde grootheid

$$\frac{\mu}{\psi} Q \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{Q}{1-\xi} \frac{1}{h} \frac{\partial Z}{\partial t}$$

of

$$\frac{\mu}{\psi} \frac{1}{1-\xi} \frac{1}{h} \frac{f}{g}$$

$$\mu \equiv \frac{\bar{Z}}{h(1-\xi)} \quad \text{en met} \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{1-\xi} \frac{\partial Z}{\partial t}$$

$$\frac{\mu}{\bar{Z}} \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial t}$$

In deze betrekking is \bar{Z} de gemiddelde hoogte van het equivalente barotrope drukvlak (500 mb) en h de tropopausehoogte.

Het is niet mogelijk om μ exact te berekenen. Cressman vond empirisch $\mu = 4$. Hij deed dit door voor een tiental gevallen voor een 1977-puntsrooster, dat het gehele noordelijke halfrond besloeg, de RMS afwijking te bepalen van een 48-uurs voorspelling t.o.v. het werkelijk opgetreden patroon. Figuur 1 geeft het resultaat.

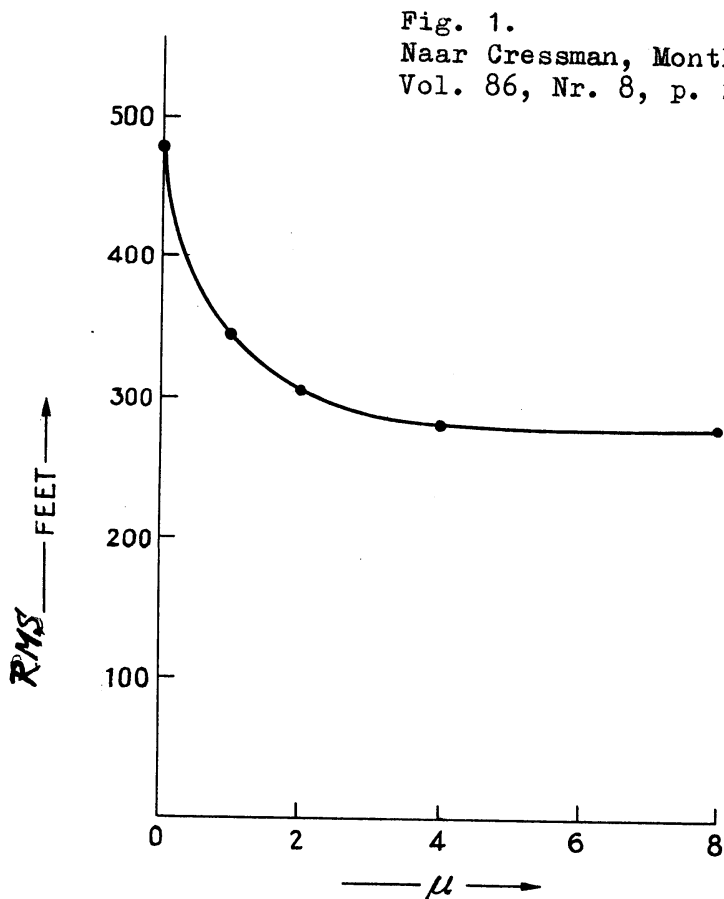


Fig. 1.
Naar Cressman, Monthly Weather Review,
Vol. 86, Nr. 8, p. 296.

Vergelijking van (20) met (14) geeft

$$\mu = q \bar{\psi} = \frac{1,54 \times 10^{-8} \times 9,80 \times 5,57 \times 10^3}{10^{-4}}$$

$$\frac{\text{m}^{-2} \text{sec m sec}^{-2} \text{m}}{\text{sec}^{-1}} = 8,5$$

waarbij q dus de constante is die bij de afleiding van Wiin-Nielsen te voorschijn komt. De experimenten van Cressman hebben, zoals uit fig. 1 blijkt, aangetoond, dat de resultaten van berekeningen met μ variërend van 4 tot 8 ongeveer equivalent zijn. Men neemt in Suitland voor de routine-barotropische voorspelling $\mu = 4$.

Hierbij dient nog te worden opgemerkt, dat de waarde van q niet erg vast ligt.

Een waarde 0,0065 voor δ welke in de omgeving van het 500 mb-vlak een betere benadering lijkt, zou tot gevolg hebben dat $\sigma = 2,9 \text{ m}^4 \text{ t}^{-2} \text{ s}^2$ zou worden en $q = 2,2 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \text{ sec}$, waaruit volgt $\mu \approx 12$, een nog grotere discrepantie.

Anderzijds is σ geïntroduceerd om het totale effect van de stabiliteit op verticale versnellingen af te tasten. Zou men een gemiddelde $\delta = 0,003 \text{ }^\circ\text{C/m}$ invoeren en daarmee rekening houden met het althans tot een bepaald niveau meestrillen van de stratosfeer, dan zou men vinden: $q = 1,1 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \text{ sec}$ en $\mu = 6$.

Zou men $a = 0,25$ stellen i.p.v. 0,2, dan was $\frac{dA}{dp} = -\frac{0,75}{50} = 0,015 \text{ cb}^{-1}$, hetgeen μ zou reduceren tot 5,6.

Ook is $p = 600 \text{ mb}$ waarschijnlijk een betere benadering voor de druk in het equivalent-barotrope niveau, hetgeen leidt tot

$$\mu = q \bar{\psi} = \frac{\frac{5}{6} \times 1,54 \times 10^{-8} \times 9,8 \times 4,2 \times 10^3}{10^{-4}} = 5,3,$$

waarbij dus verder geen correctie voor δ of $\frac{dA}{dp}$ is aangebracht. Zou men bij deze redenering δ iets reduceren dan zou de door Cressman empirisch gevonden waarde 4 worden benaderd.

Globaal gesproken kan men dus zeggen dat beide wijzen van aanpak tot dezelfde correctie leiden ondanks het feit, dat bij de ene afleiding de stabiliteit en de thermodynamica zijn geïntroduceerd terwijl bij de andere slechts resultaten uit de leer der incompressibele vloeistoffen zijn vertaald.

Beide benaderingen leiden tot een reductie van de bewegingen in de atmosfeer, volgens de ene theorie ten gevolge van de stabiliteit, die over de gehele hoogte van de dampkring dezelfde wordt genomen, volgens de andere theorie door de dempende werking van de als discontinuïteit van de nulde orde gedachte tropopause. Ook hier dus een stabiliteit, zij het geconcentreerd in een enkel (in hoogte variabel) vlak.

Nemen wij in de betrekking $\mu \equiv \frac{\bar{z}}{h(1-\xi)}$, $\mu = 4$, $\bar{z} = 4200$ m (600 mb) en $h = 10.500$ m, dan volgt daaruit

$$\xi = \frac{\rho_2}{\rho_1} \approx 0,9,$$

een dichtheidssprong overeenkomend met een temperatuursprong van ~ 22 °C aan de tropopause. $\bar{z} = 5570$ m (500 mb) zou zelfs een nog iets grotere temperatuursprong betekenen.

Stelt men anderzijds de gemiddelde dikte van de troposfeer op 10 km en de dikte van de nog voor de beschouwing in aanmerking komende stratosfeer eveneens op 10 km, dan vindt men voor de verhouding van de gemiddelde dichtheden van troposfeer en stratosfeer ongeveer 0,29. Zelfs indien men de stratosferische laag slechts 1 km dik zou nemen zou men tot een $\xi \approx 0,5$ komen.

Zo blijft er theoretisch nog veel onduidelijk in deze min of meer intuïtieve correcties op het barotrope model. Bij zijn oordeel dient men voorts te bedenken, dat bij de verdere uitwerking de balansvergelijking te baat wordt genomen om het Z-veld in een ψ veld om te zetten, hetgeen in strijd is met de procedure die bij de afleiding van de correctietermen werd toegepast en waarbij de geostrofische approximatie werd gebruikt.

Overigens werd de hier beschreven correctie reeds in 1955 door BOLIN [8] aangegeven waarbij dient te worden opgemerkt dat Bolin in de mening verkeerde dat hij de "spurious anticyclogenesis", die optreedt in modellen waarin niet de balansvergelijking wordt gebruikt maar de geostrofische benadering (zie slot par. 2), hiermee kon onderdrukken. Dat de door Bolin voorgestelde correctie tot effect heeft het onderdrukken van retrograad lopende lange golven en dat het door hem beoogde onderdrukken van "spurious anticyclogenesis" door de balansvergelijking tot stand wordt gebracht is voor het eerst aangetoond door SHUMAN [15], nadat aanvankelijk nogal wat verwarring rondom Bolin's artikel had geheerst.

Bolin beschouwde evenals Cressman de troposfeer aan de in hoogte h variabele tropopause begrensd door een praktisch oneindig dikke, evenals

de troposfeer onsamendrukbare stratosfeer. Praktisch oneindig dik wordt de stratosfeer genomen om de geïnduceerde beweging in deze laag klein te houden. Hoe dikker de laag hoe geringer immers de bewegingen in deze laag zullen zijn als gevolg van hoogteveranderingen in de tropopause.

Er gelden nu de bewegingsvergelijkingen:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + f (\vec{k} \wedge \vec{v}) = - (1 - \xi) \nabla h$$

waar de symbolen dezelfde betekenis bezitten als vroeger.

Stel weer $\xi = \frac{(1-\xi)g}{f_0} \nabla^2 h$ waarbij f_0 weer constant wordt genomen.

Nu geldt weer als benadering

$$\frac{d}{dt} (\xi + f) = - (f + \xi) \nabla \cdot \vec{v} = + (f + \xi) \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}$$

waarbij slechts horizontale advectie in aanmerking wordt genomen of met verwaarlozing van ξ in het rechterlid:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1-\xi}{f_0} g \nabla^2 h \right) + \vec{v} \cdot \nabla Q = f_0 \frac{1}{h_0} \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla h \right]$$

of, aangezien wegens de geostrofische benadering $\vec{v} \cdot \nabla h = 0$ is:

$$(\nabla^2 - \lambda^2) \frac{\partial h}{\partial t} = - \nabla \cdot \nabla Q$$

waarin $\lambda^2 = \frac{f_0^2}{(1-\xi)gh_0}$, een resultaat dus, dat behoudens de vervanging van Q door f_0 gelijk is aan dat van Cressman. Bedoelde vervanging betekent op zichzelf wel dat Bolin's oplossing minder goede resultaten geeft.

6. Noodzaak voor de dynamische modificatie

De correcties, die in de barotrope voorspelvergelijking worden aangebracht, een vergelijking, die aangezien men een stroomfunctie als basis voor de voorspelling neemt - waarbij het niet ter zake doet of men deze uit de balansvergelijking afleidt of dat men simpelweg de geostrofische benadering aanvaardt - theoretisch gevoegelijk als

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla Q = 0$$

zou kunnen worden geschreven, hebben een diepere zin dan wellicht uit het voorgaande blijkt.

Met betrekking tot de invloed van de orografie op het stromingsveld laat zich de onontkoombaarheid van de aan te brengen correctie nog betrekkelijk gemakkelijk begrijpen. Immers, wij weten dat een verstoring in verticale richting aan het aardoppervlak met toenemende hoogte uitdempt, hetgeen noodzakelijk leidt tot een horizontale divergentie.

De correctieterm $\mu \frac{Q}{f} \frac{\partial \psi}{\partial t}$ heeft echter een betekenis die samenhangt met het golfkarakter dat aan de atmosferische storingen kan worden toegekend. Om dit in te zien schrijven wij de stroomfunctie voor het equivalente barotrope niveau als een superpositie van golven:

$$\psi(x, y, t) = -Uy + A \exp \{ ik(x-ct) \} \quad (21)$$

De zonale snelheid wordt dus constant verondersteld, een benadering, die voor het verdere betoog wel geoorloofd is.

We substitueren (21) in

$$\left\{ \nabla^2 - qf \right\} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -J(\psi, \nabla^2 \psi + f) \quad (22)$$

waarin van de orografieterm dus is afgezien en waarbij gelijk vroeger is gesteld $Q = \zeta + f = \nabla^2 \psi + f$. In de correctieterm is Q gereduceerd tot f , in overeenstemming met de oplossing van Bolin. Er is dus afgezien van termen van hoger dan de eerste graad in de storingsamplitude A .

We krijgen zo:

$$i k^3 c A e^{ik(x-ct)} + q f k i c A e^{ik(x-ct)} = - \left[+ \beta i k A e^{ik(x-ct)} + i k^3 A e^{ik(x-ct)} (-U) \right]$$

of

$$c = \frac{U - \beta/k^2}{1 + qf/k^2} \quad (23)$$

In (23) wordt β verder als constant beschouwd en heeft bijv. de waarde die geldt voor 45° .

Verder geldt $k = 2\pi/L$ waarbij L de golflengte is. Wanneer wij nu rekening houden met het feit, dat zich een geheel aantal zonale golven, N , rond de aarde moet bevinden: $2\pi R \cos y = N.L$, kunnen wij verder schrijven:

$$k = \frac{N^2}{R^2 \cos^2 y}$$

Met
$$\beta = 2 \Omega \frac{\cos y}{R}$$

krijgen we ten slotte:

$$c = \frac{U - 2 \Omega R \cos^3 y / N^2}{1 + 2 \Omega q R^2 \cos y \sin y / N^2} \quad (24)$$

Voor $q = 0$, d.w.z. bij weglating van de correctieterm vinden wij de elementaire snelheidsformule van Rossby. Voor $2 \Omega R \cos^3 y / N^2 > U$ worden de golven retrograad, hetgeen in strijd is met de ervaring en leidt tot het mislukken van de ongecorrigeerde barotrope voorspelling. De correctieterm reduceert vooral de (negatieve) snelheid van de lange golven.

Figuur 2 geeft het resultaat van de introductie van de correctieterm en wel voor 45° breedte by $U = 20 \text{ m sec}^{-1}$ en de waarden $q = 0, 0,75 \cdot 10^{-8}$ en $1,5 \cdot 10^{-8}$. Het blijkt, dat de laatste waarde, overeenkomend met $\mu \cong 8$, de retrograde snelheden het sterkst reduceert. Aangezien daarbij ook voor de progressieve golven de snelheidsreductie het grootst is, laat zich wel begrijpen dat Cressman de beste resultaten vond bij $q \cong 0,75$ ($\mu \cong 4$). Bovendien is de hier gegeven redenering niet meer dan een ruwe benadering van de werkelijkheid. Zo zien we in het afschatten van de correctie, die noodzakelijk is om de Rossby-snelheid te modificeren, het grote belang van de mogelijkheid om te experimenteren.

7. Verdere modificaties. Wrijving.

Behalve de twee belangrijke hiervoor besproken correcties op het meest eenvoudige barotrope model, de correcties die in Suitland worden toegepast, laten zich nog twee modificaties aangeven, die leiden tot een verbetering in de barotrope voorspelmethode. Het betreft hier de invloed van de wrijving en die van temperatuurgradiënten aan het aardoppervlak (warme en koude massa-effecten). De invloed van de wrijving is o.a. in beschouwing genomen door Cressman [9].

De componenten van de schuifspanning aan het aardoppervlak $\vec{T}_g (T_{gx}, T_{gy})$ kunnen worden gekoppeld aan het ageostrofische massa-transport (M_x, M_y) :

$$\begin{aligned} T_{gx} &= f M_y \\ T_{gy} &= -f M_x \end{aligned} \quad (25)$$

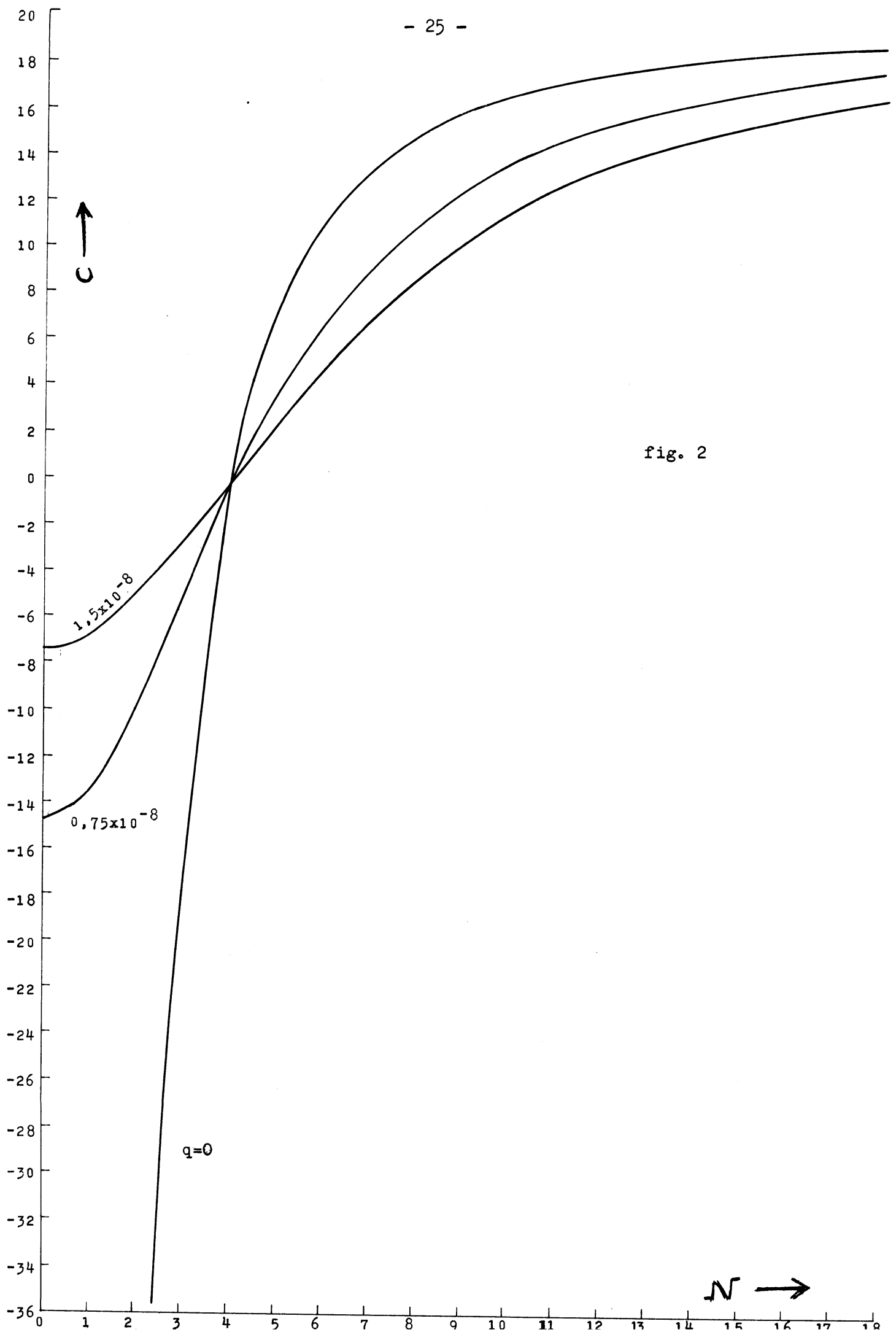


fig. 2

Immers, in de stationaire toestand (een benaderende veronderstelling uiteraard!) geldt wanneer \vec{V}_a de afwijking is van de geostrofische wind:

$$\vec{F} = \vec{k} f \wedge \vec{V}_a = \alpha \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z} \quad (26)$$

zoals onmiddellijk kan worden afgeleid uit de horizontale component van vergelijking (1). (Dat wil dus zeggen onder weglating van \vec{g} en de index 3). $\vec{\tau}$ is de schuifspanning op een willekeurig niveau.

Integreren we (26) van de grond waar $\vec{\tau} = \vec{\tau}_g$ tot de rand van de atmosfeer waar $\vec{\tau} = 0$, dan vinden wij

$$-\vec{\tau}_g = \vec{k} f \wedge \int_0^\infty \rho \vec{V}_a dz = \vec{k} f \wedge \vec{M}$$

hetgeen de vectorvorm is van (25).

Denken wij ons het massatransport beperkt tot de wrijvingslaag dan vinden wij op grond van de onsamendrukbaarheid van de atmosfeer aan de top van deze laag een verticale snelheid

$$\rho w_F = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}$$

of
$$\omega_F = \frac{dp_F}{dt} = w_F \frac{\partial p}{\partial z} = -g \left[\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right] = \frac{g}{f} \left[\frac{\partial \tau_{gx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{gy}}{\partial x} \right] \quad (27)$$

De vraag is nu op welke wijze $\vec{\tau}_g$ van de windsnelheid afhangt. Cressman nam als bruikbare relatie het o.a. door Lettau [10] voorgestelde verband:

$$\tau_g = c_d \rho V_F^2 \quad (28)$$

waarbij V_F de windsnelheid aan de top van de wrijvingslaag is of wel de geostrofische wind aan het aardoppervlak. C_d wisselt sterk met de stabiliteit van de atmosfeer maar aangezien het bij de barotrope voorspelling steeds gaat om periodes van enkele dagen waarin de stabiliteit sterk kan veranderen, wordt hiervan afgezien.

Wel is van belang voor de bepaling van C_d de invloed van de orografie. De "drag coefficient" wordt daarom in twee gedeelten gesplitst, C_1 die min of meer constant is en C_2 die de "form drag" van het reliëf van het aardoppervlak geeft en die met dit reliëf varieert. Er moge op worden gewezen dat het hierbij een ander effect betreft dan dat hetwelk is besproken in paragraaf 3.

Cressman heeft nu zijn verdere berekeningen gebaseerd op Sawyer [11]. Deze heeft de door een bergrug uitgeoefende extra wrijving in aanmerking genomen door het netto benedenwaartse impulstransport te beschouwen, dat een gevolg is van de zwaartekrachtsgolven die door de bergrug worden veroorzaakt.

Het lijkt nuttig de redenering van Sawyer hier weer te geven: In de eerste plaats zou het mogelijk zijn om af te zien van de aardrotatie bij de afleiding van C_2 indien de horizontale afmetingen van de terreinstoring minder dan 30 km bedragen.

Immers, men kan gemakkelijk inzien, dat de storingsvergelijkingen waarbij de storingsgrootheden door een accent zijn aangegeven, als volgt luiden:

$$U \frac{\partial u'}{\partial x} - f v' = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}$$

$$U \frac{\partial v'}{\partial x} + f u' = 0.$$

Differentiatie van de eerste vergelijking naar x en substitutie in de tweede geeft dan:

$$U \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{f^2}{U} v' = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \quad (29)$$

Heeft de storing een karakteristieke lengte L en zijn u' en v' van dezelfde orde, dan kan de tweede term t.o.v. de eerste worden verwaarloosd indien:

$$L^2 \ll \frac{U^2}{f^2}, \quad \text{dus bijv. } < \frac{U^2}{10f^2}$$

Met $U = 10 \text{ m sec}^{-1}$, een lage waarde, en $f = 1,1 \cdot 10^{-4}$ vinden wij zo $L < \sqrt{\frac{10^9}{1,21}} \cong 30000 \text{ m}$.

Er moet hierbij worden opgemerkt, dat 30 km niet veel is en het is aan twijfel onderhevig of Cressman Sawyer's verdere, op deze 30 km gebaseerde resultaten wel zonder meer mag toepassen op de Rocky Mountains en Tibet, zoals hij doet.

Volgens Scorer [12] is het geoorloofd om bij het probleem van de lijgolven een stroomfunctie ψ in te voeren, die de afwijking weergeeft van de stroomfunctie in de ongestoorde toestand en die gedacht kan worden te zijn samengesteld uit Fourier componenten $\psi_k e^{ikx}$, die bij benadering voldoen aan de vergelijking

$$\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial z^2} + (\ell^2 - k^2) \psi_k = 0 \quad (30)$$

waarbij $\ell = \left(\frac{g \partial \theta / \partial z}{U^2 \theta} \right)^{1/2}$ constant met de hoogte wordt verondersteld.

$\psi_k = A(k) e^{i(kx + \nu z)}$ met $\nu^2 = \ell^2 - k^2$ is een oplossing van deze vergelijking waarbij is voldaan aan de eis dat de energie van de golven met toenemende hoogte moet afnemen. (De kinetische energie is evenredig met de met de hoogte afnemende ρ en het reële deel van $e^{2i(kx + \nu z)}$).

Stellen wij het bodemprofiel voor door

$$H = (\text{reëel deel van}) \quad hb \int_0^\infty e^{ikx - kb} dk = \frac{hb^2}{x^2 + b^2},$$

dan is de stroomfunctie aan het aardoppervlak waar $z = 0$ wordt genomen, zodat de hoogte boven zeeniveau steeds $z + H$ bedraagt:

$$\psi_0 = (\text{reëel deel van}) U_0 \quad hb \int_0^\infty e^{ikx - kb} dk \quad \left(= \int_0^\infty \psi_0 k \, dk \right)_{\text{reëel}}$$

want $\frac{\partial \psi_0}{\partial x} = w_0 = U_0 \frac{\partial H}{\partial x}$.

Voor het grondniveau geldt dus

$$\begin{aligned} \psi_0 &= (\text{reëel deel van}) U_0 \quad hb \int_0^\infty e^{ikx - kb} dk \\ &= (\text{reëel deel van}) \int_0^\infty A(k) e^{i(kx + \nu z)} dk \\ &= (\text{reëel deel van}) \int_0^\infty A(k) e^{ikx} dk \end{aligned}$$

omdat het grondniveau gegeven is door $z = 0$.

Dus geldt:

$$A(k) = U_0 \quad hb \quad e^{-kb} \quad (31)$$

Substitutie in

$$\begin{aligned} \psi &= (\text{reëel deel van}) \int_0^\infty \psi_k dk \\ &= (\text{reëel deel van}) \int_0^\infty A(k) e^{i(kx + \nu z)} dk \end{aligned}$$

geeft ten slotte:

$$\Psi(z) = U_0 \text{hb} \left\{ \int_0^l e^{-kb} \cos \{ kx + \nu z \} dk + \int_l^\infty e^{-kb - (k^2 - l^2)^{1/2} z} \cos kx dk \right\}$$

Voor $z = 0$ worden de stoorsnelheden

$$w_0 = - \left(\frac{\partial \Psi(z)}{\partial z} \right)_0 = U_0 \text{hb} \left\{ \int_0^l \nu e^{-kb} \sin kx dk + \int_l^\infty (k^2 - l^2)^{1/2} e^{-bk} \cos kx dk \right\}$$

en

$$w_0 = U_0 \frac{\partial H}{\partial x} = U_0 \text{hb} \frac{d}{dx} \left[\frac{b}{b^2 + x^2} \right]$$

De totale "drag" op de lucht ten gevolge van de berg overeenkomend met τ maal een lengte, is nu gegeven door $-\rho \int_{-\infty}^{\infty} u_0 w_0 dx$ zijnde het benedenwaarts gerichte momentum transport. (Integratie over z kan achterwege blijven omdat de storingsenergie voor $z = \infty$ gelijk = 0 wordt).

Integratie geeft met $\nu^2 = l^2 - k^2$:

$$-\rho U_0^2 \text{hb}^2 \left\{ \int_0^\infty (l^2 - k^2)^{1/2} e^{-bk} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin kx \frac{d}{dx} \left(\frac{b}{b^2 + x^2} \right) dx dk + \int_l^\infty (k^2 - l^2)^{1/2} e^{-bk} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos kx \frac{d}{dx} \left(\frac{b}{b^2 + x^2} \right) dx dk \right\}$$

Nu geldt:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin kx \frac{d}{dx} \left(\frac{b}{b^2 + x^2} \right) dx = \\ &= \frac{b}{b^2 + x^2} \sin kx \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{bk \cos kx}{b^2 + x^2} dx \\ &= 0 - bk \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos kx}{b^2 + x^2} dx \end{aligned}$$

Stel $x = by$ dan krijgen we

$$J = -b^2 k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos kby}{b^2 + b^2 y^2} dy = -k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos kby}{1+y^2} dy = -\pi k e^{-kb}$$

Vervangen wij in J de sinus door een cosinus dan komt als eindresultaat $J = 0$.

Dus krijgen wij ten slotte:

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} u_0 w_0 dx = \pi \rho U_0^2 k^2 b^2 \int_0^l k (l^2 - k^2)^{1/2} e^{-2bk} dk \quad (32)$$

Numerieke berekening levert nu dat de "drag" gelijk is aan $0.11 \pi \rho U_0^2 h^2 l$ voor $b = \frac{1}{l}$ en dat bij toenemende breedte van de bergrug de waarde van de getallenfactor nadert tot 0,25. Voor $b = \frac{1}{l} = 2000 \text{ m}$, $k = 300 \text{ m}$, $\rho = 1,23 \times 10^{-3} \text{ ton m}^{-3}$ en $U_0 = 20 \text{ m sec}^{-1}$ vinden wij zo een "drag" van $7,6 \text{ ton sec}^{-2}$. Nemen we voor de onderlinge afstand van dergelijke ruggen 10 km, ongeveer overeenkomend met de structuur van de Appalachians, dan wordt de gemiddelde waarde van τ : $7,6 \times 10^{-4} \text{ ton m}^{-1} \text{ sec}^{-2}$ (= $7,6 \text{ dyne cm}^{-2}$ in de eenheden die Sawyer gebruikt). Uit vergelijking met $\tau = C_D \rho V_H^2$ volgt dan $C_2 = 0,15 \times 10^{-2}$.

Volgens Cressman geldt voor bergruggen, die 3 km hoog zijn en 80 km uit elkaar liggen, $C_2 = 0,85 \times 10^{-2}$, een waarde die zou kunnen gelden voor ruwe gebieden als de Rocky Mountains en Tibet (?).

Cressman schrijft voor de totale kracht die door een bergachtig gebied in een vierkant oppervlak met zijde d wordt uitgeoefend:

$$F = d^2 C_2 \rho V_H^2$$

De waarde van C_2 wordt gehaald uit hetgeen hieromtrent in de literatuur (inclusief het artikel van Sawyer) beschikbaar is:

- (a) bos en lage heuvels $C_2 = 0.1-0.2 \times 10^{-2}$
- (b) matig hoge bergen $C_2 = 0.2-0.5 \times 10^{-2}$
- (c) zeer hoge bergen $C_2 = 0.5-0.9 \times 10^{-2}$

Voor C_1 wordt als gemiddelde waarde 0.12×10^{-2} genomen en de verdeling van C_d over de aarde is dan gegeven door $C_d = C_1 + C_2$. Het berg-wrijvings-effect wordt dan op soortgelijke wijze in de barotrope voorspelvergelijking geïntroduceerd als dat van de verticale bewegingen in paragraaf 3.

Toen vonden wij (zie vergelijking (14) in paragraaf 4 en de in paragraaf 3 aangegeven nadere modificatie):

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{\text{bergen}} = a Q \left[\left(\psi, \frac{p_g}{p_0} \right) = \left| \frac{\vec{V}_g}{V} \right| Q \frac{\vec{V}_0 \cdot \nabla p_g}{p_0} \right],$$

respectievelijk:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{\text{bergen}} = Q \frac{V_g \cdot \nabla p_g}{p_g - p_t} = Q \frac{\omega_g}{p_g - p_t}$$

Nu schrijven wij:

$$\boxed{\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{\text{wrijving}} = Q \frac{\omega_F}{p_g - p_t}} \quad (33)$$

waarbij ω_F dus gelijk is aan de verticale snelheid ten gevolge van de wrijving aan de rand van de wrijvingslaag.

Uit $\omega_F = \frac{g}{f} \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right]$ volgt nu:

$$\omega_F = \frac{g}{f} \left[\frac{\partial}{\partial y} (C_d u \sqrt{u^2 + v^2}) - \frac{\partial}{\partial x} (C_d v \sqrt{u^2 + v^2}) \right] \quad (34)$$

waar u en v de componenten van V_F zijn in formule (28).

De door Cressman gebruikte barotrope voorspelvergelijking wordt zo ten slotte

$$\boxed{\frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \xi - \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_m + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_f = 0} \quad (35)$$

waarbij dus m en f de effecten van verticale beweging ten gevolge van gebergten en de invloed van de wrijving in de meest algemene zin, dus met $C_d = C_1 + C_2$ aangeven.

Toetsing in 10 gevallen waarbij een 48-uurs forecast werd gemaakt, gaf een gemiddelde RMS error in de wind van 24,1 knts en in de hoogte van het 500 mb-vlak van 285 ft tegen 25,2 en 311 wanneer de correctie niet werd toegepast.

8. Verdere modificaties. Dikte-advectie

In feite is de veronderstelling, dat dikte-advectie kan plaatsvinden in een atmosfeer die door het barotrope model kan worden beschreven, een contradictie. Immers, de equivalente barotrope veronderstelling

$$\vec{V}(p) = A(p) \vec{V}^*$$

impliceert dat de thermische wind en ook de "geostrofische wind" aan de grond zowel als in de hogere niveaus gelijke richting hebben en wel evenwijdig aan de diktelijnen.

Niettemin heeft men wel getracht om de invloed van dikte-advectie op het ψ -veld in de barotrope voorspelmethode te incorporeren en wel uitgaande van de beschouwingen van Sutcliffe en Forsdyke [13].

Volgens deze auteurs geldt:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{\text{advectief}} = -\vec{V}_{og} \cdot \nabla h \quad (36)$$

waarbij h de dikte is en \vec{V}_{og} de geostrofische wind op zeeniveau voorstelt. Immers, strikt genomen is

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{\text{advectief}} = -\frac{R}{g} \int_p^{p_0} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) d \log p \quad (37)$$

waarbij u en v de componenten zijn van $\vec{V} = \vec{V}_{og} + \vec{V}_{Tg}$ (afgezien van een in het algemeen kleine en moeilijk te bepalen ageostrofische windcomponent). \vec{V}_{Tg} is hier de geostrofische thermische wind, die niet tot de dikte-advectie bijdraagt.

Er geldt dus bij een horizontaal aardoppervlak en $\psi = \frac{gz}{f}$ in het drukvlak p ,

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{\text{adv.}} = -\frac{R}{f} \vec{V}_{og} \cdot \nabla \bar{T} \log \frac{p_0}{p} = -\frac{R}{f} a \log \frac{p_0}{p}](\psi, T_0) \quad (38)$$

waarbij T_0 de temperatuur aan de grond voorstelt, $\nabla \bar{T}$, de over de laag tussen p_0 en p gemiddeld aanwezige temperatuur-ascendent, gelijk is gesteld aan ∇T_0 en de factor a weer wordt ingevoerd om \vec{V} , de wind in het niveau p , die uitsluitend bekend is, om te zetten in \vec{V}_0 , de wind op zeeniveau.

Omdat het in de voorspelvergelijking gaat om $\frac{\partial Q}{\partial t} = \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t}$ kan de Laplace operator op de uitdrukking voor $\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{adv.}$ worden toegepast en krijgen wij in het rechterlid van de voorspelvergelijking:

$$\left\{ \frac{R}{f} a \log \frac{p_0}{p} \right\} \cdot J(Q-f, T_0).$$

Een volgende benadering komt men eveneens in de literatuur tegen: **Toegevoegd** moet worden de component van $Q \frac{\partial \omega}{\partial p}$, die samenhangt met dikte-advectie:

$$\omega = \frac{dp}{dt} = -g \rho \frac{\partial h}{\partial t} = + R \rho \left(\vec{v}_{og} \cdot \nabla T_0 \right) \log \frac{p_0}{p}$$

of met $p = cst = 500 \text{ mb}$,

$$Q = \frac{\partial \omega}{\partial p} = \frac{a R \rho}{p_0} Q J(\psi, T_0) = a \frac{Q}{T_0} J(\psi, T_0) = b Q J\left(\psi, \frac{T_0}{p_0}\right)$$

waarbij dus p_0 de gronddruk (1000 mb) is. In het m-t-sec stelsel is b dus ongeveer $1/250 a \approx 8 \times 10^{-4}$.

Men komt als benadering ook de uitdrukking

$$a \frac{f}{T_0} J(\psi, T_0)$$

tegen, bijv. in Khrabrov, A method of preparing weather forecasts for 3 to 7 days. Daarbij is Q dus vervangen door f op analoge wijze als dit door Bolin geschiedde.

HOOFDSTUK II

BAROKLIENE MODELLEN MET GEFILTERDE VERGELIJKINGEN

1. Inleiding

Dat het barotrope model belangrijke gebreken vertoont is theoretisch evident en wordt door de praktijk bevestigd. In de eerste plaats ontbreekt in het barotrope model de mogelijkheid van het voorspellen van "ontwikkeling". Het gewicht van deze kritiek mag echter niet worden overschat. Men kan het barotrope model opvatten als een rekenwijze, die benaderd gebaseerd is op het theorema van behoud van potentiële vorticiteit. In het barotrope model vindt geen creatie of annihilatie van vorticiteit plaats, slechts her-distributie van reeds aanwezige vorticiteit. Nu is het door middel van objectieve analyse de laatste jaren duidelijk geworden, dat creatie en annihilatie van vorticiteit een veel zeldzamer verschijnsel is dan de synopticus meestal vermoedt. Van veel wat door de synopticus in subjectieve analyse als creatie van vorticiteit wordt geïnterpreteerd is door middel van objectieve analyse komen vast te staan, dat het geen creatie van vorticiteit is maar herdistributie van reeds aanwezige vorticiteit. Anders gezegd: Er is minder ontwikkeling dan de subjectieve analyse vermoedt. Dit verklaart dat met het barotrope model toch redelijk goede resultaten worden bereikt en dat het aantal gevallen waarin de barotrope prognose faalt, kleiner is dan a priori misschien zou moeten worden verwacht. Niettemin faalt de methode bij tijd en wijle en dit moet voor een belangrijk deel op rekening worden gesteld van de niet in het model opgenomen barokliene effecten.

Een tweede belangrijk bezwaar van het barotrope model schuilt in de hypothese van het kwasi-divergentievrije windveld. Daardoor kan het barotrope model slechts worden toegepast op niveaus ongeveer liggend tussen 500 en 600 mb. De voor de praktijk (luchtvaart!) zo belangrijke prognoses van de stroming op hoger gelegen niveaus kunnen bezwaarlijk met het barotrope model worden uitgevoerd. Het is dus ook van praktisch standpunt uit zinvol de mogelijkheden van barokliene prognoses te onderzoeken. In beginsel staan hiervoor twee wegen open. Men kan gebruik maken van gefilterde vergelijkingen en van de primitieve vergelijkingen. Het spraakgebruik brengt mee, dat men met barokliene modellen steeds bedoelt modellen gebaseerd op gefilterde vergelijkingen. Bij de primitieve vergelijkingen wordt het adjectief "baroklien" meestal weggelaten, hoewel deze methode,

die van primitieve vergelijkingen gebruik maakt, eveneens tot de barokliene methodes dient te worden gerekend.

2. De ω -vergelijking

In de barokliene modellen worden in de vorticitetsvergelijking (4)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \text{div} (Q \vec{v}) + \vec{k} \cdot \left(\nabla \wedge \omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial P} \right) = 0 \quad (39)$$

zoveel mogelijk alle termen meegenomen. Vergelijken met het barotrope model treden hierin als een tot nu toe niet beschouwde grootte de verticale snelheid ω en haar afgeleiden op. Dit houdt dus in dat beschikt moet worden over een tweede vergelijking om ω te bepalen. De afleiding van deze zogenaamde ω -vergelijking gaat in 2 stappen. In de eerste plaats heeft men nodig de exacte vorm van de vergelijking, waarvan (12) een reeds gegeven benadering is.

Beschouw de eerste hoofdwet

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dH}{dt} - \alpha \frac{dP}{dt} = 0 \quad H = \text{specifieke enthalpie}$$

Voor een ideaal gas is $H = c_p T$
zodat er komt

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{\omega}{\rho} = 0 \quad (40)$$

of

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T + \omega \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{RT}{P c_p} \omega = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T - \frac{P \omega}{R} \sigma = 0} \quad (41)$$

Hierin is σ de reeds eerder ingevoerde stabiliteitsparameter

$$\sigma \equiv \frac{R}{P^2} \left(\frac{RT}{c_p} - P \frac{\partial T}{\partial P} \right) = - \frac{1}{\rho \theta} \frac{\partial \theta}{\partial P} \quad (42)$$

Nu is verder als Φ de geopotential $\Phi = gz$ is,

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{\partial \Phi}{\partial P} = \frac{RT}{P} \quad \text{zodat (41)}$$

geschreven kan worden als

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial P \partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial P} + \sigma \omega = 0} \quad (43)$$

Tot zover is alles exact.

Bij de tweede stap in de afleiding van de ω -vergelijking dient men te bedenken, dat het succes van de barotrope methode reeds leert dat de termen in ω van (39) slechts correctieve betekenis hebben. Zij behoeven dus niet exact te worden berekend en een benadering is voldoende. Daarom wordt voor de opstelling van de ω -vergelijking en alleen daarvoor, de "tilting term" verwaarloosd en (39) geschreven als

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \text{div} (Q \vec{v}) &= 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla Q + Q \text{div} \vec{v} &= 0 \\ \text{div} \vec{v} &= -\frac{\partial \omega}{\partial P} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla Q - Q \frac{\partial \omega}{\partial P} &= 0 \end{aligned} \quad (44)$$

Differentiatie naar p levert nu

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial P} + \frac{\partial}{\partial P} (\vec{v} \cdot \nabla Q) - \frac{\partial Q}{\partial P} \frac{\partial \omega}{\partial P} - Q \frac{\partial^2 \omega}{\partial P^2} \quad (45)$$

Stel nu in (43)

$$\frac{\partial \phi}{\partial P} \approx f \frac{\partial \psi}{\partial P}$$

met de stroomfunctie ψ , een benadering die eigenlijk in dit verband nog nooit goed op zijn consequenties onderzocht is. Dan wordt (43)

$$f \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial P} + f \left[\vec{v} \cdot \nabla \frac{\partial \psi}{\partial P} \right] + \sigma \omega = 0.$$

Hierop de Laplace operator Δ toepassend en de horizontale variaties in f en σ verwaarloosend, komt er

$$f \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial t \partial P} + f \Delta \left[\vec{v} \cdot \nabla \frac{\partial \psi}{\partial P} \right] + \sigma \Delta \omega = 0$$

$$\text{of} \quad f \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) + f \Delta \left[\vec{v} \cdot \nabla \frac{\partial \psi}{\partial P} \right] + \sigma \Delta \omega = 0 \quad (46)$$

Nu wordt $\frac{\partial^2 \xi}{\partial P \partial t}$ uit (45) en (46) geëlimineerd en als eindresultaat verschijnt de ω -vergelijking in de vorm

$$\Delta \omega + \frac{fQ}{\sigma} \frac{\partial^2 \omega}{\partial P^2} + \frac{f\eta}{\sigma} \frac{\partial Q}{\partial P} \frac{\partial \omega}{\partial P} = \frac{f}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial P} \left(\vec{v} \cdot \nabla Q \right) - \Delta \left(\vec{v} \cdot \nabla \frac{\partial \psi}{\partial P} \right) \right] \quad (47)$$

De laatste term in het linkerlid blijkt numeriek van weinig betekenis te zijn (product van twee kleine grootheden $\frac{\partial Q}{\partial P}$ en $\frac{\partial \omega}{\partial P}$) zodat de praktijkvorm van de ω -vergelijking ten slotte luidt:

$$\Delta \omega + \frac{fQ}{\sigma} \frac{\partial^2 \omega}{\partial P^2} = \frac{f}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial P} \left(\vec{v} \cdot \nabla Q \right) - \Delta \left(\vec{v} \cdot \nabla \frac{\partial \psi}{\partial P} \right) \right] \quad (48)$$

Een beoordeling van de correctheid van de vele benaderingen waaronder (48) is afgeleid is zeer moeilijk. Zie hiervoor o.a. GAMBO [16].

3. The resolution in the vertical

Aan de hand van de ω -vergelijking (48) zal nu de vraag worden besproken hoeveel niveaus er eigenlijk nodig zijn voor een goede barokliene prognose. Men noemt dit het probleem van de "resolution in the vertical" en spreekt van low resp. high resolution al naar het aantal niveaus waarop gewerkt wordt klein of groot is. Vooraf zij echter opgemerkt, dat de hier weergegeven beschouwingen, die in hoofdzaak afkomstig zijn van Win-Nielsen [17] en Cressman [18], niet door iedereen worden aanvaard. Met name houden sommige Noorse en Engelse onderzoekers vol, dat men met 2 niveaus (het minimum dus) redelijke resultaten kan bereiken. Volgens Cressman (mondelijke mededeling) echter hebben experimenten van Shuman uitgewezen, dat een model met 2 niveaus resultaten oplevert, die praktisch identiek zijn aan die verkregen met het barotrope model. Dit wordt bevestigd door experimenten van Döös [22].

Neem eens aan dat het ω -veld ruimtelijke periodiciteit vertoont. Dan kan voor (48) worden geschreven

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial P^2} - A \omega = F \quad (49)$$

met $A = \frac{k^2 \sigma}{fQ}$ en k een horizontaal golfgetal.

Heeft men nu een model met n niveaus dan kan men F uitrekenen op (n-1) punten in de vertikaal. In een 2-parameter model kan men F dus slechts op één plaats in de vertikaal uitrekenen. Er blijft dan niets anders over dan in het model te onderstellen dat F over de gehele vertikaal dezelfde waarde heeft. Kiest men nog $\omega = 0$ voor P = 1000 mb en voor P = 0 dan is het ω -profiel symmetrisch rond 500 mb en is aldaar een divergentievrij niveau te vinden. Dit niveau kan niet van plaats veranderen en wij vinden hier dus in feite het equivalent barotrope model terug.

Indien we nu een model beschouwen met meer niveaus (ten minste 3), dan kunnen dus van F n-1 ≥ 2 waarden in de vertikaal worden bepaald. Als F lineair is over de gehele vertikaal geldt dat als F afneemt met de hoogte het niveau van non-divergentie beneden 500 mb ligt en als F toeneemt met de hoogte het niveau van non-divergentie boven 500 mb ligt. Dit niveau van non-divergentie scheidt de gebieden van convergentie en divergentie. Een minstens 3-parameter model is dus nodig indien men de laag met convergentie een andere dikte (in drukmaat) wil geven dan die met divergentie. Volgens de laatste ideeën is zelfs een 4-parameter model nodig om het windprofiel niet al te sterk te schematiseren. (Men heeft één laaggelegen niveau nodig, bijv. 800 mb, en 3 hoger gelegen niveaus om het maximum in de wind te beschrijven).

Uit het bovenstaande volgt, dat men te Suitland een 2-level model thans niet meer als een adequate aanpak van het probleem van barokliene prognose beschouwt. We zullen dan ook in de volgende paragraaf het thans operationeel gebruikte 3-level model beschrijven en aan het 2-level model verder geen aandacht meer besteden.

4. Model met 3 niveaus (Cressman)

We gaan nu weer uit van de vorticitateitsvergelijking (39)

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \text{div} (Q \vec{v}) + \vec{k} \cdot \left(\nabla \wedge \omega \frac{\vec{v}}{P} \right) = 0 \tag{50}$$

Stelt men

$$\begin{aligned} \vec{v}_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \vec{v}_y &= \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \psi \text{ stroomfunctie} \\ \varphi \text{ potentiaalfunctie} \end{array} \right)$$

dan kan (50) met enig eenvoudig rekenwerk herleid worden tot

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \int (\psi, \rho) + \text{div} (\rho \nabla \phi) + \vec{k} \cdot (\nabla \wedge \omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial P}) = 0 \quad (51)$$

Van deze exacte vergelijking worden alle termen ongewijzigd benut op één uitzondering na. In de laatste term wordt de afhankelijkheid van \vec{v} van ϕ verwaarloosd daar deze numeriek niet van belang bleek te zijn, zodat in deze term dus slechts het rotatievrije deel van de wind wordt gebruikt. De gang van zaken wordt nu beschreven aan de hand van het onderstaande schema:

—————→ integratieproces

p(mb)	uitgangsgegevens	obj. analyse	balans vgl.	ω -vgl. $\omega=0$	voorspel vgl.	extrapolatie	balans vgl.	herhaling	$\omega=0$
p=0									
p=100									
p=200	ϕ, \vec{v}	ϕ, ξ	ψ		$\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}$	$\psi(t+\Delta t)$	$\phi(t+\Delta t)$		
p=350				ω					
p=500	ϕ, \vec{v}	ϕ, ξ	ψ		$\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}$	$\psi(t+\Delta t)$	$\phi(t+\Delta t)$		
p=650				ω					
p=800	ϕ, \vec{v}	ϕ, ξ	ψ		$\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}$	$\psi(t+\Delta t)$	$\phi(t+\Delta t)$		
		↑					←		
p=1000				$\omega=\omega_g$					$\omega=\omega_g$

De uitgangsgegevens zijn geopotential ϕ en wind \vec{v} van de niveaus 200, 500 en 800 mb. Met behulp van de in Suidland gebruikelijke objectieve analyse worden de windgegevens gebruikt om een verbeterd ϕ en tevens het ξ -veld te krijgen. De balansvergelijking (10) levert vervolgens op dezelfde niveaus de stroomfunctie ψ . Dan levert de ω -vergelijking de waarden van ω en zijn afgeleiden op 350 en 650 mb. De voorspelvergelijking (51) levert $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ en tevens $\frac{\partial \psi}{\partial t}$. Met behulp hiervan wordt het ψ -veld geëxtrapoléerd tot dat voor $\psi(t+\Delta t)$. ($\Delta t = 1$ uur). Een omgekeerd gebruik van de balansvergelijking levert vervolgens $\phi(t+\Delta t)$ waarna de volgende cyclus begint. Als randcondities worden gebruikt $\omega = 0$ voor $P = 0$ en $\omega = \omega_g$ voor $P = 1000$ mb. Voor ω_g worden dezelfde formules gebruikt als in het barotrope model.

Het is in dit model niet nodig extra voorzieningen aan te brengen om het teruglopen van lange golven te onderdrukken. Uit de beschouwingen van Cressman (zie Hoofdstuk I, par. 5) is reeds gebleken, dat een inerte stratosfeer deze golven kan onderdrukken (Tankmodel) en in het 3-parameter model neemt de randvoorwaarde $\omega = 0$ voor $P = 0$ deze taak over.

Op dit ogenblik (herfst 1962) is het hier beschreven model in operationeel gebruik. Een programma voor een 4-parameter model met prognoses op de niveaus 150, 300, 600 en 850 mb is thans volledig gecontroleerd en zal in het voorjaar van 1963 waarschijnlijk in operationeel gebruik komen. Het onderscheidt zich van het 3-parameter model uitsluitend in een betere resolution in the vertical maar in de fysische basis is geen wijziging gebracht. Resumerend kan de fysische basis aldus worden beschreven:

- (1) Als voorspelvergelijking wordt de vorticitetsvergelijking gebruikt waarop slechts een vermoedelijk onbelangrijke verwaarlozing wordt toegepast.
- (2) Als diagnostische vergelijking wordt de ω -vergelijking gebruikt. Hierbij wordt een aantal benaderingen geïntroduceerd waarvan de betekenis nog onvoldoende onderzocht is.
- (3) Wind- en drukveld zijn aan elkaar aangepast volgens de balansvergelijking. De betekenis van de balansvergelijking voor het filteren van ongewenste bewegingsvormen is welbekend (Thompson [37]).
- (4) Terreineffecten en wrijving worden op dezelfde wijze in rekening gebracht als in het barotrope model.

5. Barotroop versus baroklien

Hoewel met het barokliene 3-level model goede resultaten worden bereikt en het inderdaad een vooruitgang ten opzichte van het barotrope model betekent, wordt toch te Suitland operationeel ook nog met het barotrope model gewerkt. De hoofdredenen zijn de volgende:

- (1) Het werken met het barotrope model gaat vlug en is goedkoop, dat met het barokliene model kost veel meer tijd. (Zie tabel einde par.).
- (2) Het barotrope model kan zonder bezwaar prognoses geven tot 96 uur vooruit; met het barokliene model kan men operationeel niet verder dan 36 uur vooruit. Voor langere tijden ontstaan voorspellingen, die niet beter zijn dan de barotrope.

Tabel van benodigde tijden

Automatic data processing	:	5 min.
Objectieve analyse	:	15 min.
Balansvergelijking voor de begingegevens	:	3 min. per niveau
Barotrope prognose	:	7 sec. voor stap van 1 uur
Barokliene prognose	:	2 min. voor stap van 1 uur per niveau

In de praktijk komt dit neer op het volgende tijdschema:

- 0000z : waarnemingstijd
 - 0215z : gegevens binnen van Noord-Amerika en West-Europa
 - 0235z : voorlopige (beperkte) barotrope prognose 500 mb gereed
 - 0330z : " " " " 500 mb gaat per
facsimilé de deur uit
 - 0430z : alle gegevens binnen exclusief Siberië
 - 0530z : volledige barotrope prognose gereed
- Eerst daarna wordt aan 3-level model prognoses begonnen.

6. Waardebepaling

Wanneer men nu zoekt naar de zwakke punten van de barokliene techniek, dan kan men 2 punten aanwijzen:

- (1) De benaderingen in de ω -vergelijking. Er bestaan vermoedens dat de invloed hiervan op de kwaliteit van de prognoses gering is.
- (2) De balansvergelijking.

$$\text{Stel } D = \nabla \cdot \vec{v}$$

dan luidt de exacte vergelijking voor de divergentie

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \cdot (D \vec{v}) + \nabla \cdot \left(\omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial p} \right) + \int (v, u) - f \zeta + \beta u + \Delta \Phi = 0$$

De balansvergelijking ontstaat door hierin de onderstreepte termen te verwaarlozen. Men heeft dus de volgende situatie: D wordt in de vortiteitsvergelijking niet verwaarloosd maar wel in de balansvergelijking. Deze laatste is daardoor een diagnostische vergelijking geworden ($\frac{\partial}{\partial t}$ komt niet voor). Druk- en windveld worden dus zodanig aan elkaar geïmplementeerd geacht te zijn dat $D = 0$. Nu is het bekend, dat op hogere niveaus (P ~~300~~ 300 b.v.) de geostrofische benadering volledig faalt. De geostrofische relatie is weliswaar slechts een benadering van de balansvergelijking maar de vraag blijft of op deze hogere niveaus de termen

met D in de divergentievergelijking mogen worden verwaarloosd. Uit onderzoekingen van o.a. Arnason [19] is verder bekend, dat het criterium voor de eenduidige oplosbaarheid van de balansvergelijking luidt

$$\Delta \bar{\Phi} + \frac{f^2}{2} - \beta \frac{\partial \chi}{\partial y} > 0$$

Deze voorwaarde schijnt (Cressman, mondelinge mededeling) op bijv. het niveau van 200 mb beslist onrealistisch te zijn. Daarmede is dus de grens aangegeven tot waartoe men met gefilterde vergelijkingen komen kan. Bevrijding van de koppeling van wind- en drukveld door middel van a priori aangenomen relaties (geostrofische benadering, balansvergelijking) is alleen mogelijk bij gebruik van de primitieve vergelijkingen.

HOOFDSTUK III

BAROKLIENE MODELLEN MET PRIMITIEVE VERGELIJKINGEN

1. Inleiding

De geschiedenis van het onderzoek naar de mogelijkheid de primitieve vergelijkingen te gebruiken voor numerieke prognosen is er een van veel ups en downs. Telkens weer slaat op dramatische wijze de mening van de onderzoekers om van "het kan wel" naar "het kan niet" en omgekeerd. Dat men het nochtans steeds weer opnieuw met deze methode probeert heeft een aantal redenen:

- (1) Sportiviteit. Er zijn ten slotte altijd mensen die de Eiger Nordwand willen beklimmen.
- (2) De gebreken, die de barokliene prognoses met gefilterde vergelijkingen vertonen, dwingen ertoe ook de methode der primitieve vergelijkingen te onderzoeken.
- (3) Het principiële inzicht, dat filteren niet alleen ongewenste bewegingsvormen onderdrukt maar tevens de meteorologisch belangrijke bewegingsvormen niet geheel onaangetaast laat.

Met de methode der primitieve vergelijkingen wordt hoog gemikt. Dat kan als volgt worden ingezien. Voor de synopticus zijn wind- en drukveld twee aspecten van dezelfde zaak, verbonden door de geostrofische betrekking. Weliswaar leert de ervaring dat zelden aan de geostrofische betrekking exact is voldaan, maar de synopticus is er tot nu toe niet in geslaagd de afwijking van de geostrofische betrekking te benutten voor prognostische doeleinden c.q. te voorspellen. Deze situatie verandert principieel niet als men de geostrofische relatie vervangt door de balansvergelijking, zoals dat in de modellen gebaseerd op gefilterde vergelijkingen wordt gedaan.

De situatie verandert echter principieel wel als men overgaat op numerieke prognoses met primitieve vergelijkingen. Dan immers wordt geen enkele a priori onderstelling gemaakt omtrent het verband tussen wind- en drukveld. Zo bezien is de methode der primitieve vergelijkingen de enige, die zich niet beperkt tot het numeriek nabootsen van de subjectieve prognosetechnieken maar die waarin voor het eerst getracht wordt zich te bevrijden van een essentiële beperking, onlosmakelijk verbonden zowel aan de subjectieve techniek als aan de methode der gefilterde vergelijkingen.

De hoofdmoeilijkheid bij de methode der primitieve vergelijkingen (PV) ligt, zoals bekend, in het probleem der uitwendige gravitatiegolven. Deze hebben immers zulke korte golflengten en lopen zo snel, dat zij tot berekeningsinstabiliteit aanleiding geven (Zie Coll.verslag Verbrugh). Er zijn thans in hoofdzaak twee manieren bekend om dit probleem aan te pakken. Duitse onderzoekers trachten de ongewenste gravitatiegolven te onderdrukken door middel van een aantal nogal kunstmatig aandoende kunstgrepen, zoals het invoeren van fictieve warmtebronnen (Zie Colloquiumverslag Verbrugh). Deze methode beschouwt men te Suitland als te kunstmatig. SHUMAN gebruikte daarom een meer voor de hand liggende methode, die "smoothing" - gladstrijken wordt genoemd. Hieraan ligt de volgende gedachte ten grondslag. De uitwendige gravitatiegolven hebben een betrekkelijk korte golflengte, die hoogstens enige malen de maaswijdte van het rooster (ca. 380 km) waartop gerekend wordt bedraagt. Door nu op geschikte ogenblikken tijdens het rekenproces een gladstrijkoperator toe te passen, die over de afstand van enige maaswijdten werkzaam is, moet het mogelijk zijn de ongewenste gravitatiegolven weg te werken, filteren door smoothing dus. In de volgende paragrafen zal deze techniek nader worden besproken. (Zie Shuman [20,21]). In paragraaf 7 zal aan de hand van een eenvoudig voorbeeld de betekenis van de smoothing worden gedemonstreerd.

Ter voorbereiding eerst een en ander over de door Shuman gebruikte notaties.

Ingevoerd wordt allereerst een differentie-operatie, die aangeduid wordt door het plaatsen van een index rechts onder de grootheid, die hieraan wordt onderworpen.

$$\begin{aligned} u_x &\equiv \frac{1}{\Delta x} \left\{ u \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) - u \left(x - \frac{\Delta x}{2} \right) \right\} \\ u_t &\equiv \frac{1}{\Delta t} \left\{ u \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) - u \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) \right\} \end{aligned} \tag{52}$$

Dit zijn dus centrale differenties.

Door het plaatsen van een streep met index rechts boven een symbool wordt een gladstrijkoperatie gedefinieerd

$$\begin{aligned} \overline{u^x} &\equiv \frac{1}{2} \left\{ u \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) + u \left(x - \frac{\Delta x}{2} \right) \right\} \\ \overline{u^t} &\equiv \frac{1}{2} \left\{ u \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) + u \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) \right\} \end{aligned} \tag{53}$$

Beide operaties zijn lineair en dus commutatief.

In het bijzonder is

$$\begin{aligned} \overline{u}_x^x &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ u\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - u\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2\Delta x} \left\{ u(x + \Delta x) + u(x) - u(x) - u(x - \Delta x) \right\} = \\ &= \frac{1}{2\Delta x} \left\{ u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x) \right\} \end{aligned} \quad (54)$$

Van belang zijn de regels voor het toepassen van deze operatoren op producten

$$\begin{aligned} (ab)_x &= \frac{1}{\Delta x} \left[a\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) b\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - a\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) b\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[\left\{ a\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) + a\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \right\} \left\{ b\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - b\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ b\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) + b\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \right\} \left\{ a\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - a\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \right\} \right] \end{aligned}$$

of $(ab)_x = \overline{a^x} b_x + \overline{b^x} a_x$ (55)

en $\overline{ab^x} = \overline{a^x} \overline{b^x} + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 a_x b_x$

2. Voorstudies aan eenvoudige modellen

Ten einde enig inzicht te krijgen in de mogelijkheden en onmogelijkheden is Shuman begonnen met de studie van het eenvoudigste systeem dat uitwendige gravitatiegolven toelaat, nl. dat van de beweging van een incompressibele homogene vloeistof in hydrostatisch evenwicht in 1-dimensie met een vrij oppervlak.

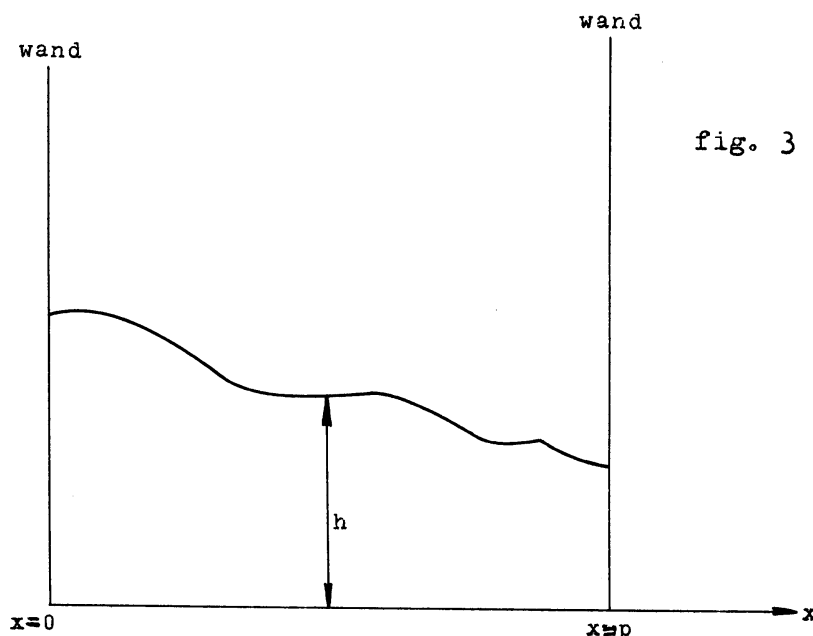


fig. 3

De differentiaalvergelijkingen, die de beweging beschrijven, luiden
(u = snelheid in x-richting)

$$\text{Bewegingsvgl.} \quad : \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (56)$$

$$\text{Continuïteitsvgl.} \quad : \quad \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\text{Grensvoorwaarden} \quad : \quad \bar{u}^x = h_x = 0 \quad \text{op} \quad x = -\frac{1}{2} \Delta x \quad \text{en} \quad (p - \frac{1}{2}) \Delta x^* \quad (57)$$

Van het stelsel (56) kan op vele wijzen een benadering met behulp van differentievergelijkingen worden gegeven. Ze worden hieronder vermeld met de door Shuman geïntroduceerde namen.

Momentum Form

$$\overline{(hu)}_t + \overline{(huu)}_x + gh \overline{h}_x = 0$$

$$\text{of} \quad \overline{(hu)}_t + \overline{(huu)}_x + \frac{1}{2}g \overline{(hh)}_x = 0 \quad (58a)$$

$$\overline{h}_t + \overline{(hu)}_x = 0$$

Semi-Momentum Form

$$\overline{u}_t + \frac{1}{2} \overline{(uu)}_x + g \overline{h}_x = 0$$

$$\overline{h}_t + \overline{(hu)}_x = 0 \quad (58b)$$

Advective Form

$$\overline{u}_t + u \overline{u}_x + g \overline{h}_x = 0$$

$$\overline{h}_t + u \overline{h}_x + h \overline{u}_x = 0 \quad (58c)$$

*) Expliciet luiden dus de randvoorwaarden:

$$\frac{1}{2} \left\{ u(x + \frac{\Delta x}{2}) + u(x - \frac{\Delta x}{2}) \right\} = \frac{1}{\Delta x} \left\{ h(x + \frac{\Delta x}{2}) - h(x - \frac{\Delta x}{2}) \right\} = 0$$

voor $x = -\frac{1}{2} \Delta x$ en $(p - \frac{1}{2}) \Delta x$ d.w.z.

$$\frac{1}{2} \left\{ u(0) + u(-\Delta x) \right\} = \frac{1}{\Delta x} \left\{ h(0) - h(-\Delta x) \right\} = 0 \quad \text{op de linkerrand}$$

en $\frac{1}{2} \left[u(p\Delta x) + u\{(p - 1) \Delta x\} \right] = \frac{1}{\Delta x} \left\{ h(p\Delta x) - h(p - 1)\Delta x \right\}$ op de rechterrands.

Filtered Factor Form

$$u_t^{-t} + u^{-xx} u_x^{-x} + g h_x^{-x} = 0 \quad (58d)$$

$$h_t^{-t} + u^{-xx} h_x^{-x} + h^{-xx} u_x^{-x} = 0$$

De laatste Form kan ook worden geschreven als

$$u_t^{-t} + \frac{1}{2} \left(u^{-x} u^{-x} \right)_x + g h_x^{-x} = 0 \quad (58d)$$

$$h_t^{-t} + \left(h^{-x} u^{-x} \right)_x = 0$$

Voor de behandeling van niet-lineaire vergelijkingen is de onderscheiding naar de vier vormen essentieel. In gelineariseerde vorm verdwijnt het onderscheid tussen de verschillende vormen.

Shuman heeft de integraties volgens al deze vormen uitgevoerd op een IBM 704 met $\Delta x = 381 \text{ km}$, $\Delta t = 10 \text{ min}$, $p = 24$. Als begintoestand werd uitgegaan van een vlak oppervlak op 25000 ft waarover kleine storingen werden gesuperponeerd.

De resultaten waren als volgt:

- | | |
|----------------------|---|
| Momentum Form | : onstabiel, kinetische energie neemt exponentieel toe. |
| Advective Form | : licht onstabiel. |
| Semi-Momentum Form | } geen significante onstabieliteit |
| Filtered Factor Form | |

De resultaten van dit experiment deden Shuman besluiten in volgende experimenten de momentum form en de advective form buiten beschouwing te laten. Hij wijkt hiermede af van wat andere onderzoekers tot dusverre hadden gedaan, die nl. zonder vooronderzoekingen als regel steeds met de momentum form hadden gewerkt. Zijn voorbeeld wordt thans ook door de Duitse onderzoekers gevolgd. (Zie Verbrugh).

Een volgend experiment had de bedoeling het gedrag na te gaan van een model met 2 ruimtelijke dimensies en 2 actieve lagen van incompressibele vloeistoffen boven elkaar in hydrostatisch evenwicht en onderworpen aan de Corioliskracht. Voor hiertoe kon worden overgegaan moest eerst de vraag worden onderzocht hoe de coriolis term moest worden aangepakt. Dit werd gedaan door allereerst de eigenschappen te onderzoeken van het volgende lineaire systeem van differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ fu + \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial y} &= 0 \\ H \frac{\partial u}{\partial x} + H \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} &= 0\end{aligned}\tag{59}$$

Dit systeem is lineair en dus zijn ook de benaderende differentievergelijkingen lineair. De eigenschappen hiervan kunnen dus worden onderzocht door oplossingen in de gedaante van goniometrische of exponentiële functies te bestuderen. Van (59) werden 5 verschillende stelsels van benaderende differentievergelijkingen opgesteld.

$$\begin{aligned}\text{I.} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ fu + \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ H \frac{\partial u}{\partial x} + H \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} &= 0\end{aligned}\tag{60a}$$

Deze vorm laat oplossingen toe met niet-reële kortgolvrige traagheidsgolven.

$$\begin{aligned}\text{II.} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - f \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ f \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial y} &= 0 \\ H \frac{\partial u}{\partial x} + H \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} &= 0\end{aligned}\tag{60b}$$

Deze vorm met gladstrijking in één richting van de coriolissterm bleek onstabilliteiten toe te laten.

$$\begin{aligned}\text{III.} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - f \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ f \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial y} &= 0 \\ H \frac{\partial u}{\partial x} + H \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} &= 0\end{aligned}\tag{60c}$$

Deze vorm is stabiel. Zij heeft echter bepaalde inconsequenties in de geostrofische termen. Zo wordt in de eerste vergelijking een gladstrijk-operator in de y-richting op de coriolissterm toegepast, die niet op de drukgradiënt wordt toegepast.

$$\begin{aligned}
 \text{IV.} \quad & \bar{u}_t - f \bar{v}^{\overline{xyy}} + g \bar{h}_x^{\overline{xyy}} = 0 \\
 & f \bar{u}^{\overline{xyy}} + \bar{v}_t + g \bar{h}_y^{\overline{xyy}} = 0 \\
 & H \bar{u}_x^{\overline{x}} + H \bar{v}_y^{\overline{y}} + \bar{h}_t^{\overline{t}} = 0
 \end{aligned} \tag{60d}$$

Deze vorm bleek onstabilliteiten toe te laten.

$$\begin{aligned}
 \text{V.} \quad & \bar{u}_t - f \bar{v}^{\overline{xyy}} + g \bar{h}_x^{\overline{xyy}} = 0 \\
 & f \bar{u}^{\overline{xyy}} + \bar{v}_t + g \bar{h}_y^{\overline{xyy}} = 0 \\
 & H \bar{u}_x^{\overline{xyy}} + H \bar{v}_y^{\overline{xyy}} + \bar{h}_t^{\overline{t}} = 0
 \end{aligned} \tag{60e}$$

Dit bleek een vorm te zijn die aan alle eisen voldoet.

Het resultaat van deze tussenbeschouwing over het gedrag van de coriolis-term in gelineariseerde vergelijkingen was dus dat er nu een aanwijzing was verkregen hoe de corioliseffecten in de niet-lineaire vergelijkingen behandeld moeten worden. Deze aanwijzingen hebben natuurlijk geen bewijskracht. Het is kenmerkend voor de Amerikaanse aanpak, dat allerlei resultaten, verkregen in voorstudies met vereenvoudigde modellen, worden benut om voor ingewikkelder gevallen als leidraad te dienen. Er moet dan worden afgewacht of de verkregen resultaten mogen worden ggeneraliseerd. Dit wordt echter nooit theoretisch onderzocht maar experimenteel nagegaan.

Eerder is reeds aangegeven, dat het eigenlijk te doen was om de goede differentievergelijkingen te vinden voor de beschrijving van een systeem met 2 ruimtelijke dimensies en 2 lagen van onsamendrukbare vloeistoffen boven elkaar in hydrostatisch evenwicht en onderworpen aan een corioliskracht. De tussenberekeningen hebben geleerd hoe de lineaire termen te behandelen en het eerste experiment had reeds geleerd dat de niet-lineaire termen het best kunnen worden behandeld met de filtered-factor form. Daarom werd voor het 2-lagen-systeem uitgegaan van vergelijkingen van het volgende type (hier voor één laag gegeven):

$$\begin{aligned}
 & \bar{u}_t + \bar{u}^{\overline{xyy}} \bar{u}_x^{\overline{xyy}} + \bar{v}^{\overline{xyy}} \bar{u}_y^{\overline{xyy}} - f \bar{v}^{\overline{xyy}} + g \bar{h}_x^{\overline{xyy}} = 0 \\
 & \bar{v}_t + \bar{u}^{\overline{xyy}} \bar{v}_x^{\overline{xyy}} + \bar{v}^{\overline{xyy}} \bar{v}_y^{\overline{xyy}} + f \bar{u}^{\overline{xyy}} + g \bar{h}_x^{\overline{xyy}} = 0 \\
 & \bar{h}_t + \bar{u}^{\overline{xyy}} \bar{h}_x^{\overline{xyy}} + \bar{v}^{\overline{xyy}} \bar{h}_y^{\overline{xyy}} + \bar{h}^{\overline{xyy}} (\bar{v}_y^{\overline{xyy}} + \bar{u}_x^{\overline{xyy}}) = 0
 \end{aligned} \tag{61}$$

Dit systeem werd getoetst op een 24x24 rooster, dat een vierkante snede uit het normale JNWPU-rooster was, met beginwaarden ontleend aan actuele gegevens van het 850 en 500 mb-vlak. De vloeistof werd geacht opgesloten te zitten binnen een vaste begrenzing. Hierdoor worden aan de randen zwaartegolven gecreëerd, die zich in het inwendige van het rooster voortplanten. Na 72 uur bleken deze geheel gedisintegreerd te zijn in een overzichtelijke massa van ongeordende rimpels in de topografie. Echter bleek, dat in dit ongeordende patroon toch nog meteorologisch acceptabele resultaten verborgen zaten. Indien men nl. van het wanordelijke windveld het bijbehorende vorticitetsveld bepaalde en dit gelijkstelde aan de laplaciaan van een stroomfunctie, bleek er een meteorologisch aanvaardbare stroomfunctie mee te corresponderen (diagnostic filtering). Ook andere experimenten met dit 2-lagen-model gedaan leerden, dat de filtered factor form voldoende stabiliteit garandeerde om het te durven wagen dezelfde techniek ook op de vergelijkingen voor de werkelijke atmosfeer toe te passen.

3. Experimenten met de vergelijkingen van de atmosferische bewegingen

Shuman gebruikt een coördinatensysteem, dat een variant is van een eerder door Phillips aangegeven systeem. Zij σ (p) een willekeurige functie van de druk^{*)}. (Niet te verwarren met de stabiliteitsparameter uit de Hoofdstukken I en II). Verder $\pi = (P/P_*)^{R/c_p}$ (Exner functie) ($P_* = 1000$ mb). Dan luiden de vergelijkingen:

Bewegingsvergelijkingen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - fv + X = 0 \quad (62a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + fu + Y = 0$$

Krachtvergelijkingen

$$X = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial x} \quad Y = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} + c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial y} \quad (62b)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \sigma} = c_p \frac{\partial(\pi, \theta)}{\partial(x, \sigma)} \quad \frac{\partial Y}{\partial \sigma} = c_p \frac{\partial(\pi, \theta)}{\partial(y, \sigma)}$$

*) Het dubbel gebruik van het symbool σ (nl. als stabiliteits parameter, zie (42), en als gegeneraliseerde verticale coördinaat) is, helaas, algemeen gebruikelijk geworden. Om geen eigen notaties in te voeren is hiervan in dit rapport niet afgeweken.

Thermische vergelijking

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = 0 \quad (62c)$$

Continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial \pi_0}{\partial t} + u \frac{\partial \pi_0}{\partial x} + v \frac{\partial \pi_0}{\partial y} + \frac{R}{c_p} \pi_0 \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{d\sigma}{d\sigma'} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{d\sigma'}{d\sigma} \dot{\sigma} \right) \right] = 0 \quad (62d)$$

met $\sigma' = p/p_0$ waarin de index 0 aanduidt, dat de waarden aan het aardoppervlak bedoeld zijn.

Voorlopig werd gewerkt op 3 niveaus, 200, 500 en 1000 mb:

p	σ	σ'	
0	0	0	
200	1/3	0.2	
500	2/3	0.5	
1000	1	1	= p_0

Zou men de vergelijkingen (62) volledig aan de gladstrijking van de vorige paragrafen onderwerpen, dan zou ook in de vertikaal moeten worden gladgestreken, hetgeen termen als $\frac{-xy\gamma\sigma\sigma}{u}$ en $\frac{-xy\gamma\sigma\sigma}{u_x}$ in de differentievergelijkingen zou introduceren. Dit werd niet gedaan, omdat in de eerste plaats de verticale richting een uitzonderingspositie inneemt en in de tweede plaats omdat zulks duidelijk ongewenst is zolang de "resolution in the vertical" nog "low" is.

Alleen blijft dan de vraag hoe men de verticale advectietermen zoals

$$\dot{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \quad (63)$$

zal moeten behandelen.

Shuman begon met

$$\dot{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \approx \dot{\sigma} \bar{\theta}_{\sigma}^{\sigma xxyy} \quad (64)$$

Het bleek, dat het model met deze formule ernstige onstabilliteiten begon te vertonen voordat 48 uur integratietijd verstreken waren. Behalve de voor de prognoses nodige gegevens berekende de machine ook het over de gehele kaart gemiddelde kwadraat van de verticale snelheid en het bleek, dat dit na 12 uur exponentieel begon toe te nemen.

Daarom werd (64) vervangen door een filtered factor formule:

$$\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \approx \frac{\overline{\sigma^2} - \sigma_{xy}^2}{\overline{\sigma^2}} \theta_{\sigma} \quad (65)$$

hetgeen alleen de resultaten nog erger maakte want het gemiddelde kwadraat van de verticale snelheid begon nu na enkele uren reeds exponentieel toe te nemen.

Enkele andere differentie-approximaties voor (63) werden nog geprobeerd maar zonder resultaat. De onstabieliteit kon niet worden onderdrukt, hoewel het tijdsverloop waarna onstabieliteit optrad in hoge mate afhankelijk bleek van de wijze waarop (63) werd geschat met behulp van eendige differenties. Het scheen alsof de hele methode der P.V. tot mislukken was gedoemd.

4. Kwasi-Lagrangiaanse coördinaten

Op het Tokio-symposium (1960) propageerde Shuman [21] na de onaangename ervaringen beschreven in de vorige paragraaf als het middel om uit de impasse te geraken het gebruik van een kwasi-Lagrangiaans coördinatenstelsel. Vertikale advectietermen als

$$\frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma}$$

verdwijnen nl. uit de vergelijking op het moment dat men voor de verticale coördinaat een conservatieve grootheid $\frac{d\sigma}{dt} = 0$ neemt.

Laat c een conservatieve grootheid zijn

$$\frac{dc}{dt} = 0 \quad (66)$$

en π de Exnerfunctie $\pi = \left(\frac{p}{p_*}\right)^{R/c_p} \quad (p_* = 1000 \text{ mb}) \quad (67)$

dan luiden met c als verticale coördinaat de vergelijkingen:

Bewegingsvergelijkingen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + X &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + Y &= 0 \end{aligned} \quad (68a)$$

Krachtvergelijkingen

$$\begin{array}{l|l} X = \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{\partial x} + c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial x} & Y = \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{\partial y} + c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial y} \\ \hline \frac{\partial X}{\partial c} = c_p \frac{\partial(\pi, \theta)}{\partial(x, c)} & \frac{\partial Y}{\partial c} = c_p \frac{\partial(\pi, \theta)}{\partial(y, c)} \end{array} \quad (68b)$$

Thermische vergelijking

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (68c)$$

Continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial c} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial c} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial c} \right) + \frac{\partial p}{\partial c} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (68d)$$

In differentievorm gebracht gaan deze vergelijkingen grote overeenkomst vertonen met die voor een gelaagd model en men mag dus hopen, dat de integratie geen onoverkomelijke moeilijkheden zal opleveren. "I propose to transform these directly into finite differences and integrate them in that form" (Shuman; 1960, [21]). Hij voegde hieraan toe, dat hij het als een principieel voordeel beschouwde, dat men nu een grote mate van vrijheid had in de keuze van de plaatsen in de atmosfeer waar men de begingegevens zou kunnen vastleggen. Hij wist toen nog niet wat hem te wachten stond. In zijn eerste experimenten (mondelinge mededeling) begon hij met de gegevens te ontleen aan de waarnemingen op isobarische vlakken. Het werd een volledige mislukking want de integratie lukte in het geheel niet, zelfs niet over betrekkelijk korte tijden. Het heeft lang geduurd voordat de oorzaak was opgespoord. Thans (herfst 1962) wordt aangenomen, dat de oorzaak de volgende is. In de begintoestand bevinden alle deeltjes zich in een isobarisch vlak, dat is dus in quasi-horizontaal vlak. Na verloop van tijd vullen de deeltjes een gebogen vlak, dat reeds na vrij korte tijd de neiging krijgt plooiën te vormen, zodanig dat het vlak de vertikaal meer dan één maal snijdt. Indien met oneindig kleine stappen kon worden gewerkt zou dit niet hinderlijk zijn. Met behulp van continuïteitsbeschouwingen zou men dan toch van elk deeltje wel kunnen bepalen op welk "blad" van het geplooid vlak het zich op een bepaalde vertikaal bevinden moet. Maar bij eindige stappen kunnen continuïteitsberedeneringen niet worden toegepast en men - of de machine - weet niet meer goed welk deeltje op een bepaald blad van het geplooid vlak terecht is gekomen.

Het is dus zaak de deeltjes in de begintoestand zo te kiezen, dat zij een vlak vullen waarvan mag worden aangenomen dat het niet of zo weinig mogelijk neiging vertoont tot het vormen van plooien. Er is één vlak dat hiervoor in aanmerking komt, nl. het isentropische vlak. Immers, op grond van de neiging der atmosfeer de stabiliteit van het verticale evenwicht zoveel mogelijk te handhaven, zal plooiing van het isentropische vlak steeds tot een minimum worden onderdrukt, terwijl de adiabatenvergelijking garandeert, dat de deeltjes dit vlak niet zullen verlaten. Wanneer men echter de deeltjes in de beginsituatie een isentropisch vlak laat vullen, hebben en houden zij alle dezelfde potentiële temperatuur en dan verliest de conservatieve grootheid $c = \theta$ zijn waarde als verticale coördinaat. Men heeft dan dus toch weer een verticale coördinaat σ nodig en men is weer terug in de situatie van paragraaf 3, waaraan men juist wilde ontsnappen door een conservatieve grootheid als coördinaat te kiezen. Een heranalyse van de problemen gesteld in paragraaf 3 is dus noodzakelijk.

5. Heranalyse van de situatie

Met $\sigma(p)$ als verticale coördinaat luidt de thermische vergelijking

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta + \dot{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = 0 \quad (69a)$$

en de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \vec{v} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \right) = 0 \quad (69b)$$

Vervang dit stelsel door de benadering

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta + \dot{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = 0 \quad (70a)$$

$$\frac{\partial p_{\sigma}}{\partial t} + \nabla \cdot (p_{\sigma} \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (p_{\sigma} \dot{\sigma}) = 0 \quad (70b)$$

Door (70a) met p_{σ} te vermenigvuldigen en (70b) met θ en de resultaten op te tellen ontstaat

$$\frac{\partial}{\partial t} (p_{\sigma} \theta) + \nabla \cdot (p_{\sigma} \theta \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (p_{\sigma} \dot{\sigma} \theta) = 0 \quad (71)$$

Uit (70) volgt dus (71). Deze laatste vergelijking heeft het karakter

van een behoudwet. De moeilijkheden ontstaan nu door de omstandigheid dat men uit voor de hand liggende benaderingen van (70a) en (70b) geen benadering van (71) kan afleiden.

Neem b.v. als benadering van (70)

$$\begin{cases} \bar{\theta}_t^t + \dots \bar{\sigma}^\sigma \theta_\sigma = 0 & (72a) \\ \bar{p}_{\sigma t}^t + \dots (p_\sigma \dot{\sigma})_\sigma = 0 & (72b) \end{cases}$$

en voor (71)

$$\overline{(p_\sigma \theta)}_t^t + \dots (p_\sigma \dot{\sigma} \theta)_\sigma = 0 \quad (73)$$

Nu is

$$\begin{aligned} \overline{(p_\sigma \theta)}_t^t &= \left(\bar{p}_\sigma^t \bar{\theta}^t \right)_t + \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 (p_{\sigma t} \theta_t)_t = \\ &= \bar{p}_\sigma^{tt} \bar{\theta}_t^t + \bar{\theta}^{tt} \bar{p}_{\sigma t}^t + \theta (\Delta t)^2 \end{aligned}$$

De vergelijking (73) ontstaat dus voor wat de eerste term betreft uit

$$\bar{p}_\sigma^{tt} \times (72a) + \bar{\theta}^{tt} \times (72b)$$

Dus moet ook

$$\bar{p}_\sigma^{tt} \bar{\sigma}^\sigma \theta_\sigma + \bar{\theta}^{tt} (p_\sigma \dot{\sigma})_\sigma = (p_\sigma \dot{\sigma} \theta)_\sigma$$

hetgeen echter duidelijk niet het geval is, omdat in het rechterlid geen differentie- en gladstrijkooperaties over t voorkomen. Evenzo is $(p_\sigma \dot{\sigma} \theta)_\sigma$ wel als een lineaire combinatie van $\bar{\sigma}^\sigma \theta_\sigma$ en $(p_\sigma \dot{\sigma})_\sigma$ te schrijven maar deze combinatie is weer niet compatibel met dezelfde lineaire combinatie van $\bar{\theta}_t^t$ en $\bar{p}_{\sigma t}^t$. Voor zover deze discrepanties betrekking hebben op de operaties langs de t -as zijn zij niet zo belangrijk. Maar die langs de σ -as zijn wel belangrijk. Immers, de resolution in the vertical is tamelijk low, zodat $\Delta \sigma$ een niet als klein te beschouwen grootte is en de afwijkingen zijn evenredig met een macht van $\Delta \sigma$. Na veel zoeken is Shuman erin geslaagd, zij het ten koste van de eenvoud, een ingewikkelde schattingsprocedure voor de termen met $\frac{\partial}{\partial \sigma}$ te vinden, die geen al te grote inconsistenties vertoonde. Het hiermede geconstrueerde programma bleek goed te werken. Er traden geen onstabilitäten meer op; integendeel, men kon met het programma over 360 uur (15 dagen) integreren zonder significante onstabilitätsverschijnselen en zonder dat de prognoses patronen opleverden

die als meteorologisch onmogelijk moesten worden gekwalificeerd. De resultaten waren zelfs van een kwaliteit, die vergelijkbaar was met die verkregen met het 3-level model van Cressman. De laatste uitspraak kan nog een preciezere vorm worden gegeven. Men heeft de methode der P.V. als volgt vergeleken met het 3-level model van Cressman: Als vergelijkingssituaties waarop beide methodes werden toegepast werden diegene gekozen waarbij specifieke gebreken van het 3-level model aan het licht waren getreden. Met het verbluffende resultaat dat de methode der P.V. kwalitatief gezien dezelfde fouten maakte, met een grootte-orde van de fout die van die van het 3-level model niet veel afweek.

De situatie is dus nu zo dat de methode der P.V. met veel moeite zover is ontwikkeld dat ze de concurrentie met het barokliene 3-level model met gefilterde vergelijkingen zonder meer aan kan. Shuman's oordeel luidt dat een betere resolution in the vertical, meer niveaus dus, de methode der P.V. meer ten goede zal komen dan de methode met gefilterde vergelijkingen. De argumenten hiervoor worden ontleend aan de opgedane ervaring van de grotere gevoeligheid van de methode der P.V. voor de wijze waarop de vertikale advectietermen worden geschat. (Het 3-level model is tamelijk ongevoelig voor de wijze waarop ω wordt geschat). Men zou een zeer goede resolution in the vertical kunnen verkrijgen door in het model een tropopause als history-carrying-surface op te nemen. Dit is in de methode met gefilterde vergelijkingen onmogelijk. Daar moet men op vooraf gekozen isobarische vlakken werken en indien men hiervoor, zoals in het 4-level model gedaan wordt, o.a. 150 en 300 mb kiest, loopt men een groot risico dat de tropopause en daarmee het niveau van maximale wind tussen 150 en 300 mb blijkt te liggen en dat dan het windprofiel sterk afgevlakt wordt weergegeven. Aan de mogelijkheid de tropopause expliciet in het model op te nemen en daarmee een hoge resolution in the vertical te bereiken moet volgens Shuman grote waarde worden toegekend. Maar dit zijn vermoedens, het bewijs is nog niet geleverd.

6. Slotbeschouwingen

Tot slot dient nog te worden gewezen op een verschil tussen de Duitse en de Amerikaanse wijze van aanpak waaruit leerzame conclusies zijn te trekken. De Duitsers hebben - deels gedwongen, omdat zij lange tijd niet over een eigen machine konden beschikken - uitgebreide theoretische voorstudies gemaakt. Hun kunstgrepen, zoals het invoeren van fictieve warmtebronnen, zijn achter de schrijftafel bedacht. In het Suitland-team werd veel minder getheoretiseerd en een meer pragmatischer aanpak gevolgd waarbij het

zwaartepunt kwam te liggen op het experimenteren met de machine. De Amerikanen kiezen niet a priori uit verschillende mogelijkheden, maar bepalen hun keuze pas nadat zij alle mogelijkheden op de machine hebben geprobeerd op grond van de met de machine opgedane ervaringen. De resultaten hebben hen in het gelijk gesteld. De Duitsers hebben tot nu toe slechts enkele gevallen onderzocht (zie Colloquiumverslag Verbrugh) met meestal in mathematische formules vastgelegde beginvoorwaarden, terwijl men te Suitland thans zover is dat men over een programma beschikt, dat resultaten oplevert, die voor die van het 3-level model niet onderdoen.

Naar de gevoelens van de opstellers van dit rapport dient inderdaad aan de machine een belangrijke functie als instrument voor het uitvoeren van experimenten te worden toegekend en leert de vergelijking van de Amerikaanse met de Duitse ~~aanpak~~ dat men met alleen droogzwemmen geen vooruitgang kan boeken maar wel met proberen en nog eens proberen.

7. Aanhangsel A - De betekenis van het gladstrijken.

Aan de hand van een eenvoudig voorbeeld zal nu worden gedemonstreerd van welke betekenis het door Shuman ingevoerde gladstrijken is.

Beschouw de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (74)$$

met de oplossing $y = y_0 e^{-x}$ (75)

Werkend met voorwaartse differenties vervangt men (74) door de differentievergelijking

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + y_n = 0 \quad (76)$$

met de oplossing $y_n = (1-h)^n y_0$ (77)

Werkend met centrale differenties zonder gladstrijken vervangt men (74) door

$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + y_n = 0$$

of $y_{n+1} + 2h y_n - y_{n-1} = 0$ (78)

Het oplossen van (74) met behulp van (78) stuit op moeilijkheden. Deze zijn door Dr. B. Heyna behandeld in zijn colloquium op 23 oktober 1962.

Werkend met centrale differenties met gladstrijken vervangt men (74) door

$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} - \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2} = 0 \quad (79)$$

of
$$y_{n+1} = \frac{1-h}{1+h} y_{n-1} \quad (80)$$

met de oplossing

$$y_n = \left(\frac{1-h}{1+h} \right)^{\frac{n}{2}} y_0 \quad (81)$$

De vraag is nu welke benadering beter is, (76) of (81).

Stelt men $x = nh$ dan komt (76) overeen met

$$y(x) = (1-h)^{\frac{x}{h}} y_0 \quad (82)$$

en (81) met
$$y(x) = \left(\frac{1-h}{1+h} \right)^{\frac{x}{2h}} y_0$$

De vraag is dus wat beter met e^{-x} overeenkomt $(1-h)^{\frac{x}{h}}$ of $\left(\frac{1-h}{1+h} \right)^{\frac{x}{2h}}$.

Neemt men hiervan de logaritmen dan komt dit neer op de vraag wat beter aansluit bij $(-x)$, $\frac{x}{h} \log(1-h)$ of $\frac{x}{2h} \log\left(\frac{1-h}{1+h}\right)$.

Nu is

$$\frac{x}{h} \log(1-h) = -x \left\{ 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + \frac{h^3}{4} + \frac{h^4}{5} \right\} = -x \left\{ 1 + O(h) \right\}$$

en
$$\frac{x}{2h} \log \frac{1-h}{1+h} = -x \left\{ 1 + \frac{h^2}{3} + \frac{h^4}{5} \right\} = -x \left\{ 1 + O(h^2) \right\}$$

Voor kleine h geeft dus (81) een betere benadering dan (76). Hiermede is dus aangetoond dat dit gladstrijken zijn nut heeft, zelfs in gevallen waarin sprake is van gewone differentiaalvergelijkingen. Uit de vorige paragrafen is echter wel duidelijk geworden, dat het gladstrijken niet automatisch alle moeilijkheden oplost.

8. Aanhangsel B - Afleiding van de krachtvergelijkingen

Hieronder volgt een afleiding van de krachtvergelijkingen (62b).

Indien men invoert

$$\theta = T \left(\frac{p_*}{p} \right)^k \quad k = \frac{R}{c p} \quad (83)$$

$$\pi = \left(\frac{p}{p_*} \right)^k \quad (84)$$

dan vindt men gemakkelijk

$$T = \theta \pi \quad (85)$$

$$p = p_* \pi^{1/k} \quad (86)$$

$$\rho = \frac{p_* \pi^{1/k-1}}{R \theta} \quad (87)$$

Zij nu α een of andere veldfunctie, die enerzijds kan worden uitgedrukt in variabelen (x, y, z) anderzijds in (x, y, σ)

$$\alpha = \alpha(x, y, z) = \alpha(x, y, \sigma) = \alpha \left[x, y, \sigma(x, y, z) \right] \quad (88)$$

Door hiervan een totale differentiaal te nemen vindt men

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_{y, z} dx + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)_{x, z} dy + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} \right)_{x, y} dz = \\ &= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_{y, \sigma} dx + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)_{x, \sigma} dy + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \right)_{x, y} \left\{ \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_{y, z} dx + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)_{x, z} dy + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)_{x, y} dz \right. \end{aligned} \quad (89)$$

waaruit volgt (als de y-component buiten beschouwing wordt gelaten)

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_z = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_\sigma + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \right)_x \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_z \quad (90)$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} \right)_x = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \right)_x \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)_x$$

De vergelijkingen waarvan dient te worden uitgegaan luiden

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - f v + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z &= 0 \\ \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_x &= -\rho g \end{aligned} \quad (91)$$

Nu is

$$\frac{1}{\rho} dp = \frac{1}{\rho} d(p_* \pi^{1/k}) = \frac{1}{\rho} \frac{p_* \pi^{1/k-1}}{k} d\pi = \frac{p_* \pi^{1/k-1} R \theta}{k p_* \pi^{1/k-1}} = \frac{R \theta}{k} d\pi = c_p \theta d\pi \quad (92)$$

Dus mag het stelsel (91) vervangen worden door

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - f v + c_p \theta \left(\frac{\partial \pi}{\partial x} \right)_z &= 0 \\ c_p \theta \left(\frac{\partial \pi}{\partial z} \right)_x &= -g \end{aligned} \quad (93)$$

Hierin moet nu nog de uitdrukking $\left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)_z$ worden vervangen door een in $\left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)_\sigma$.

Stel dus in (90) $\alpha = \pi$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)_z &= \left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)_\sigma + \left(\frac{\partial \pi}{\partial \sigma}\right)_x \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_x \\ \left(\frac{\partial \pi}{\partial z}\right)_x &= \left(\frac{\partial \pi}{\partial \sigma}\right)_x \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right)_x = -\frac{g}{c_p \theta} \end{aligned} \quad (94)$$

Hieruit volgt

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)_\sigma - \frac{\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_z}{\left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right)_x} \frac{g}{c_p \theta} \quad (95)$$

Zodat de vergelijking wordt

$$\frac{du}{dt} - f v + c_p \theta \left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)_\sigma - g \frac{\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_z}{\left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right)_x} \quad (96)$$

Nu volgt uit (90) dat

$$\frac{\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_z}{\left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right)_x} = \frac{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)_z - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)_\sigma}{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)_x} \quad \text{voor alle } \alpha \quad (97)$$

en de lastige factor in het laatste lid (96) kan dus worden vereenvoudigd door geschikte keuze van α in (97). Heel eenvoudig wordt het als men $\alpha = z$ kiest. Dan gaat het rechterlid van (97) over in $-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\sigma$ en komt er dus

$$\frac{du}{dt} - f v + c_p \theta \left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)_\sigma + g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\sigma = \frac{du}{dt} - f v + c_p \theta \left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)_\sigma + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_\sigma \quad (98)$$

in overeenstemming met (62b).

De kracht \mathbf{X} is duidelijk uit twee delen opgebouwd waarvan een de drukgradiënt en de andere de zwaartekracht is, beide voor wat betreft de component die ligt in het hellende vlak $\sigma = \text{constant}$.

HOOFDSTUK IV

AUTOMATIC DATA PROCESSING EN OBJECTIEVE ANALYSE

1. Data processing

Het uitermate belangrijke uitgangspunt voor het opstellen van numerieke verwachtingen is het geschikt maken van de binnengekomen gegevens voor de noodzakelijke bewerkingen. Dit geschikt maken vertoont een aantal aspecten:

- (a) Het brengen in een vorm die voor verdere bewerking geschikt is.
- (b) Het controleren van de gegevens op inwendige verenigbaarheid.
- (c) Het controleren van de gegevens met behulp van hetgeen bekend is van de omgeving op uitwendige verenigbaarheid.

De gegevens komen binnen op de telex en worden onmiddellijk op papertape geponst op de gebruikelijke manier. Maximaal betreft het de gegevens van een zevental circuits, te weten de berichten van de de U.S.A zelf; Europa (Parijs); Azië (Tokio); Moskou; het noordwesten van de U.S.A. (dus dubbel), Canada, Alaska, Aleoeten; de Oostcanadese stations, Groenland, Atlantische Oceaan; Zuid-Amerika waaronder Westindische Eilanden. Een en ander wordt tweemaal per dag opgenomen en wel voor 00 en 12 uur gmt.

Er zijn hierbij uiteraard vele dupliceringen. Al dit op papertape opgenomen materiaal inclusief de duplicaties wordt via een eerst kort (sedert 15 oktober 1961) in gebruik zijnde machine IBM 1011 overgebracht op magneetband en wel op een magnetische tape unit IBM 729 IV. Een en ander gebeurt met behulp van een lichtstraal, die de gaatjes in de papertape aftast met een snelheid van 500 tekens per seconde! Het gehele proces neemt ongeveer 5 minuten (op de IBM 7090) totaal in beslag, uiteraard niet achter elkaar omdat de meteorologische gegevens niet in een dergelijke korte tijd binnenkomen.

Het testen van het materiaal op inwendige verenigbaarheid gebeurt met behulp van de IBM 7090. In de eerste plaats wordt uit het totale materiaal dat tot dusverre niet was gekwalificeerd het aerologische materiaal uitgezocht. Op zichzelf is dit al niet eenvoudig vanwege de onvolledigheid, die de berichten soms vertonen (ontbreken van bloknummers, van de aanduiding "ship", etc.). Zie hiervoor o.a. Bedient en Cressman,

M.W.R. Vol. 85, 1957, 333-340. Eventuele duplicaties worden opgegeven. Daarna wordt zowel het radiosonde- als het windmateriaal nader in beschouwing genomen. Het eerste wordt onderzocht op het voldoen aan de statistische grondvergelijking; bijvoorbeeld wordt nagegaan of het hoogteverschil tussen 500 en 300 mb in overeenstemming is met wat mag worden verwacht bij de heersende temperatuur op 400 mb. Is dit niet het geval, dan wordt nader onderzocht waar de fout ligt.

Het windmateriaal wordt op soortgelijke wijze getest. Nagegaan wordt bijv. of de wind op 400 mb redelijk klopt met het gemiddelde van de wind op 300 en 500 mb. Wat daarbij "redelijk kloppen" betekent is een kwestie van afspraak. De IBM 7090 verwerpt alle gegevens, die niet aan de gestelde criteria voldoen, signaleert alle ontbrekende gegevens en drukt zowel de correct bevonden gegevens als de gesignaleerde tekortkomingen via IBM 716 en IBM 1403 af. Totaal worden daarbij 15 drukniveaus behandeld en wel 1000, 850, 700, 600, 500, 400, 300, 250, 200, 150, 100, 70, 50, 30 en 10 mb. Deze gehele bewerking vereist 8 minuten! Daarbij worden dan ook nog significante levels zowel met betrekking tot temperatuur als tot wind afgedrukt!

Bij het onderzoek naar de uitwendige verenigbaarheid van de gegevens worden deze vergeleken met de geforecaste analyse, die gebaseerd is op de gegevens 12 uur tevoren. Uiteraard kunnen aan deze prog fouten kleven en er is derhalve een afwijking van de nieuwe gegevens t.o.v. de prog vastgesteld, die een bepaalde waarde niet te boven mag gaan. Dit geldt zowel met betrekking tot de geopotential als met betrekking tot de windrichting en de windkracht. Berichten met een grotere afwijking dan de gestelde worden verworpen. Er zal op dit systeem, dat nauw verbonden is met het objectief analyseren, nog worden teruggekomen.

Ten slotte worden alle goedgekeurde gegevens op een blanco vel papier "in kaart gebracht", zodat een visuele controle steeds mogelijk is. Bovendien worden de uiteindelijke gegevens volgens een digitaal systeem op ponskaarten gezet. Het gebruikte materiaal blijft daardoor behouden.

2. Objectieve Analyse

Het objectief analyseren van weerkaarten is oorspronkelijk gedaan met behulp van benadering door polynomen met behulp van de methode der kleinste kwadraten. Aan deze methode kleven bezwaren. Hij is nl. bijzonder geschikt voor interpolatie in gebieden met een dicht stationsnet maar bepaald minder voor extrapolatie naar een gebied met weinig waarnemingen.

De gebruikelijke methode van ontwikkeling rond de verschillende roosterpunten geeft soms aanleiding tot bepaalde soorten van onstabilititeiten

bij verdere bewerking van de forecast. Daarom is een gemodificeerde methode ontwikkeld, die op de IBM 7090 wordt uitgevoerd.

Voor ieder roosterpunt van de kaart wordt een correctie bepaald, die gelijk is aan de som van een aantal termen $C_h = -WE_h$. Daarbij slaat de index h op de hoogte, bijv. van het 850 mb-vlak. E_h is de fout van de geïnterpoleerde waarde van het eerste "guess field", bijv. een 12 hr forecast, vergeleken met de waarneming. W is een gewichtsfactor, die geschreven kan worden als $W = \frac{R^2 - d^2}{R^2 + d^2}$ waarbij R de maximale afstand is waarop nog tot de correctie in het roosterpunt wordt bijgedragen. Men krijgt zo een gecorrigeerde waarde voor ieder roosterpunt waarbij ook met de wind wordt rekening gehouden. Het proces wordt vier maal herhaald waarbij R iedere maal kleiner wordt genomen, zodat er na een eerste afvlakking weer meer structuur in het veld wordt gebracht. (De Japanezen hebben een methode ontwikkeld waarin de omgekeerde weg wordt bewandeld en R dus met elke ronde een grotere waarde krijgt. Zie Masuda en Arakawa [23]). Zijn de afwijkingen tussen geïnterpoleerde waarde en waargenomen waarde te groot, dan wordt de desbetreffende waarneming verworpen, een en ander volgens onderstaand schema waarbij R is uitgedrukt in de roosterconstanten.

	Toelaatbare afwijking			
	R	geop.	wind	temp.
1e scan	4,75	700 ft	90 knts	15 °C
2e scan	3,60	600	70	13
3e scan	2,20	500	70	10
4e scan	1,50	350	60	8
		(200)	(30)	(5)

Voor andere vlakken gelden iets andere toleranties.

Nabij de equator ($\varphi < 30^\circ$) waar het aantal waarnemingsstations gering is vergelijkt men de waarnemingen met $[0,8 \times \text{de forecast waarde} + 0,2 \times \text{de klimatologische waarde}]$. Hier wordt dus, zij het ook summier, klimatologische informatie geïntroduceerd.

Bedraagt het verschil tussen waarneming en interpolatie na de vierde scan nog meer dan 200 ft, 30 knts of 5 °C dan wordt het bericht niet verworpen maar op een lijst gezet, opdat een en ander nog nader kan worden bekeken.

De analyse kan worden afgedrukt met dien verstande, dat de uiteindelijk aanvaarde gegevens op de juiste plaats op een blanco vel papier worden gezet.

Gebruikelijk is het om de analyse automatisch te laten tekenen, hetgeen gebeurt door de Electric Associates Data plotter, een apparaat dat door magnetischetape wordt gevoed en in 3 à 4 minuten de gehele kaart tekent op een afmeting van ca. 75 cm in het vierkant. De data plotter is een op verzoek van het W.B. gemodificeerde versie van een reeds vroeger ontwikkelde apparatuur (waarbij de snelheid is opgevoerd ten koste van de gladheid van de lijnen. Een foto van het toestel en een specimen van een daarmee getekende kaart is te vinden in Proc. Symp. Num. Weather Pred. Tokyo, blz. 52 en 53.

Een van de tekortkomingen, die nog aan de objectieve analyse kleven, is gelegen in het feit, dat het gebruik van winden naast geopotentialen aanleiding geeft tot te hoge anticyclonen en te ondiepe cyclonen. Men denkt er daarom over een gradiëntwindcorrectie toe te passen, hetgeen een betrekkelijk eenvoudige procedure wordt geacht. Een en ander zou kunnen gebeuren door toepassing van de correctie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

die in de balansvergelijking voorkomt.

HOOFDSTUK V

TOEPASSING VAN NUMERIEKE METHODES OP FUNDAMENTEEL ONDERZOEK

Door J. Smagorinsky, het hoofd van de sectie die zich met deze research bezighoudt - een sectie van 10 academici en 15 assistenten, de zgn. General Circulation Research Section - wordt onder fundamenteel onderzoek verstaan al zulk onderzoek waaraan geen enkele uit de praktijk afkomstige vraag ten grondslag ligt. Met name gaat het bij dit onderzoek dus niet om het verbeteren van weersverwachtingen, al is het natuurlijk niet uitgesloten dat uit de behaalde resultaten een beter inzicht in de weersontwikkeling zal voortvloeien.

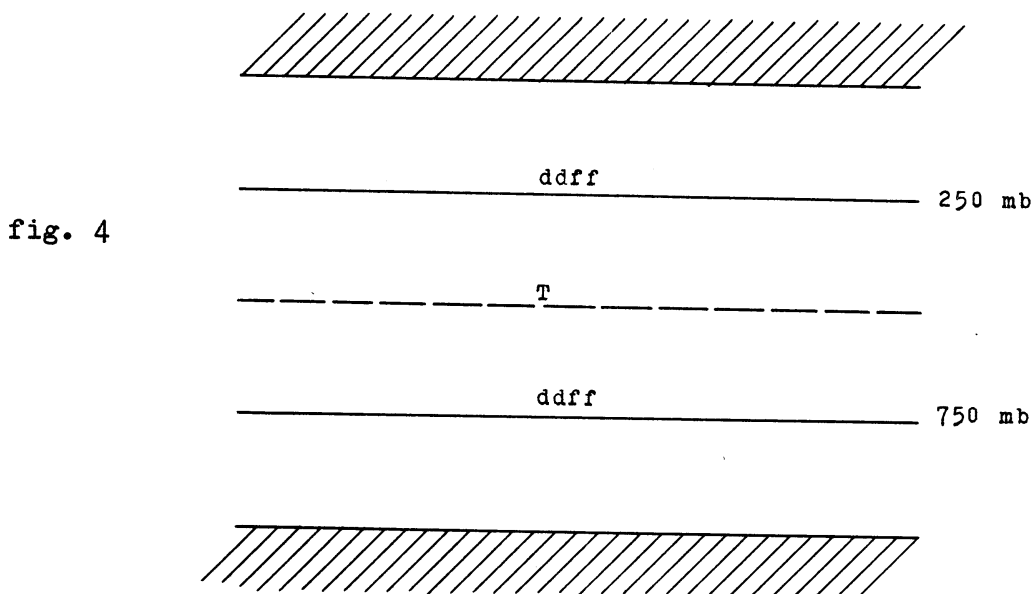
Het belangrijkste onderwerp, dat sedert de oprichting van de sectie nu zes jaar geleden, toen met totaal twee man werd begonnen, in studie is genomen, is de algemene circulatie over de aarde. In principe is hierin zowel de atmosfeer als de oceaan betrokken, hoewel verreweg de grootste aandacht tot dusverre op de atmosfeer was gericht.

Strikt genomen kunnen er twee wegen worden onderscheiden waarlangs het onderzoek zich beweegt:

- (1) Het directe onderzoek van de algemene circulatie volgens modellen van toenemende gecompliceerdheid.
- (2) Detailonderzoekingen met het oog op verbeteringen van het onder (1) genoemde onderzoek. Een voorbeeld van deze tweede groep onderwerpen is het onderzoek naar de straling.

Alle onderzoekingen zijn zodanig gedetailleerd, dat slechts het gebruik van elektronische rekenmachines het mogelijk heeft gemaakt ze aan te vatten. Het meeste rekenwerk is uitgevoerd op de IBM 704; tegenwoordig gebruikt men de 7030. De berekeningen met betrekking tot de algemene circulatie - op het model zal nog worden teruggekomen - zijn gebaseerd op een netwerk van 1300 punten op een Mercator projectie, die zich uitstrekt van 60°N tot 60°S , en worden uitgevoerd in tijdstappen van 20 minuten. Men bepaalt de ontwikkeling van de circulatie in de loop van de tijd en heeft voor drie dagen een uur rekenen op de machine nodig. Voor "klein" werk heeft men een IBM 1620 en sinds begin 1962 heeft men uitsluitend voor de fundamentele research een "stretch-calculator", IBM 7030, die de grootste en snelste machine ter wereld is met een snelheid, die 7 tot 10 maal zo groot is als die van de IBM 7090!

De berekeningen met betrekking tot de algemene circulatie zijn, zoals gezegd, gebaseerd op een strook rond de equator, die zich uitstrekt van 60°N tot 60°S . De beide verticale begrenzingen worden absoluut glad geacht te zijn (geen wrijving). Er is voorts een simpel tweelagen model geïntroduceerd waarbij de temperatuur gegeven is voor 500 mb.



De uitstraling wordt bepaald door σT_{500}^4 , de instraling uit de bekende stralingsgegevens. Wordt nu gepostuleerd, dat een onder invloed van een in- en uitstraling tot stand gekomen circulatie zonaal-symmetrisch moet zijn, dan ontstaat een circulatie volgens de Hadley-celstructuur. Men noemt deze oplossing de "pregenesis" oplossing. Na 60 dagen is deze oplossing min of meer stationair geworden - er zit dus geen onstabieleit in de benadering! - en nu laat men de eis van zonale symmetrie vallen.

Er gebeurt nu het volgende. De Hadley-cel verdwijnt en er ontstaat een circulatie als die, welke in werkelijkheid op aarde wordt aangetroffen met hoge- en lage drukgebieden aan de grond waarin zelfs met enige fantasie fronten kunnen worden getekend en een golfpatroon op 500 mb. Er vindt nu een meridionaal warmtetransport om deze H's en L's plaats en het blijkt, dat dit warmtetransport-mechanisme veel efficiënter is dan dat volgens de Hadley-circulatie.

Bovendien blijkt er een schommeling op te treden met dien verstande, dat situaties met low index en met high index elkaar afwisselen.

De uit deze circulatie bepaalde meridionale flux van warmte en van moment bleek zowel wat de afhankelijkheid van de breedte als wat waarde betreft redelijk overeen te stemmen met de resultaten van Starr en White e.a. Ook hier trad geen onstabieleit op.

Het hier behandelde is slechts bij wijze van voorbeeld van toepassing in het fundamentele onderzoek bedoeld. Van de objecten, die in aanmerking komen om met numerieke methodes te worden onderzocht, kunnen verder nog worden genoemd: tropische cyclonen, convectie, getijden, land- en zeewind.

Vele voorbeelden zijn te vinden in de Proceedings of the International Symposium on Numerical Weather Prediction in Tokyo, November 1960, Tokyo, 1962.

-o-o-o-

HOOFDSTUK VI

TOEPASSINGEN OP DE LUCHTVAART

Het ligt voor de hand bij de toepassingen op het terrein van de luchtvaart van numerieke prognoses in de eerste plaats te denken aan de opstelling van vluchtplannen al dan niet in combinatie met de constructie van minimum-flight-paths. In dit hoofdstuk zal het werk van twee instanties, die zich hiermede bezighouden, worden besproken, nl. van de Military Air Transport Service en de American Airlines.

A. Military Air Transport Service (MATS)

1. Inleiding

MATS is een gouvernementeel luchtvaartbedrijf, dat tot taak heeft het vervoer van personen (meest verlofgangers) en bepaalde niet-militaire goederen (zoals koopwaar voor de krijgsmachtwinkels) te verzorgen naar en van plaatsen waar Amerikaanse strijdmachtonderdelen zijn gelegerd. MATS heeft te Suitland een klein onderdeel gevestigd onder commando van Maj. Saint John en met als voornaamste wetenschappelijke medewerker Mr. Lewis. Dank zij het feit, dat het USWB voor de IBM's 7090 geen volledige dagtaak heeft, kan MATS van dezelfde machine gebruikmaken. Het aanvankelijk nogal ambitieuze programma is de laatste tijd aanmerkelijk ingekrompen. Eerst zal een beschrijving worden gegeven van het oude programma en daarna een van het nieuwe programma, zoals het op dit ogenblik operationeel wordt uitgevoerd.

2. Het vroegere programma

In het oude programma was de gang van zaken als volgt. Tijdens het berekenen van de prognoses op de IBM 7090 door het NWPU werd voor ieder heel uur informatie met betrekking tot alle gridpunten (NHR) op de magnetische band vastgelegd en wel: berekende geopotential van het 500 mb-vlak (H_5), berekende relatieve topografie 850-500 mb (ΔH) en de verticale snelheid (ω) die een maat is voor de divergentie.

Met behulp van dit basismateriaal werd voor een 200-tal luchtverbindingen elk langs 4 of 5 routes de tijd van de totale vlucht berekend en wel voor verschillende met 1000 ft opklimmende hoogten.

Voor het berekenen van een vlucht van A naar B, die 18 uur na het moment van waarneming, T, waarvan de gegevens beschikbaar zijn, zal beginnen, past men de volgende procedure toe.

Om T + 18h vertrekt (op papier) het vliegtuig uit A in een richting naar B, bijv. langs de grootcirkel. Om T + 19 wanneer een uur is gevlogen op de voorspelde gegevens voor T + 18, wordt de vlucht voor het volgende uur langs de grootcirkel bepaald met behulp van de voor T + 19 uur geldende gegevens, enz.

De machine voerde dit voor een aantal routes uit en, zoals gezegd, voor 200 potentiële vluchten. Uiteraard kan iedere vlucht op een willekeurig tijdstip worden begonnen. Het berekenen van deze 200 vluchten (in n-voud wanneer n het aantal uren is waarop de vlucht zou kunnen beginnen) waarbij voor elke vlucht dus een aantal routes op verschillende hoogten wordt berekend en waarbij ten slotte de helft van het aantal berekende vluchten - afhankelijk van de behoefte - wordt afgedrukt, neemt totaal ongeveer 10 minuten in beslag!

Afgedrukt werden de volgende gegevens:

Plaats (evt. als plaatsnaam of als lengte en breedte)

Windrichting en windkracht

True air speed

Ground speed

Zone afstand (per uur gevlogen afstand)

Totale afstand

True course

True heading

Per telex werd aan de belanghebbende op de daarvoor in aanmerking komende vliegvelden de voor iedere vlucht gunstigste route medegedeeld. Aangezien ten tijde dat dit programma nog werd uitgevoerd de prognose slechts het stromingsveld op 500 mb bevatte, moest de wind op andere niveaus worden bepaald uit de 500 mb wind en ΔH . Daartoe werd aangenomen, dat de thermische wind geostrofisch is en dat hiermede lineair geïnterpoleerd mag worden tussen 850 en 500 mb. Men berekende destijds langs deze weg benaderde minimum-flight-paths tussen 8000 en 27000 ft (dus zowel beneden 850 mb als boven 500 mb).

3. Het huidige programma

Het thans in operationeel gebruik zijnde programma is belangrijk eenvoudiger.

Op de magnetische band worden nu de uurlijkse tussenprognoses van 500 (barotroop), 800 en 200 mb gezet, waarbij de laatste 2 uit het 3-level model van Cressman komen. Dat men niet ook de 500 mb prognose uit het 3-level model haalt, maar in plaats hiervan nog de barotrope prognose gebruikt, is uitsluitend een gevolg van de omstandigheid dat men nog niet in de gelegenheid is geweest de daartoe noodzakelijke herprogrammering te verrichten. Op 3 niveaus wordt dus over prognoses beschikt. Indien windprognoses voor andere niveaus nodig zijn worden deze door lineaire inter- of extrapolatie uit deze 3 bepaald. In het algemeen worden thans uitsluitend die routes berekend waarvoor een aanvraag is ingekomen. Aanvrager geeft hierbij op: plaats van vertrek en aankomst, tijd van vertrek, vliegtuigtype en enige routes uit een voorraad van vaste routes, die naar zijn mening in aanmerking komen. Er wordt niet meer getracht een benaderende minimum-flight-path te vinden. Zelfs op hogere niveaus (straalvliegtuigen) wordt in de berekende vluchtplannen de invloed van de temperatuur buiten beschouwing gelaten. De verstrekte gegevens over het vluchtplan zijn dezelfde als boven beschreven.

4. Waardebepaling

Bij de beoordeling van het thans door MATS gevolgde systeem van berekening van vluchtplannen moeten de volgende punten de aandacht hebben:

- (a) De "resolution in the vertical" is "low". Indien de tropopause beneden 200 mb ligt kan dit betekenen, dat de grootte van de maximale wind ernstig wordt onderschat.
- (b) Het niet in rekening brengen van de temperatuur is voor vluchtplannen voor straalvliegtuigen een ernstige tekortkoming.
- (c) Het gebruik van uurlijkse tussenprognoses is alleen mogelijk, omdat MATS van de IBM 7090 van het NWPU gebruik mag maken. Daardoor is deze methode niet geschikt om door anderen te worden gebruikt.

B. American Airlines

De American Airlines (AA) hebben op Idlewild een eigen meteorologische dienst (Hoofd: Mr. Merewether; superintendent: P.E. Kraght). Op deze dienst worden prognostische kaarten getekend van o.a. 500, 400, 300 en 200 mb en van de tropopause. Dit geschiedt manueel en wel onder gebruikmaking van beschikbare hulpmiddelen, zoals de per facsimile verspreide prognoses van het NWPU en van de High Altitude Forecast Section

(Suidland, hoofd: H.K. Saylor). Het gebied waarop gewerkt wordt omvat vrijwel uitsluitend het gebied van Noord-Amerika, waarbuiten de AA als binnenlandse maatschappij geen vluchten heeft. De prognostische kaarten worden getekend voor 0000 en 1200z. De wind- en temperatuurgegevens van de niveaus 500, 400, 300 en 200 mb en die van het niveau van maximale wind, althans indien dat beneden 200 mb ligt, worden nu voor 80 punten op ponskaarten gezet. De 80 punten bestaan uit de vliegvelden waarop de AA vliegt en de punten waar 2 of meer airways elkaar snijden. Voor alle paren van plaatsen waartussen de AA verbindingen onderhoudt wordt nu machinaal een vluchtplan berekend, geldend op de tijd van de dienstregeling. Indien meer dan één airway de beide plaatsen verbindt, selecteert de machine tevens de weg met de kortste tijd. Winden en temperatuur worden lineair gefinterpoleerd tussen 500-400-300-tropopauze-200 mb of 500-400-300-200 mb al naar de tropopauze zich onder of boven 200 mb bevindt.

Voor elk flight plan wordt gebruik gemaakt van 2 series prognostische kaarten, dus van 2 x 80 ponskaarten, nl.

... of die van 0000z en 1200z daaropvolgend

of die van 1200z en 0000z daaropvolgend.

Het eerste paar series wordt gebruikt over het tijdsinterval

1800 - 0000 - 1200 - 1800

en het tweede paar over het tijdsinterval

0600 - 1200 - 0000 - 0600.

De machine interpoleert c.q. extrapoleert winden en temperaturen lineair in de tijd volgens het schema:

1800 - extrapolatie - 0000 - interpolatie - 1200 - extrapolatie - 1800
of 0600 - extrapolatie - 1200 - interpolatie - 0000 - extrapolatie - 0600.

Elke prognostische kaart wordt 12' uur gebruikt. Zijn de 12 uur verstreken en is een nieuwe kaart beschikbaar dan verdwijnt de oudste kaart uit het geheugen van de machine en wordt de jongste, de oudste en de nieuwe kaart ingevoerd.

De berekeningen volgens dit systeem, dat onder supervisie staat van P.E. Kraght, superintendent Upper Air Center American Airlines, worden op weinig kostbare wijze uitgevoerd met betrekkelijk simpele apparatuur, IBM 1620. De vluchtplannen worden via een eigen telexnet naar de door de AA gebruikte vliegvelden verzonden.

Vergelijkt men het systeem van de AA met dat van MATS dan constateert men, dat het eigenlijke vluchtplan bij de AA met meer zorg berekend wordt dan bij MATS. De resolution in the vertical is veel hoger, het niveau van

maximale wind wordt in rekening gebracht en met de invloed van de temperatuur op de prestaties van straalvliegtuigen wordt eveneens rekening gehouden. Het uitgangsmateriaal bestaat evenwel uit op conventionele wijze bereide prognoses. Het kan dus eigenlijk niet als een product van NWP worden beschouwd. Voor een gebruik van NWP-materiaal in het AA-systeem zou het nodig zijn dat het aantal niveaus waarop numerieke prognoses worden gemaakt werd uitgebreid. Daartegenover staat, dat het a priori niet zeker is dat het gebruik van 2 verwachtingstijden met lineaire inter- en extrapolatie veel onnauwkeuriger is dan het gebruik van uurlijkse numerieke tussenprognoses.

-o-o-o-

LITERATUUR

1. L.F. Richardson - Weather Prediction by Numerical Process, Cambridge. Un. Press 1922.
2. B. Lopes Cardozo - Numerieke integratie van de barotrope voorspelingsvergelijking, KNMI, WR 57-008 (II-010), 1957.
3. P. Thompson - Numerical Weather Analysis and Prediction, Mac Millan, 1961.
4. G'Arnason en L.P. Carstensen - The effects of vertical vorticity advection and turning of the vortex tubes in hemispheric forecasts with a two-level model. Mon. Weather Rev. 87 (4). 119. 1959.
5. A. Wiin-Nielsen - On barotropic and baroclinic models with special emphasis on ultra-long waves. Mon. Weather Rev. 87 (5), 171, 1959.
6. G.P. Cressman - Barotropic divergence and very long atmospheric waves. Mon. Weather Rev. 86 (8), 293, 1958.
7. N.A. Phillips - A simple three-dimensional model for the study of large-scale extratropical flow patterns. J. Met. 8, 381, 1951.
8. B. Bolin - Numerical forecasting with the barotropic model. Tellus 1, 27, 1955.
9. G.P. Cressman - Improved terrain effects in barotropic forecasts. Mon. Weather Rev. 88, 327, 1960.
10. H.H. Lettan - Summary of non-dimensional characteristics of boundary layer theory. In: Exploring the atmosphere's first mile, Vol. I, 7.5.4., 356, Pergamon Press 1957.
11. J.S. Sawyer - The introduction of the effects of topography into methods of numerical forecasting. Qu. J. Roy. Met. Soc. 85, 31, 1959.
12. R.S. Scorer - Theory of waves in the lee of mountains. Qu. J. Roy. Met. Soc. 75, 41, 1949.
13. R.C. Sutcliffe en A.G. Forsdyke - The theory and use of upper air thickness patterns in forecasting. Qu. J. Roy. Met. Soc. 76, 189, 1950.
14. H.L. Kuo - On quasi-non divergent prognostic equations and their integration. Tellus 3, 373-383, 1956.
15. F.G. Shuman - Predictive consequences of certain physical inconsistencies in the geostrophic barotropic model. Mon. Weather Rev. 85, 229-234, 1957.

16. K. Gambo - Three-dimensional treatments of equations of motion without using the geostrophic approximation. J. Met. Soc. Japan, Ser. II, 35, 1-11, 1957.
17. A. Wiin-Nielsen - Diagnosis of divergence in a three-parameter numerical prediction model. Mon. Weather Rev. 89, 67-73, 1961.
18. G.P. Cressman - A diagnostic study of mid-tropospheric development. Mon. Weather Rev. 89, 74-82, 1961.
19. G. Arnason - A convergent method for solving the balance equation. J. Met. 15, 220-225, 1958.
20. F.G. Shuman - Numerical methods in weather prediction II. Smoothing and filtering. Mon. Weather Rev. 85, 357-361, 1957.
21. F.G. Shuman - Numerical experiments with primitive equations. Proceedings of the International Symposium on Numerical Weather Prediction Tokyo, November 7-13, 1960; 85-107, Tokyo, 1962.
22. Bo R. Døss - Routine numerical weather prediction in Sweden. Proc. Int. Symp. Numerical Weather Prediction, Tokyo, 21-23.
23. Y. Masuda en
A. Arakawa - On the objective analysis for Surface and Upper Level Maps. Proc. Int. Symp. Numerical Weather Prediction, Tokyo, 55-66.