

K O N I N K L W K N E D E R L A N D S
M E T E O R O L O G I S C H I N S T I T U U T

D E B I L T

WETENSCHAPPELIJK RAPPORT

W.R. 69-3

Speciale Projectgroep Numerieke Voorspelmethode

Beschrijving van Programma's
voor de EL-X8, 1968

De Bilt, 1969

Publikationsnummer: K.N.M.I. W.R. 69-3

No, the future offers very little hope for those who expect that our new mechanical slaves will offer us a world in which we may rest from thinking.

NORBERT WIENER: God and Golem, Inc., 1964

U.D.C.: 551.509.1:
551.509.313:
551.556.8

I. ALGEMENE INLEIDING

1.1 Opzet

In dit verslag van de SPG Numerieke Voorspelmethode wordt een overzicht gegeven van de programma's waarmee de projectgroep spoedig na het in gebruik stellen van de EL-X8 zal gaan werken. De hoofdstukken 2 t/m 5 staan in de volgorde, die overeenkomt met de successieve verwerking van de programma's. Hieraan zijn nog twee hoofdstukken toegevoegd, die de grondslagen behandelen van enkele projecten, die in de toekomst aan de beurt komen. Een tweetal programma's wordt in dit verslag niet beschreven. Over een programma voor de verificatie verschijnt van de hand van drs. van Galen een publicatie in Tellus, terwijl een methode voor objectieve analyse t.z.t. door drs. Kuipers in een aparte publicatie zal worden beschreven.

De manier waarop de programma's worden behandeld, wisselt nogal. Al naar de aard van het programma (en/of de auteur) wordt meer de nadruk gelegd op de wiskundige grondslagen of op de programma-organisatie. De hoofdstukken zijn los van elkaar leesbaar gehouden.

Deze inleiding is verder gewijd aan enkele zaken van algemene aard, die voor de verdere lectuur van belang zijn, maar die onderling weinig samenhang vertonen.

1.2 Stereografische projectie

De aarde wordt geacht een bol te zijn met een straal van 6 371 229 m. Voor de afbeelding van haar oppervlak op een plat vlak wordt een polairstereografische projectie gebruikt van de zuidpool (als projectiecentrum) uit op het vlak door de breedtecirkel van 60° NB als projectievlak.

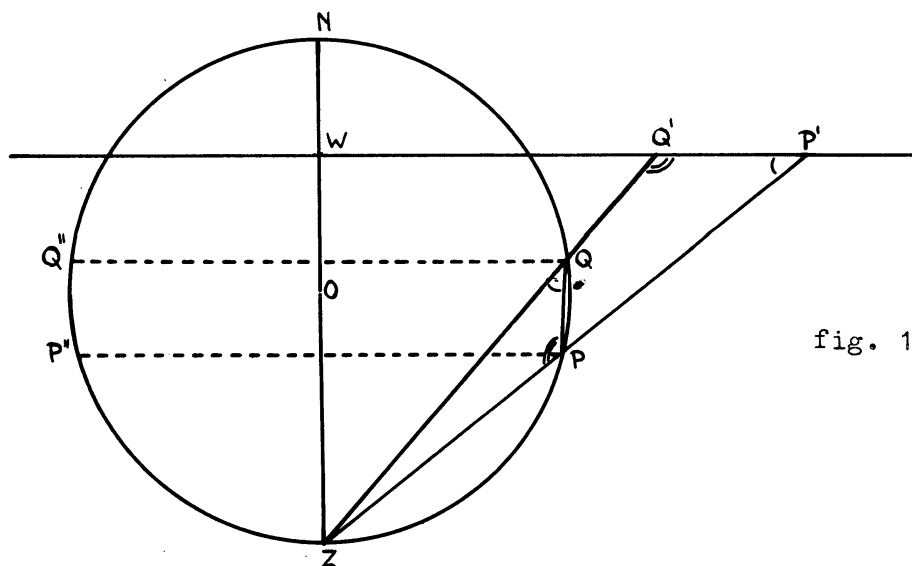


fig. 1.2.1

Een belangrijke eigenschap is, dat de projectie van een cirkel weer een cirkel is.

Bewijs (zie fig. 1.2.1)

$$\angle ZQP = \frac{1}{2} \text{bg } ZP = \frac{1}{2} \text{bg } ZP'' = \angle ZPP'' = \angle ZP'W$$

$$\text{Evenzo } \angle ZPQ = \angle ZQ'P'$$

Dus is PQ antiparallel aan $P'Q'$. In de vierhoek $PQQ'P'$ geldt dus $\angle Q' + \angle P = 180^\circ$ en $\angle Q + \angle P' = 180^\circ$, zodat deze een koordenvierhoek is. Houdt nu P vast, maar laat Q een cirkel op de bol doorlopen, die ook door P gaat. Er is precies één bol (β) door deze cirkel en het vaste punt P' . In het vlak van tekening levert dit een cirkel door P , Q en P' . Daar $PQQ'P'$ een koordenvierhoek is, gaat deze cirkel ook door Q' , d.w.z. de bol β gaat door alle punten Q' . De projectie van de cirkel, die Q doorloopt, is dus de snijfiguur van het projectievlak WP' met de bol β , d.w.z. een cirkel.

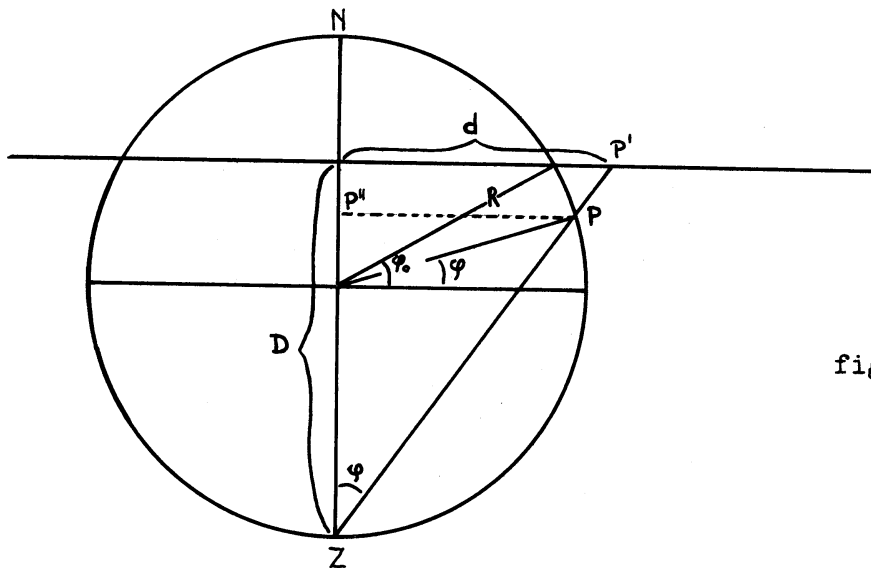


fig. 1.2.2

Van belang is verder de schaalfactor m . Zij φ_0 de breedte waarop het projectievlak de bol snijdt. De schaalfactor m is dan

$$m = \frac{d}{PP''} = \frac{d}{R \cos \varphi} = \frac{D}{R(1+\sin \varphi)} = \frac{1+\sin \varphi_0}{1+\sin \varphi} \quad (1.2.1)$$

want $d = D \operatorname{tg} \psi = D \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{D \cos \varphi}{1+\sin \varphi}$

en $D = R (1+\sin \varphi_0)$.

Hierbij is gebruik gemaakt van de eigenschap, dat een conforme afbeelding in elke richting dezelfde schaalfactor heeft.

1.3 Rekenrooster

Aan het verslag is als bijlage toegevoegd een kaart waarop zijn aangegeven de roosterpunten van het rooster waarop gerekend wordt. De precieze definitie hiervan luidt als volgt. Het rooster bestaat (op de kaart!) uit vierkantjes. De zijden hiervan komen op de bol bij 60°NB overeen met een lengte van 375 km. Bij een schaal van 1:30.000.000 (KNMI Model W39) is de maaswijdte in de kaart dan 125 mm. De oriëntatie is zo, dat één der stelsels evenwijdige lijnen, waaruit het rooster bestaat, evenwijdig loopt aan de meridiaan van 30°WL en de noordpool in het centrum van een vierkantje ligt. Uit het nu nog in alle richtingen tot in het oneindige voortlopende rooster wordt een snede gedefinieerd en een rechthoekig assenstelsel door de volgende afspraken. De oorsprong ligt in de linkerbovenhoek van een rechthoekige snede, de x-as wijst naar beneden, de y-as naar rechts, de maaswijdte wordt als lengte-eenheid gebruikt, de noordpool heeft de coördinaten $x = 6.5$ en $y = 16.5$ en de afmetingen zijn in de x-richting 25 en in de y-richting 32 punten. In totaal zijn er dus $25 \times 32 = 800$ roosterpunten.

Het data-extractie-programma gebruikt een eigen coördinatensysteem. Hiermede wordt bereikt, dat indien in de toekomst zou worden overgegaan op een andere projectie en/of snede, het aantal in de programma's aan te brengen wijzigingen zo gering mogelijk is.

1.4 Programmeertechniek

Daar de lezer niet wordt geacht vertrouwd te zijn met het jargon, waarvan gebruikers van rekenautomaten zich bedienen, is het nodig enkele veelgebruikte termen uit het computerees toe te lichten. Verder zullen hieronder enkele aspecten van de programmeertechnieken aan de orde komen.

1.4.1 Booleans

Een computer zou een waardeloos toestel zijn, als de programmeur geen beslissingen aan het apparaat zou kunnen overlaten. Dit gebeurt met behulp van zgn. conditionele opdrachten, die in het algemeen de vorm hebben van "als doe dan, zo niet doe dan". Het instrument hiervoor is de boolean. Een boolean is een grootheid, genoemd naar de logicus George Boole (1815-1864), die slechts twee waarden kan aannemen: true en false. In het geheugen van de EL-X8 wordt een boolean met waarde true voorgesteld door een positief geheel getal, een boolean met waarde false door een negatief geheel getal. De absolute waarde van deze getallen heeft geen betekenis.

[Bij conditie-zettende opdrachten wordt de waarde van het conditie-register CON gecopieerd in de bits 18 en 26 (tekenbit!) van de opdrachtenteller T. Het ALGOL programmafragment:

```
boolean: = x = 3;
```

wordt vertaald door de compiler tot een stukje objectprogramma, dat schematisch als volgt kan worden weergegeven:

```
A = x           "PAK x
U, A-3, Z       "VERGELUK
S = T,P         "KAN NIET DIRECT DUS VIA S
boolean = S     "STORE _7
```

1.4.2 Arrays

Een array is een grootheid, die van één of meer indices is voorzien, dus een vector, matrix, tensor enz. In plaats van de notatie (met inferieuren) a_{ijk} wordt meestal de notatie $a [i,j,k]$ gebruikt.

1.4.3 Trommel

Het kernengeheugen van de EL-X8 telt (althans bij oplevering) 16 K (K = 1024), dus 16384 woorden. Als achtergrondgeheugen is beschikbaar een trommelgeheugen van 512 sporen, elk met 1024 woorden, dus in totaal $512 K = 524 288 = 2^{19}$ woorden. Slechts de woorden van het kernengeheugen kunnen rechtstreeks naar het rekenorgaan worden gebracht; de woorden op de trommel moeten eerst naar het kernengeheugen worden overgeschreven alvorens ermede gerekend kan worden. Het transport kernengeheugen \longleftrightarrow trommelgeheugen kost ongeveer 0.05 s per 1000 woorden met een minimum van 0.025 s. Dit zijn lange tijden vergeleken met de tijden voor de rekenoperaties, die liggen tussen 5×10^{-6} s en 2×10^{-4} s. Het is dus economisch zoveel mogelijk de transporten te doen plaatsvinden in grote partijen tegelijk. (In het algemeen geldt voor de randtoestellen dat zij pas goed efficiënt werken, als zij zoveel mogelijk ononderbroken aan de praat worden gehouden). Moeten er hele velden (arrays!) worden getransporteerd, dan gaat het min of meer vanzelf goed, maar als de te transporteren getallen in de loop van het rekenproces stuk voor stuk bekend worden (of benodigd zijn) en niet van nature een array vormen, is het verstandig maatregelen te nemen. De techniek waarmee dit gebeurt, staat bekend als wiggelwaggelen. Men gebruikt daarbij in het kernengeheugen twee hulparrays, wiggel en waggel. Telkens (voor een transport naar de trommel) als een nieuw gegeven bekend is geworden, wordt dit in één van de arrays (zeg wiggel) opgeborgen. Is wiggel vol, dan wordt de opdracht gegeven wiggel

in zijn geheel naar de trommel te transporteren. Tijdens het transport wordt aan het programma gewoon doorgerekend maar nieuwe gegevens worden nu tijdelijk in waggel opgeborgen, totdat ook waggel vol is, waarna de beurt weer is aan wiggel. Op analoge wijze wordt het transport in tegengestelde richting georganiseerd. Een speciaal onderdeel van de EL-X8, CHARON genaamd, verzorgt de transporten. (Zijn oudere naamgenoot slechts in één richting, hij in beide!). CHARON werkt geheel onafhankelijk van het rekenorgaan. Op het tijdstip waarop CHARON de trommeltransporten uitvoert, heeft de programmeur geen invloed, slechts de volgorde staat vast. Het is daarom nodig dat er een of andere vorm van geheugenbescherming bestaat, die ervoor zorgt dat het rekenorgaan geen gebruik probeert te maken van nog niet op de kernen aanwezige informatie, noch daar informatie vernietigt die nog naar de trommel moet. In sommige bedrijfssystemen, bijv. dat van het M.C. (Amsterdam) - ERCU (Uithof) is de geheugenprotectie geautomatiseerd en in de software ondergebracht. Bij het Electrologica-systeem is dit niet het geval en moet de programmeur zelf de bescherming organiseren in het programma.

Het is bekend dat in veel programma's de totale verwerkingstijd sterk afhangt van de wijze waarop transporten van en naar achtergrondgeheugens worden georganiseerd. Ook in enkele programma's van de projectgroep speelt de organisatie van de transporten een belangrijke rol.

1.4.4 Schaling en verpakking

Voor de hardware van de EL-X8 geldt, dat hele getallen (mits in absolute waarde $\leq 67\ 108\ 863$) één geheugenplaats in beslag nemen en (decimale) breuken twee. Men kan ruimte besparen door breuken te schalen. Weet men bijv. dat een variabele z een waarde heeft, die tussen vaste grenzen ligt, bijv.

$$0.001 \leq z \leq 0.01 \quad (1.4.4.1)$$

en eist men een nauwkeurigheid van 3 decimalen, dan kan men z vermenigvuldigen met bijv. 10^5 , zodat

$$100 \leq z \cdot 10^5 \leq 1000 \quad (1.4.4.2)$$

$(z \cdot 10^5)$ afronden tot een geheel getal en dit gehele getal een geheugenplaats toewijzen. Bij berekeningen moet men uiteraard (soms) de schaling weer ongedaan maken door vermenigvuldiging met 10^{-5} . Niet altijd, want als er meerdere z 's zijn, die aan (1.4.4.1) voldoen, dan kan men soms bij optelling of aftrekking eenvoudig werken met $(z_3 \cdot 10^5) = (z_1 \cdot 10^5) + (z_2 \cdot 10^5)$ i.p.v. met $z_3 = z_1 + z_2$.

In een programma met veel gegevens is schaling tot gehele getallen vaak een middel om met de beperkte geheugencapaciteit van de machine te woekeren, ten koste uiteraard van de rekentijd verbonden aan het vermenigvuldigen met geschikt gekozen machten van 10, 2 of zomaar een geschikt getal. Mochten de tot een geheel getal geschaalde breuken een array vormen, dat aan trommeltransporten wordt onderworpen, dan wordt enige compensatie genoten, omdat in dat geval het aantal te transporteren woorden wordt gehalveerd. Van de door de projectgroep ontworpen programma's maken die voor de objectieve analyse en die voor de barotrope voorspelling op uitgebreide schaal van schaling gebruik.

Een ander trucje om geheugenruimte te winnen is het verpakken van 2 of meer kleine gehele getallen in één getal. Dit is iets, dat elke meteoroloog uit de meteorologische codes bekend is. Daarin is bijv. Nddff een verpakking van de getallen N ($0 \leq N \leq 9$), dd ($0 \leq dd \leq 99$) en ff ($0 \leq ff \leq 99$) in één getal ≤ 99999 . Maakt men hiervan gebruik, dan kunnen dus in het voorbeeld de 3 gegevens N, dd en ff in één geheugenplaats worden geborgen, wederom ten koste van rekenoperaties zoals

$$V = ff + 100 * dd + 10000 * N$$

voor de verpakking en

$$V_1 = V \div 100$$

$$ff = V - V_1 * 100$$

$$N = V_1 \div 100$$

$$dd = V_1 - 100 * N$$

voor de ontpakking.

[Hierin stelt \div het symbool voor de zgn. heling voor, dat is zoiets als delen-zonder-rest en dat exact gedefinieerd wordt door

$$a \div b = \text{teken van } (a/b) * \text{grootste gehele getal kleiner of gelijk aan absolute waarde van } (a/b)$$

(/= gewone deling)]_7.

Verpakking wordt op uitgebreide schaal toegepast in de programma's voor data-extractie en correctie en in de objectieve analyse alsook bij de uit- en invoerbanden, die de communicatie tussen deze programma's verzorgen.

1.4.5 Leesniveaus

Zoals bekend geschiedt de invoer van gegevens bij de EL-X8 in de meeste gevallen door middel van ponsband. Hierbij kan gebruik gemaakt worden zowel van 5-gats telexband in CCIT2-code als van 7-gats band in MC-Flexowriter-code. Van belang is nu om onderscheid te maken tussen drie leesniveaus.

- (i) Op het meest elementaire niveau (codewoord: REHEP = REad HEptade) worden individuele ponsingen van de banden gelezen. De gaatjes worden als énen en de niet-gaatjes als nullen geïnterpreteerd in de binaire representatie van een geheel getal, valentie genaamd, bijv.

$$[\text{symbool H of } \circ]: \begin{array}{cccc} & & & \vdots \\ & & & \circ \\ & & \circ & \circ \circ \circ \\ & \circ & \circ & \circ \end{array} = 7 = 1x1+1x2+1x4+0x8+0x16$$

16 8 4 2 1

$$[\text{symbool P of p}]: \begin{array}{cccc} & & & \vdots \\ & & & \circ \\ & & \circ & \circ \circ \circ \\ & \circ & \circ & \circ \end{array} = 87 = 1x1+1x2+1x4+0x8+1x16+0x32+1x64$$

64 32 16 8 4 2 1

Deze toewijzing van een getal aan een ponsing geschiedt zonder het in aanmerking nemen van de case-definitie (letterstand-cijferstand bij telexband, upper case-lower case bij flexowriterband). De vraag of de ponsing wel betekenis heeft, wordt eveneens niet gesteld, wat vooral bij flexowriterbanden van belang is, omdat de MC-flexowriter-code een pariteitscontrole kent door het voorschrift, dat alleen ponsingen met een oneven aantal gaatjes mogen worden toegepast.

- (ii) Op een iets hoger niveau (codewoord: RESYM = REad SYMbol) worden symbolen van de band gelezen. Hier speelt dus de case-definitie een rol, terwijl symbolen, die geen betekenis hebben, worden overgeslagen (bijv. valentie 0 of 127 op 7-gats band).
- (iii) Op het hoogste niveau van organisatie (codewoord: READ) worden getallen van de band gelezen. Om dit mogelijk te maken, moeten de banden aan zekere eisen, de zgn. ponsconventies voor getallenbanden, voldoen. Deze worden volledig in de handleidingen beschreven. Hun voornaamste doel is regels te geven waarmede vastgelegd wordt wàar in een stroom van symbolen een getal begint en eindigt. Zo geldt bijv. de regel dat twee of meer spaties, een tabulatie of een regelopvoer een getalscheiding vormen, tenzij zij na het + of - teken (indien aanwezig) en vóór het eerste cijfer komen.
- Een goed ingericht bedrijfssysteem (software) zorgt er automatisch voor, dat de banden die bij uitvoer geponst worden, voldoen aan de ponsconventies voor de invoer van getallenbanden.

Het zal duidelijk zijn, dat een programmeur bij voorkeur van het hoogste leesniveau gebruik zal maken. Kiest hij een lager, dan moet hij zelf in zijn programma de synthese van de gelezen gegevens tot hogere eenheden programmeren. Helaas is het niet altijd mogelijk om het hoogste niveau te gebruiken. Bijv.: Volgens de geciteerde conventies vormen de groepen van 5 cijfers, waaruit de meteorologische berichten zijn opgebouwd, geen getal, omdat zij

slechts door één spatie van elkaar gescheiden zijn. Volgens de ponsconventies is dus meestal één regel van bijv. een TEMP één reusachtig getal, waar natuurlijk weinig mee te beginnen valt. Noodgedwongen moet men dus soms tot een lager leesniveau afdalen. In de programma's van de projectgroep is het vooral het data-extractieprogramma waarin van de lagere niveaus gebruik moet worden gemaakt.

Voor de uitvoer gelden min of meer dezelfde regels. Normaal zal men getallen uitvoeren. Worden er "plaatjes" gemaakt, dan zal op het niveau van symbolen moeten worden geprogrammeerd.

Voor wat betreft het data-extractieprogramma is er enige samenhang tussen de noodzaak op een lager leesniveau te werken en een zekere stroefheid in de programmering in ALGOL 60. Op dit aspect wordt in de volgende paragraaf nader ingegaan.

1.4.6 Programmeertalen

Voor de programmering van de EL-X8 kan men gebruik maken van de autocode ELAN (Electrologica LAnguage) en van de programmeertaal ALGOL 60. De programma's van de projectgroep zijn alle in ALGOL 60 geschreven. Over het algemeen heeft het gebruik van ALGOL 60 geen moeilijkheden opgeleverd. Het is dan ook typisch een taal voor het beschrijven van mathematisch rekenwerk. Ziet men af van enkele punten waarop detailkritiek mogelijk is, dan is de zwakke zijde van ALGOL 60 de wat moeizame wijze waarop men hierin programma's beschrijven moet, die behoren tot wat men "information processing" noemt. Tot de genoemde categorie moet zeker het data-extractieprogramma worden gerekend, zodat het zinvol is na te gaan of een andere manier van programmeren van dit onderdeel in de toekomst voordelen zou bieden.

(a) Sinds 1963 bestaat er een werkgroep van de International Federation for Information Processing (IFIP), die de opdracht heeft een "ALGOL X" te ontwerpen. In januari van dit jaar heeft deze werkgroep (voorzitter Prof. A. van Wijngaarden, Amsterdam) een ontwerp voor een ALGOL 68 gepubliceerd. (A. v. Wijngaarden (editor), B.J. Mailloux, J.E.L. Peck and C.H.A. Koster: Draft Report on the Algorithmic Language ALGOL 68, Amsterdam, Mathematisch Centrum MR 93, jan. 1968). Het ontwerp komt, naar de mening van de schrijver van dit hoofdstuk, tegemoet aan alle wensen, zowel wat betreft de behoefte aan uitbreiding van de mogelijkheden tot beschrijving van rekenprocessen als aan die voor de beschrijving van "information processing". Het ontwerp is echter in de vergadering van de IFIP in augustus 1968 niet aangenomen en over de toekomst van het ontwerp is niets met zekerheid te zeggen. Voor de projectgroep zou

een spoedige invoering door de IFIP van een universele programmeertaal, die een ruimer gebied bestrijkt dan ALGOL 60, van belang zijn, omdat alle programma's dan zonder bezwaren in eenzelfde taal zouden kunnen worden geschreven.

- (b) Een tweede mogelijkheid is de data-extractie geheel in ELAN te schrijven. Dit is echter weinig aantrekkelijk. Het programma is vrij omvangrijk, zodat het een arbeidsintensief project zou zijn om de bestaande ALGOL 60 tekst om te schrijven in ELAN. Daarbij is het nog van belang, dat een programmeur met enige ervaring een ALGOL tekst kan schrijven, die in de meeste gevallen praktisch foutloos is, terwijl men er bij het schrijven van teksten in ELAN rekening mee moet houden, dat het opsporen en verwijderen van de vele fouten die daarbij worden gemaakt ("debugging") op zich zelf al een karwei is.
- (c) Tenslotte kan men denken aan een programma in ALGOL 60 met subroutines in ELAN ("ALGOL procedures met body in code"). Blijkens de tekst van de vertaler (F.E.J. Kruseman Aretz and B.J. Mailloux: The ELAN source text of the MC ALGOL 60 system for the EL-X8, Mathematisch Centrum MR 84, Amsterdam, 1966) is hiervoor in principe de mogelijkheid aanwezig, maar tot dusverre is de benodigde documentatie hierover niet vrijgegeven. Indien hierin t.z.t. verandering komt, zou het zeker de moeite waard zijn de mogelijkheden in studie te nemen.

1.5 Proloog tot de hoofdstukken 2, 3 en 4

Elk waarnemingssysteem, bestemd om de momentane toestand van de atmosfeer vast te leggen, zal noodzakelijkerwijs onvolledige informatie verstrekken, waarvoor drie oorzaken kunnen worden onderscheiden:

- (1) De gemeten variabelen vormen geen volledig stelsel van variabelen. Voorbeeld: de verticale snelheden worden niet gemeten. De praktijk heeft evenwel geleerd, dat bij het huidige waarnemingssysteem toch voorspelling mogelijk is, ondanks het feit dat de begintoestand van de atmosfeer niet volledig is bepaald.
- (2) Het oplossend vermogen van het systeem is eindig. De gevolgen hiervan zijn:
 - (a) Details gaan verloren, zodat op zijn best gladgestreken velden uit de gegevens kunnen worden geconstrueerd.

- (b) Zelfs indien beperking tot gladgestreken velden wordt aanvaard, blijft de steekproeffout (sampling error) over (waarnemingsfouten buiten beschouwing gelaten).

De genoemde gevolgen kunnen ook worden beschreven in termen van spectrale analyse:

- (a) Spectrale componenten, kleiner dan een bepaalde golflengte, blijven onbepaald.
 - (b) De bijdragen van deze componenten tot het veld ondergaan een verkeerde interpretatie, in de zin dat zij worden beschouwd als behorende tot de grotere, oplosbare, componenten, hetgeen bekend staat als "aliasing error".
- (3) Meetfouten (random errors)

Als belangrijkste oorzaak wordt algemeen het beperkte oplossend vermogen beschouwd. In het kader van het Global Atmospheric Research Program wordt hieraan thans veel aandacht besteed. (Zie: ICSU-WMO: Joint GARP Organizing Committee: Report of the first Session of the Working Group on Numerical Experimentation, Oslo, 10-11 July, 1968). De gevolgen van dit beperkte oplossend vermogen van het waarnemingssysteem voor de bepaling van de momentane toestand van de atmosfeer kunnen principieel door geen enkele bewerking van de waarnemingsgegevens ongedaan worden gemaakt. Het is de taak van een detectie-correctie-analyse programma-reeks om binnen de grenzen van de mogelijkheden, die een waarnemings-systeem met beperkt oplossend vermogen toelaat, de waarnemingen optimaal te benutten voor het vastleggen van de toestand van de atmosfeer.

II. AUTOMATISCHE DATA-EXTRACTIE

2.1 Algemene opmerkingen

De uitwisseling van meteorologische informatie vindt plaats d.m.v. elektrische impulsen, die in groepen van 6 worden verzonden. De ontvangen stroomimpulsen kunnen op twee manieren worden aangewend:

- (1) Het activeren van een elektrische schrijfmachine (telex).
- (2) Het activeren van een geheugenorgaan.

In beide gevallen dient de eerste impuls als startsignaal, terwijl de combinatie van de overige zes resulteert resp. in een bepaalde beweging van het drukwerkmechanisme of in het opbergen van de informatie in een geheugen. Het laatste kan zijn een ponsband, magneetband, kernen- of trommelgeheugen.

Bij de eerste methode verschijnt tijdens de uitzending op een blad papier een gedrukte tekst bestaande uit groepen van symbolen (cijfers, tekens of letters) gescheiden door spatie of overgang op een nieuwe regel (NR). De kennisneming en interpretatie van de tekst geschiedt louter visueel. Hiervan wordt soms gebruik gemaakt door in zgn. "verstaanbare taal" opmerkingen te geven, die nodig zijn voor een goede interpretatie van de tekst. Bijv. "sorry, dit bericht was fout" of "hier volgt een herhaling". Voor een goed verstaander van de taal mag dit een waardevolle aanwijzing zijn; voor degene die de taal niet beheerst, kan een dergelijke tekst alleen maar aanleiding geven tot verwarring.

De tweede methode, waarbij de elektrische impulsen tijdelijk worden opbergen in een geheugen, wordt toegepast wanneer men de informatie wil verwerken m.b.v. een rekenautomaat. Een dergelijk apparaat interpreteert een telexbandsymbool als een getal. Weliswaar kan formeel een correspondentie worden vastgelegd tussen deze getallen en de letters van het alfabet, zodat een serie getallen correspondeert met een woord, maar van enige taalkundige interpretatie is geen sprake. Het begrip "verstaanbare taal" verliest elke betekenis. Het is dan ook verwonderlijk, dat in de officiële voorschriften betreffende meteorologische codes het gebruik van verstaanbare taal niet alleen toegelaten wordt, maar in sommige gevallen zelfs verplicht wordt gesteld. Blijkbaar heeft men zich bij het opstellen van de voorschriften nog te veel op het standpunt gesteld van de visuele verwerking van de berichten. Zeer duidelijk komt dit tot uiting in de passage (Meteorologische Codes, 1 april 1968, blz. 200) betreffende de vermelding van de codevorm:

"De eerste regel van de tekst bestaat uit de symbolische naam van de code-vorm (bijv. SYNOP) of uit enige andere term, welke als benaming kan worden "gebruikt." Deze formulering suggereert een grote vrijheid in de naamgeving, waarvan inderdaad ook gebruik wordt gemaakt. Van visueel standpunt is hier-tegen ook niet zoveel bezwaar; men let er nauwelijks op of er bijv. staat SYNOP of SYNOPS. Al ontbreekt de naam geheel, uit de samenhang is meestal direct duidelijk welke codevorm wordt gebruikt.

Bij machinale bewerking is een dergelijke onzorgvuldigheid m.b.t. de code-naam beslist ontoelaatbaar. Voor de herkenning van een bericht is het ge-bruik van een bij afspraak vastgelegde codenaam een noodzakelijke eis. Een afwijking heeft tot gevolg, dat een bericht of een hele serie van berichten verloren gaat.

Behalve een correcte naamgeving is een tweede eis een eenduidige defini-tie van het begin en einde van een bericht. Het voorschrift "ieder afzonder-lijk rapport begint op een nieuwe regel" is beslist onvoldoende. Merkwaar-digerwijze is voor het einde van een bericht wel een bepaald symbool voorge-schreven, nl. "=" . Overigens is het exclusieve gebruik voor dit doel alleen niet vastgelegd, zodat ook hier eenduidigheid ontbreekt.

Terugkomend op het gebruik van verstaanbare tekst merken we op, dat hier-tegen geen bezwaar is, mits aan de volgende voorwaarden is voldaan:

- (1) Het begin en einde van een codebericht is eenduidig gedefinieerd.
- (2) Gebruik van verstaanbare taal binnen een bericht is niet toegestaan.
- (3) De strekking van de verstaanbare taal moet uitsluitend zijn gericht op visuele bewerking en mag dus geen mededeling bevatten waarvan de in-houd noodzakelijk is voor een juiste interpretatie van een voorafgaand of volgend bericht.

Tenslotte wijzen we op een omstandigheid, die ongewenste gevolgen kan heb-ben bij mechanische verwerking, maar die onopgemerkt blijft bij visuele ver-werking. We hebben op het oog dat geen één-één-duidige correspondentie be-staat tussen een reeks van telexbandsymbolen en de tekst, die wordt gepro-duceerd door deze reeks. Anders gezegd: het is mogelijk dezelfde tekst te produceren door twee telexbanden, die niet symbool voor symbool overeenstem-men. Dit moge blijken uit het volgende voorbeeld:

1e band: TW12345

2e band: TW12TW 345

In beide gevallen verschijnt in druk 12345. Bij machinale verwerking evenwel wordt in het eerste geval het getal 12345 gelezen en in het tweede geval twee afzonderlijke getallen, nl. 12 en 345.

Dit voorbeeld is niet verzonnen, maar in de praktijk gesignaleerd. Het demonstreert dat de eisen, die machinale verwerking stelt, in het algemeen strenger zijn dan die van de visuele verwerking. Bij de laatste is typografische correctheid voldoende. Het omgekeerde geval kan zich soms ook voordoen. Wanneer namelijk van de symbolencombinatie TW, NR het tweede deel ontbreekt of verminkt is, dan ontstaat de bij visuele bewerking hinderlijke overprinting. De machinale verwerking ondervindt in dit geval geen enkele moeilijkheid.

In het voorgaande werden enkele problemen genoemd, die zich voordoen bij mechanische verwerking van de telexinformatie. Deze problemen kunnen worden voorkomen door betere voorschriften te maken m.b.t. de uitwisseling van informatie.

Bij de codeberichten waarvoor de projectgroep zich in het bijzonder interesseert, t.w. aërologische berichten, doen zich de genoemde problemen niet voor. Ze zijn onmiddellijk te herkennen aan de kengroep M_1M_1 , welke groep tevens het begin van elk aërologisch bericht aangeeft. Verder komt verstaanbare taal binnen een bericht niet voor. Het is vermoedelijk niet toevallig dat de voorschriften m.b.t. aërologische berichten doelmatiger zijn dan die, welke betrekking hebben op andersoortige berichten. Immers, overal waar mechanische verwerking wordt toegepast, komen aërologische berichten het eerst in aanmerking, zodat het begrijpelijk is dat men aan de uitwisselingsprocedure hiervan de meeste aandacht heeft besteed.

Na deze opmerking zal het verwondering wekken te vernemen, dat het uitgangspunt voor de herkenning van een speciale groep van berichten, nl. TEMP deel A, niet wordt gevormd door de groep M_1M_1 . Hiervoor zijn twee redenen:

- (1) In de praktijk van enkele jaren geleden bleek, dat het kenmerk M_1M_1 te kwetsbaar is, d.w.z. verminkingen kwamen vrij frekvent voor, resulterend in een niet herkennen. Een mogelijke verklaring is, dat betrekkelijk weinig aandacht werd besteed aan het correct opnemen van de groep in het bericht, omdat men niet doordrongen was van het belang hiervan voor herkenning. Afgezien hiervan is het een bekend feit, dat bij het uitvoeren van een serie handelingen de kans op het maken van een fout het grootst is bij het begin en het einde. (Veel van de ongelukken met vliegtuigen en auto's vinden plaats bij vertrek of aankomst).
- (2) De TEMP-code is van die aard, dat een dergelijk bericht onmiddellijk is te herkennen aan het voorkomen van groepen cijfers beginnend met 85 en 70. Op het moment dat deze groepen worden getypt, verkeert de typist(e) reeds enige tijd in een routinebezigheid en is de kans op een typefout gering. Om deze reden is dit kenmerk minder kwetsbaar, wat ook in de praktijk blijkt.

2.2 Doel van het programma

Het doel is drieledig:

2.2.1 Het opsporen (herkennen) van TEMP- en TEMPSHIP-berichten van een voorgeschreven dag en kaartuur.

Om kenbaar te maken welke de dag en het uur zijn, wordt vóórdat het eigenlijke programma begint d.m.v. een getallenband een datum-tijdgroep ingelezen met de symbolische vorm JJMMDDUU. Hierbij is

JJ = jaartaal met weglating van honderdtallen

MM = nummer van de maand

DD = dag van de maand

UU = uur van de dag (gmt).

2.2.2 Het decoderen van het TEMP-bericht (code FM 35.D en FM 36.D) deel A, sectie 1 en 2.

Hoewel de belangstelling tot dusver alleen uitgaat naar gegevens van het 500 mbar-vlak, wordt niettemin het gehele bericht gedecodeerd. In de eerste plaats om het programma een algemeen karakter te geven, zodat geen herschrijving nodig is wanneer men gegevens van een ander drukvlak wil gebruiken. Belangrijker is evenwel de volgende overweging. Door verschillende oorzaken kunnen in het bericht fouten voorkomen. Een mogelijkheid om die te signaleren berust op het feit, dat er een zekere onderlinge afhankelijkheid bestaat tussen gegevens van verschillende drukvlakken. Om praktische redenen werd besloten deze controle door een afzonderlijk programma te laten uitoefenen. Daarom is het noodzakelijk de gegevens van alle drukvlakken uit te voeren.

2.2.3 Het uitvoeren van gegevens d.m.v. een ponsband in een dusdanige code, dat deze gegevens zonder meer op het niveau van READ (zie 1.4.5) kunnen worden ingelezen als invoer van een volgend programma.

De oorspronkelijke telexcode voldoet niet aan deze voorwaarde, alleen al niet wegens het gebruik van de breukstreep om ontbrekende cijfers aan te geven en de faciliteit om in een bericht een correctie aan te brengen d.m.v. de "EEE"-conventie. Bovendien is evenmin voldaan aan de ponsconventie m.b.t. READ.

De uitgevoerde gegevens vormen de basis voor een analyse-programma. Zoals uit de beschrijving daarvan zal blijken, is het noodzakelijk te kunnen beschikken over de geografische coördinaten van de waarnemingsstations. Het is dus nodig deze gegevens in de uitvoercode op te nemen. Voor zover het TEMPSHIP betreft kunnen ze aan het codebericht worden ontleend maar bij de TEMP van een landstation is dit niet het geval. Daarom moeten de

coördinaten van de landstations uit de FASCICULE worden uitgetrokken en na een bewerking via een getalband in het geheugen van de rekenautomaat worden gebracht.

Bij de realisatie van het gestelde doel doen zich enkele problemen voor, die voor de verschillende programma-onderdelen afzonderlijk zullen worden behandeld.

Het onderhavige programma onderscheidt zich wezenlijk hierin van de meeste andere programma's, dat in beginsel de invoergegevens onbekend zijn. Men is volkomen afhankelijk van wat anderen aan invoer verschaffen. Weliswaar gelden er zekere voorschriften maar deze zijn niet altijd streng bindend; men houdt er zich niet altijd aan en bovendien kunnen er ongewild fouten in voorkomen, zowel tijdens de opstelling en de overbrenging als tijdens de ontvangst van de berichten.

Wat betreft de uitvoer, deze heeft men geheel in eigen hand. Dit deel van het programma levert dan ook de minste problemen op, om welke reden de behandeling hiervan het eerst zal worden gegeven.

2.3 Beschrijving van het programma

2.3.1 Uitvoer van het programma

2.3.1.1 Uitvoergegevens

Bij de analyse wordt een station afgebeeld gedacht op een plat vlak d.m.v. stereografische projectie. De ligging van een station wordt vastgelegd door Cartesiaanse coördinaten t.o.v. een assenstelsel. De keuze hiervan kan willekeurig zijn. Hoe deze ook uitvalt, door een lineaire transformatie zijn de coördinaten te berekenen uit die t.o.v. een speciaal assenstelsel, dat als volgt is gekozen.

Oorsprong = noordpool

y-as = meridiaan 180° WL

x-as = meridiaan 90° OL

Lengte-eenheid 0.1 mm bij een schaal 1:25000000 op 60° NB.

Eén lengte-eenheid correspondeert derhalve met 2.5 km ware afstand op 60° NB of 2.68 km op de pool. De motivering wordt later gegeven.

Zoals bekend, wordt bij de analyse eveneens gebruik gemaakt van windgegevens, uitgaande van een relatie, die geacht wordt te bestaan tussen windvector en gradiëntvector van de geopotential. Zij S de herleidingsfactor, gedefinieerd door:

$$|\text{gradiëntvector}| = S * |\text{windvector}|$$

dan geldt:
$$S = \frac{f * E_{\varphi} * E_w}{9.8 * E} \quad (1)$$

Hierin is:

f = Coriolis-parameter = $2 \Omega \sin(\varphi)$

Ω = hoeksnelheid van de aarde = $0.729 * 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1}$

φ = geografische breedte

E_{φ} = ware lengte op de aarde op de breedte φ van een lijnstuk, dat correspondeert met een lengte-eenheid E op de afbeelding bij schaal 1:1.

Hiervoor geldt:

$$E = \frac{1 + \sin(\varphi)}{2} * E$$

Op grond van overwegingen waarop hier niet kan worden ingegaan, was indertijd gekozen $E = 1400 \text{ km}$. Eleganter zou zijn de keuze $E = 2.68 \text{ km}$, in overeenstemming met de lengte-eenheid van het coördinatensysteem dat wordt gebruikt voor de positieaanduiding van de waarnemingsstations. Een wijziging heeft evenwel repercussies op andere programma's, zodat tot nu toe hiervan is afgezien.

E_w = eenheid van windsnelheid = 0.5 m s^{-1}

E_{ψ} = eenheid van geopotential = $1 \text{ geop. dam} = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$

Substitutie van deze grootheden in (1) geeft:

$$S = \frac{\sin(\varphi) * (1 + \sin(\varphi))}{1.921}$$

Om de windcomponenten t.o.v. het gekozen assenstelsel te kunnen bepalen, moet de richting van het geografische noorden worden vastgelegd. Dit geschiedt d.m.v. de geografische lengte van het station.

2.3.1.2 Uitvoercode

Er is naar gestreefd de uitvoer zo compact mogelijk te geven. Door het weglaten van spaties kon worden bereikt dat voor één bericht niet meer dan één regel flexowriterschrift nodig is.

2.3.1.3 Symbolische vorm van de uitvoercode

$$\text{IIiii} + \text{XXXXYYYY} + \text{iLLLSSSS} + 22222 + \underset{k}{H} \underset{k}{H} \underset{k}{H} \underset{k}{T} \underset{k}{T} + \underset{dk}{T} \underset{dk}{T} \underset{dk}{d} \underset{dk}{d} \underset{dk}{f} \underset{dk}{f} \underset{dk}{f} \underset{dk}{f} \quad k=1 \dots 9$$

1. IIiii = indexgroep

In geval van een schip geldt $\text{IIiii} = 99000 + \text{Marsdengetal}$.

2. $\underline{+XXXXYYYY} = 10000 \times x + y$

Hierbij zijn x en y de afgeronde waarden van de coördinaten. De overwegingen, die hebben geleid tot deze manier van verpakking tot één geheel getal, zijn enerzijds de eis dat x en y zo nauwkeurig mogelijk dienen te worden opgegeven, d.w.z. met zoveel mogelijk decimalen en anderzijds door de eis dat de absolute waarde van het verpakte getal ≤ 67108863 moet zijn (zie par. 1.4.4). Hieruit volgt o.m. dat x en y hoogstens uit 4 decimalen mogen bestaan. Een verdere beperking $|x| < 5000$ en $|y| < 5000$ wordt geboden door het feit dat x en y zowel positieve als negatieve waarden kunnen hebben.

Opmerking: de ontpakking geschiedt als volgt:

$$x := \underline{+XXXXYYYY} / 10000;$$

$$y := \underline{+XXXXYYYY} - 10000 \times x;$$

De voorwaarde $|x| < 5000$ en $|y| < 5000$ legt een beperking op aan de te kiezen lengte-eenheid van x en y . Wanneer het te beschouwen gebied zich uitstrekt tot de equator, dan is de minimale lengte-eenheid, gemeten op de pool,

$$\frac{\text{lengte aardaas}}{5000} = \frac{12742}{5000} \text{ km} = 2.5484$$

Dit komt overeen met 2.36 km op 60°NB . Deze waarde is afgerond tot 2.5 km.

3. $\underline{+iLLLSSSS}$

Het symbool i heeft slechts historische betekenis. Momenteel wordt $i = 3$ gesteld.

$\underline{+LLL}$ = geografische lengte van het station, uitgedrukt in de eenheid 0.01 radiaal.

$$\text{SSSS} = 1000 \times S.$$

4. $+22222$ = kengroep als afsluiting van de kop.

5. $\underline{+H_k H_k H_k T_k T_k}$

$H_k H_k H_k$ = "hoogte" van het standaarddrukvlak met rangnummer k (1000, 850, 700, 500, 400, 300, 200, 150, 100 mbar), uitgedrukt in geop. dam, voor $k > 1$. Voor $k = 1$ is de "hoogte" met 50 vermeerderd.

$T_k T_k$ = absolute waarde van de temperaturen. Het teken van de temperatuur wordt bepaald door het teken van de groep.

6. $\pm T_{dk} T_{dk} d_k d_k f_k f_k f_k$

$\pm T_{dk} T_{dk}$ = dauwpuntstemperatuur

$d_k d_k$ = windrichting in 10-tallen graden

$f_k f_k f_k$ = windsnelheid in kts.

Voor de laatstgenoemde twee groepen geldt de conventie, dat een ontbrekend gegeven wordt gemeld door een passend aantal cijfers 9.

Wanneer de decodering voortijdig wordt afgebroken, hetzij doordat tijdens de verwerking een van de controles een negatief resultaat oplevert, hetzij doordat in het oorspronkelijke bericht niet voor alle standaarddrukvlakken gegevens zijn opgenomen, dan worden in de uitvoercode de desbetreffende groepen weggelaten. Het einde van een bericht wordt steeds aangegeven door het symbool \leftarrow .

2.3.1.4 Ponsprocedure

De normale ponsprocedure geeft altijd minstens één spatie. Daarom moest voor ons doel een speciale procedure worden ontwikkeld: POINT, voor het POnsen van INTegers.

2.3.2 Herkenning van een TEMP-bericht

2.3.2.1 Algemene opmerkingen

Bij een programma kan men twee aspecten onderscheiden. In de eerste plaats de principes, die het uitgangspunt vormen voor het bereiken van het gestelde doel en in de tweede plaats de uitwerking van de principes, welke op het vlak van programmeertechniek ligt. Voor het verkrijgen van een inzicht in de opzet en de werking van het programma is voornamelijk de principebeschrijving van belang en leiden programmatechnische bijzonderheden de aandacht van het probleem af. Hoewel het niet altijd mogelijk is beide aspecten los van elkaar te behandelen, is er in het nu volgende naar gestreefd zoveel mogelijk het eerste aspect te belichten, d.w.z. een beschrijving te geven van de principes, die aan het programma ten grondslag liggen.

2.3.2.2 Voorprogramma

Voordat het ADE-programma start, wordt eerst een getallenband ingelezen, aangeduid als FASCICULE¹⁾. Hierop komen voor de stationsgegevens, zoals vermeld in de kop van de uitvoercode, betrekking hebbende op een selectie van 437 stations. (Er is één verschil, nl. dat de indexgroep is

1) Deze getallenband wordt vervaardigd door een afzonderlijk programma.

voorzien van een min-teken in het geval dat het desbetreffende station windsnelheid geeft in $m.s^{-1}$). Deze gegevens worden in drie arrays ingelezen en staan ter beschikking voor aanroep door het programma. De volgorde waarin de gegevens op de getallenband voorkomen, is die van opklimmend indexnummer IIIii.

Vervolgens wordt een band ingelezen met de actuele datum en tijd.

Symbolische vorm: JJMMDDUU, waarbij

JJ = jaartaal met weglating van honderdtallen

MM = nummer van de maand

DD = dag van de maand

UU = kaartuur.

De datum-tijdgroep wordt geponst en vormt het begin van de uitvoer.

In de verdere beschrijving zal gebruik worden gemaakt van het begrip "woord", dat als volgt is gedefinieerd.¹⁾ Een woord is een verzameling symbolen in een gegeven volgorde, voorafgegaan en gevolgd door een zgn. scheidingssymbool, terwijl in het woord geen scheidingssymbolen voorkomen. De scheidingssymbolen zijn spatie \rightarrow TW(terugloop wagen) \leftarrow en NR (nieuwe regel) \equiv

De scheidingssymbolen vormen met de twee case-definities "cijfers" \downarrow en "letters" \uparrow een groep van zgn. non-printing symbolen, die een belangrijke rol spelen bij de sturing van het programma.

Het lezen van de band vindt plaats op het niveau REHEP. Hierbij wordt aan een variabele REHEP de waarde toegekend, die het binaire equivalent (valentie zie par. 1.4.5) is van het ingelezen bandsymbool. Voor ons doel delen we de bandsymbolen in drie groepen in:

- (1) symbolen, corresponderend met de cijfers 0 t/m 9,
- (2) symbolen, corresponderend met non-printing symbolen,
- (3) overige symbolen.

Door middel van een omzettingstabel wordt bij het inlezen van een symbool aan een variabele b als volgt een waarde toegekend:

categorie 1: b = de waarde van het cijfer (0 t/m 9) corresponderend met de valentie van het bandsymbool

categorie 2: b = 11

categorie 3: b = 1000

Met uitzondering van de non-printingsymbolen wordt de waarde van b in een array opgeborgen en wel met een + teken als de laatstgelezen case-definitie "cijfers" is, is deze "letters", dan met een minteken. Blijkbaar behoeft voor de beslissing: al of niet opbergen, slechts eenmaal getest te worden, nl.

1) Niet te verwarren met machine-woord = inhoud van een geheugenplaats.

op de boolean $b \neq 11$. Als de weg te schrijven waarde geen getal 0 t/m 9 is, interesseert het ons niet wat het ingelezen symbool mag zijn geweest, m.a.w. bij deze leesprocedure kunnen alleen cijfers worden onderscheiden; alle andere symbolen worden geïnterpreteerd als "geen cijfer".

Deze enigszins gekunstelde opzet dateert uit de tijd dat als computer ter beschikking stond de veel minder snelle X1. Bepalend voor de duur van het programma was toen de rekentijd, besteed aan de verwerking van één symbool. Het aantal opdrachten dat dit vergt moest derhalve tot een minimum worden beperkt. Bij de ± 100 maal snellere X8 daarentegen wordt de duur van dit programma in hoofdzaak bepaald door de snelheid van de randapparatuur (lezer en ponser). Binnen de duur van het inlezen van één symbool, t.w. 1 ms, kunnen zoveel opdrachten à raison van ± 0.01 ms worden uitgevoerd, dat bezuiniging in het aantal opdrachten vrijwel geen punt van overweging is.

Voordat we, na deze algemene opmerkingen, overgaan tot een beschrijving van het programma, geven we eerst de symbolische vorm van de TEMP-code.

2.3.2.3 Symbolische vorm:

$M_i M_i$	YYGGI _d	IIiii	c.q.	
$M_i M_i$	YYGGI _d	99L _a L _a L _a	Q _c L _o L _o L _o L _o	MMMU _{La} U _{Lo}
99P _o P _o P _o	T _o T _o T _{ao} D _o D _o	d _o d _o f _o f _o f _o		
00h ₁ h ₁ h ₁	T ₁ T ₁ T _{a1} D ₁ D ₁	d ₁ d ₁ f ₁ f ₁ f ₁		
85h ₂ h ₂ h ₂	T ₂ T ₂ T _{a2} D ₂ D ₂	d ₂ d ₂ f ₂ f ₂ f ₂		
70h ₃ h ₃ h ₃	etc.		

2.3.2.4 Principebeschrijving van het programma (zie stroomdiagram)

2.3.2.4.1 Lees een woord, berg het op in het geheugen met toekenning van een rangnummer I en onderzoek of de eerste twee symbolen identiek zijn met 70. Herhaal deze opdracht zolang, tot de toets positief resultaat oplevert. ¹⁾

2.3.2.4.2 Toets op identiteit met 85 van de eerste twee symbolen van het woord met rangnummer I-2, of indien negatief resultaat, van het woord met rangnummer I-3. Is ook dit resultaat negatief, keer dan terug naar 2.3.2.4.1. Levert daarentegen één van deze toetsen een positief resultaat, dan is het vrij zeker dat we hebben te maken met een TEMP resp. zonder of met windgegevens van het 850 mbar-vlak. Zekerheid wordt pas verkregen, indien verder teruggaande een woord wordt aangetroffen

†) In de procedure voor het verwerken van een ingelezen symbool is nog een toets ingebouwd, die later (2.3.3) ter sprake komt.

bestaande uit de symbolen TT. De mogelijkheid bestaat dat door vermindering één van de symbolen T niet aanwezig is. Om een dergelijk geval toch nog te redden, stellen we de eis minder streng door te toetsen op de aanwezigheid van minstens één symbool T:

2.3.2.4.3 Onderzoek of één van de eerste twee symbolen van het woord met rangnummer $1-k$ een T is. Hierbij is $k = 9$. Herhaal de toets, bij negatief resultaat, voor achtereenvolgens $k = 10, 11, 12, 13$ en 14 . Deze ruime marge is nodig, omdat de ruimte tussen het woord TT en het woord $70h_3h_3h_3$ sterk kan uiteenlopen naar gelang het bericht betrekking heeft op een schip of een landstation en/of het al dan niet voorkomen van windgroepen.

Zodra de toets positief resultaat oplevert, wordt het zoeken naar TT gestaakt en begonnen met decodering van het bericht. Mislukt de toets voor alle beschouwde waarden van k , dan keren we terug naar 2.3.2.4.1

2.3.3 Decodering van TEMP en TEMP SHIP

Nadat het begin van het bericht is gevonden, worden de groepen van het bericht één voor één verwerkt. Het kennis nemen van de woorden vindt aanvankelijk plaats door het raadplegen van het geheugen. Evenwel na de groep $70h_3h_3h_3$ moet van de band worden gelezen.

Error-conventie. Zoals bekend kan een foutieve groep in een bericht worden aangegeven door $\langle E E E \rangle$ gevolgd door laatste correcte woord of laatste correcte groep. Deze conventie vraagt een speciale procedure, die nogal tijdrovend is en daarom alleen wordt gebruikt tijdens de decodering na de groep $70h_3h_3h_3$ en niet tijdens de herkenningsprocedure. Het gevolg is dat een TEMP niet wordt herkend wanneer in het eerste gedeelte van het bericht gebruik is gemaakt van de error-conventie.

2.3.3.1 Verwerking van de groep YGGI_d

2.3.3.1.1 Controle op de symbolen.

De eerste 4 symbolen mogen alleen een cijfer voorstellen. Blijkt dit niet het geval te zijn, dan wordt de decodering gestaakt en keert het programma terug naar 2.3.2.4.1.

2.3.3.1.2 Bepaling van de dag van de maand en de windsnelheidsindicator.

Als $YY > 50$ dan ff in kts. Dit feit wordt gememoreerd door een boolean $\langle \text{metriek} \rangle$ false te maken. Vervolgens $YY := YY - 50$; Is $YY \leq 50$ dan metriek := true;

2.3.3.1.3 Bepaling van het kaartuur.

Onder het kaartuur verstaan we de op een 6-voud afgeronde waarde van GG: $GG_3 = \text{entier} ((GG+3)/6) \times 6$.

Is de nieuwe waarde GG = 24, dan moet in het algemeen YY met 1 worden vermeerderd, tenzij YY de laatste dag van de desbetreffende maand is, in welk geval YY = 1 wordt gesteld. Om na te gaan of dit het geval is, wordt YY vergeleken met LM = lengte van de maand. LM wordt bepaald met behulp van de datumtijdgroep, die in het voorprogramma werd ingelezen. Hierbij wordt rekening gehouden met de mogelijkheid van een schrikkel dag, om welke reden eveneens het jaartal bekend dient te zijn.

2.3.3.1.4 Indicator I_d .

Het is efficiënt de betekenis van I_d als volgt te wijzigen:

I_d = aantal drukvlakken waarvan windgegevens zijn opgenomen.

2.3.3.2 Verwerking van de groep IIIii c.o.g. 99L L L
-a-a-a

Het programma kan op twee manieren worden voortgezet, afhankelijk van de eerste twee cijfers van dit woord. Zijn deze \neq 99, dan hebben we te maken met een TEMP, anders met TEMPSHIP.

2.3.3.2.1 TEMP. Opzoeken van het indexnummer.

Het woord stelt in dit geval het indexnummer voor, Met behulp hiervan kan de plaats worden gevonden waar de stationsgegevens zijn opgeborgen, tenminste als het indexnummer voorkomt op de selectielijst.

De indexnummers zijn opgeborgen in een array van 512 elementen. Door toepassing van een speciale techniek behoeft het getal IIIii slechts hoogstens 9 maal met een, mits goed gekozen, element van het array te worden vergeleken om het gezochte rangnummer te vinden van het element waar het indexnummer is opgeborgen, of om te concluderen dat het niet in de lijst voorkomt.

Wanneer k bekend is, kan worden beschikt over de stationsgegevens (zie 2.3.1). Het zijn nl. de elementen met hetzelfde rangnummer van twee andere arrays. Voordat wordt overgegaan tot het geven van een opsopdracht van de 3 groepen, die de kop van het uitvoerbericht vormen, worden eerst nog 3 controles uitgeoefend:

- (1) windsnelheidsindicator: metriek $\stackrel{?}{=} IIIii' < 0$ 1)
- (2) dag van de maand YY $\stackrel{?}{=} DD$
- (3) kaartuur GG $\stackrel{?}{=} UU$

1) De apostrof duidt aan, dat het hier gaat om het indexnummer zoals het in de FASCICULE voorkomt, d.w.z. voorzien van teken.

2.3.3.2.2 TEMP SHIP.

In dit geval stelt de combinatie van de laatste 3 cijfers van het woord de breedte van de positie van het schip voor. Het volgende woord dat wordt ingelezen geeft de lengte en het daaropvolgende woordt het Marsdengetal MMM. Daarna wordt gecontroleerd of MMM identiek is met het Marsdengetal MMM', berekend uit de lengte en de breedte. Is dit het geval, dan worden de Cartesiaanse coördinaten berekend m.b.v. de procedure STEREO. Eveneens worden L en S berekend en de kopgroepen worden geponst.

2.3.3.3 Verwerking van de gegevens aan het aardoppervlak en voor de standaarddrukvlakken

Voor dit deel van het programma is een cyclus geschreven, die maximaal 9 maal wordt doorlopen.

2.3.3.3.1 Lees de groep $P_o P_o h_o h_o h_o$. Controleer de correctheid van $P_k P_k$ door vergelijking met het element $PP[k]$. Vermeerder k met 1.

2.3.3.3.2 Decodeer de hoogte m.b.v. procedure decohoogte.

2.3.3.3.3 Lees de groep $T_k T_k T_{ak} D_k D_k$ en decodeer m.b.v. decotemp.

2.3.3.3.4 Lees het volgende woord, dit is

$$d_k d_k f_k f_k f_k \text{ of } P_k P_k h_k h_k h_k$$

afhankelijk van het feit of al dan niet een windgegeven voorkomt. In theorie wordt uitsluitel verkregen door de waarde van de cyclusteller k te vergelijken met I_d . Hierop kunnen we evenwel niet blindvaren. In de eerste plaats kan I_d verminkt zijn, maar wat veel ernstiger is, de interpretatie van I_d is niet eenduidig. Daarom ook de volgende controle: Als de windgroep ontbreekt, dan moeten de eerste twee cijfers van de groep identiek zijn met $PP[k]$. Het criterium is nu zo gesteld, dat dan en alleen dan wordt besloten tot "geen wind", als beide toetsen in deze richting wijzen. In de overige gevallen wordt aangenomen, dat de beschouwde groep een windgroep is.

Om ervoor te zorgen dat we in het laatste geval in dezelfde fase van de cyclus verkeren als wanneer er geen windgroep is, wordt opnieuw een woord ingelezen.

2.3.3.3.5 Geef ponsopdracht voor de groepen

$$\pm H_k H_k H_k T_k T_k \quad \pm T_{dk} T_{dk} d_k d_k d_k f_k f_k f_k$$

en keer terug naar 2.3.2.3.1.

2.3.3.4 Beëindiging van het programma

Het lezen van de telexband met REHEP biedt de mogelijkheid het einde van de band te constateren. In dit geval wordt namelijk aan REHEP door het bedrijfssysteem automatisch de waarde 512 toegekend. Het programma "vraagt" dan om meer getallenband. Op dit moment kan het programma worden beëindigd door een slotband te construeren, die bestaat uit een reeks van symbolen, die in de praktijk niet voor kan komen. Het zijn de bandsymbolen voor resp. D, F en G, evenwel voorafgegaan door figure shift. De vervaardiging van dit bandje kan geschieden door handponsing of door toepassing van enige kunstgrepen m.b.v. reperforator en telex-apparaat.

Zodra het einde van de band wordt gesignaleerd, springt het programma naar een zijspoor, waar getest wordt op het voorkomen van de genoemde serie van symbolen. Bij positief resultaat wordt het programma beëindigd en de slotgroep 99999 geponst, zo niet dan wordt de opsporing van TEMPs hervat.

2.4 Meervoudige berichten

Aan elk gedecodeerd bericht wordt een rangnummer rn toegekend. Er is een voorziening getroffen, die bewerkstelligt dat aan het einde van het programma getallenparen worden geponst, voorstellende rangnummers van TEMPs, die betrekking hebben op hetzelfde station.

2.5 Duur van het programma

2.5.1 Rekentijd = time

Verwerking van 1000 telexbandsymbolen : 0.73 s.

Decodering van één TEMP-bericht : 0.22 s.

De ingevoerde getallenbanden, met een gezamenlijke lengte van 1250 m, bevatten 500000 symbolen en \pm 400 TEMPs. De totale rekentijd is dus:
time = 365 + 88 = 453 s. = \pm 7.5 min.

2.5.2 Verblijftijd van het programma in de machine = mach

Deze tijd wordt bepaald door:

1. time van het programma
2. Tijd voor inlezen en ponsen, t.w. resp. 1 s. en 6.7 s. per 1000 symbolen. De uitvoer van één TEMP bevat \pm 150 symbolen. Derhalve is de totale bijdrage voor lezen en ponsen $500 + 400 = 900$ s. = 15 min.
3. Tijd voor inleggen van (12) getallenbanden: naar schatting 3 min.

De bijdragen 1 en 2 overlappen elkaar gedeeltelijk. We kunnen dus slechts een bovenste grens voor mach aangeven:

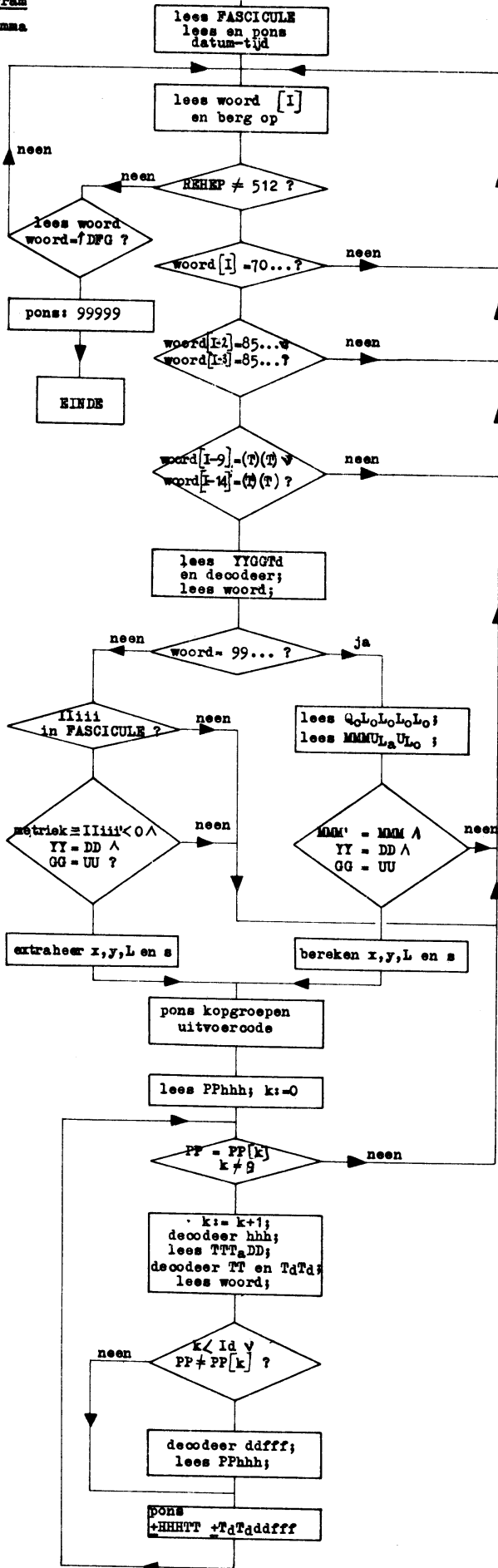
$$\text{mach} \quad 7.5 + 15 + 3 = 25.5 \text{ min.}$$

2.6 Protocollering

Tot dusver is als uitvoermedium genoemd de bandponser. Staat evenwel ook een regeldrukker ter beschikking, dan kan informatie worden verkregen over bijzonderheden, die zich voordoen tijdens de uitvoering van het programma.

1. Beschikbare geheugenruimte.
2. Voor iedere telexband afzonderlijk
 - 2.1 stations, die niet op de FASCICULE voorkomen
 - 2.2 mislukte teetsen wegens
 - 2.2.1 windsnelheidseenheid
 - 2.2.2 dag of kaartuur
 - 2.2.3 Marsdengetal
 - 2.3 aantal symbolen op de band
 - 2.4 time
 - 2.5 aantal TEMPs
3. Aanduiding van rangnummer bandsymbool van het begin van een TEMP waarvan de decodering voortijdig is afgebroken.
4. Ranglijst van gedecodeerde TEMPs volgens de code IIIiirn (rn = rangnummer) gerangschikt naar opklimmend indexnummer.

2.7 Stroomdiagram
ADE-programma



III. DATA-CORRECTIE

3.1 Doel van het programma

3.1.1 Detectie van fouten

In het gedecodeerde bericht kunnen fouten voorkomen als gevolg van fouten in het oorspronkelijke bericht. Het programma controleert voorlopig alleen gegevens betreffende de hoogte en de wind.

3.1.2 Bepaling van gecorrigeerde waarden

3.1.3 Eliminatie van meervoudige berichten

3.1.4 Uitvoer van gecontroleerde en eventueel gemodificeerde gegevens van een te kiezen standaarddrukvlak

3.2 Principe voor het opsporen van fouten

De variabelen waarop de opgegeven waarden betrekking hebben, zijn stochastische variabelen waarvan de gemiddelde waarde en de standaarddeviatie σ bekend zijn. Uitgaande van de veronderstelling dat de verdeling normaal is, is de kans dat de absolute afwijking¹⁾ de grens 3σ overschrijdt, slechts 2.6 ‰.

Op grond hiervan kunnen we een verwerpingscriterium stellen, nl.: een waarde wordt als fout aangemerkt, indien de absolute afwijking de waarde 3σ overschrijdt.

Blijkens het zojuist opgemerkte kan worden verwacht, dat in 1 op 380 gevallen een waarde ten onrechte wordt verworpen. Omgekeerd is het criterium geen voldoende voorwaarde voor het als correct aanmerken van een waarde. In onderstaande tabel is aangegeven hoe groot de kans is dat een werkelijke fout van gegeven grootte door dit criterium wordt ontdekt.

grootte van de fout	kans op ontdekking	
	3σ -grens	2σ -grens
σ	0.023	0.159
2σ	0.159	0.500
3σ	0.500	0.841
4σ	0.841	0.977
5σ	0.977	0.999
6σ	0.999	1.000

1) Onder absolute afwijking verstaan we de absolute waarde van de afwijking t.o.v. het gemiddelde.

Hieruit blijkt dat alleen grote fouten een redelijke kans maken om ontdekt te worden. Weliswaar kan deze kans worden vergroot door de tolerantiegrens te stellen op bijv. 2σ (3e kolom) maar daar staat tegenover, dat de kans op verwerping ten onrechte, eveneens toeneemt, nl. tot 0.046 of 1 op 22 gevallen. Er zal dus een compromis moeten worden gevonden wat betreft de waarde van k in de tolerantiegrens $k\sigma$.

Tot nu toe is σ beschouwd als een gegeven constante grootheid. Dit is inderdaad het geval wanneer we de afwijking van het gemiddelde, z , als losstaande grootheid beschouwen. Anders wordt het, wanneer we z zien als een element van een verzameling bestaande uit de waarden z_i van een aantal drukvlakken. Zoals bekend, zijn de elementen van die verzameling onderling gecorreleerd. Dit betekent, dat de verdeling van z van een bepaald niveau bij een gegeven waarde van de omliggende niveaus een kleinere standaarddeviatie heeft dan bovengenoemde σ en in het algemeen een ander gemiddelde. Deze, zo te noemen, conditionele standaarddeviatie σ_c is kleiner naarmate de onderlinge correlatie groter is. Dit biedt dus een middel om bij gegeven k , kleinere fouten op te sporen.

3.3 Uitwerking van het principe

Het opsporen van fouten vindt in twee stappen plaats. In de eerste fase is het foutencriterium gebaseerd op tolerantie van 3σ , waarbij σ de niet-conditionele standaarddeviatie en de afwijking betrekking heeft op het niet-conditionele gemiddelde m . Bij dit procédé worden voornamelijk grote fouten gesignaleerd, bijv. in de honderdtallen van de geopotential. Dergelijke fouten, die het gevolg kunnen zijn van typefouten, zijn bijzonder storend, niet alleen bij de analyse waarvoor de gegevens uiteindelijk worden gebruikt, maar ook in de tweede fase van de foutendetectie.

Het probleem waarom het gaat in de tweede fase is de bepaling van het gemiddelde en de standaarddeviatie van bijv. z_4 (500 mbar) bij gegeven waarden van z van de overige drukvlakken. Dit gemiddelde kan worden beschouwd als een schatting van z_4 , gebaseerd op de actuele waarde van $z_1, z_2, z_3, z_5 \dots z_9$. Deze schatting kan worden gemaakt door toepassing van multipale correlatierekening. Dit vraagt echter betrekkelijk veel machinetijd, omdat een matrix van de orde 9 moet worden geïnverteerd. Om deze reden is een andere methode ontwikkeld, die behalve een kortere rekentijd, het voordeel heeft dat de controle in zekere zin gelijktijdig voor alle niveaus wordt uitgeoefend.

3.3.1 Transformatie van parameters

Het uitgangspunt is de introductie van nieuwe parameters a_k , die lineaire combinaties zijn van de oorspronkelijke. De combinaties zijn op een bijzondere manier gekozen. Waardoor die keuze wordt bepaald, kan het beste worden aangegeven wanneer we uitgaan van de inverse transformatie:

$$z_i = \sum_{k=1}^9 P_{ik} a_k \quad (1)$$

Breken we de reeks af bij een kleiner aantal termen dan 9, dan kan het rechterlid beschouwd worden als een benadering van z_i :

$$\hat{z}_i = \sum_{k=1}^n P_{ik} a_k \quad n < 9 \quad (2)$$

We stellen nu de eis dat de verwachtingswaarde van de gekwadrateerde afbreekfout gesommeerd over i minimaal is

$$\mathcal{E} \sum_{i=1}^9 (z_i - \hat{z}_i)^2 = \text{minimaal}$$

Het kan worden aangetoond, dat aan deze voorwaarde dan en alleen dan is voldaan, als de kolommen van de transformatiematrix de genormeerde eigenvectoren voorstellen van de covariantiematrix Z van z_i . Gemakshalve veronderstellen we dat z_i de afwijking t.o.v. het gemiddelde voorstelt. In dit geval geldt:

$$Z_{ij} = \overline{z_i z_j} \quad (3)$$

De oorspronkelijke transformatie kan nu worden geschreven als

$$a_k = \sum P_{ki}^T z_i \quad (4)$$

We zullen laten zien, dat het voorgaande ons in staat stelt zonder veel rekenwerk een schattingsformule voor z_i af te leiden. De methode berust hierop dat de variantie van a_k snel afneemt met toenemende k , wat te danken is aan de correlatie. De snelle afname heeft tot gevolg dat de variantie van de afbreekfout in (2) na bijv. 4 termen klein is t.o.v. de variantie van z_i . Hiervoor geldt de formule

$$\text{var } f_i^{(n)} = \sum_{k=n+1}^9 P_{ik}^2 \text{ var } a_k \quad (5)$$

Berekenen we dus m.b.v. (4) de eerste 4 nieuwe parameters a en substitueren we deze in (2), dan hebben we een goede benadering van z_i :

$$\hat{z}_i = \sum_{k=1}^4 P_{ik} \sum_{j=1}^9 P_{kj}^T z_j \quad (6)$$

Wanneer we vervolgens aantonen dat deze schatting van z_i betrekkelijk ongevoelig is voor een fout in z_i , dan blijkt dat het verschil $f_i = z_i - \hat{z}_i$ als toetsingsgrootte voor het signaleren van een fout kan worden gebruikt. Hiertoe moet het probleem numeriek worden uitgewerkt.

De covariantiematrix Z , betrekking hebbend op de hoogte van de standaarddrukvlakken, is bepaald aan de hand van een vrij kleine steekproef van 43 exemplaren. De eerste 4 eigenvectoren zijn:

$$P^T = \begin{matrix} -0.146 & -0.188 & -0.245 & -0.340 & -0.393 & -0.450 & -0.450 & -0.374 & -0.261 \\ -0.512 & -0.406 & -0.323 & -0.212 & -0.105 & -0.059 & +0.237 & +0.391 & +0.448 \\ +0.418 & +0.316 & +0.166 & -0.113 & -0.267 & -0.420 & -0.140 & +0.198 & +0.615 \\ +0.132 & +0.118 & +0.044 & -0.136 & -0.403 & -0.259 & +0.669 & +0.236 & -0.464 \end{matrix}$$

Substitutie in (6) geeft voor $i = 4$

$$\hat{z}_4 = 0.093 z_1 + 0.098 z_2 + 0.127 z_3 + 0.193 z_4 + 0.240 z_5 + 0.238 z_6 + 0.028 z_7 - 0.011 z_8 - 0.013 z_9 \quad (7)$$

Voor de bepaling van de variantie van de schattingsfout moeten we beschikken over de elementen van de 4e kolom en de variantie van a_k .

k	P_{k4}^T	var a_k / dam^2
1	-0.340	1970.6
2	-0.212	91.37
3	-0.113	38.21
4	-0.136	6.56
5	-0.498	2.14
6	-0.199	1.43
7	-0.169	1.19
8	+0.452	0.80
9	+0.536	0.24

Substitutie in (5) geeft: var $f_4^{(4)} = 0.851 \text{ dam}^2$ of $\sigma_c = 0.92 \text{ dam}$.

Uit (7) blijkt dat de schatting van z_4 inderdaad betrekkelijk ongevoelig is voor fouten in z_i , immers de gewichtsfactoren zijn belangrijk kleiner dan 1. Voor de toetsingsgrootte f_4 kunnen we schrijven:

$$f_4 = z_4 - \hat{z}_4 = -0.093 z_1 - 0.098 z_2 - 0.127 z_3 + 0.807 z_4 - 0.240 z_5 - 0.238 z_6 - 0.028 z_7 + 0.011 z_8 + 0.013 z_9 \quad (8)$$

Gesteld dat één van de waarden z_i behept is met een fout van 10 dam, dan blijkt uit deze formule dat het effect hiervan op de toetsingsgrootheid in absolute zin het volgende bedraagt resp. voor $i = 1 \dots 9$

$$1, 1, 1, 8, 2, 2, 0, 0, 0 \quad \text{dam}$$

Wanneer er geen fouten zijn, dan is het interval waarin f_4 in 997.4 % van de gevallen ligt $[-3\sigma_c, 3\sigma_c]$ of $[-2.8, 2.8]$ dam.

Zouden we de $3\sigma_c$ -grens als criterium voor verwerping van z_4 hanteren, dan wordt een fout van 10 dam in z_4 resulterend in een fout van 8 dam = $8.7\sigma_c$ in f_4 , praktisch altijd gesignaleerd. Het criterium is dus wel voldoende, maar niet noodzakelijk. De toetsingsgrootheid kan immers ook de gestelde limiet overschrijden als gevolg van een fout in een naburig niveau. Bij berekening blijkt dat een fout van 10 dam in z_5 in 27% van de gevallen aanleiding zou geven tot een verwerping ten onrechte. Ook hier is de keuze van de tolerantie een kwestie van een compromis. Een beslissing hierin is ontstaan op grond van de praktijk.

Het is wellicht mogelijk een verbetering in de procedure aan te brengen door de tweede fase van de detectie opnieuw in twee of meer fasen uit te voeren. Uit het voorgaande is immers wel gebleken dat een fout zich het sterkst manifesteert in de toetsingsgrootheid van het desbetreffende drukvlak. Voeren we de toetsing in eerste instantie uit voor alle niveaus, dan kan worden uitgemaakt waar zich de fout bevindt. In een volgende ronde wordt de verdachte waarneming buiten beschouwing gelaten en worden de overblijvende opnieuw getoetst maar nu met een kleinere tolerantie.

3.3.2 Ontbrekende gegevens

Het komt voor dat van sommige niveaus het gegeven ontbreekt, doordat dit in het oorspronkelijke bericht het geval is, of als gevolg van het verwerpen van een gegeven in een voorafgaande fase. De voorgaande beschouwingen moeten nu in zoverre worden gewijzigd, dat de inverse transformatiematrix niet meer de gespiegelde is van de matrix P .

De inverse transformatie kunnen we afleiden door de in matrixvorm geschreven verg. (1) te vermenigvuldigen met P^T :

$$P^T z = P^T P a \quad (9)$$

De matrix $P^T P$ is niet singulier, dus (4) gaat nu over in:

$$a = (P^T P)^{-1} P^T z \quad (10)$$

3.3.3 Invloed van meetfouten

Behalve de tot nu toe genoemde fouten als gevolg van overbrenging enz. zijn er ook fouten als gevolg van onnauwkeurigheid van de waarnemingen. Deze hebben een storende invloed op de schattingsprocedure. Het kan worden aangetoond dat het effect van deze fouten minimaal kan worden gemaakt door de elementen van de hoofddiagonaal van de matrix $P^T P$ te vermeerderen met de term $\text{var } e / \text{var } a_k$. Hierbij is $\text{var } e$ de variantie van de meetfout. Definiëren we dus de matrix M als volgt:

$$M_{ij} = (P^T P)_{ij} + \delta_{ij} \text{var } e / \text{var } a_j \quad (11)$$

dan wordt de transformatieformule voor a :

$$a = M^{-1} P^T z \quad (12)$$

3.4 Beschrijving van het programma

3.4.1 Voorprogramma

Voordat het eigenlijke programma begint, worden de volgende gegevens ingelezen:

- 1.1 n = aantal nieuwe parameters, dat wordt gebruikt bij het maken van een schatting van z .
- 1.2 $HG[k]$ de gemiddelde waarden van hoogte van de standaarddrukvlakken.
- 1.3 $HS[k]$ standaarddeviatie van die hoogten.
- 1.4 Eigenvectoren van de covariantiematrix van z .
- 2.1 L = lengte-eenheid L (op $60^\circ NB$)
- 2.2 λ_y = WL-neg. y -as
- 2.3 λ_o = WL oorsprong
- 2.4 φ_o = NB oorsprong
- 2.5 th = tolerantie hoogte
- 2.6 tw = tolerantie windcomponenten
- 2.7 nn = nummer van het standaarddrukvlak waarvan de gegevens moeten worden uitgevoerd.

} van het nieuwe
coördinatensysteem

Met behulp van de gegevens 2.1 t/m 2.4 worden de coëfficiënten van de transformatieformules berekend.

$$X = a_1 x + a_2 y + a_3$$

$$Y = b_1 x + b_2 y + b_3$$

Zij $\lambda = \lambda_o - \lambda_y$ en R = aardstraal, dan geldt

$$\begin{aligned} a_1 &= b_2 = 2.5/L \times \cos \lambda \\ b_1 &= -a_2 = 2.5/L \times \sin \lambda \\ a_3 &= R/L \times (1+\sin 60) \times \cos \varphi / (1+\sin \varphi) \times \sin \lambda \\ b_3 &= R/L \times (1+\sin 60) \times \cos \varphi / (1+\sin \varphi) \times \cos \lambda \end{aligned}$$

De herleidingsfactor S zoals voorkomend in de invoergegevens is gebaseerd op een lengte-eenheid van 1400 km (op de pool), wat correspondeert met $(1+\sin 60)/2 \times 1400 = 1306$ km op 60° NB. Bij een lengte-eenheid L moet S worden herleid tot

$$S: = L/1306 \times S$$

De omrekeningsfactor L/1306 wordt eveneens in het voorprogramma bepaald.

3.4.2 Hoofdprogramma

In het programma worden gecontroleerd de gegevens betreffende de hoogte en de twee windcomponenten. De bewerkingen zijn voor elk van deze drie elementen vrijwel dezelfde. Daarom zullen, om de beschrijving zo overzichtelijk mogelijk te houden, alleen bewerkingen die betrekking hebben op de hoogte worden genoemd. Verder worden bewerkingen, toegepast op de elementen van een vector, niet alle afzonderlijk aangeduid.

3.4.2.1 Lees en pons de datum-tijdgroep = DTG.

3.4.2.2 Lees Iliii, als Iliii = 99999, dan duidt dit op het einde van de invoer; het programma springt dan naar 3.4.3.

3.4.2.3 Lees de gegevens van één bericht. Het einde van het bericht is te herkennen aan het symbool \leftarrow . Om dit symbool te kunnen lezen, moet een bijzondere voorziening worden getroffen. De tot nu toe genoemde gegevens werden gelezen m.b.v. READ, welke procedure het symbool \leftarrow skipt. Daarom wordt na elke READ-opdracht m.b.v. RESYM onderzocht of mogelijk dit symbool voorkomt, dat dus kennelijk niet door een spatie van het voorgaande getal mag zijn gescheiden. Komt, als regel, het symbool \leftarrow niet voor, dan is ongewild het teken van het volgende getal reeds gelezen en zou dus verloren gaan bij het lezen van dat getal met READ. Aan dit bezwaar kan worden tegemoet gekomen door de procedure BACKSYM, die het met RESYM gelezen symbool a.h.w. terugduwt in het inputmagazijn, zodat het opnieuw ter beschikking komt voor READ.

3.4.2.4 Transformeer x en y tot X en Y en onderzoek of de waarden binnen de afgesproken snede uit de kaart (para. 1.3) liggen. Zo niet, keer terug naar 2.2.

3.4.2.5 Aan de elementen van een array HH [1:9] worden als volgt waarden toegekend:

HH = 999 als de waarde HHH van het desbetreffende drukvlak niet voorkomt, of wanneer deze de 3σ-grens overschrijdt:

$$|HHH-HG| > 3 \neq HS$$

HH = HHH-HG in de overige gevallen.

Verder wordt aan de elementen van een boolean array bh [1:9] in bovengenoemde gevallen de waarde false resp. true toegekend.

3.4.2.6 Bereken de matrix M en de vector P^T HH met inachtneming van het niet voorkomen van sommige uitgangsgegevens, kenbaar aan de boolean bh.

3.4.2.7 Los a op uit M.a = P^T HH en bereken HE = P.a.

3.4.2.8 Onderzoek of reeds eerder een bericht van een station met dezelfde X en Y als het in behandeling zijnde is verwerkt. Zo neen, berg dan in arrays op de gegevens Iiiii, X, Y, H en HE.

Zo ja, vervang deze gegevens van de oude versie door die van de nieuwe versie mits bh = true en bovendien |HH-HE| van de nieuwe versie kleiner is dan |HH-HE| van de oude versie.

Keer terug naar 3.4.2.2.

3.4.3 Uitvoer

3.4.3.1 Aan elk opgeborgen bericht wordt een type-nummer toegekend (zie par. 4.3.1). Ten dienste van de bepaling van het type-nummer en de verzorging van de lay-out worden de volgende booleans ingevoerd:

hoogte := HH ≠ 999 hoogtegeven aanwezig en binnen 3σ-range

wind := UU ≠ 999 windgeven aanwezig en binnen 3σ-range

hoogtefout := hoogte abs (HH-HE) > th

windfout := wind ∧ (abs (UU-UE) > tw ∨ abs(VV-VE) > tw)

fout := hoogtefout ∨ windfout

Bij het assignment van deze booleans wordt dus de tweede controle toegepast.

Symbolische vorm van de uitvoer:

$$tt \quad \underline{+XXXX} \quad \underline{+YYYY} \quad HHH \quad \underline{+UUU} \quad \underline{+VVV}$$

tt = type-nummer

+XXXX = 100 ≠ X

+YYYY = 100 ≠ Y

Verder is de volgende regeling getroffen. Indien fout = false wordt één codebericht uitgevoerd, anders twee berichten. Voor het eerste bericht geldt t.a.v. de laatste drie groepen:

HHH = HH + HG als hoogte = true

HHH = 0 als hoogte = false

en analoog voor ±UUU en ±VVV.

Voor het eventuele tweede bericht geldt:

HHH = 0 als hoogte = false

HHH = HH + HG als hoogtefout = false } en hoogte = true

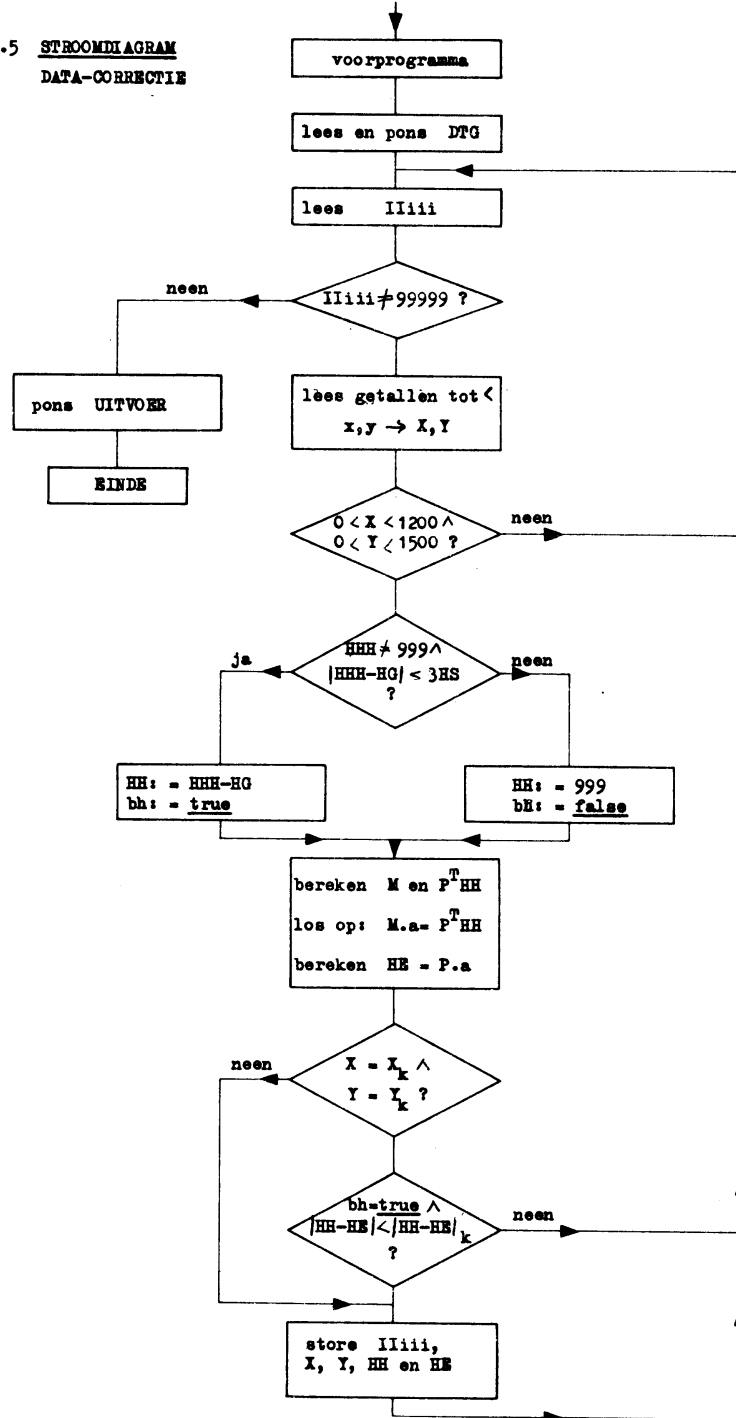
HHH = HE - HG als hoogtefout = true }

Deze gegevens worden station voor station uit het geheugen geëxtraheerd en geponst.

3.4.3.2 Pons het getal -11111 als afsluitingssymbool.

3.4.3.3 Rangschik de indexnummers volgens opklimmende grootte en voer deze uit via de regeldrukker.

3.5 STROOMDIAGRAM
DATA-CORRECTIE



4. OBJECTIEVE ANALYSE

4.1 Doel

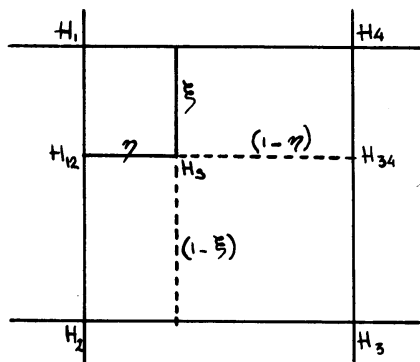
De objectieve analyse (OA) heeft tot doel, uitgaande van de bewerkte waarnemingen zoals die door de programma's Data-extractie en Data-correctie worden afgeleverd, in elk punt van het rooster (zie par. 1.3) de waarde van de relevante parameter (s) te bepalen. De meeste meteorologische instituten, die zich met numerieke voorspellingen bezighouden, gebruiken hiervoor een methode, die afkomstig is van R. GILCHRIST en G.P. CRESSMAN (1954) en P. BERGTHÓRSSON en B. DÖÖS (1955), en die door GEORGE P. CRESSMAN in een voor dagelijks gebruik geschikte vorm is gebracht. Hoewel drs. Kuipers bezig is te onderzoeken of een andere aanpak mogelijk is, wordt voor de barotrope voorspelling ook door de projectgroep de methode CRESSMAN gebruikt, weliswaar met eigen variaties.

4.2 Methode Cressman¹⁾

De analysemethode, die door Cressman in 1959 een min of meer afgeronde vorm kreeg, is sindsdien o.a. op het NMC-Suitland met goede resultaten in gebruik geweest. De laatste wijzigingen zijn uitvoerig beschreven door JAMES E. MC DONELL (NMC-Techn. Memo. No.23, 1962). De methode eist, dat naast de bewerkte waarnemingen ook een eerste gisveld van de relevante parameter (in ons geval de "hoogte" van het 500 mbar-vlak) gegeven is. Als regel zal voor het gisveld de laatste verwachting, geldig voor de tijd waarvoor de analyse gelden moet, worden gebruikt. In het OA-programma is één der eerste handelingen een onderzoek naar de gelijkheid van de datum-tijd-gegevens (symbolische vorm: YMMDDGG) van de waarnemingsgegevens en het gisveld. Bij gebrek aan overeenstemming staakt de EL-X8 onder opgave van redenen haar werkzaamheden. Het principe van de methode berust op het aanbrengen van correcties op het gisveld op basis van de waarnemingsgegevens. De bewerkingen hiervoor gaan in 4 rondes, scans genaamd. In elke scan wordt eerst voor elk station nagegaan of de verschillen tussen de gerapporteerde waarden van hoogte en/of wind niet teveel verschillen van die van het gisveld, m.a.w. de waarnemingen worden door middel van het gisveld getoetst op horizontale consistentie. (In scan 1 blijven de windgegevens nog buiten beschouwing).

1) Voor een stroomdiagram van het gehele programma zie par. 4.5

Als regel ligt een station niet op een roosterpunt. Zij H_1, H_2, H_3, H_4 het



elementaire vierkantje waarbinnen het station ligt. Met H_1, H_2, H_3, H_4 en H_s (zie fig. 4.2.1) worden de hoogtes van het 500 mbar-vlak in de hoekpunten en het station aangeduid. De waarde van H_s wordt nu geschat d.m.v. bilineaire interpolatie. Laat ξ en η de afstanden van S tot de boven- resp. linkerzijde van het vierkantje zijn (in de maaswijdte als eenheid van lengte).

fig. 4.2.1

Men vindt dan de volgende schattingen:

$$\begin{aligned} H_{12} &= \xi H_2 + (1 - \xi) H_1 \\ H_{34} &= \xi H_3 + (1 - \xi) H_4 \\ H_s &= \eta H_{34} + (1 - \eta) H_{12} \end{aligned}$$

$$H_s = ((H_1 + H_3 - H_2 - H_4)\eta + H_2 - H_1)\xi + (H_4 - H_1)\eta + H_1 \quad (4.2.1)$$

De gradiënten (gemeten over één maaswijdte) in de x en de y richting kunnen op analoge wijze worden geschat met behulp van

$$\left. \begin{aligned} g_{sx} &= (H_3 + H_1 - H_4 - H_2)\eta + H_2 - H_1 \\ g_{sy} &= (H_3 - H_4 - H_2 + H_1)\xi + H_4 - H_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.2)$$

Nu worden de geïnterpoleerde waarden vergeleken met de waarden, die volgens de waarnemingsgegevens ter plaatse S behoorden te heersen. Blijkt dit verschil tussen gemeten waarde en geschatte waarde te groot uit te vallen, dan wordt het station voor wat hoogte en/of wind geacht "fout" te zijn. De toegelaten toleranties in gpdam/maaswijdte nemen af met toenemend scan-nummer, zoals blijkt uit onderstaande tabel:

scan	tolerantie	gradiënt
	hoogte	
1	27	=
2	24	7
3	21	6
4	18	5

Tabel 4.2.1

Indien het station niet "fout" is, worden de afwijkingen δ_i (i index die parameter aanwijst) genoteerd. Bovengenoemde toetsen worden in elke scan herhaald, zodat het kan voorkomen dat bijv. de hoogte van een station in de eerste scan als "fout" wordt beschouwd en in een latere als "goed". Daarna wordt om elk station een cirkel gelegd met straal R, die in de maaswijdte gemeten gelijk is aan:

scan	R
1	5.9
2	3.6
3	2.5
4	1.5

Tabel 4.2.2

Volgens par. 1.2 correspondeert met de cirkel in de kaart op de aardbol weer een cirkel.

Voor elk roosterpunt binnen de cirkel om S wordt daarna de invloedsfactor

$$\rho = \frac{R^2 - d^2}{R^2 + d^2} \quad (4.2.3)$$

met d = afstand (S-roosterpunt) bepaald.

Hiervoor geldt $\rho = 1$ als roosterpunt en station samenvallen en $\rho \rightarrow 0$ als het roosterpunt de rand van de cirkel nadert.

(In scan 4 wordt evenwel $\rho \equiv 1$ toegepast).

In alle gevallen is ρ positief.

Uit de verschillen δ_i (als er meer dan één is!) wordt met gewichtsfactoren α_i een

$$\delta = \sum_i \alpha_i \delta_i \quad (4.2.4)$$

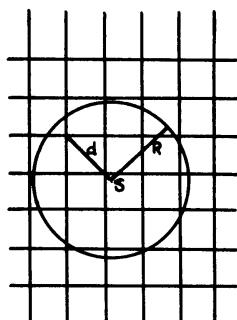


Fig. 4.2.2

berekend. De α 's variëren van scan tot

scan met de bedoeling, dat voor de hoger genummerde scans de windgegevens steeds meer gewicht in de schaal zullen gaan leggen. (Zie tabel 4.2.3).

scan	α_i -hoogte	α_i -gradient
1	1	0 [*])
2	1	1
3	1	2
4	1	4

Tabel 4.2.3

(*) In overeenstemming met het buiten beschouwing laten van de wind in de eerste scan).

Het product

$$\gamma = \rho^{\delta} \quad (4.2.5)$$

bepaalt dan de correctie, die in het roosterpunt op het gisveld zou moeten worden toegepast op grond van de gegevens van het éne station S. De correctie wordt evenwel niet onmiddellijk toegepast maar eerst wordt de lijst van stations afgewerkt. Dan is voor elk roosterpunt $\sum \gamma$ en $\sum \alpha$ bekend, waarbij \sum een sommatie aangeeft over de bijdragen van de individuele stations. De aan te brengen correctie is dan uiteindelijk gegeven door

$$\text{correctie} = \frac{\sum \gamma}{\sum \alpha} \quad (4.2.6)$$

Als voor alle roosterpunten de correctie (4.2.6) is berekend en op het gisveld toegepast, wordt aan de volgende scan begonnen.

Voor en na de vierde scan vindt nog een gladstrijkoperatie plaats, die onder zal worden behandeld.

4.3 Bijzonderheden

4.3.1 Aangepaste waarden

Het oorspronkelijke schema van Cressman is door de projectgroep op enkele punten aangepast aan onze speciale omstandigheden en aan nieuwere inzichten.

Zoals uit hoofdstuk 2 bekend is, levert het correctieprogramma soms voor een station naast of in plaats van de gemeten waarde ook een geschatte of aangepaste waarde, hetzij voor de hoogte, hetzij voor de gradiënten¹⁾ hetzij voor beide. Het OA-programma "weet" dit, omdat door het correctieprogramma per station een parameter wordt uitgevoerd, die type genoemd wordt. Het type wordt opgebouwd uit een aantal scores. Het station waarvan door het correctieprogramma een gemeten hoogte(wind) wordt uitgevoerd, scoort 1(2) punten, een station waarvan een aangepaste waarde voor de hoogte(wind) wordt uitgevoerd - al dan niet als extra - scoort 4(8) punten. Het type is de som der scores. Een station is dus van type 13

$$\text{type} = 13 = 1+4+8$$

als naast de gemeten hoogte ook een aangepaste hoogte en een aangepaste wind wordt uitgevoerd, maar geen gemeten wind. Het OA-programma analyseert vóór elk station het parametertype en vervangt dit door 6 booleans, h, hh, hhh, w, ww, www genaamd, die de volgende betekenis hebben:

f) In plaats van "gradiënt" zal in het vervolg dikwijls ook "wind" worden gebruikt.

h = true: er wordt een gemeten hoogte doorgegeven
hh = true: er wordt een aangepaste hoogte doorgegeven
hhh = true: er worden één of meer hoogtes doorgegeven (welke dan ook)
w = true: er wordt een gemeten wind doorgegeven
ww = true: er wordt een aangepaste wind doorgegeven
www = true: er worden één of meer winden doorgegeven (welke dan ook)

De 6 booleans fungeren als wisselwachters bij de verschillende wissels, die in het OA-programma voorkomen. (De analyse van type zou eenvoudiger kunnen verlopen dan in het OA-programma nu noodgedwongen geschiedt moet, indien ALGOL bitsgewijze (logische) vermenigvuldiging toeliet).

Men ziet gemakkelijk in, dat er in totaal 15 verschillende typen mogelijk zijn. Het bestaan van meerdere typen maakt het nodig dat de toetsen op horizontale consistentie ingewikkelder zijn dan in de oorspronkelijke Cressman-methode. Beschouwen we de hoogte-toets. (Die voor de gradiënt gaat analoog). De gang van zaken is afgebeeld in onderstaand stroomdiagram, dat in zoverre vereenvoudigd is, dat de windgegevens hierin genegeerd worden; in werkelijkheid lopen de stroomdiagrammen voor de hoogtetoets en de gradiëntentoets door elkaar heen.

Toelichting (de stapnummers corresponderen met de in cirkeltjes geplaatste nummers in het stroomdiagram).

Stap 1 Als hhh false is, is er geen enkele hoogte (betreffende het onder behandeling zijnde station) doorgegeven. Het station wordt dan, voor zover het de parameter hoogte betreft, overgeslagen.

Stap 2 Nu is bekend, dat minstens één van de booleans h of hh true moet zijn. Als hh false is, is er niets bijzonders aan de hand en kan gehandeld worden als in de oorspronkelijke Cressman-methode.

Stap 3 Als hh true en h false is, is voorzichtigheid geboden. Immers, er is nu slechts de beschikking over een aangepaste waarde, een gemeten waarde ontbreekt. Er wordt dan gehandeld alsof de aangepaste waarde was gemeten, maar veiligheidshalve worden de eisen voor de horizontale consistentie verzaamd door halvering van de toleranties.

Stap 4 Blijft over het geval, dat zowel h als hh true is. Er is dan de beschikking over zowel een gemeten als een aangepaste waarde. Het ligt voor de hand hiervan die te gebruiken, welke het beste met het gisveld consistent is. (N.B. Dat kan eventueel scan voor scan verschillend uitvallen).

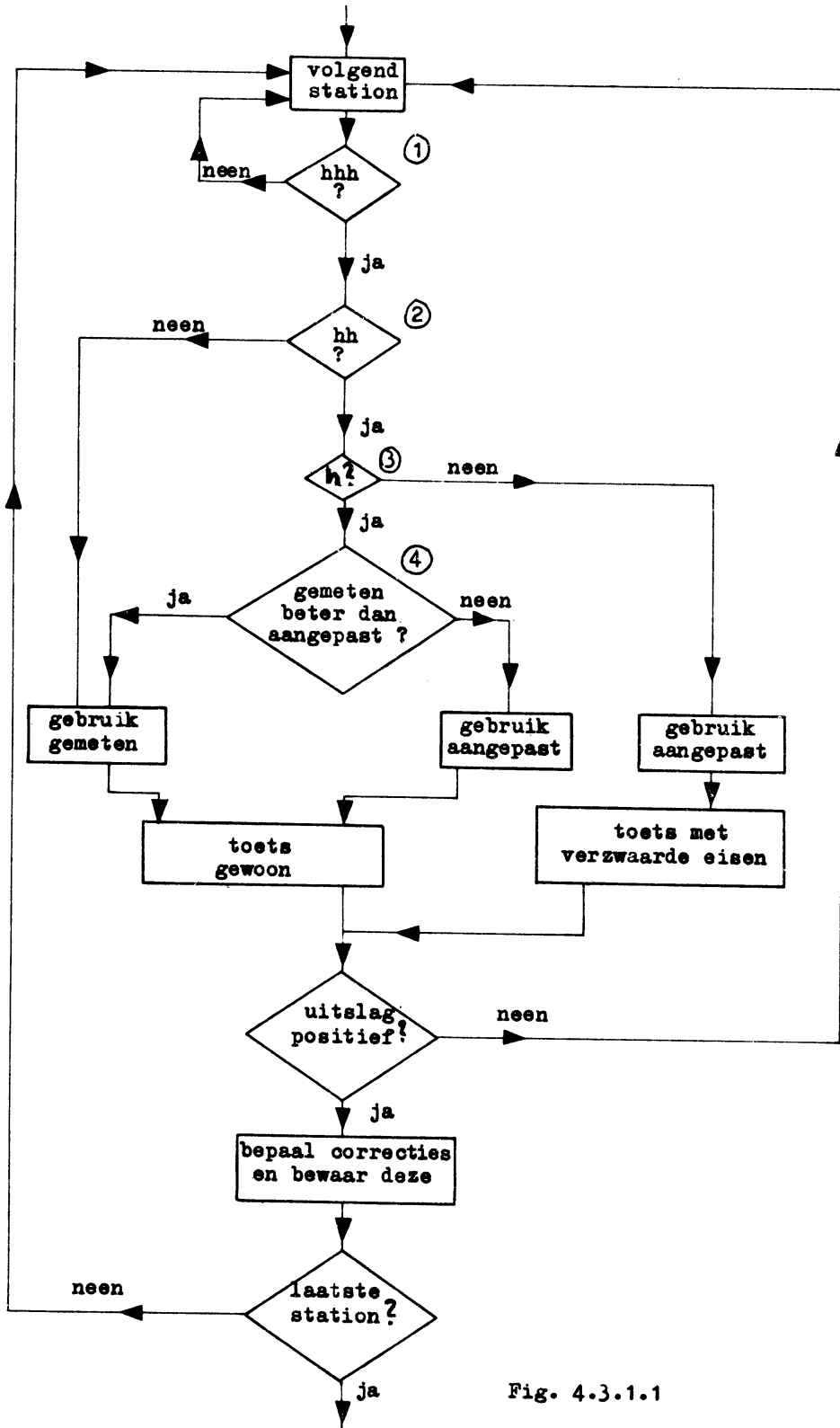


Fig. 4.3.1.1

4.3.2 Elliptische invloedssfeer

Enkele diensten, o.a. die in Zweden, hebben ervaren dat er bezwaren kunnen bestaan tegen het gebruik van een cirkelvormige invloedssfeer (straal R, zie tabel 4.2.2) rondom een station. Het bezwaar wordt vooral ondervonden bij situaties met hoge windsnelheden in straalstromen. Daar zou men liever een invloedssfeer gebruiken, die stroomopwaarts en stroomafwaarts een grotere uitgestrektheid had dan loodrecht op de windrichting. In Zweden werkt men daarom in zulke situaties met een elliptische invloedssfeer, met de lange as van de ellips in de windrichting.

Het is duidelijk, dat deze kwestie vooral van belang is voor de analyse van het stromingsveld op hogere niveaus. Toch is dit niet zonder belang in het 500 mbar-vlak.

De keuze van de vorm (ellips) en de afmetingen (excentriciteit) is moeilijk te bepalen. Er bestaat hiervoor geen enkele theoretische aanwijzing. Een empirische aanpak is dus op zijn plaats. In ons programma is ervan uitgegaan, dat in elk geval voor de 500 mbar-analyse een eenvoudige aanpak voldoende zou zijn. De laatste wijzigingen, die het OA-programma kort voor het gereedkomen van dit verslag onderging, betroffen het aanbrengen van een eenvoudig te programmeren voorziening. Zodra één der gradiënten de waarde van 10 gpdam/375 km overschrijdt (ruwweg: zodra een windcomponent > 50 kts wordt) worden de volgende maatregelen genomen: Laat x en y de componenten van de vector (roosterpunt - station) zijn. In (4.2.3) wordt nu in plaats van

$$d^2 = x^2 + y^2 \quad (4.3.2.1)$$

gebruikt

$$d^2 = a_1 x^2 + a_2 y^2 \quad (4.3.2.2)$$

Voor de te kiezen waarden van a_i bestaan wederom geen theoretische aanwijzingen. Voorlopig zijn de volgende waarden gekozen:

$a_i = 0.3$ voor de richting \perp richting met gradiënt > 10 gpdam/375 km

$a_i = 1$ voor de richting \perp richting met gradiënt \leq 10 gpdam/375 km

Met deze wijziging in de definitie van d wordt het volgende bereikt:

- (1) De invloedssfeer (per definitie $d^2 < R^2$) wordt elliptisch met de lange as // coördinaatrichting waarlangs de gradiënt kleiner dan 10 gpdam/375 km is.
- (2) De stroomopwaarts en stroomafwaarts gelegen roosterpunten wordt een grotere invloedsfactor \mathcal{Q} (4.2.3) toegewezen dan roosterpunten op dezelfde afstand van het station in de richting loodrecht op de stroming.

(3) De invloedssfeer wordt op de onder (1) beschreven wijze wel groter, maar de kleine as van de ellips blijft gelijk aan de straal van de cirkel zoals die normaal wordt gebruikt.

(4) De assenverhouding is $1: \sqrt{0.3} \approx 1:0.5477 \approx 1.826$.

Deze wijze van behandeling is wat primitiever dan die, welke in Zweden wordt gebruikt. Ze heeft echter het voordeel van slechts een zeer kleine uitbreiding van het toch al omvangrijke programma (vgl. o.a. 4.3.1) te vereisen. Zolang niet gebleken is, dat het beoogde effect onvoldoende wordt bereikt, kan ermee worden volstaan. Op grond van ervaringen elders mag voorshands worden aangenomen, dat het invoeren van de beschreven finesses gunstig zal werken op de analyses van straalstromen.

4.3.3 Gladstrijkers

Het is gebruikelijk om enkele malen gedurende de bewerking op het veld een gladstrijker toe te passen. Na enig proberen (MC DONELL l.c.) is gebleken, dat de beste plaatsen hiervoor zijn vóór en ná de vierde scan. Het doel van het toepassen van een gladstrijker is tweevoudig. In de eerste plaats heeft de aanwezigheid van golfjes in het veld met korte golflengte (zeg ≤ 4 maaswijdten) een storende invloed op de werking van het voorspelprogramma. In extreme gevallen kunnen daardoor zelfs rekeninstabiliteiten optreden. In de tweede plaats is gladstrijken nodig om schijn-discontinuïteiten weg te werken. Het mogelijk ontstaan van schijn-discontinuïteiten is inherent aan de methode-Cressman en kan als volgt worden verklaard. Er zijn punten in het rooster, die zo ver van elk station liggen, dat hiervoor nooit een correctie wordt berekend tijdens de OA. In deze punten blijft dus het oorspronkelijke gisveld ongewijzigd. Beschouw nu een gebied van dergelijke punten. Aan de andere zijde van de grens van het gebied liggen roosterpunten waar de oorspronkelijke waarde van het gisveld wel correcties ondergaat. Hierdoor kan aan de rand van het gebied een discontinuïteit ontstaan, die in geen enkel opzicht reëel is. Er moet dus gladgestreken worden.

De eisen, die aan de gladstrijkoperator moeten worden gesteld, zijn: de operator moet golven met kleine golflengte onderdrukken zonder de amplitude van golven met grotere golflengte noemenswaardig te vergroten of te verkleinen.

Een zeer fraaie operator is die, welke door SHUMAN werd opgesteld en die te SUITLAND wordt gebruikt. Zij wordt ook toegepast in het barotrope model van de projectgroep. (Zie par. 5.3.1, waar de gladstrijker

uitvoerig wordt beschreven). Aan haar toepassing in het OA-programma zijn echter enige bezwaren verbonden. De SHUMAN-operator laat een strook ter breedte van 3 roosterpunten langs de grenzen van de snede onberoerd. In het OA-programma wordt kort na elkaar tweemaal gladgestreken, zodat de strook waarop de operator onvoldoende werkt een breedte zal hebben van 5 tot 6 roosterpunten. Effectief is zij dus in een gebied van ongeveer $(25-5)(32-5) = 540$ roosterpunten, overeenkomende met slechts 67.5% van het te analyseren gebied. Een belangrijk deel van de strook waarin de operator niet effectief werkt, loopt bovendien door gebieden (oceanen) waar schijndiscontinuïteiten kunnen worden verwacht. In Suidland geldt het genoemde bezwaar niet, omdat in de eerste plaats de snede daar groter is, zodat de verhouding (aantal randpunten: aantal binnenpunten) gunstiger uitvalt, en in de tweede plaats niet, omdat daar de rand geheel in de tropen valt. Ook in de barotrope voorspelling is het gebruik van de SHUMAN-operator minder bezwaarlijk, omdat hier slechts in betrekkelijk grote intervallen (24 uur) wordt gladgestreken.

Door WALLINGTON (Q.J. Roy, met. Soc., 1963, 470-484) is een gladstriker geconstrueerd, die het genoemde bezwaar niet heeft. De kwaliteit van de Wallington-operator is, gemeten aan de boven geformuleerde eisen, slechts onbelangrijk minder dan die van Shuman. Het is essentieel een één-dimensionale gladstriker, zodat zij dus eenmaal op alle rijen en daarna eenmaal op alle kolommen van het rooster moet worden toegepast. Maar het voordeel juist hiervan is, dat alleen de vier hoekpunten van het veld niet aan de gladstrikerij worden onderworpen. Tenslotte zijn de formules, die de Wallington-operator definiëren, erg eenvoudig (vgl. formule 5.54). Zij $f[i]$ ($1 \leq i \leq N$) een lineair array. De definitie luidt:

Bereken eerst:

$$g[i] = (5 f[i] - f[i+1] - f[i-1]) / 3; \quad (2 \leq i \leq N-1) \quad (4.3.3.1)$$

en vervolgens

$$f[i] = (2 g[i] + g[i+1] + g[i-1]) / 4; \quad (2 \leq i \leq N-1) \quad (4.3.3.2)$$

Enig spel met de numerieke waarde der coëfficiënten is nog mogelijk als de behoefte daartoe zou blijken.

4.3.4 Protocol

Bij het opstellen van een OA-programma biedt noch de wiskunde, noch de natuurkunde, noch de meteorologie iets dat als een richtsnoer zou kunnen dienen. Het geheel is duidelijk een empirische "trial-and-error"

methode, waarin constanten zoals R (scan), α_i (scan), a_i voorkomen waarover ieder het zijne mag denken. De konsekwentie is, dat als de resultaten systematisch, of, wat nog erger is, incidenteel, tegenvallen er ook geen duidelijke richtlijnen zijn voor het opsporen van de oorzaken. In een dergelijke situatie is het essentieel niet alleen te kunnen beschikken over een eindproduct maar ook over een flink aantal gegevens omtrent de lotgevallen van het programma tijdens de verwerking. Vandaar dat van de gang van zaken tijdens de verwerking een uitvoerig protocol wordt bijgehouden en via de randtoestellen wordt uitgevoerd. Het protocol bevat de volgende gegevens:

PROTOCOL

- (1) Datum, tijd, programmanummer ¹⁾
- (2) Lijst van stations zoals ontvangen van het data-correctie-programma (serienummer, type, coördinaten, hoogte, gradiënten).
- (3) Statistiek van de voorkomende typen.
- (4) Per scan
 - (4.1) Opgave van de stations waarvan i.p.v. gemeten waarde(n) aangepaste waarde(n) zijn gebruikt.
 - (4.2) Opgave van stations waarvan de gebruikte waarde(n) van hoogte en/of gradiënt één of meer toetsen niet hebben doorstaan, met opgave van de grootte van de afwijking, die aanleiding was tot het verwerpen van de gebruikte waarde(n).
 - (4.3) Statistiek van (4.1) en (4.2).
 - (4.4) RMS-error van de verschillen tussen waargenomen (aangepaste) hoogte en de in het gisveld geïnterpoleerde hoogte over alle stations waarvan de hoogte werd aanvaard door de toets.
 - (4.5) Als (4.4) maar nu voor de gradiënten.
- (5) Totale rekentijd alsmede de tijden voor een aantal onderdelen.
- (6) Gemiddelde absolute verschil tussen oorspronkelijk gisveld en eindproduct over alle roosterpunten.

Gebleken is, dat voorlopig deze gegevens voldoende zijn om in de behoefte aan informatie over de gang van zaken tijdens het rekenproces te voorzien. In totaal zijn hiervoor per kaart een tiental vellen regeldrukkerpapier nodig. Zolang de KNMI-EL-X8 nog niet met een regeldrukker is uitgerust, zal het protocol moeten worden bekort, met alle gevolgen van dien.

1) Elk programma heeft een nummer, dat op alle eindproducten wordt afgedrukt, zodat achteraf geen twijfel kan ontstaan over het gebruikte programma.

4.3.5 Programma-organisatie

Per station zijn 6 gegevens van belang (type, 2 coördinaten, hoogte, 2 gradiënten). Voor een te verwachten aantal van 500 stations worden dit in totaal 3000 gegevens. Bij de huidige vorm van het OA-programma zouden deze nog wel in het kernengeheugen kunnen worden ondergebracht, mits elk gegeven zonedig met een passend gekozen macht van 10 vermenigvuldigd wordt, dat het in de vereiste nauwkeurigheid als geheel getal kan worden opgeborgen. (Schaling, zie par. 1.4.4). Er zouden dan op een 16 K-machine nog ongeveer 1000 woorden vrij zijn in het kernengeheugen. Dit is te weinig voor toekomstige uitbreidingen. Daarom is nu reeds overgegaan tot het verwijzen van de stationsgegevens naar de trommel. Daar alle gegevens eenmaal naar en viermaal van de trommel moeten, komt dit neer op een transport van in totaal 15000 woorden. Transport per woord zou dan meer dan 6 minuten kosten, zodat gekozen is voor het wiggelwaggel-systeem. Wiggel en waggel kunnen elk 128 woorden bergen, zodat viermaal een transport van wiggel + waggel precies één spoor van de trommel vult of ophaalt.

Zoals uit het voorgaande wel is gebleken, is dit OA-programma mathematisch weinig gecompliceerd. Des te ingewikkelder is echter de logische structuur en de zgn. flow of data. Er zijn in principe 15 verschillende "typen", die elk hun eigen manier van bewerking eisen; de scans 1 en 4 hebben bijzonderheden, die in 2 en 3 niet voorkomen, de uitslag van de toetsen op consistentie kan van scan tot scan verschillen, enz. Vgl. ook het stroomdiagram in par. 4.5, waarin de meeste "blokken" zelf weer een structuur hebben als in het diagram 4.3.1.1. Dit alles maakt dat overwegingen van efficiency een belangrijke rol hebben gespeeld bij het opstellen van de (voorlopig?) definitieve vorm van het programma. Slechts één geval van een beslissing waarbij overwegingen van efficiency de doorslag hebben gegeven, moge hier bij wijze van voorbeeld worden aangehaald. Gaan we uit van een aantal van 500 stations. Per scan moet om elk station een cirkel worden gelegd. Dus 2000 cirkels. Zou men nu van alle 800 roosterpunten willen nagaan welke binnen de cirkel liggen, dan komt dit neer op 1 600 000 maal toetsen of voldaan is aan

$$(x_{\text{roosterpunt}} - x_{\text{station}})^2 + (y_{\text{roosterpunt}} - y_{\text{station}})^2 \leq R^2 \quad (4.3.5.1)$$

Zelfs als de benodigde gegevens bij de hand zijn, kost dit minstens 10^{-3} s per toets en in totaal dus $1600 \text{ s} \approx 26 \text{ min}$. Dit is natuurlijk te veel en in de praktijk gaat het dan ook anders. Om de cirkel wordt eerst een zo klein mogelijk rechthoekje gelegd (zonodig vergroot wegens de

a_i van (4.3.2.2)) en slechts van de roosterpunten binnen het rechthoekje wordt nagegaan of aan (4.3.5.1) is voldaan. Programmering van dit trucje is op eenvoudige wijze mogelijk. Het aantal te toetsen roosterpunten daalt dan per geval van 800 tot iets in de orde van

$$4 \sum R^2 = 4 (5.9^2 + 3.6^2 + 2.5^2 + 1.5^2) \approx 240$$

De totale tijd voor de toetsing op (4.3.5.1) wordt dan iets van $\frac{240}{800} \times 26 \text{ min} \approx 8 \text{ min}$, een tijd die door toepassing van enkele andere trucjes tot minder dan 2 min kan worden teruggebracht. Bij een aantal van 500 stations ligt de totale rekentijd voor het OA-programma (exclusief in- en uitvoer) in de orde van 5 min, zodat zelfs een efficiënte organisatie van het toetsen op (4.3.5.1) nog bijna de helft van de totale rekentijd in beslag neemt.

Het gegeven voorbeeld is een extreem geval en de juiste aanpak ligt nogal voor de hand. Het toont echter wel aan van welke betekenis een optimale programma-organisatie is. Getracht is de verleiding te weerstaan, te zondigen tegen de regel van MAILLOUX (B.J. MAILLOUX, Stelling III bij Proefschrift: On the implementation of ALGOL 68, A'dam 1968): "Bij het vervaardigen van fundamentele programma's voor een rekenautomaat, als bijvoorbeeld een vertaler of een archiefsysteem, mag men onder geen beding vertrouwen op het niet optreden van een a priori zeer onwaarschijnlijke gebeurtenis".

4.4 Uitbreidingen

Afgezien van eventuele wijzigingen in de empirische constanten zoals R , α_i , a_i en de criteria van tabel 4.2.1 kan nog een aantal wijzigingen in de toekomst worden overwogen.

4.4.1 Indien de eenvoudige behandeling van de elliptische invloedssfeer (4.3.2) onvoldoende resultaten blijkt op te leveren, zal een meer geraffineerde aanpak moeten worden overwogen.

4.4.2 Een klein gedeelte van het rooster loopt door een gebied van de Atlantische Oceaan waaruit weinig gegevens binnenkomen. De vraag is of in dit gebied een voorbewerking van het gisveld nodig zal blijken. Elders (waar men meestal met een groter gebied te maken heeft dat hiervoor in aanmerking komt) werkt men in zulke gevallen dikwijls met een gewogen gemiddelde van gisveld en klimatologisch maand- of seizoengemiddelde.

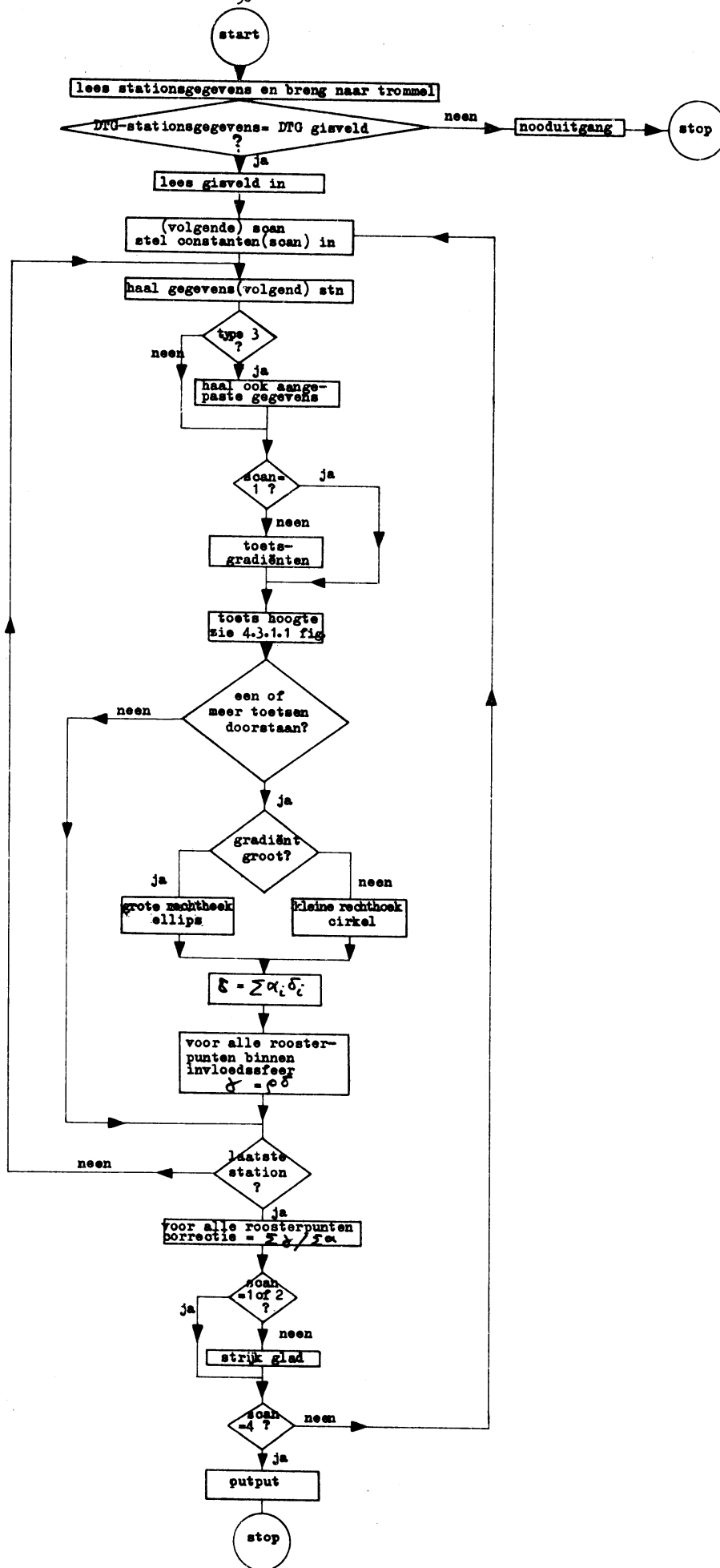
4.4.3 Sinds de invoering van verkeersvliegtuigen met straalmotoren komen AIREPS op 500 mbar praktisch niet meer voor. Aan het gebruik van AIREPS zijn in het gevolgde systeem nogal wat bezwaren verbonden: de waarnemings-tijden wijken af van die van de gewone stations en er wordt meestal niet op de goede hoogte (druk) gevlogen, de data-extractie biedt vele problemen, een toets op consistentie in de vertikaal is principieel onmogelijk, die op consistentie in het horizontale vlak tengevolge van afwijkende waarnemingstijden en/of hoogte een probleem. Op het eerste gezicht lijkt het aantrekkelijk om als de AIREP-waarneming "off-time" is, deze te gebruiken tijdens het voorspelprogramma op het moment dat dit aan de waarnemingstijd toe is. Hieraan zijn echter mathematische moeilijkheden verbonden. Er zal altijd wel enig verschil bestaan tussen de waarde zoals ze werd gemeten en zoals ze werd voorspeld. Er zal dus een aanpassing van het voorspelde veld rondom de plaats van waarneming aan de waarneming moeten worden uitgevoerd, waarvoor nog geen bruikbare technieken zijn ontwikkeld. Het probleem staat bekend als "shock dissipation". Voorlopig is op grond van het bovenstaande van het gebruik van AIREPS afgezien. Afgewacht dient trouwens te worden of aan de AIREPS nog een lang leven is beschoren.

4.4.4 In sommige landen worden waarnemingsgegevens, die een toets niet goed doorkomen, voorgelegd aan een meteoroloog, die beslist of zij al dan niet gebruikt zullen worden bij de analyse. Principieel is dan het beginsel van "objectieve" analyse doorbroken. Het eist bovendien de aanwezigheid van een meteoroloog in de computerruimte, die, gewapend met een kaart, telkens als de machine via de bedieningstelex een vraag stelt, aan de operator een antwoord dicteert. In het OA-programma is voor een dergelijk menselijk ingrijpen (voorlopig) geen ruimte gelaten. Bij deze beslissing heeft ook de overweging gegolden, dat in sommige van de kritieke gevallen het extractie-correctie-programma voor alternatieven zorgt waaruit OA a.h.w. de beste kan kiezen, een mogelijkheid die elders niet aanwezig is.

4.4.5 Slotopmerking

De beschreven methode (CRESSMAN) is in principe bruikbaar voor de analyse van elk scalair veld. Zij laat in ruime mate aanpassing aan bijzondere omstandigheden of eisen toe. Zij heeft daardoor een veel groter gebied van toepassing dan uit het voorafgaande hoofdstuk is gebleken. Gedacht kan bijv. worden aan kaarten van maandgemiddelden, van druk, temperatuur etc., golfhoogtes en wat dies meer zij.

4.5 Stroomdiagram



5. HET BAROTROPE MODEL

5.1 Bewegingsvergelijkingen

We beschouwen een assenstelsel x', y', z' dat met hoeksnelheid $\vec{\Omega}$ roteert t.o.v. een vast systeem x, y, z . Voor een willekeurige vektor \vec{A} geldt (zie bijv. Thompson, 1961):

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z = \vec{i}' A_x' + \vec{j}' A_y' + \vec{k}' A_z' \\ \frac{d\vec{A}}{dt} &= \vec{i} \frac{dA_x}{dt} + \vec{j} \frac{dA_y}{dt} + \vec{k} \frac{dA_z}{dt} \\ &= \vec{i}' \frac{dA_x'}{dt} + \vec{j}' \frac{dA_y'}{dt} + \vec{k}' \frac{dA_z'}{dt} + \frac{d\vec{i}'}{dt} A_x' + \frac{d\vec{j}'}{dt} A_y' + \frac{d\vec{k}'}{dt} A_z' \end{aligned}$$

Nu geldt:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i}', \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{j}', \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{k}'$$

zodat

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \text{ (vast)} = \frac{d\vec{A}}{dt} \text{ (roterend)} + \vec{\Omega} \wedge \vec{A} \quad (5.1)$$

Voor de absolute beweging \vec{V}_a geldt als \vec{V} de snelheid is t.o.v. het roterend stelsel:

$$\vec{V}_a = \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{R} \quad (5.2)$$

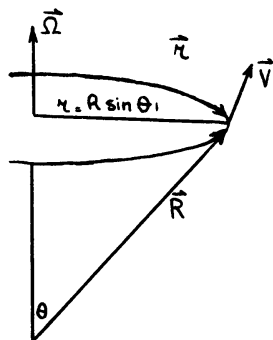


fig. 5.1

Passen we (5.1) toe op \vec{V}_a , dan krijgen we door substitutie van (5.2)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}_a}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{R}) + \vec{\Omega} \wedge (\vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{R}) \\ &= \frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{R} \\ &= \frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} - \Omega^2 \vec{r} \quad (5.3) \end{aligned}$$

Een deeltje krijgt een versnelling o.a. tengevolge van de verschillen in luchtdruk. Hoe groot is deze drukkracht?

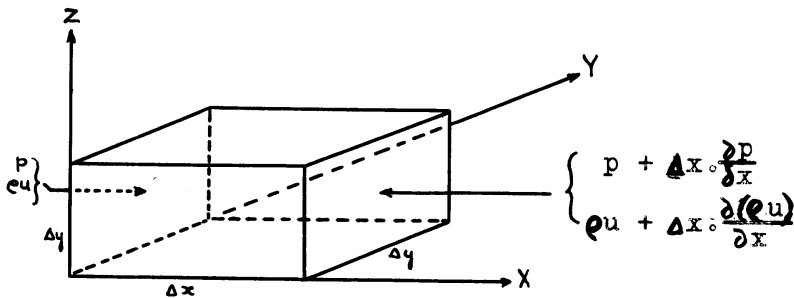


fig. 5.2

Beschouw een (oneindig) klein luchtelement in de vorm van een rechthoekig parallelepipedum met volume $V = \Delta x \Delta y \Delta z$. De resultante van de druk in de x -richting is

$$\rho \Delta y \Delta z - \left(\rho + \Delta x \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z = - \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

d.w.z. dit is de kracht op de totale massa $M = \rho V$ (ρ is de dichtheid). De netto-druk op de eenheid van massa in de x -richting is dus

$$P_x = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Analoog vinden we

$$P_y = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{en} \quad P_z = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{ofwel}$$

$$\vec{P} = -\alpha \nabla p \tag{5.4}$$

Dezelfde redenering kan gevolgd worden voor de gemiddelde massaflux ρu door het linkervlak enz. Netto-massatransport door alle vlakken is gelijk aan

$$- \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \quad \text{per tijdseenheid.}$$

Dit bedrag is uiteraard gelijk aan de snelheid waarmee de massa toeneemt:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right]$$

Dit is de zgn. "continuïteitsvergelijking", welke ook kan worden geschreven als

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} (\rho \vec{V})$$

of als

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

of in vektor-notatie:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_z + \vec{V}_1 \cdot \nabla_z \rho + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} + \rho \nabla_z \cdot \vec{V} = 0 \quad (5.5)$$

Keren we nu terug naar vgl. (5.3) dan blijkt i.v.m. (5.4) dat volgens de tweede wet van Newton geldt:

$$\frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V} - \Omega^2 \vec{z} = -\alpha \nabla \rho - \nabla \phi_a + \alpha \vec{F}$$

waarin \vec{F} de wrijving voorstelt en ϕ_a de absolute gravitatie-potentiaal, welke is gedefinieerd door

$$g = -\nabla \phi_a$$

als

g = de versnelling van de zwaartekracht.

We kunnen nog definiëren:

$$g + \Omega^2 \vec{r} = g^{\text{eff}} = \text{de klaarlijkkelijke zwaartekrachtversnelling,}$$

met analoog de klaarlijkkelijke gravitatie-potentiaal ϕ door:

$$g^{\text{eff}} = -\nabla \phi$$

Dan krijgen we de volgende vektorvergelijking voor de snelheid van de relatieve beweging t.o.v. de aarde:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V} - \nabla \phi - \alpha \nabla \rho + \alpha \vec{F} \quad (5.6)$$

Uit (5.6) kunnen we opstellen de vergelijkingen (skalare) voor de componenten van de beweging (fig. 3).

We ontbinden de beweging in drie richtingen:

$x \rightarrow$ oost

$y \rightarrow$ noord

$z \rightarrow$ zenith, zodat

$$\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = \Omega \cos \varphi, \quad \Omega_z = \Omega \sin \varphi.$$

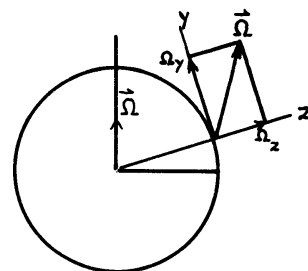


fig. 5.3

We hebben

$$-2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} = -2\Omega \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ u & v & w \end{vmatrix} = -2\Omega \left[\vec{i} (w \cos\varphi - v \sin\varphi) + \vec{j} u \sin\varphi - \vec{k} u \cos\varphi \right]$$

zodat (5.6) uiteenvalt in

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} - 2\Omega (w \cos\varphi - v \sin\varphi) + \alpha F_x \end{array} \right. \quad (5.7a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega (u \sin\varphi) + \alpha F_y \end{array} \right. \quad (5.7b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw}{dt} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial z} - 2\Omega (-u \cos\varphi) + \alpha F_z - g \end{array} \right. \quad (5.7c)$$

Bedenken we dat $w \ll v$, $2\Omega u \cos\varphi \ll g$ en $\frac{dw}{dt} \ll g$, dan kunnen we bij benadering schrijven - als $f = 2\Omega \sin\varphi$ -

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} - fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (5.8a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} + fu + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (5.8b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial z} + g\rho = 0 \end{array} \right. \quad (5.8c)$$

De laatste vergelijking staat bekend als de "hydrostatische" vergelijking.

De twee eerste vergelijkingen kunnen worden gecombineerd in één vektorvergelijking voor de horizontale beweging

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{k} \wedge f\vec{V} + \frac{1}{\rho} \nabla_2 p = 0 \quad (5.9)$$

Daar de versnellingsterm klein is t.o.v. de beide andere termen, kan men schrijven als "geostrofische wind" relatie

$$\vec{V} = \vec{k} \wedge \frac{1}{\rho f} \nabla_2 p \quad (5.10)$$

Bij de beschouwing van een x,y,p-stelsel blijkt (drukcoördinaten)

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_z = \frac{\phi_2 - \phi_0}{\Delta x} = \frac{\phi_1 - \phi_0}{\Delta x} + \frac{\phi_2 - \phi_1}{\Delta x} = \frac{\phi_1 - \phi_0}{\Delta x} + \frac{\phi_2 - \phi_1}{\Delta p} \frac{\Delta p}{\Delta x}$$

of

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_z = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_p + \frac{\partial \phi}{\partial p} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_x$$

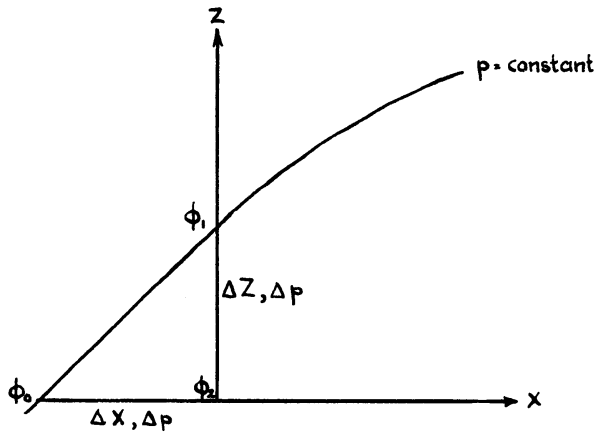


fig. 5.4

Voor de hoogte z van een isobarisch oppervlak geldt dus

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p + \frac{\partial z}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = 0$$

Met (5.8c) geeft dit

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p$$

Zo ook bewijst men

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z = g \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p$$

en dus

$$\frac{1}{\rho} \nabla_z p = g \nabla_p z \quad (5.11)$$

Dit betekent, dat de druk-gradiënt kracht (per massaeenheid) recht evenredig is met de vectorgradiënt van de isobarische hoogte.

We gaan nu uit van de continuïteitsvergelijking (5.5) teneinde deze over te brengen in drukcoördinaten:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_z + \vec{V}_1 \cdot \nabla_z \rho + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} + \rho \nabla_z \cdot \vec{V} = 0$$

Met het oog op de hydrostatische vergelijking (5.8c) kan deze geschreven worden als

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{V} \cdot \nabla_z p) + \frac{\partial}{\partial z} (w \frac{\partial p}{\partial z}) + \frac{\partial p}{\partial z} \nabla_z \cdot \vec{V} - \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \cdot \nabla_z p = 0$$

of, daar $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial}{\partial p}$,

$$\frac{\partial}{\partial p} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z + \vec{V} \cdot \nabla_z p + w \frac{\partial p}{\partial z} \right] + \nabla_z \cdot \vec{V} - \frac{\partial \vec{V}}{\partial p} \cdot \nabla_z p = 0$$

De uitdrukking tussen vierkante haken is juist de totale tijdsafgeleide van p . Bovendien is de som van de resterende termen juist gelijk aan

$\nabla_p \cdot \vec{V}$, daar

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p + \frac{\partial u}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z \quad \text{en} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p + \frac{\partial v}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z$$

De continuïteitsvergelijking in drukcoördinaten wordt dus:

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} + \nabla_p \cdot \vec{V} = 0 \quad (5.12)$$

waarin

$$\omega = \frac{dp}{dt}$$

Uit (5.9) en (5.11) volgt voor de horizontale beweging:

$$\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right)_p + u \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\right)_p + v \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\right)_p + \omega \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial p}\right) + \vec{k} \wedge \vec{f} \vec{V} + g \nabla_p z = 0 \quad (5.13)$$

Nu geldt:

$$u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \equiv \nabla \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2} + \vec{k} \wedge \zeta \vec{V}$$

waarin $\zeta = v_x - u_y$ = de vorticiiteit (relat.) = de vertikale komponent van de rotatie van de snelheidsvektor: $\nabla \wedge \vec{V}$

Want:

$$\nabla \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2} \equiv \nabla \frac{u^2 + v^2}{2} \equiv \vec{i} (u u_x + v v_y) + \vec{j} (u u_y + v v_x)$$

$$\vec{k} \wedge \zeta \vec{V} \equiv (-\vec{i} v + \vec{j} u) (v_x - u_y) \equiv \vec{i} (v u_y - v v_x) + \vec{j} (-u u_y + u v_x)$$

$$\nabla \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2} + \vec{k} \wedge \zeta \vec{V} \equiv u (\vec{i} u_x + \vec{j} v_x) + v (\vec{i} u_y + \vec{j} v_y) \equiv u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}$$

Dus gaat (5.13) over in:

$$\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right)_p + \nabla_p \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2} + \vec{k} \wedge (\zeta + f) \vec{V} + \omega \frac{\partial \vec{V}}{\partial p} + g \nabla_p z = 0 \quad (5.14)$$

De algemene vorm van de vorticiiteitsvergelijking wordt verkregen door de rotatie (curl)-operator $\nabla \wedge$ op elk der termen van (5.14) toe te passen en de vertikale komponent te nemen:

$$\nabla \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \equiv \dots + \vec{k} \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

$$\nabla \wedge \left(\nabla \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2} \right) \equiv \nabla \wedge (g \nabla z) \equiv 0$$

daar de curl (grad) $\equiv 0$

$$\begin{aligned} \nabla \wedge (\vec{k} \wedge (\zeta + f) \vec{V}) &\equiv \nabla \wedge ((\zeta + f) (-\vec{i} v + \vec{j} u)) \equiv \vec{k} (\zeta + f) (u_x + v_y) + \dots \\ &\equiv \dots + \vec{k} \nabla \cdot (\zeta + f) \vec{V} \end{aligned}$$

$$\nabla \times \left(\omega \frac{\partial \vec{V}}{\partial p} \right) \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega \frac{\partial u}{\partial p} & \omega \frac{\partial v}{\partial p} & \omega \frac{\partial w}{\partial p} \end{vmatrix} \equiv \dots + \vec{k} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\omega \frac{\partial v}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\omega \frac{\partial u}{\partial p} \right) \right\}$$

$$\equiv \dots + \vec{k} (\omega_x v_p + \omega v_{px} - \omega_y u_p - \omega u_{py})$$

$$\equiv \dots + \vec{k} (\omega_x v_p - \omega_y u_p) + \vec{k} \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p}$$

Nu is:

$$\omega_x v_p - \omega_y u_p \equiv \vec{k} \cdot \nabla \omega \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial p} \equiv \vec{k} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} & \frac{\partial \omega}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial p} & \frac{\partial w}{\partial p} \end{vmatrix}$$

zodat (5.14) overgaat in:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot (\zeta + f) \vec{V} + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} + \vec{k} \cdot \nabla \omega \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial p} = 0 \quad (5.15)$$

De divergentie-term kan worden herschreven als

$$\nabla \cdot (\zeta + f) \vec{V} \equiv \vec{V} \cdot \nabla (\zeta + f) + (\zeta + f) \nabla \cdot \vec{V}$$

of, op grond van de continuïteitsvergelijking in de gedaante (5.12)

$$\nabla \cdot (\zeta + f) \vec{V} \equiv \vec{V} \cdot \nabla (\zeta + f) - (\zeta + f) \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

Hierdoor verandert (5.15) in

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla (\zeta + f) - (\zeta + f) \frac{\partial \omega}{\partial p} + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} + \vec{k} \cdot \nabla \omega \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial p} = 0 \quad (5.16)$$

↑
lokale verandering van de vorticititeit

↑
horizontale vorticiteits-advectie

↑
vertikale vorticiteits-advectie

↑
omzetten van horizontale vorticitetiscomponenten in de vertikale component: de zgn. "tilting term"

Daar de beide laatste termen elkaar vrijwel opheffen en de tilting term bovendien moeilijk te bepalen is, laat men beide veelal weg. Hierdoor wordt de barotrope prognostische vergelijking ($\eta = \zeta + f$):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \eta - \eta \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (5.17)$$

Wil men (5.18) oplossen, dan moet men uitgaande van het z-veld de grootheden \vec{V} en η in het z-veld uitdrukken.

5.2 Geostrofische benadering en balansvergelijking

1e methode : de geostrofische benadering

De geostrofische windrelatie (5.10) geeft i.v.m. (5.11)

$$\vec{V}_g = \frac{g}{f} [\vec{k} \wedge \nabla_p z] \quad (5.18)$$

of

$$\vec{V}_g = \frac{g}{f} [\vec{k} \wedge (\vec{i} z_x + \vec{j} z_y)] = -\frac{g}{f} [-\vec{i} z_y + \vec{j} z_x]$$

zodat

$$u = -\frac{g}{f} z_y \quad v = \frac{g}{f} z_x$$

en dus

$$\frac{f}{g} = v_x - u_y = \frac{g}{f} (z_{xx} + z_{yy}) = \frac{g}{f} \nabla^2 z \quad (5.19)$$

Ziet men af van de afhankelijkheid van de Coriolis-parameter f van de geografische breedte, dan benadert men de stroming feitelijk kwasi-geostrofisch.

2e (betere) methode : de balansvergelijking

We veronderstellen dat de snelheid is opgebouwd uit een gedeelte dat divergentievrij is en dus een stroomfunctie ψ bezit, en een gedeelte dat rotatievrij is en dus beschreven kan worden m.b.v. een potentiaal-functie χ ofwel

$$\vec{V} = \vec{k} \wedge \nabla \psi + \nabla \chi \quad (5.20)$$

en dus

$$u = -\psi_y + \chi_x; \quad v = \psi_x + \chi_y$$

waaruit volgt voor de vorticititeit en de divergentie

$$\zeta = v_x - u_y = \nabla^2 \psi$$

$$D = u_x + v_y = \nabla^2 \chi$$

We passen de divergentie-operator $\nabla \cdot$ toe op de vergelijking voor de horizontale beweging (5.13) waardoor we krijgen

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{V}) + \nabla \cdot [\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}] + \nabla \cdot (w \frac{\partial \vec{V}}{\partial p}) + \nabla \cdot (\vec{K} \wedge \vec{V}) + g \nabla^2 \chi = 0$$

Wat betekent $\nabla \vec{V}$?

Voor scalairesn geldt de operator-gelijkheid $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla$, dus

$$\vec{i} \frac{du}{dt} = \vec{i} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{i} (\vec{V} \cdot \nabla u)$$

$$\vec{j} \frac{dv}{dt} = \vec{j} \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{j} (\vec{V} \cdot \nabla v)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{i} (u u_x + v v_y) + \vec{j} (u v_x + v v_y)$$

Hieruit blijkt dat $\nabla \vec{V} = \vec{i} \nabla u + \vec{j} \nabla v$ en dat $\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$ gelijk is aan de uitdrukking tussen vierkante haken.

$$\nabla \cdot (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) \equiv \frac{\partial}{\partial x} (u u_x + v u_y) + \frac{\partial}{\partial y} (u v_x + v v_y)$$

$$\equiv u_x^2 + u u_{xx} + 2 v_x u_y + v u_{xy} + u v_{xy} + v_y^2 + v v_{yy} \quad (5.21)$$

Daarnaast geldt

$$\nabla \cdot [(\nabla \cdot \vec{V}) \vec{V}] \equiv \nabla \cdot [(u_x + v_y) \vec{V}] \equiv \frac{\partial}{\partial x} (u u_x + u v_y) + \frac{\partial}{\partial y} (v u_x + v v_y)$$

$$\equiv u_x^2 + u u_{xx} + 2 u_x v_y + u v_{xy} + v u_{xy} + v_y^2 + v v_{yy} \quad (5.22)$$

Uit vergelijking van (5.21) en (5.22) blijkt:

$$\nabla \cdot [\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}] \equiv \nabla \cdot [(\nabla \cdot \vec{V}) \vec{V}] - 2 J(u, v)$$

waarin

$$J(u, v) \equiv u_x v_y - v_x u_y$$

Omdat de divergentie van de horizontale snelheid $\nabla \cdot \vec{V}$ in het algemeen een grootte-orde kleiner is dan de vorticititeit, kan de eerste term uit het rechterlid evenals de term $\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{V})$ worden verwaarloosd.

Verder is

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{k} \wedge f \vec{V}) &\equiv \nabla \cdot [f (\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \nabla \psi) + \vec{k} \wedge \nabla \chi)] \equiv \\ \nabla \cdot f (\vec{k} \wedge (-\vec{i} \psi_y + \vec{j} \psi_x)) + \nabla \cdot f (-\vec{i} \chi_y + \vec{j} \chi_x) &\equiv \\ \nabla \cdot f (-\nabla \psi) + \nabla \cdot f (-\vec{i} \chi_y + \vec{j} \chi_x) &\equiv -f \nabla^2 \psi - \nabla f \cdot \nabla \psi \end{aligned}$$

als we veronderstellen dat de potentiaal χ konstant is nagenoeg.

In dat geval geldt i.v.m. $u = -\psi_y$ en $v = \psi_x$

$$J(u, v) \equiv u_x v_y - u_y v_x \equiv -\psi_{xy}^2 + \psi_{xx} \psi_{yy} \equiv J(\psi_x, \psi_y)$$

Verwaarlozen we nog de term met ω , dan krijgen we tenslotte

$$f \nabla^2 \psi + 2J(\psi_x, \psi_y) + \nabla f \cdot \nabla \psi = g \nabla^2 Z \quad (5.23)$$

of, daar $gZ \approx \Phi$

en dus $g \nabla^2 Z \approx \nabla^2 \Phi$

de balansvergelijking

$$f \nabla^2 \psi + 2J(\psi_x, \psi_y) + \nabla f \cdot \nabla \psi - \nabla^2 \Phi = 0 \quad (5.24)$$

welke het verband aangeeft tussen de velden van de geopotential Φ en van de stroomfunctie ψ .

Weglating van de tweede term resulteert in

$$f \nabla^2 \psi + \nabla f \cdot \nabla \psi = \nabla^2 \Phi \quad \text{of (zie het voorgaande)}$$

$$-\nabla \cdot (\vec{k} \wedge f \vec{V}) = \nabla^2 \Phi$$

of

$$f \vec{V} \wedge \vec{k} = \nabla \Phi$$

Dit is hetzelfde als $\vec{V} = \frac{1}{f} [\vec{k} \wedge \nabla \Phi] = \frac{g}{f} [\vec{k} \wedge \nabla Z]$

dat is de geostrofische benadering!

De term $2J(\psi_x, \psi_y)$ houdt verband met de kromming van de stroomlijnen, de term $\nabla f \cdot \nabla \psi$ met de afhankelijkheid van f van de geografische breedte.

Om de balansvergelijking numeriek te integreren, schrijven we (5.24) als:

$$2(\psi_{xx} \psi_{yy} - \psi_{xy}^2) + f \nabla^2 \psi + \nabla f \cdot \nabla \psi - \nabla^2 \Phi = 0 \quad (5.25)$$

en stellen (zie Miyakoda, 1960):

$$A = v_x + u_y = \psi_{xx} - \psi_{yy} \quad (5.26)$$

$$B = u_x - v_y = -2\psi_{xy}$$

$A^2 + B^2$ is invariant t.a.v. rotatie van het assenstelsel. Door (5.26) gaat (5.25) over in

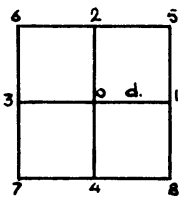
$$\frac{1}{2} [(\nabla^2 \psi)^2 - A^2 - B^2] + f \nabla^2 \psi + \nabla f \cdot \nabla \psi - \nabla^2 \Phi = 0$$

of

$$\nabla^2 \psi = -f \pm \sqrt{2 \nabla^2 \Phi + f^2 + A^2 + B^2 - 2 \nabla f \cdot \nabla \psi} \quad (5.27)$$

\swarrow N. HALFROND
 \nwarrow Z. HALFROND

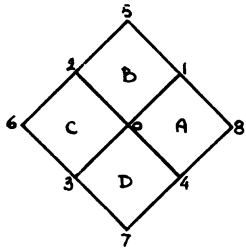
Benadering door eindige differenties:



$$\psi_{xx} = \frac{\psi_1 + \psi_3 - 2\psi_0}{d^2}$$

$$\psi_{yy} = \frac{\psi_2 + \psi_4 - 2\psi_0}{d^2}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0}{d^2} = \frac{\nabla^2 \psi}{d^2} \quad (5.28)$$



Bij rotatie over 45° :

$$\mathcal{J}(\psi_x, \psi_y) = \mathcal{J}(u, v) = u_x v_y - u_y v_x \implies$$

$$\frac{1}{2d^2} [(u_A - u_C)(v_B - v_D) - (u_B - u_D)(v_A - v_C)] = \frac{\mathcal{J}(u, v)}{2d^2} \implies$$

$$\frac{1}{4d^4} [-(\psi_1 + \psi_3 - \psi_2 - \psi_4)^2 + (\psi_5 + \psi_7 - 2\psi_0)(\psi_6 + \psi_8 - 2\psi_0)] \quad (5.29)$$

Uit (5.26), (5.28) en (5.29) volgt:

$$A^2 + B^2 = (\nabla^2 \psi)^2 - 4 \mathcal{J}(u, v) \implies \frac{1}{d^4} [A^2 + B^2]$$

waarin

$$A^2 + B^2 = (\nabla^2 \psi)^2 + (\psi_1 + \psi_3 - \psi_2 - \psi_4)^2 - (\psi_5 + \psi_7 - 2\psi_0)(\psi_6 + \psi_8 - 2\psi_0) \quad (5.30)$$

met

$$\nabla^2 \psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0$$

Feitelijk moet konsekwent de Laplaciaan gevormd worden m.b.v.

* $\nabla^2 \psi = \psi_5 + \psi_6 + \psi_7 + \psi_8 - 4\psi_0$, maar het gebruik van $\nabla^2 \psi$ blijkt geen moeilijkheden op te leveren in de praktijk. Daarom schrijven we ook:

$$f_x \psi_x + f_y \psi_y \Rightarrow \frac{1}{2d^2} [C]$$

met

(5.31)

$$C = (f_1 - f_0)(\psi_1 - \psi_0) + (f_3 - f_0)(\psi_3 - \psi_0) + (f_2 - f_0)(\psi_2 - \psi_0) + (f_4 - f_0)(\psi_4 - \psi_0)$$

Door (5.28), (5.30) en (5.31) gaat (5.27) over in (voor het N. HALFROND):

$$\frac{\nabla^2 \psi}{d^2} = -f + \sqrt{2 \frac{\nabla^2 \Phi}{d^2} + f^2 + \frac{A^2 + B^2}{d^4} - \frac{C}{d^2}}$$

of

$$\nabla^2 \psi = -fd^2 + \sqrt{2d^2 \nabla^2 \Phi + (fd^2)^2 + A^2 + B^2 - Cd^2} \quad (5.32)$$

Randvoorwaarde:

Bolin (1956) stelde voor

$$\begin{aligned} u_g &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \gamma \\ \bar{v}_g &= +\frac{\partial \psi}{\partial x} + \gamma \end{aligned} \quad (5.33)$$

langs de rand. Hierin is γ een correctieterm om de contour-integraal langs de rand nul te maken. We kunnen de conditie (5.33) nl. schrijven als:

$$\frac{1}{f} \frac{\partial \psi}{\partial c} = \frac{\partial \psi}{\partial c} + \gamma$$

zodat

$$\oint \frac{1}{f} \frac{\partial \psi}{\partial c} dc = \oint \frac{\partial \psi}{\partial c} dc + \gamma \oint dc$$

Uit $\oint \frac{\partial \psi}{\partial c} dc = 0$ volgt

$$\gamma = \frac{\oint \frac{1}{f} \frac{\partial \psi}{\partial c} dc}{\oint dc} \quad (5.34)$$

We kunnen voorlopig als randvoorwaarde nemen

$$\frac{1}{f} \frac{\partial \psi}{\partial c} = \frac{\partial \psi}{\partial c}$$

of

$$\phi = \bar{f} \psi \quad (5.35)$$

waarin \bar{f} de Coriolisparameter is op, zeg, 45° N.

Een beproefde oplosmethode is als volgt (de "cycle-scan" methode).

$$\text{CYCLE: } \sigma = \sigma(\psi^v) = -fd^2 + \sqrt{2d^2 \nabla^2 \Phi + (fd^2)^2 + A^2 + B^2} - \epsilon d^2 \quad (5.36)$$

$$\text{SCAN: } \nabla^2 \psi^{v+1} = \sigma \quad (5.37)$$

een iteratief relaxatie-procédé, dat herhaald wordt tot overal

$$|\psi^{v+1} - \psi^v| < \text{zekere } \epsilon. \quad (5.37')$$

a) ψ^v fluktueert soms alternerend per cycle. Daarom werkt beter:
 $\sigma = \sigma(\bar{\psi}^v)$ met

$$\bar{\psi}^v = (\psi^v + \psi^{v+1})/2 \quad (5.37'')$$

Dan moet wel (5.37') gelden in 2 opeenvolgende cycles.

b) "First guess" bijv. $\bar{\Phi}/\bar{f}$ of ψ forec.

c) Daar de geostrofische benadering een te hoge waarde voor $A^2 + B^2$ geeft, is het beter, als $\psi^0 = \bar{\Phi}/\bar{f}$ wordt gebruikt, in de begin-cycle $A^2 + B^2$ met 0,5 te vermenigvuldigen.

d) Het werkt snel om $\epsilon = \epsilon(v)$ monotoon te laten afnemen tot zekere v is bereikt en dan ϵ konstant te houden.

Schaalfactor bij stereografische projectie vanuit de zuidpool:

rekening houdend met de vormverandering bij stereografische projectie moeten we de balansvergelijking (5.25) van de schaalfactor $m = (1 + \sin 60^\circ)/(1 + \sin \phi)$ voorzien: (vgl. 1.2.1).

$$2m^4 (\psi_{xx} \psi_{yy} - \psi_{xy}^2) + m^2 f \nabla^2 \psi + m^2 \nabla f \cdot \nabla \psi - m^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad (5.25A)$$

Hierdoor gaat (5.27) over in:

$$m^2 \nabla^2 \psi = -f + \sqrt{2m^2 \nabla^2 \Phi + m^4 (A^2 + B^2) + f^2} - 2m^2 \nabla f \cdot \nabla \psi \quad (5.27A)$$

Het equivalent van (5.32) is hierbij:

$$\nabla^2 \psi = -\frac{fd^2}{m^2} + \sqrt{\frac{2\nabla^2 \Phi d^2}{m^2} + \left(\frac{fd^2}{m^2}\right)^2 + A^2 + B^2} - \frac{\nabla d^2}{m^2} \quad (5.32A)$$

Schrijven we nog

$$q = \left(\frac{d}{m}\right)^2 \quad (5.38)$$

en

$$|E| = 2|\nabla^2 \Phi| q + (fq)^2 \quad (5.39)$$

terwijl we nog kunnen zetten

$$|H| = |E| + |A|^2 + |B|^2 - Cq \quad (5.40)$$

dan gaat (5.32A) over in

$$\nabla^2 \psi = -fq + \sqrt{|H|} \quad (5.41)$$

Ellipticiteitsconditie:

Shuman heeft aangetoond dat (5.25A) elliptisch is als

$$2\nabla^2 \Phi + f^2 m^{-2} - 2\nabla f \cdot \nabla \psi > 0 \quad (5.42)$$

Het oplossen van (5.41) schijnt goed te gaan, niet alleen als

$$|E| > Cq \quad (5.43)$$

maar zelfs als slechts de vierkantswortel reëel is, d.w.z. als

$$|H| > 0 \quad (5.44)$$

Daar meestal

$$|E| \gg |Cq|$$

en daar bovendien $|E|$ bijna uitsluitend positief is, terwijl $|A|^2$ en $|B|^2$ positief-definiet zijn, stellen we allereerst de eis:

$$|E| \geq 0 \quad (5.45)$$

Is ergens aan (5.45) niet voldaan, dan gaan we te werk als volgt:

$$E_0 \text{ dus } < 0$$

$$1e \quad E_i = E_i + \frac{1}{4} E_0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$2e \quad E_0 = 0$$

Na enkele scans zal overal aan (5.45) zijn voldaan, de gemiddelde waarde van het E-veld zal niet veranderd zijn, terwijl de overige wijzigingen niet significant zijn.

Soms is de eis (5.45) niet voldoende, daarom moet steeds gescand worden of wel voldaan is aan (5.44). Deze kiezen we i.p.v. (5.43) als "onze ellipticiteitsconditie". In dit geval zetten we domweg $H=0$, terwijl terzake een telling wordt gehouden gedurende iedere scan. Wordt in 4 opeenvolgende scans de conditie (5.44) geweld aangedaan, dan doen we - in navolging van Suitland (M.W.R., 85, Oct.'57, pp. 329-332) - het volgende:

als $-0.1(\overline{f_q})^2 \leq H \leq 0$ dan zetten we $H=0$ en tellen dit niet!

In Suitland convergeerden de programma's zo altijd.

Controle:

Het is nodig om de balansvergelijking te inverteren teneinde uit het nieuw berekende ψ -veld het nieuwe z -veld af te leiden. We lossen Φ dus op uit (5.25). Dit is nu een gewone Poisson-vergelijking. De eindige differentie-representatie volgt uit (5.25), (5.28), (5.29), (5.30) en (5.31):

$$\nabla^2 \Phi = f \nabla^2 \psi + \frac{1}{2d^2} \left[-(\psi_1 + \psi_3 - \psi_2 - \psi_4)^2 + (\psi_5 + \psi_7 - 2\psi_0)(\psi_6 + \psi_8 - 2\psi_0) \right] + \frac{C}{2} \quad (5.46)$$

De schaalfactor in rekening brengend krijgen we:

$$\nabla^2 \Phi = f \nabla^2 \psi + \frac{m^2}{2d^2} \left[-(\psi_1 + \psi_3 - \psi_2 - \psi_4)^2 + (\psi_5 + \psi_7 - 2\psi_0)(\psi_6 + \psi_8 - 2\psi_0) \right] + \frac{C}{2} \quad (5.46A)$$

Het is economischer om i.p.v. Φ de grootheid Φ/f_0 - die dezelfde dimensie heeft als ψ - op te lossen uit de vergelijking

$$\nabla^2 (\Phi/f_0) = (\text{rechterlid van (5.46A)} / f_0) \quad (5.46B)$$

Praktisch gebruik randvoorwaarde

Rand bijv. genummerd als volgt:

1e $\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial s}$ "kwasi-geostrofisch"

gewoon volgens $\psi_i = \frac{\phi_i}{f_{\text{gem}}}$

2e $\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial s} - \gamma$ met $\gamma = \frac{\oint \frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial s} ds}{\oint ds}$

ofwel langs de rand: $\delta \psi = \frac{1}{f} \delta \phi - \gamma \delta s$

volgens:

a) $D_i = 2g \frac{z_{i+1} - z_i}{f_{i+1} + f_i} \approx \frac{1}{f} \delta \phi_{i+\frac{1}{2}}$ $i = 0, 1, \dots, N-1$ (5.47)

b) $E = \sum_0^{N-1} D_i / N \approx \gamma \delta s$ (5.48)

c) $\psi_0 = g z_0 / f_0$ en verder (5.49)

$\psi_{i+1} = \psi_i + D_i - E$ $i = 0, 1, \dots, N-1$ (5.50)

(check: type ψ_0 en ψ_N)

Bij het "terug-oplossen" van de balansvergelijking behandelen we de rand als volgt:

$\delta \psi = \frac{1}{f} \delta \phi - \gamma \delta s \rightarrow \delta \phi = f(\delta \psi + \gamma \delta s)$

ofwel $\delta z = \frac{f}{g} (\delta \psi + \gamma \delta s)$

We gaan evenwel niet over op z, maar houden de dimensie van ψ vast in de grootheid $z^* = \frac{f}{f_0} \cdot z$, zodat

$\delta z^* = (\delta \psi + \gamma \delta s) \frac{f}{10g} \cdot 99$

waarin $99 = \frac{g}{f_0} \times 10$ (faktor 10 omdat ingelezen z-waarden in geop.dam!).

De grootheid $20g$ heet in het programma "const" en $\gamma \delta s$ heet g_0 , zodat:

$\delta z^* = (\delta \psi + g_0) \times \frac{f_{i+1} + f_i}{\text{const}} \times 99$

Als volgt:

$$a) D_i = (\psi_{i+1} - \psi_i + g_0) * (f_{i+1} + f_i) * g_0 / \text{const} \quad (5.51)$$

$$b) z_0^* = \psi_0 \quad \text{en verder} \quad (5.52)$$

$$c) z_{i+1}^* = z_i^* + D_i \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

(check: type Z_0^* en Z_N^*)

5.3 De eigenlijke prognose

Tot nu toe werd niet gesproken over het oplossen van de prognostische vergelijking (5.17). Dit gaat als volgt.

Ten eerste laten we de term $\eta \frac{\partial \psi}{\partial t}$ weg, zoals gewoonlijk in het barotrope model wordt gedaan. Dit impliceert dat de verg. (5.17) toegepast geacht wordt op het divergentie-vrije niveau.

Ten tweede kiezen we voor de druk-wind-relatie de balansvergelijking. Daardoor kunnen we (5.17) schrijven als

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = -f(\psi, \eta) \quad (5.17A)$$

Ten derde voegen we hieraan toe de bekende Cressman-correctieterm voor de retrogressie van de ultralange golven:

$$(\nabla^2 - \mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial t} = -f(\psi, \eta) \quad (5.17B)$$

Toevoeging van de schaalfactor m doet (5.17B) overgaan in

$$(m^2 \nabla^2 - \mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial t} = -m^2 f(\psi, \eta) \quad (5.17C)$$

De eindige-differentievergelijking die hiermee correspondeert is (zie (5.28) en (5.29)):

$$(m^2 d^{-2} \nabla^2 - \mu^2) \frac{\Delta \psi}{\Delta t} = \frac{m^2}{4d^2} \mathcal{J} \left(\frac{m^2}{d^2} \nabla^2 \psi + f, \psi \right)$$

of ook

$$(\nabla^2 - q \mu^2) \Delta \psi = \frac{\Delta t}{4} \mathcal{J} \left(\frac{\nabla^2 \psi}{q} + f, \psi \right) \quad (5.17D)$$

Hierin is evenwel, in tegenstelling tot (5.29),

$$J(A,B) = (A_1 - A_3)(B_2 - B_4) - (A_2 - A_4)(B_1 - B_3) \quad (5.29.A)$$

De vergelijking (5.17.D) laat zich het snelst oplossen indien $q\mu^2 =$ constant. Nu is $q\mu^2 = \mu^2 d^2 m^{-2}$. Voor $\mu^2 d^2$ is 0,1 à 0,2 de aangewezen (empirische) getalwaarde. Zien we af van de variatie in de schaalfactor - het betreft hier slechts een correctieterm - en houden we deze gelijk aan 1, dan kan voor $q\mu^2$ geschikt de constante waarde $q' = + 0,15$ worden gekozen.

Daardoor wordt (5.17D) een vergelijking van het type (Helmholtz-vgl.):

$$(\nabla^2 - q') C = F \quad (5.17E)$$

waar F bekend is en C de onbekende parameter.

Voluit geschreven is (5.17E):

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 - (4 + q') C_0 = F_0$$

Een eerste gisveld wordt verkregen door overal

$$C_0 = \frac{C_1 + C_2 + C_3 + C_4 - F_0}{4 + q'} \quad (5.17F)$$

te stellen.

Doordat C_1, C_2, C_3 en C_4 overal mee veranderen, wordt nog niet exact aan de differentie vgl. (5.17E) voldaan, maar zal in ieder roosterpunt een residu-waarde aanwezig zijn:

$$R_0 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 - (4 + q') C_0 - F_0 \quad (5.17G)$$

Om de oorspronkelijke schatting C_0 te verbeteren, wordt in de zgn. successieve-relatiemethode vervolgd met

$$C_0' = C_0 + \frac{R_0}{4 + q'} \quad (5.17H)$$

Dit procédé blijkt wel te convergeren naar de echte oplossing van de differentie-vgl. (niet de differentiaal-vgl.!), maar vlugger kan dit door de methode van de "successieve overrelaxatie" waarin men i.p.v. (5.17H) stelt

$$C_0 = C_0 + \frac{\alpha R_0}{4 + q'} \quad (5.17H')$$

Hierin is α , de zgn. overrelaxatie-faktor, een getal > 1 .

De optimale waarde van α hangt van q' af en kan het beste experimenteel worden bepaald. Hierom was het wenselijk $q' = \text{constant}$ te nemen.

Het oplos-procédé werkt nu iteratief volgens (5.17F), (5.17G), (5.17H') en dan weer (5.17F) enz. enz. tot verdere iteraties niet significant meer bijdragen aan de verbetering van de oplossing.

De extrapolatie-procedure voor het verkrijgen van een nieuwe -waarde gaat als volgt:

$$\psi^{i+1} = \psi^{i-1} + 2 \Delta_t \psi \quad (5.53)$$

Dit gaat echter niet voor $i = 0$. Daarom wordt (5.17D) aldus geschreven:

$$(\sigma^2 - q') \Delta_t \psi = \frac{\varepsilon \Delta t}{4} \mathcal{J} \left(\frac{\nabla^2 \psi^i}{q} + f, \psi^i \right) \quad (5.17D')$$

met

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \text{ voor het verkrijgen van } \psi^{\frac{1}{2}} = \psi^0 + \Delta_0 \psi$$

$$\varepsilon = 1 \text{ voor het verkrijgen van } \psi^1 = \psi^0 + \Delta_{1/2} \psi$$

$$\varepsilon = 2 \text{ voor het verkrijgen van } \psi^{i+1} = \psi^{i-1} + 2 \Delta_t \psi$$

5.3.1 Terreineffekt

Volgens Cressman (1960) werd een term voor de orografie geïncorporeerd waardoor (5.17C) overgaat in

$$(m^2 \sigma^2 - \mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial t} = -m^2 \mathcal{J}(\psi, \eta) + \frac{a \eta m^2}{p_g - p_t} \mathcal{J}(\psi, p_g) \quad (5.17C')$$

Hierin is $a = 1 - 0,8 \frac{p_g - 500}{500}$,

p_g = (gladgestreken) standaarddruk in mbar op terrein-hoogte en

p_t = druk op tropopausehoogte, hier 200 mbar.

Het eindige-differentie analogon van (5.17C') is

$$(\sigma^2 - q') \Delta_t \psi = \frac{\varepsilon \Delta t}{4} \left[\mathcal{J} \left(\frac{\nabla^2 \psi^i}{q} + f, \psi^i \right) + a \frac{f + q^{-1} \nabla^2 \psi^i}{p_g - p_t} \mathcal{J}(\psi^i, p_g) \right] \quad (5.17D'')$$

Het oplossen van (5.17D'') verschilt in principe niet van het oplossen van (5.17D').

5.3.2 Smoothing

Het blijkt nodig regelmatig na de integratie over een zeker aantal tijdstappen het geforecaste ψ -veld glad te strijken (zie Shuman, 1957).

Gekozen werd de 3-element operator uit het artikel van Shuman:

$$V_0 = 0,49965$$

$$V_1 = -0,22227 + 0,64240 i$$

$$V_2 = -0,22227 - 0,64240 i$$

Successieve toepassing van de 3 gladstrijkers in één richting geeft:

$$\bar{z}_0 = z_0 + \frac{1}{2} V_0 (z_1 - 2z_0 + z_1)$$

$$\bar{\bar{z}}_0 = \bar{z}_0 + \frac{1}{2} V_1 (\bar{z}_{-1} - 2\bar{z}_0 + \bar{z}_1) =$$

$$= \bar{z}_0 + \frac{1}{2} V_0 (z_{-1} - 2z_0 + z_1)$$

$$+ \frac{1}{2} V_1 \left\{ z_{-1} + \frac{1}{2} V_0 (z_{-2} - 2z_1 + z_0) \right.$$

$$\left. - 2(z_0 + \frac{1}{2} V_0 (z_{-1} - 2z_0 + z_1)) \right.$$

$$\left. + z_0 + \frac{1}{2} V_0 (z_0 - 2z_1 + z_2) \right\} =$$

$$= z_0 + \frac{V_0 + V_1}{2} (z_{-1} - 2z_0 + z_1) + \frac{V_0 V_1}{4} (z_{-2} - 4z_{-1} + 6z_0 - 4z_1 + z_2)$$

$$\bar{\bar{\bar{z}}}_0 = \bar{\bar{z}}_0 + \frac{1}{2} V_2 (\bar{\bar{z}}_{-1} - 2\bar{\bar{z}}_0 + \bar{\bar{z}}_1)$$

$$= z_0 + \frac{V_0 + V_1}{2} (z_{-1} - 2z_0 + z_1) + \frac{V_0 V_1}{4} (z_{-2} - 4z_{-1} + 6z_0 - 4z_1 + z_2)$$

$$+ \frac{1}{2} V_2 \left[z_{-1} + \frac{V_0 + V_1}{2} (z_{-2} - 2z_{-1} + z_0) + \frac{V_0 V_1}{4} (z_{-3} - 4z_{-2} + 6z_{-1} - 4z_0 + z_1) \right.$$

$$\left. - 2 \left\{ z_0 + \frac{V_0 + V_1}{2} (z_{-1} - 2z_0 + z_1) + \frac{V_0 V_1}{4} (z_{-2} - 4z_{-1} + 6z_0 - 4z_1 + z_2) \right\} \right.$$

$$\left. + z_1 + \frac{V_0 + V_1}{2} (z_0 - 2z_1 + z_2) + \frac{V_0 V_1}{4} (z_{-1} - 4z_0 + 6z_1 - 4z_2 + z_3) \right]$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{z}}_0 &= z_0 + \left\{ \frac{r_0+r_1+r_2}{2} - (r_0r_1+r_0r_2+r_1r_2) + \frac{15}{8} r_0r_1r_2 \right\} (z_{-1} - 2z_0 + z_1) \\ &+ \left\{ \frac{r_0r_1+r_0r_2+r_1r_2}{4} - \frac{3}{4} r_0r_1r_2 \right\} (z_{-2} - 2z_0 + z_2) \\ &+ \frac{r_0r_1r_2}{8} (z_{-3} - 2z_0 + z_3) \end{aligned}$$

Nu is

$$\frac{r_0+r_1+r_2}{2} - (r_0r_1+r_0r_2+r_1r_2) + \frac{15}{8} r_0r_1r_2 = 0,22049,$$

$$\frac{r_0r_1+r_0r_2+r_1r_2}{4} - \frac{3}{4} r_0r_1r_2 = -0,11317 \quad \text{en}$$

$$r_0r_1r_2 = 0,02886,$$

zodat

$$\begin{aligned} \bar{\bar{z}}_0 &= z_0 + 0,22049 (z_{-1} - 2z_0 + z_1) - 0,11317 (z_{-2} - 2z_0 + z_2) \\ &+ 0,02886 (z_{-3} - 2z_0 + z_3) \end{aligned}$$

ofwel

$$\begin{aligned} \bar{\bar{z}}_0 &= z_0 + [0,22049 (z_{-1} + z_1) - 0,11318 (z_{-2} + z_2) + 0,02886 (z_{-3} + z_3) \\ &- 0,27236 z_0]. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Werken we in de X-richting, dan noemen we de uitdrukking tussen teksthaken Δ_x , werken we in de Y-richting, dan Δ_y .

Met weglating van de liggende overstrepingen gebeurt er nu achtereenvolgens over het gehele veld¹⁾ van Z-waarden in ieder roosterpunt:

- a) Bereken Δ_x
 - b) Vorm $z_0 = z_p + \Delta_x$
 - c) Bereken Δ_y
 - d) Vorm $z_0 = z_0 + \Delta_y$
- (5.55)

Op deze wijze vindt 2-dimensionale gladstrijking plaats. De gladstrijkoperatie wordt na elke 24 uur driemaal achtereenvolgens toegepast. Tot nu toe werkte deze vorm van "smoothing" bevredigend.

1) Afgezien van een rand van 3-roosterpunten-breedte!

5.4 Schaling (Vgl. par. 1.4.4)

Om geheugenruimte te besparen worden alle variabelen en konstanten geschaald tot gehele getallen door vermenigvuldiging met een geschikte gehele macht van 10. De logaritmen van de schalingsfactoren zijn gespecificeerd in een losse bijlage^{*)}, waarin ook de doorwerking van de schalingen in elke programma-opdracht is aangegeven.

5.5 Gebruik van het trommelgeheugen (Vgl. par. 1.4.3)

Vóór 1 juni 1968 had de X8 van het Elektronisch Rekencentrum van de Rijksuniversiteit te Utrecht, waar het programma in eerste instantie werd getest, niet voldoende kernengeheugen om het programma in zijn geheel daarin te kunnen verwerken. Daarom werd van de trommel gebruik gemaakt met de opdrachten "TO DRUM" en "FROM DRUM", waarmede een array in zijn geheel kan worden weggeschreven resp. weer opgehaald. De organisatie van deze trommeltransporten is vastgelegd in een afzonderlijk schema.^{*)} Voorlopig zal zich hetzelfde tekort aan geheugencapaciteit ook bij de KNMI-X8 voordoen, zodat wijziging van de aanpak tot later kan worden uitgesteld.

5.6 REFERENTIES

- Bolin, B., 1956: An improved barotropic model and some aspects of using the balance equation for three-dimensional flow. Tellus, 8, 61-75.
- Cressman, G.P., 1960: Improved terrain effects in barotropic forecasts. Monthly Weather Review, 88, 327-342.
- Miyakoda, K. 1960: Numerical solution of the balance equation. Techn. Rep. Japan Meteorological Agency, No.3, 15-34.
- Shuman, F.G., 1957: Numerical methods in weather prediction: II. Smoothing and filtering. Monthly Weather Review, 85, 357-361.
- Thompson, P.D., 1961: Numerical weather analysis and prediction. Macmillan, New York.

*) Niet aan dit verslag toegevoegd.

6. BAROKLIEN 3-PARAMETER MODEL

6.1 Model-aannamen

Als model-atmosfeer wordt voorondersteld een baroklien continu medium, droog-adiabatisch, niet-visceus en in hydrostatisch evenwicht verkerend. Voorspeld wordt de gedraging van de troposfeer, die wordt begrensd door het drukvlak $p = p_0$, dicht boven de grond of althans dicht boven de wrijvingslaag, en door het drukvlak $p = p_1$, corresponderend met het niveau van de maximale windsnelheid. Door het midden-niveau $p = p_m$ wordt de troposfeer verdeeld in twee lagen. Massatransport van en naar de stratosfeer door het bovenste grensvlak is mogelijk, alsook transport door het onderste grensvlak. Dit laatste transport wordt uitsluitend bepaald door de orografie. Aan de top van de atmosfeer ($p = 0$) treedt geen verticale beweging op. De bewegingen vinden plaats zonder wrijving, waarbij voor de wind de kwasi-geostrofische benadering geldt.

De kwasi-geostrofische en kwasi-statische approximaties vormen een voldoende (hoewel niet noodzakelijke) filtervoorwaarde voor het uitsluiten van geluids- en gravitatiegolven uit de oplossingen van de voorspelvergelijkingen.

6.2 Basisvergelijkingen

Zoals bekend (Hollmann, 1956) is de enige vorm van de vorticitetsvergelijking en de thermodynamische vergelijking voor een barokliene atmosfeer, welke consistent is met de kwasi-geostrofische benadering,

$$\dot{\xi} + \mathbf{v} \cdot \nabla \eta + f_0 \cdot D = 0 \quad (6.1)$$

respectievelijk

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} + \mathbf{v} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} + \hat{\sigma} \cdot \omega = 0 \quad (6.2)$$

Hieraan wordt toegevoegd de continuïteitsvergelijking

$$D + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (6.3)$$

Voor de betekenis van de gebruikte symbolen wordt verwezen naar de Appendix.

6.3 Parameterisering

Er zijn twee manieren om (6.1), (6.2) en (6.3) te benutten voor voorspeldoeleinden, corresponderend met de zg. "layer models" resp. "parameter models". De eerste aanpak, o.m. gebezigd in Japan en de V.S., is het oplossen van (6.1) - waarin (6.3) is gesubstitueerd - voor elk van de onderscheidene informatie-niveaus, terwijl het over elke laag gemiddelde vertikale snelheidsveld wordt berekend uit de bekende ω -vergelijking, welke uit (6.1), (6.2) en (6.3) kan worden afgeleid. In deze laatste vergelijking komen partiële afgeleiden naar de druk voor, welke benaderd moeten worden door eindige differenties. Bij een geringe resolutie in de vertikale richting, zoals het geval is bij gebruik van drie informatie-niveaus, wordt de kwaliteit van de voorspellingen onvermijdelijk benadeeld door "truncation errors".

Daarom werd in bijvoorbeeld Engeland, Noorwegen en Zweden getracht het vertikale snelheidsveld op andere wijze te bepalen dan m.b.v. de ω -vergelijking, en wel door het verloop met de druk van zekere parameters voor te schrijven. Deze "parameterisering" betekent in feite een vermindering van het aantal vrijheidsgraden van het initialiserings- en voorspelprobleem, en daarmee een inperking van het aantal mogelijke ruis-fluctuaties in de oplossingen, waar een aantal onderling sterk gecorreleerde parameters wordt vervangen door enkele ongecorreleerde parameters.

Men kan een optimale parametrische representatie van de vertikale structuur van de atmosfeer nastreven in de zin van "empirische orthogonale functies" of daaromtrent, doch men moet er daarbij wel op bedacht zijn dat de "modelling approximations", behalve geschikte replica's van de werkelijke atmosfeer, ook dynamisch consistent moeten zijn met de in het model gehanteerde aannamen en basisvergelijkingen.

Op deze kwestie zal pas dieper worden ingegaan in punt 4. Voorshands willen we de opzet van het model zo algemeen mogelijk houden door ons nog niet definitief uit te spreken voor het vertikale profiel van o.m. de horizontale wind. Wel nemen we aan, zoals Bushby en Whitlam (1961), Bengtsson (1965), Terauchi (1965) e.a. ook doen, dat de wind overal in de laag slechts op eenvoudige wijze afhangt van de gemeten, c.o.q. voorspelde, wind in elk der beide begrenzende drukvlakken van die laag en wel als volgt^{*}):

*) Het profiel van ψ , D en ξ wordt in het navolgende consistent met het windprofiel verondersteld.

$$\begin{aligned}
 0 \leq p \leq p_1 &: \quad \mathbb{V} = A_2 (\mathbb{V}_m + \mathbb{V}'_1) \\
 p_1 \leq p \leq p_m &: \quad \mathbb{V} = \mathbb{V}_m + A_1 \mathbb{V}'_1 \\
 p_m \leq p \leq p_0 &: \quad \mathbb{V} = \mathbb{V}_m + A_0 \mathbb{V}'_0
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Hierin betekent \mathbb{V}_i de horizontale windvektor in het drukvlak $p = p_i$. Verder is $\mathbb{V}'_1 = \mathbb{V}_1 - \mathbb{V}_m$ en $\mathbb{V}'_0 = \mathbb{V}_m - \mathbb{V}_0$, terwijl A_0 , A_1 en A_2 nog nader te specificeren functies van de druk voorstellen. Zie Fig. 6.1.

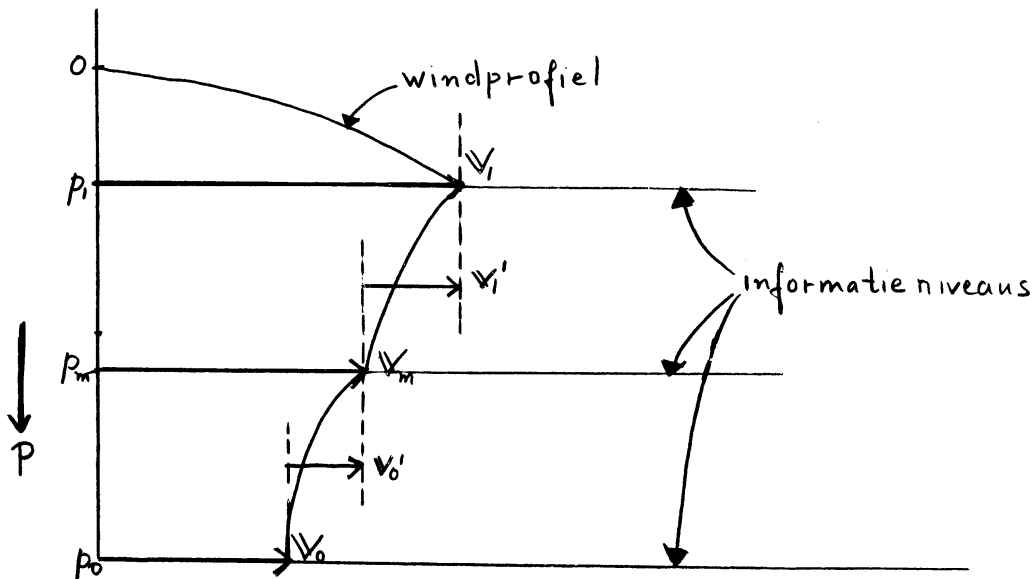


Fig. 6.1

Het probleem is nu met inachtnaeme van (6.4) de prognostische vergelijkingen te formuleren. Terauchi (1965) gaat uit van de gedachte, dat in geval van een ideale atmosfeer, die exact beantwoordt aan de vergelijkinge (6.1), (6.2) en 6.3), wanneer men deze vergelijkingen gaat oplossen, toch fouten zullen optreden i.v.m. de geringe verticale resolutie c.o. de "modelling approximations". Hij stelt daarom de rechterleden van (6.1) en (6.2) gelijk aan e_1 resp. e_2 , voorstellende de fout in de berekende tijdsafgeleide als functie van p . Dan gaat het erom deze fouten te minimaliseren. Terauchi heeft dit gedaan m.b.v. de variatierekening. Voeren we de volgende notaties in:

$$\begin{aligned}
 \{ \} &\equiv \int_0^{p_1} dp, & \sim &\equiv \int_{p_1}^{p_0} dp, \\
 \langle \rangle &\equiv \int_{p_1}^{p_m} dp, & \text{---} &\equiv \int_0^{p_0} dp, \\
 [] &\equiv \int_{p_m}^{p_0} dp, & &
 \end{aligned}$$

dan laten de minimaliseringscondities, die Terauchi afleidde, zich als volgt schrijven:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{e}_1 &= 0 \\ \langle e_1 A_1 \rangle &= 0 \\ [e_1 A_0] &= 0 \\ \langle e_2 \frac{A_1}{dp} \rangle &= 0 \\ [e_2 \frac{A_0}{dp}] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{--- (6.5)}$$

De vergelijkingen (6.5) vormen een gesloten systeem van prognostische gefilterde vergelijkingen.

Bushby en Whitelam (1961) gebruiken

$$\left. \begin{aligned} \tilde{e}_1 &= 0 \\ (e_1)_{p_1} - (e_1)_{p_m} &= 0 \\ (e_1)_{p_m} - (e_1)_{p_0} &= 0 \\ \langle e_2 \rangle &= 0 \\ [e_2] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{--- (6.6)}$$

met A_0 en A_1 lineair in p . Alleen de tweede en derde vergelijking verschillen iets van de overeenkomstige vergelijkingen in (6.5).

In de vergelijking $e_1 = 0$ schuilt een moeilijkheid, t.w. de randvoorwaarde voor ω_{p_1} . Bushby en Whitelam stellen simpel $\omega_{p_1} = 0$, hetgeen wellicht minder gewenste effecten oplevert. Bengtsson (1965) zet dan ook niet $\tilde{e}_1 = 0$ maar $\overline{e}_1 = 0$, met A_2 eveneens lineair in p . Voor het overige hanteert hij schema (6.6)

Hoe dan ook, de gebruikelijke gang van zaken voor het verkrijgen van de voorspelvergelijking voor het midden-niveau, ofwel het hoofdveld, is het integreren van (6.1) na substitutie van (6.3) waardoor de divergentie wordt geëlimineerd. Geïntegreerd wordt over de hoogte van de troposfeer of van de gehele atmosfeer. Barokliene effecten komen in de aldus ontstane prognostische vergelijking tot uiting in vijf Jacobianen in het rechterlid, voorstellende de interacties van het hoofdveld met de beide thermische

velden, alsook in een term met ω_{p_0} , welke laatste term nog minstens één Jacobiaan oplevert wanneer ω_{p_0} m.b.v. de topografie gespecificeerd wordt. Een zo groot aantal Jacobianen, alsmede drie onbekende termen in het linkerlid, werken de rekenintensiteit sterk in de hand.

Het kan evenwel ook anders, en wel m.b.v. de voor de hand liggende aanname: $(e_1)_{p_m} = 0$. Door het divergentie-profiel consistent te nemen met het horizontale windprofiel, vastgelegd door (6.4), en dit in de continuïteitsvergelijking (6.3) te substitueren, eisend dat ω continu is voor $p = p_1$ en $p = p_m$, kunnen we de divergentie van het hoofveld expliciet uitdrukken in de divergenties in de beide troposferische lagen alsook in ω_{p_0} . Het zal blijken dat deze procedure het aantal Jacobianen in de eerste voorspelvergelijking aanzienlijk beperkt, terwijl slechts één onbekende in het linkerlid voorkomt, echter twee onbekenden in het rechterlid.

We eisen dus dat de fout in de vorticateitsvergelijking op het niveau $p = p_m$ als gevolg van de "modelling approximations" exact gelijk is aan nul. Door bovendien te eisen dat de over elke troposferische laag geïntegreerde fout in de vorticateitsvergelijking zowel als in de thermische vergelijking nul is, krijgen we het volgende voorspelschema:

$$(e_1)_{p_m} = 0 \quad \text{-----} \quad (6.7A)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle e_1 \rangle &= 0 \\ [e_1] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{-----} \quad (6.7B)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle e_2 \rangle &= 0 \\ [e_2] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{-----} \quad (6.7C)$$

We hadden voor (6.7B) ook bijvoorbeeld kunnen eisen $\langle e_1 p \rangle - \langle e_1 \rangle \cdot \langle p \rangle = 0$ resp. $[e_1 p] - [e_1] \cdot [p] = 0$, hetgeen impliceert dat de fout in de vorticateitsvergelijking per laag niet met de druk lineair gecorreleerd is, etc. Om te zien wat van een en ander de konsekventies zijn, voeren we de integratie $\langle e_1 \rangle$ eens uit, rekening houdend met (6.4).

$$\begin{aligned} \langle e_1 \rangle &= \langle \dot{S}_m + A_1 \dot{S}'_1 + (V_m + A_1 V'_1) \cdot \nabla (\eta_m + A_1 S'_1) + f_0 (D_m + A_1 D'_1) \rangle \\ &= \langle 1 \rangle (e_1)_{p_m} + \langle A_1 \rangle (\dot{S}'_1 + V_m \cdot \nabla S'_1 + V'_1 \cdot \nabla \eta_m + f_0 D'_1) \\ &\quad + \langle A_1^2 \rangle (V'_1 \cdot \nabla S'_1) \end{aligned}$$

In combinatie met de conditie (6.7A) levert $\langle e_1 \rangle = 0$ op:

$$\dot{\xi}'_m + v_m \cdot \nabla \xi'_m + v'_m \cdot \nabla \eta_m + f_0 D'_m + \frac{\langle A_1^2 \rangle}{\langle A_1 \rangle} (v'_m \cdot \nabla \xi'_m) = 0,$$

hetgeen impliceert dat in (6.1) de fout in $\dot{\xi}'_m$:

$$e_1 = A_1 \left(A_1 - \frac{\langle A_1^2 \rangle}{\langle A_1 \rangle} \right) (v'_m \cdot \nabla \xi'_m),$$

ofwel $e_1 \doteq A_1 (A_1 - c)$ waarin $c = \text{constante}$.

Is A_1 lineair in p , dan geeft dit dus een parabolisch fout-profiel, terwijl $c = + \frac{2}{3}$ (zie Fig. 6.2a). Is A_1 niet lineair in p , dan wijkt het profiel van de fout in de laag als functie van p hiervan (wat) af. (Fig. 6.2b).

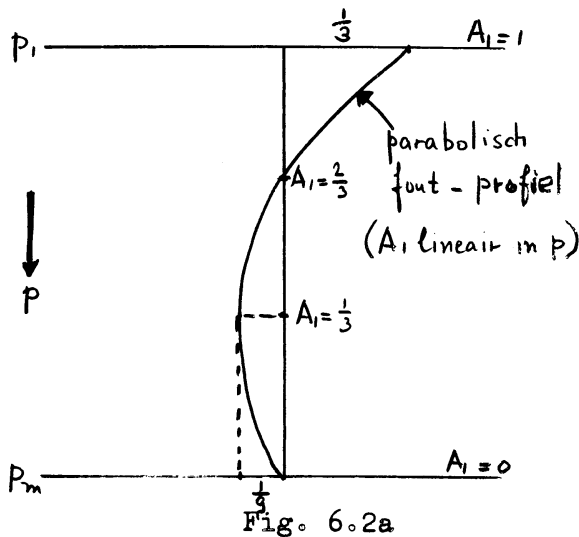


Fig. 6.2a

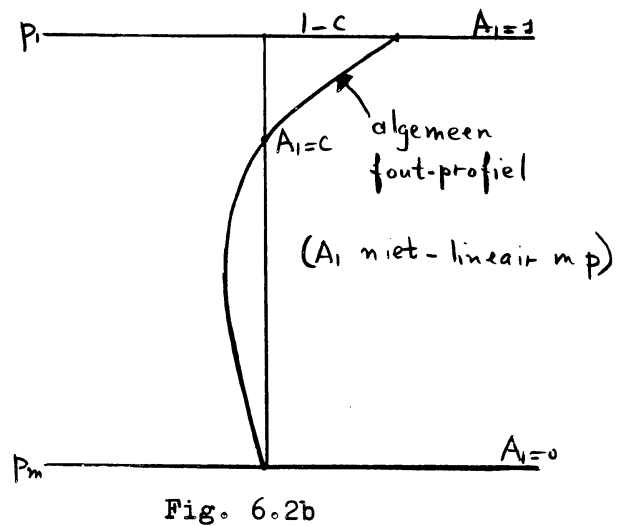


Fig. 6.2b

Gemakkelijk is na te gaan dat - i.p.v. de conditie $e_1 = 0$ - iedere andere aanpak, zoals $(e_1)_p - (e_1)_{P_m} = 0$ of $\langle e_1 p \rangle - \langle e_1 \rangle \langle p \rangle = 0$ of ook $\langle e_1 p^\alpha \rangle - \langle e_1 \rangle \langle p^\alpha \rangle = 0$ (α constant) enz., mits in combinatie met (6.7A), resulteert in hetzelfde foutprofiel $e_1 \doteq A_1 (A_1 - c)$, alléén de waarde van c verschilt! Zo is bijvoorbeeld voor $(e_1)_p - (e_1)_{P_m} = 0$: $c = 1$. Het lijkt niet zinvol op al te sofistieke wijze c te willen bepalen, reden waarom we vasthouden aan het prognostische vergelijkingstelsel (6.7A, B, C).

Integratie van (6.3) over elk der lagen geeft achtereenvolgens i.v.m. (6.4):

$$\omega_{p_1} = \int_0^{\omega_{p_1}} d\omega = \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial p} \right\} = - \{D\} = - \{A_2\} (D_m + D'_1)$$

$$p_1 \leq p \leq p_m : \quad \omega_p - \omega_{p_1} = \int_{\omega_{p_1}}^{\omega_p} d\omega = - \int_{p_1}^p D dp = - \int_{p_1}^p dp \cdot D_m - \int_{p_1}^p A_1 dp \cdot D'_1,$$

$$p_1 \leq p \leq p_m : \quad \omega_p = - \left(\int_{p_1}^p dp + \{A_2\} \right) D_m - \left(\int_{p_1}^p A_1 dp + \{A_2\} \right) D'_1 \quad (6.3A)$$

$$\therefore \omega_{p_m} = - (\langle I \rangle + \{A_2\}) D_m - (\langle A_1 \rangle + \{A_2\}) D'_1$$

$$p_m \leq p \leq p_0 : \quad \omega_p - \omega_{p_m} = - \int_{p_m}^p D dp = - \int_{p_m}^p dp \cdot D_m - \int_{p_m}^p A_0 dp \cdot D'_0,$$

$$p_m \leq p \leq p_0 : \quad \omega_p = - \left(\int_{p_m}^p dp + \langle I \rangle + \{A_2\} \right) D_m - (\langle A_1 \rangle + \{A_2\}) D'_1 - \int_{p_m}^p A_0 dp \cdot D'_0 \quad (6.3B)$$

$$\therefore \omega_{p_0} = - ([I] + \langle I \rangle + \{A_2\}) D_m - (\langle A_1 \rangle + \{A_2\}) D'_1 - [A_0] D'_0$$

Stellen we

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= ([1] + \langle 1 \rangle + \{A_2\})^{-1}, \\ \beta &= -[A_0] \alpha, \\ \gamma &= (\langle A_1 \rangle + \{A_2\}) \alpha, \\ \hat{\omega} &= f_0 \alpha \omega_{p0}, \\ d_0 &= f_0 \beta D_0', \\ d_1 &= f_0 \gamma D_1', \end{aligned} \right\} \text{----- (6.8)}$$

dan gaat de laatste betrekking over in

$$f_0 D_m = d_0 - d_1 - \hat{\omega} \text{----- (6.3C)}$$

De integraties (6.7B) geven met (6.7A):

$$\dot{S}'_0 = -V_m \cdot \nabla S'_0 - V'_0 \cdot \nabla (\eta_m - a_{02} S'_0) - f_0 D_0' \text{----- (6.1A)}$$

$$\dot{S}'_1 = -V_m \cdot \nabla S'_1 - V'_1 \cdot \nabla (\eta_m + a_{12} S'_1) - f_0 D_1' \text{----- (6.1B)}$$

waarin

$$\left. \begin{aligned} a_{02} &= - \frac{[A_0^2]}{[A_0]} \\ a_{12} &= + \frac{\langle A_1^2 \rangle}{\langle A_1 \rangle} \end{aligned} \right\} \text{----- (6.9)}$$

Nemen we met Wiin-Nielsen (1959) aan dat

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma_0}{p^2}$$

als

$$\sigma_0 = \sigma_0' \cdot p^2 \text{----- (6.10)}$$

met $\sigma_0' = 4,2$ MTS-eenheden en $P = 500$ mbar, dan geven de integraties (6.7C) na introductie van de stroomfunctie $\Psi = \phi/f_0$:

$$\dot{\Psi}'_0 + v_m \cdot \nabla \Psi'_0 + \frac{\sigma_0}{f_0 \left[\frac{\partial A_0}{\partial p} \right]} \left[\frac{\omega}{p^2} \right] = 0 \quad \dots \dots \dots (6.2A)$$

$$\dot{\Psi}'_1 + v_m \cdot \nabla \Psi'_1 + \frac{\sigma_0}{f_0 \left\langle \frac{\partial A_1}{\partial p} \right\rangle} \left\langle \frac{\omega}{p^2} \right\rangle = 0 \quad \dots \dots \dots (6.2B)$$

Met gebruikmaking van de notaties

$$\left. \begin{aligned} K'_0 &= \int_{p_m}^p dp + \langle 1 \rangle + \{A_2\} \\ K'_1 &= \int_{p_1}^p dp + \{A_2\} \\ L'_0 &= \int_{p_m}^p A_0 dp \\ L'_1 &= \int_{p_1}^p A_1 dp + \{A_2\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6.11)$$

kunnen we, met substitutie van (6.8) en (6.3C), de vergelijkingen (6.3B) en (6.3A) respectievelijk schrijven als

$$p_m \leq p \leq p_0 : \quad f_0 \omega = K_0 \hat{\omega} - \left(K'_0 + \frac{L'_0}{\beta} \right) d_0 + \left(K'_0 - \frac{1}{\alpha} \right) d_1 \dots \dots (6.3D)$$

$$p_1 \leq p \leq p_m : \quad f_0 \omega = K_1 \hat{\omega} - K'_1 d_0 + \left(K'_1 - \frac{L'_1}{\gamma} \right) d_1 \dots \dots \dots (6.3E)$$

Schrijven we

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= - \frac{\sigma_0}{f_0^2 \left[\frac{\partial A_0}{\partial p} \right]} \\ S_1 &= - \frac{\sigma_0}{f_0^2 \left\langle \frac{\partial A_1}{\partial p} \right\rangle} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6.12)$$

en verder

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= + S_0 \left[\frac{K'_0}{p^2} \right] , \\ L_0 &= - \frac{S_0}{\beta} \left[\frac{L'_0}{p^2} \right] , \\ M_0 &= + \frac{S_0}{\alpha} \left[\frac{1}{p^2} \right] , \\ K_1 &= + S_1 \left\langle \frac{K'_1}{p^2} \right\rangle , \\ L_1 &= + \frac{S_1}{\gamma} \left\langle \frac{L'_1}{p^2} \right\rangle , \end{aligned} \right\} \dots \dots (6.13)$$

dan volgt uit (6.3D) en (6.3E):

$$p_m \leq p \leq p_0 : \frac{\sigma_0}{f_0 \left[\frac{\partial A_0}{\partial p} \right]} \left[\frac{\omega}{p^2} \right] = -K_0 \hat{\omega} + (K_0 - L_0) d_0 - (K_0 - M_0) d_1 \quad (6.3F)$$

$$p_1 \leq p \leq p_m : \frac{\sigma_0}{f_0 \left\langle \frac{\partial A_1}{\partial p} \right\rangle} \left\langle \frac{\omega}{p^2} \right\rangle = -K_1 \hat{\omega} + K_1 d_0 - (K_1 - L_1) d_1 \quad (6.3G)$$

Met (6.3F) en (6.3G) gaan (6.2A) resp. (6.2B) over in

$$\dot{\Psi}_0' + v_m \cdot \nabla \Psi_0' - K_0 \hat{\omega} + (K_0 - L_0) d_0 - (K_0 - M_0) d_1 = 0 \quad \text{-----} \quad (6.2C)$$

$$\dot{\Psi}_1' + v_m \cdot \nabla \Psi_1' - K_1 \hat{\omega} + K_1 d_0 - (K_1 - L_1) d_1 = 0 \quad \text{-----} \quad (6.2D)$$

Stel

$$F_0 = \dot{\Psi}_0' + v_m \cdot \nabla \Psi_0' - K_0 \hat{\omega}, \quad \left. \vphantom{F_0} \right\} \text{-----} \quad (6.14)$$

$$F_1 = \dot{\Psi}_1' + v_m \cdot \nabla \Psi_1' - K_1 \hat{\omega}, \quad \left. \vphantom{F_1} \right\} \text{-----} \quad (6.15)$$

en $a'_0 = K_0 - L_0$, $a'_1 = -(K_0 - M_0)$, $b'_0 = K_1$, $b'_1 = -(K_1 - L_1)$,
dan volgt uit (6.2C,D) het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} F_0 + a'_0 d_0 + a'_1 d_1 &= 0 \\ F_1 + b'_0 d_0 + b'_1 d_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{-----} \quad (6.2E)$$

Als

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_0 & a'_1 \\ b'_0 & b'_1 \end{vmatrix}, \quad \text{-----} \quad (6.16)$$

dan krijgen we uit (6.2E) als oplossingen

$$d_0 = \frac{-b'_1 F_0 + a'_1 F_1}{\Delta}, \quad d_1 = \frac{b'_0 F_0 - a'_0 F_1}{\Delta} \quad \text{-----} \quad (6.2F)$$

zodat (6.1A) en (6.1B) - gelet op (6.8) - overgaan in

$$\dot{S}'_0 = -v_m \cdot \nabla S'_0 - v'_0 \cdot \nabla (\eta_m - a_{12} S'_0) + \frac{b'_1}{\beta \Delta} F_0 - \frac{a'_1}{\beta \Delta} F_1 \quad \text{-----} \quad (6.1C)$$

$$\dot{S}'_1 = -v_m \cdot \nabla S'_1 - v'_1 \cdot \nabla (\eta_m + a_{12} S'_1) - \frac{b'_0}{\gamma \Delta} F_0 + \frac{a'_0}{\gamma \Delta} F_1 \quad \text{-----} \quad (6.1D)$$

Substitutie van (6.14) in deze beide vergelijkingen geeft:

$$\begin{aligned} \dot{S}'_0 = & -V_m \cdot \nabla S'_0 - V'_0 \cdot \nabla (\eta_m - a_{02} S'_0) + \frac{b'_1}{\beta \Delta} (\dot{\Psi}'_0 + V_m \cdot \nabla \Psi'_0 - K_0 \hat{\omega}) \\ & - \frac{a'_1}{\beta \Delta} (\dot{\Psi}'_1 + V_m \cdot \nabla \Psi'_1 - K_1 \hat{\omega}) \end{aligned} \quad (6.1E)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}'_1 = & -V_m \cdot \nabla S'_1 - V'_1 \cdot \nabla (\eta_m + a_{12} S'_1) - \frac{b'_0}{\gamma \Delta} (\dot{\Psi}'_0 + V_m \cdot \nabla \Psi'_0 - K_0 \hat{\omega}) \\ & + \frac{a'_0}{\gamma \Delta} (\dot{\Psi}'_1 + V_m \cdot \nabla \Psi'_1 - K_1 \hat{\omega}) \end{aligned} \quad (6.1F)$$

Stellen we

$$\left. \begin{aligned} a_{00} &= \frac{b'_1}{\beta \Delta}, & a_{01} &= \frac{a'_1}{\beta \Delta}, \\ a_{10} &= \frac{a'_0}{\gamma \Delta}, & a_{11} &= \frac{b'_0}{\gamma \Delta}, \\ a_{03} &= a_{00} K_0 - a_{01} K_1, & a_{13} &= a_{11} K_0 - a_{10} K_1, \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

dan gaan, met gebruikmaking van de relatie $\mathcal{L} = \nabla^2 \Psi$ en $\nabla \cdot \nabla A = J(\Psi, A)$ waarin A een scalaire grootte voorstelt, (6.1E) en (6.1F) over in:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - a_{00}) \dot{\Psi}'_0 = & -J(\Psi_m, S'_0 - a_{00} \Psi'_0 + a_{01} \Psi'_1) - J(\Psi'_0, \eta_m - a_{02} S'_0) \\ & - a_{01} \dot{\Psi}'_1 - a_{03} \hat{\omega} \end{aligned} \quad (6.1G)$$

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - a_{10}) \dot{\Psi}'_1 = & -J(\Psi_m, S'_1 - a_{10} \Psi'_1 + a_{11} \Psi'_0) - J(\Psi'_1, \eta_m + a_{12} S'_1) \\ & - a_{11} \dot{\Psi}'_0 + a_{13} \hat{\omega} \end{aligned} \quad (6.1H)$$

Tenslotte volgt uit (6.7A) gecombineerd met (6.3C):

$$\nabla^2 \dot{\Psi}_m = -J(\Psi_m, \eta_m) - d_0 + d_1 + \hat{\omega}$$

en dit geeft met (6.2F)

$$\nabla^2 \dot{\Psi}_m = -\mathcal{J}(\Psi_m, \eta_m) + \frac{b_0' + b_1'}{\Delta} F_0 - \frac{a_0' + a_1'}{\Delta} F_1 + \hat{\omega}$$

Wegens (6.14) wordt dit

$$\begin{aligned} \nabla^2 \dot{\Psi}_m = & -\mathcal{J}(\Psi_m, \eta_m) + \frac{b_0' + b_1'}{\Delta} (\dot{\Psi}_0' + \mathbb{V}_m \cdot \nabla \Psi_0' - K_0 \hat{\omega}) \\ & - \frac{a_0' + a_1'}{\Delta} (\dot{\Psi}_1' + \mathbb{V}_m \cdot \nabla \Psi_1' - K_1 \hat{\omega}) + \hat{\omega} \end{aligned}$$

Stellen we nog

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{b_0' + b_1'}{\Delta}, & a_1 &= \frac{a_0' + a_1'}{\Delta}, \\ a_2 &= a_0 K_0 - a_1 K_1 - 1, \end{aligned} \right\} \text{--- (6.18)}$$

dan komt er

$$\nabla^2 \dot{\Psi}_m = -\mathcal{J}(\Psi_m, \eta_m - a_0 \Psi_0' + a_1 \Psi_1') + a_0 \dot{\Psi}_0' - a_1 \dot{\Psi}_1' - a_2 \hat{\omega} \quad (6.1K)$$

Op de bekende wijze (zie bijvoorbeeld Cressman, 1960) kan ω_p en daarmee $\hat{\omega}$, aan de hand van de topografie van het aardoppervlak worden gespecificeerd. Het aantal Jacobianen in het rechterlid van de voorspelvergelijking voor het midden-niveau zou dan twee bedragen. Het aantal onbekende termen in het linkerlid is één maar in het rechterlid staan er nog twee, zodat in dit opzicht geen voordeel is behaald.

De vergelijkingen (6.1G), (6.1H) en (6.1K) vormen een gesloten stelsel van 3 simultane lineaire partiële differentiaalvergelijkingen, welke voor prognose-doeleinden kunnen worden benut. Schaalfactor voor de kaartprojectie moet nog worden toegevoegd.

De integratie van (6.1G,H,K) gaat als volgt. Eerst worden de vergelijkingen omgezet in eindige differentievorm. De initiële waarden van Ψ_m , Ψ_0' en Ψ_1' worden met de geostrofische betrekking bepaald uit de geopotentiële hoogten van de 3 informatieniveaus: Z_1 , Z_m en Z_0 . Voor $\dot{\Psi}_0'$, $\dot{\Psi}_1'$ en $\dot{\Psi}_m$ wordt een beginschatting gemaakt. Daarmede kunnen de rechterleden van de 3 vergelijkingen worden geëvalueerd.

Het stelsel van de beide Helmholtz-vergelijkingen (6.1G) en (6.1H) wordt nu eerst opgelost m.b.v. de zogenoemde successieve relaxatiemethode.

Dit houdt in dat $\dot{\psi}_0'$ uit (6.1G) wordt opgelost (volgens één van de bekende methoden van overrelaxatie) en in het rechterlid van (6.1H) wordt gesubstitueerd. Dan wordt $\dot{\psi}_1'$ uit (6.1H) opgelost en gesubstitueerd in het rechterlid van (6.1G), waarna opnieuw $\dot{\psi}_0'$ uit (6.1G) wordt opgelost en gesubstitueerd in het rechterlid van (6.1H) enz. Dit procédé blijkt te convergeren naar de werkelijke oplossing en wordt voortgezet tot verdere iteraties niet significant meer bijdragen aan verbetering van de oplossing. De snelheid waarmee het proces convergeert is afhankelijk van de beginschatting. Wanneer na de eerste tijdstap de vorige oplossing als beginschatting wordt genomen, is een handvol iteraties voldoende (zie Bushby en Whitelam, 1961).

Tenslotte wordt (6.1K) opgelost als een gewone Poissonvergelijking, nadat in het rechterlid de nieuw bepaalde waarden voor $\dot{\psi}_0'$ en $\dot{\psi}_1'$ zijn gesubstitueerd.

Twee mogelijke verbeteringen in het model zijn:

- a) Het bepalen van ψ_m uit Z_m met de balansvergelijking i.p.v. met de geostrofische relatie.
- b) Het toevoegen van de Cressman-term (q) voor de stabilisatie van de ultra-lange golven in de vorticitetsvergelijking (1), en daardoor in (6.1.G), (6.1H) en (6.1K).

6.4 Specificatie van de functies A_0 , A_1 en A_2

Tot dusver werd het windprofiel, afgezien van de laagsgewijze opbouw, niet gepreciseerd. Integraties zoals A_0 e.d. kunnen nog niet worden uitgevoerd en daarmee is de numerieke waarde van elk der coëfficiënten in de voorspelvergelijkingen vooralsnog onbepaald.

In de praktijk gaat men uit van een lineair profiel van de horizontale wind in elke laag (Bushby en Whitelam, 1961 en Bengtsson, 1965).

Berkofsky (1962) heeft aangetoond dat de totale enthalpie voortdurend zal toenemen, bij gebruik van de kwasi-geostrofische aanname, tenzij men stelt

$$\sigma = \sigma(p) \quad (6.19)$$

Hiermede wordt nog wel in zekere mate het energie-principe geweld aangedaan maar dit is toch het beste wat men in een geostrofisch model kan doen. En juist deze aanname (6.19) impliceert (zie Berkofsky, 1962) dat de thermische wind moet voldoen aan de relatie

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \left(\frac{p}{\bar{p}}\right)^{\kappa-1} \left(\frac{\partial V}{\partial \bar{p}}\right)_{\bar{p}} \quad (6.20)$$

waarin $K = R/c_p$, R = gaskonstante en c_p = specifieke warmte bij konstante druk; \bar{p} heeft betrekking op een willekeurig drukvlak. M.a.w., de kwasi-geostrofische approximatie impliceert, via (6.19) en (6.20), dat het horizontale windprofiel niet lineair is in p , maar in p^K .

Of de inconsistentie van een profiel, dat lineair van de druk afhangt, in een geostrofisch model, ernstig uitwerkt in korte-termijnvoorspellingen, is niet direkt te zeggen. Er is evenwel geen fysische, economische of rekentechnische reden om deze inconsistentie hier over te nemen. We nemen dus het profiel lineair in p^K , al is het dan per laag.

Rekening houdend met de eis (zie (6.4)), dat $A_0(p_m) = A_1(p_m) = A_2(0) = 0$ en dat $A_1(p_1) = A_2(p_1) = +1$ terwijl $A_0(p_0) = -1$, krijgen we voor (6.4) nu:

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq p \leq p_1: & \quad V = A_2 (V_m + V_1'), & A_2 &= \left(\frac{p}{p_1}\right)^X \\ p_1 \leq p \leq p_m: & \quad V = V_m + A_1 V_1', & A_1 &= \frac{p_m^X - p^X}{p_m^X - p_1^X} \\ p_m \leq p \leq p_0: & \quad V = V_m + A_0 V_0', & A_0 &= \frac{p_m^K - p^K}{p_0^K - p_m^K} \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Uit de relaties (6.4A), (6.8) t/m (6.13) en (6.15) t/m (6.18) kunnen nu voor elke combinatie van informatie-niveaus de coëfficiënten in de vergelijkingen berekend worden.

6.5 Numerieke waarden van de coëfficiënten

Voor enige combinaties van informatie-niveaus volgen hier in tabelvorm de numerieke waarden van de coëfficiënten in de vergelijkingen. De coëfficiënten a_0 , a_1 , a_{00} , a_{10} en a_{11} hebben de dimensie L^{-2} , de overige coëfficiënten zijn dimensieloos. Het gebruikte eenheden-selsel is het MTS-stelsel. Voor de gemiddelde waarde van de Coriolisparameter is genomen: $f_0 = 10^{-4}$. We herinneren aan de relatie (6.19) met $\sigma_0' = 4,2$. Misschien is de atmosfeer dan nog wat te onstabiel en moet een iets grotere waarde worden genomen. Eventueel kan σ_0' per laag verschillen. De waarde van $K (=R/c_p)$ is 0.286. Voor de Cressman-term kan men nemen 1 à 2 maal 10^{-12} (dimensie: L^{-2}).

druk informatie-niveaus in cbar →		$p_1 = 30$ $p_m = 50$ $p_o = 85$	$p_1 = 20$ $p_m = 50$ $p_o = 85$	$p_1 = 30$ $p_m = 50$ $p_o = 100$	$p_1 = 20$ $p_m = 50$ $p_o = 100$
coëfficiënten vorticiteitsvgl. midden-niveau	a_o	$0,1065 \cdot 10^{-10}$	$0,8095 \cdot 10^{-11}$	$0,7313 \cdot 10^{-11}$	$0,5755 \cdot 10^{-11}$
	a_1	$0,5523 \cdot 10^{-11}$	$0,2110 \cdot 10^{-11}$	$0,4732 \cdot 10^{-11}$	$0,1872 \cdot 10^{-11}$
	a_2	$0,1874 \cdot 10^{+1}$	$0,1465 \cdot 10^{+1}$	$0,1714 \cdot 10^{+1}$	$0,1381 \cdot 10^{+1}$
coëfficiënten diktevergel. onderste laag	a_{oo}	$0,2431 \cdot 10^{-10}$	$0,2049 \cdot 10^{-10}$	$0,1553 \cdot 10^{-10}$	$0,1321 \cdot 10^{-10}$
	a_{o1}	$0,8250 \cdot 10^{-11}$	$0,3152 \cdot 10^{-11}$	$0,7056 \cdot 10^{-11}$	$0,2792 \cdot 10^{-11}$
	a_{o2}	$0,6868 \cdot 10^0$	$0,6868 \cdot 10^0$	$0,6926 \cdot 10^0$	$0,6926 \cdot 10^0$
	a_{o3}	$0,8489 \cdot 10^{+1}$	$0,8039 \cdot 10^{+1}$	$0,7092 \cdot 10^{+1}$	$0,6704 \cdot 10^{+1}$
coëfficiënten diktevergel. bovenste laag (troposfeer)	a_{10}	$0,8530 \cdot 10^{-11}$	$0,3847 \cdot 10^{-11}$	$0,7663 \cdot 10^{-11}$	$0,3572 \cdot 10^{-11}$
	a_{11}	$0,1168 \cdot 10^{-10}$	$0,9362 \cdot 10^{-11}$	$0,8018 \cdot 10^{-11}$	$0,6656 \cdot 10^{-11}$
	a_{12}	$0,6457 \cdot 10^0$	$0,6281 \cdot 10^0$	$0,6457 \cdot 10^0$	$0,6281 \cdot 10^0$
	a_{13}	$0,2055 \cdot 10^{+1}$	$0,1694 \cdot 10^{+1}$	$0,1879 \cdot 10^{+1}$	$0,1597 \cdot 10^{+1}$

6.6 Referenties

- Bengtsson, L., 1965: A three-parameter baroclinic model. Activities in the field of N.W.P. in Sweden. Fourth progress report of the WMO.
- Berkofsky, L., 1962: Lectures on numerical weather prediction. Research report of the Meteorological Research Laboratory. Air Force Cambridge Research Laboratories, Office of Aerospace Research. AFCRL-62-684.
- Bushby, F.H. and Whitelam, C.J., 1961: A three parameter model of the atmosphere suitable for numerical integration. Q.J.Roy.Meteor.Soc., 87, pp. 374-392.
- Hollmann, G., 1956: Über prinzipielle Mängel der geostrophischen Approximation und die Einführung ageostrophischer Windkomponenten. Meteor. Rundschau, 2, H. 5/6, S. 73-78.
- Terauchi, E., 1965: Formulation of prognostic equations in parameter model. Journ.Meteor. Soc. of Japan, Ser.II, 43, No. 2, pp. 61-72.
- Wiin-Nielsen, A., 1959: On barotropic and baroclinic models, with special emphasis on ultra-long waves. Monthly Weather Review, 87, pp. 171-183.

6.7 Appendix

a. Betekenis van de gebruikte symbolen

x, y	= coördin. assen in oostelijke resp. noordelijke richting
p	= druk (coördin. as)
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	= eenheidsvectoren in xyp-stelsel
$\nabla \equiv \hat{i} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + \hat{j} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p$	= isobare nabla-operator
$\nabla^2 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)_p + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)_p$	= isobare Laplace-operator
$J(\alpha, \beta) \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y}$	= determinant van Jacobi (α en β scalars)
p_1, p_m, p_0	= druk bovenste, middelste en onderste informatie-niveau
$\alpha_m \equiv \alpha(p_m)$	= waarde van α voor $p = p_m$
α_0'	= gem. waarde van α in de onderste laag van de troposfeer
α_1'	= gem. waarde van α in de bovenste laag van de troposfeer
A_0, A_1, A_2	= functies van de druk, welke het windprofiel per laag bepalen: A_0 en A_1 in de troposfeer, A_2 in de stratosfeer
e_1, e_2	= fout in de vorticitetsvgl. resp. de thermische vgl. als gevolg van "truncation errors" of "modelling approximations"
$\dot{(\)} \equiv \frac{d}{dt} (\)$	= individuele afgeleide naar de tijd
$\omega \equiv \dot{p}$	= verticale snelheid in xyp-stelsel
$\chi \equiv R/c_p$	= bekende verhouding
f	= Coriolisparameter
f_0	= gemiddelde waarde van f
g	= zwaartekrachtversnelling
Z	= geopotentiële hoogte
$\phi \equiv gZ$	= geopotentiaal
$\psi \equiv \phi/f_0$	= geostrofische stroomfunctie
$\mathbf{V} \equiv \hat{k} \times \nabla \psi$	= horizontale windvektor
$D \equiv \nabla \cdot \mathbf{V}$	= horizontale divergentie

$\xi \equiv \nabla^2 \psi$	= geostr. rel. vorticiteit	} vertik. komponent
$\eta \equiv \xi + f$	= geostr. abs. vorticiteit	
g	= hydrostatische stabiliteit	
\bar{q}	= σ gemiddeld over een drukvlak	
σ_0, σ_0'	= grootheden die samenhangen met $\hat{\sigma}$	
$\vec{A} \cdot \vec{B}$	= inwendig	} produkt van de vektoren \vec{A} en \vec{B}
$\vec{A} \times \vec{B}$	= uitwending	
$[], < >, \{ \}, \sim, -$	= integratie over de druk (zie de tekst)	

b. Dimensie van de gebruikte grootheden

(M = massa, L = afstand, T = tijd)

p	M	L ⁻¹	T ⁻²
g		L	T ⁻²
Z		L	
ϕ		L ²	T ⁻²
$\partial\phi/\partial p$	M ⁻¹	L ³	
$\nabla\partial\phi/\partial p$	M ⁻¹	L ²	
$\dot{\phi}$		L ²	T ⁻³
$\partial\dot{\phi}/\partial p, e_2$	M ⁻¹	L ³	T ⁻¹
σ_0		L ²	T ⁻²
$\sigma, \hat{\sigma}, \sigma_0'$	M ⁻²	L ⁴	T ²
ω	M	L ⁻¹	T ⁻³
ψ		L ²	T ⁻¹
$\dot{\psi}$		L ²	T ⁻²
$\nabla (= k \times \nabla\psi)$		L	T ⁻¹
$D (= \nabla \cdot \nabla), \frac{\partial\omega}{\partial p}$			T ⁻¹
$\xi (= \nabla^2\psi), \eta, f, f_0$			T ⁻¹
$\nabla\xi, \nabla\eta$		L ⁻¹	T ⁻¹
$\dot{\xi}, e_1$			T ⁻²

$A_0, A_1, A_2, [\partial A_0 / \partial p], [\partial A_1 / \partial p]$	1
$[A_0], \langle A_1 \rangle, \{A_2\}, [A_0^2], \langle A_1^2 \rangle$	M L ⁻¹ T ⁻²
α	M ⁻¹ L T ²
β, γ	1
$\hat{\omega}, d_0, d_1$	T ⁻²
K'_0, K'_1, L'_0, d'_1	M L ⁻¹ T ⁻²
S_0, S_1	L ²
K_0, K_1, L_0, L_1, M_0	L ²
F_0, F_1	L ² T ⁻²
a'_0, a'_1, b'_0, b'_1	L ²
Δ	L ⁴
$a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}$	L ⁻²
$a_{02}, a_{12}, a_{03}, a_{13}$	1
a_0, a_1	L ⁻²
a_2	1
q (Cressman-term)	L ⁻²

7. NUMERIEKE BEREKENING VAN WATERSTANDEN LANGS DE NEDERLANDSE KUST

7.1 Inleiding

Gedurende de afgelopen jaren heeft men zich niet alleen bij de weersvoorspelling maar ook bij het voorspellen van waterstanden meer en meer toegelegd op de toepassing van numerieke methoden met behulp van elektronische rekenmachines. Een belangrijk voordeel daarbij is, dat op deze wijze de hydrodynamische differentiaalvergelijkingen principieel in een zeer algemene vorm kunnen worden geïntegreerd, hetgeen temeer noodzakelijk is omdat er in het algemeen geen analytische oplossingen ter beschikking zijn. Evenwel brengt de toepassing van numerieke methoden een aantal specifieke moeilijkheden met zich mee, die verband houden met de omstandigheid dat een kontinu probleem moet worden benaderd door middel van een diskreet probleem. Meestal is wel voldaan aan de eis, dat het diskrete probleem consistent is met het continue probleem maar een veel moeilijker te beantwoorden vraag is in hoeverre de oplossing van het diskrete probleem convergeert naar die van het continue probleem, indien de differenties steeds kleiner worden gekozen. In theorie is het voldoende consistente en convergente differentieschema's te konstrueren maar in de praktijk blijkt toch, dat de numerieke oplossing aanzienlijk kan verschillen van de exacte oplossing van het diskrete probleem. Derhalve moeten er aan het te hanteren differentieschema beperkingen worden opgelegd en komen problemen, die verband houden met de stabiliteit van differentieschema's, aan de orde. Deze problemen zijn nogal ingewikkeld. Noodzakelijke voorwaarden voor de stabiliteit van het reken-schema kunnen meestal wel worden aangegeven. In hoeverre deze ook voldoende zijn, blijkt dikwijls pas uit de toepassingen.

In dit hoofdstuk zal naast algemene beschouwingen ten aanzien van de hydrodynamische vergelijkingen, welke in de praktijk het meest worden gebruikt, in hoofdzaak aandacht worden besteed aan een door het Mathematisch Centrum ontwikkelde methode, waarmee in grote lijnen op het KNMI wordt geëxperimenteerd.

7.2 De partiële differentiaalvergelijkingen

- 7.2.1 Veranderingen in de waterstanden zijn een gevolg van stromingen in de zee. Het gaat er dus in de eerste plaats om deze stromen te berekenen, waarna de veranderingen in de waterstanden kunnen worden afgeleid. Er kan onderscheid worden gemaakt tussen drie soorten stromen:
- a) getijstromen, veroorzaakt door de astronomische krachten;
 - b) driftstromen, veroorzaakt door de wind en de luchtdruk;
 - c) gradiëntstromen, veroorzaakt door horizontale dichtheidsgradiënten.

De vergelijkingen, die deze stromen kunnen beschrijven, zijn die voor een turbulente, onsamendrukbare vloeistof op een roterende aarde. Deze luiden in een koördinatensysteem dat met de aarde meedraait en waarvan de x-as naar het oosten wijst:

$$\frac{du}{dt} - \frac{\partial \tau^{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau^{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau^{zx}}{\partial z} - f v + \bar{f} w + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$\frac{dv}{dt} - \frac{\partial \tau^{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau^{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau^{zy}}{\partial z} + f u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad (7.2.1.1)$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{\partial \tau^{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau^{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau^{zz}}{\partial z} - \bar{f} u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} - g$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (7.2.1.2)$$

Deze vergelijkingen zijn in een zeer volledige vorm gegeven (slechts de kromming van de aarde is verwaarloosd) om de toegepaste vereenvoudigingen duidelijk te kunnen aangeven.

- 7.2.2 Zoals algemeen gebruikelijk, worden in de vergelijkingen alle termen waarin de verticale snelheidscomponent w of diens afgeleide voorkomen, verwaarloosd. Verder wordt meestal verondersteld, dat de veranderingen van de dichtheid ρ naar plaats en tijd zo klein zijn, dat de differentiaalquotiënten, die daarop betrekking hebben, kunnen worden weggelaten. Dit betekent evenwel dat wordt afgezien van de bestudering van de gradiëntstromen. De derde bewegingsvergelijking wordt vereenvoudigd

tot de statische grondvergelijking $\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial z} = -g$. Dat wil zeggen, dat in deze derde vergelijking de viskositeitstermen, \bar{F} , alle uitwendige krachten behalve de zwaartekracht, en ook de kleine verandering van g met de hoogte worden verwaarloosd.

Indien de statische grondvergelijking wordt geïntegreerd van het zeeoppervlak $z' = h(x, y)$ tot een bepaalde diepte $z' = z$, dan krijgen we:

$$\frac{1}{f} [p(h) - p(z)] = -g(h-z) \quad (7.2.2.1)$$

Partiële differentiatie van deze vergelijking zowel naar x als naar y levert de betrekkingen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial x} &= g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{f} \frac{\partial p(h)}{\partial x} \\ \frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial y} &= g \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{f} \frac{\partial p(h)}{\partial y} \end{aligned} \quad (7.2.2.2)$$

De horizontale viskositeitstermen uit de twee horizontale bewegingsvergelijkingen worden vervangen door:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{yx}}{\partial y} &= A_h \Delta u \\ \frac{\partial \tau^{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau^{yy}}{\partial y} &= A_h \Delta v \end{aligned} \quad (7.2.2.3)$$

7.2.3 Na toepassing van de bovengenoemde vereenvoudigingen, substitutie van (7.2.2.2) en (7.2.2.3), ontbinding van $\frac{d}{dt}$ in zijn lokale en convectieve komponent, krijgen de horizontale bewegingsvergelijkingen en de continuïteitsvergelijking de volgende gedaante:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - A_h \Delta u - \frac{\partial \tau^{zx}}{\partial z} - f v + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{f} \frac{\partial p(h)}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - A_h \Delta v - \frac{\partial \tau^{zy}}{\partial z} + f u + g \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{f} \frac{\partial p(h)}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7.2.3.1)$$

Deze vereenvoudigde vergelijkingen zijn vanuit een praktisch oogpunt bezien nog niet geschikt voor de oplossing van het probleem. Immers, in de vergelijkingen komen nog termen voor als $\frac{\partial}{\partial z} \tau^{(zx)}$ en $\frac{\partial}{\partial z} \tau^{(zy)}$, waarvan de waarnemingen ontbreken. Het is echter ook zo, dat - eveneens vanuit een

praktisch oogpunt - de verticale structuur van ondergeschikte betekenis is, omdat men met snelheidscomponenten u en v , die over de diepte zijn gemiddeld, tot bruikbare resultaten kan komen. Mathematisch betekent dit, dat voor praktische doeleinden kan worden volstaan met een verticale integratie van de differentiaalvergelijkingen (7.2.3.1).

7.2.4 Voor de uitvoering van deze verticale integratie is het noodzakelijk de randvoorwaarden aan het zeeoppervlak en aan de zeebodem te formuleren.

Voor het zeeoppervlak verkrijgt men door totale differentiatie van $z = h(x, y, t)$ de voorwaarde

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h}{\partial x} + v_0 \frac{\partial h}{\partial y} + w_0 = 0 \quad (7.2.4.1)$$

Voor de zeebodem volgt eveneens door totale differentiatie van $z = -H(x, y)$

$$u_b \frac{\partial H}{\partial x} + v_b \frac{\partial H}{\partial y} + w_b = 0 \quad (7.2.4.2)$$

Na integratie van (7.2.3.1) van de zeebodem $z = -H$ tot het zeeoppervlak $z = h$ krijgen we:

$$\begin{aligned} & \int_{-H}^h \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dz - \int_{-H}^h A_h \Delta u dz + \tau^{zx}(-H) - \tau^{zx}(h) - \int_{-H}^h v dz + \\ & + g \int_{-H}^h \frac{\partial h}{\partial x} dz + \frac{1}{s} \int_{-H}^h \frac{\partial p(h)}{\partial x} dz = \int_{-H}^h \frac{\partial \Omega}{\partial x} dz \\ & \int_{-H}^h \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz - \int_{-H}^h A_h \Delta v dz + \tau^{zy}(-H) - \tau^{zy}(h) + \int_{-H}^h u dz + \\ & + g \int_{-H}^h \frac{\partial h}{\partial y} dz + \frac{1}{s} \int_{-H}^h \frac{\partial p(h)}{\partial y} dz = \int_{-H}^h \frac{\partial \Omega}{\partial y} dz \quad (7.2.4.3) \\ & \int_{-H}^h \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-H}^h \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{-H}^h \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \end{aligned}$$

We voeren in de grootheden:

$$U = \frac{1}{H+h} \int_{-H}^h u dz \quad \text{en} \quad V = \frac{1}{H+h} \int_{-H}^h v dz \quad (7.2.4.4)$$

In verband hiermee is het in bepaalde gevallen nodig integratie en differentiatie om te wisselen. De volgende betrekkingen worden daarbij gebruikt:

$$\begin{aligned} \int_{-H}^h \frac{\partial u}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-H}^h u dz - \frac{\partial h}{\partial t} u(x, y, h, t) \\ \int_{-H}^h \frac{\partial u}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-H}^h u dz - \frac{\partial h}{\partial x} u(x, y, h, t) - \frac{\partial H}{\partial x} u(x, y, -H, t) \\ \int_{-H}^h \frac{\partial v}{\partial y} dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{-H}^h v dz - \frac{\partial h}{\partial y} v(x, y, h, t) - \frac{\partial H}{\partial y} v(x, y, -H, t) \end{aligned} \quad (7.2.4.5)$$

Termen als $\int_{-H}^h u \frac{\partial u}{\partial x} dz$ en $\int_{-H}^h A_h \Delta u dz$ enz. worden benaderd door $(H+h) U \frac{\partial U}{\partial x}$ resp. $(H+h) A_h \Delta U$.

De continuïteitsvergelijking wordt door middel van verticale integratie als volgt getransformeerd:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H+h)U}{\partial x} + \frac{\partial(H+h)V}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} u(x, y, h, t) - \frac{\partial h}{\partial y} v(x, y, h, t) + \\ - \frac{\partial H}{\partial x} u(x, y, -H, t) - \frac{\partial H}{\partial y} v(x, y, -H, t) + w_0 - w_B = 0 \end{aligned} \quad (7.2.4.6)$$

In verband met de randvoorwaarden (7.2.4.1) en (7.2.4.2) gaat (7.2.4.6) over in:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(H+h)U}{\partial x} + \frac{\partial(H+h)V}{\partial y} = 0 \quad (7.2.4.7)$$

Vertikale integratie van de horizontale bewegingsvergelijkingen geeft, met verwaarlozing van $\frac{\partial h}{\partial t} u(x, y, h, t)$ en $\frac{\partial h}{\partial t} v(x, y, h, t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H+h} \frac{\partial(H+h)U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - A_h \Delta U + \frac{\tau^{zx}(-H)}{H+h} + \\ & - \frac{\tau^{zx}(h)}{H+h} - fV + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho(h)}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ & \hspace{25em} (7.2.4.8) \\ & \frac{1}{H+h} \frac{\partial(H+h)V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} - A_h \Delta V + \frac{\tau^{zy}(-H)}{H+h} + \\ & - \frac{\tau^{zy}(h)}{H+h} + fU + g \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho(h)}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen zijn niet-lineair in verband met de aanwezigheid van h in tal van termen, terwijl verder ook de viskositeitstermen en de bodemschuifspanning aanleiding geven tot niet-lineariteit van de vergelijkingen.

7.2.5 Indien de waterbewegingen in ondiepe wateren, zoals bijvoorbeeld de Waddenzee of de Zeeuwse wateren, moeten worden bestudeerd, is het niet geoorloofd h te verwaarlozen ten opzichte van H . De handhaving van $H+h$ in de vergelijkingen vereist evenwel veel voorzorgen met betrekking tot de stabiliteit van de differentieschema's.

Indien het echter gaat om waterbewegingen in minder ondiepe wateren, waarvan de Noordzee een voorbeeld is, dan kan h worden verwaarloosd ten opzichte van H .

BREFTSCHNEIDER [12] heeft de orde van grootte van de verschillende termen uit (7.2.4.7) en (7.2.4.8) numeriek bepaald voor het natuurlijk M_2 -getij in de Noordzee. Zijn resultaat was:

7.2.5.1 Lokale versnelling $\frac{\partial U}{\partial t}$ en $\frac{\partial V}{\partial t}$

De maximale waarde bedroeg $1,88 \times 10^{-2}$ cm/s². De waarden lagen gemiddeld tussen $1,02 \times 10^{-3}$ cm/s² en $2,20 \times 10^{-3}$ cm/s². De grootste waarden worden aangetroffen daar waar ook de stroomsnelheid het grootst is, namelijk in de omgeving van de Hoofden.

7.2.5.2 Konvektieve termen $U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y}$ en $U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y}$

De maximale waarde bedroeg $1,41 \times 10^{-3}$ cm/s². De waarden lagen gemiddeld tussen $1,35 \times 10^{-5}$ cm/s² en $3,50 \times 10^{-5}$ cm/s². De grootste waarden worden ook hier in de omgeving van de Hoofden gevonden.

7.2.5.3 Coriolisversnelling fV en fU

De maximale waarde bedroeg $9,5 \times 10^{-3} \text{ cm/s}^2$. De waarden lagen gemiddeld tussen $6,47 \times 10^{-4}$ en $1,7 \times 10^{-3} \text{ cm/s}^2$. Uiteraard treden de grootste coriolisversnellingen op in het gebied waar de grootste stroomsnelheid voorkomt.

7.2.5.4 Bodemwrijving $\frac{\tau^{zx}(H)}{H+h}$ en $\frac{\tau^{zy}(H)}{H+h}$

De maximale waarde bedroeg $1,47 \times 10^{-2} \text{ cm/s}^2$. De waarden lagen gemiddeld tussen $1,47 \times 10^{-4}$ en $5,35 \times 10^{-4} \text{ cm/s}^2$. Ook de bodemwrijving was in de omgeving van de Hoofden het grootst.

7.2.5.5 Viskositeitstermen $A_h \Delta u$, $A_h \Delta V$

Indien $A_h = 10^8 \text{ cm}^2/\text{s}$ wordt gekozen, vindt men voor de viskositeitstermen als maximale waarde $1,37 \times 10^{-3} \text{ cm/s}^2$. De waarden lagen gemiddeld tussen $4,75 \times 10^{-5}$ en $5,90 \times 10^{-5} \text{ cm/s}^2$. De viskositeitstermen bleken het grootst te zijn aan de Engelse zuidoostkust.

7.2.5.6 Versnelling tengevolge van de scheefheid van het zeeoppervlak $g \frac{\partial h}{\partial x}$ en $g \frac{\partial h}{\partial y}$

De maximale waarde bedroeg $2,21 \times 10^{-2} \text{ cm/s}^2$. De waarden lagen gemiddeld tussen $2,00 \times 10^{-3}$ en $2,67 \times 10^{-3} \text{ cm/s}^2$. De grootste waarden traden weer op aan de Engelse zuidoostkust en in de Hoofden.

7.2.5.7 Versnelling tengevolge van de getijkrachten $\frac{\partial \Omega}{\partial x}$ en $\frac{\partial \Omega}{\partial y}$

De maximale waarde bedroeg $8,04 \times 10^{-5} \text{ cm/s}^2$. De waarden lagen gemiddeld tussen $1,06 \times 10^{-6}$ en $7,43 \times 10^{-5} \text{ cm/s}^2$.

7.2.6 De volgorde van de termen met betrekking tot hun orde van grootte is:

- | | | | |
|----|---------------------|--------------------------|-----------------|
| 1. | $g \text{ grad } h$ | $\sim 10^{-3}$ | cm/s^2 |
| 2. | lokale versnelling | $\sim 10^{-3}$ | cm/s^2 |
| 3. | coriolisversnelling | $\sim 10^{-3} - 10^{-4}$ | cm/s^2 |
| 4. | bodemwrijving | $\sim 10^{-4}$ | cm/s^2 |
| 5. | viskositeitstermen | $\sim 10^{-5}$ | cm/s^2 |
| 6. | konvektieve termen | $\sim 10^{-5}$ | cm/s^2 |
| 7. | getijkrachten | $\sim 10^{-5} - 10^{-6}$ | cm/s^2 |

Deze berekening geeft steun aan het algemene gebruik de viskositeitstermen, de konvektieve termen en de getijverwekkende krachten te verwaarlozen.

Voeren we deze vereenvoudigingen in en verwaarlozen we h ten opzichte van H , dan gaan de vergelijkingen (7.2.4.7) en (7.2.4.8) over in:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\tau^{zx}(-H)}{H} - \frac{\tau^{zx}(h)}{H} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(h)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU + g \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\tau^{zy}(-H)}{H} - \frac{\tau^{zy}(h)}{H} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(h)}{\partial y} = 0 \quad (7.2.6.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} = 0$$

Deze vergelijkingen worden door vrijwel alle onderzoekers gebruikt. Voor zover sommigen toch de konvektieve termen in hun beschouwingen betrekken, geschiedt dit op grond van moeilijkheden met betrekking tot de stabiliteit van het differentieschema.

7.3 Nadere bepaling van de schuifspanning aan de bodem en aan het oppervlak

7.3.1 $\tau^z(H)$

Zowel empirisch als theoretisch is aangetoond, dat in een turbulente stroming langs een ruwe wand de wrijvingskracht per eenheid van oppervlak kwadratisch afhangt van de gemiddelde stroming op enige afstand van die wand. Dit geldt ook voor de schuifspanning op de bodem van de zee, zodat:

$$\tau^z(H) = -r(z_b) \overline{V(z_b)} \quad (7.3.1.1)$$

r is een faktor, die afhangt van de ruwheid van de zeebodem en ook van z_b , de afstand van de bodem, waarop de gemiddelde snelheid betrekking heeft. Indien we deze faktor exact zouden kennen, dan zou (7.3.3.1) toch niet kunnen worden gebruikt, omdat $v(z_b)$ nog afhankelijk is van vele factoren, o.a. van de windschuifspanning, de diepte, de vertikaal gemiddelde stroming, getijstromen die op de gemiddelde stroming zijn gesuperponeerd. Dit brengt met zich mee, dat $\tau^z(H)$ eigenlijk een functie is van de plaats en de tijd, die bovendien van geval tot geval zal verschillen. Het gaat evenwel niet om een gedetailleerde kennis van $\tau^z(H)$ maar om een benadering, die bruikbare resultaten geeft. Een aantal onderzoekers heeft aangetoond, dat de bodemschuifspanning in eerste

benadering is samengesteld uit een deel evenredig met de windschuifspanning en een deel evenredig met de gemiddelde horizontale snelheid in het water. Hiervoor gaf o.a. BOWDEN [2] de volgende argumentatie. Hij toonde aan, dat in een zee, waar de stromen geïnduceerd door de wind kunnen worden beschouwd als een storing, gesuperponeerd op de dominerende getijstromen, zoals bij benadering ook geldt voor de Noordzee en Het Kanaal, de kwadratische betrekking (7.3.1.1) als volgt kan worden gelineariseerd:

$$\text{Zij} \quad v_b = v_w + v_t \cos \sigma_t t \quad (7.3.1.2)$$

de totale snelheid op bijvoorbeeld 75 cm afstand van de zeebodem.

v_w = de snelheid van de stroom geïnduceerd door de wind

v_t = amplitude van de getijstroom

σ_t = hoeksnelheid van het getij

t = tijd.

Indien nu (7.3.1.2) in (7.3.1.1) wordt gesubstitueerd en $Z_b^z(H)$ in een Fourier-reeks wordt ontwikkeld, dan vindt men voor de niet-periodieke component $Z^z(H)^{\#}$ de volgende waarde:

$$\overline{Z^z(H)^{\#}} = f k v_t v_w \quad (7.3.1.3)$$

waarbij f afhangt van de verhouding $\frac{v_t}{v_w}$, die voor waarden van $\frac{v_t}{v_w} > 1,5$ konstant blijkt te zijn en gelijk aan 1,27.

BOWDEN heeft nu verder uit de aanzienlijk vereenvoudigde bewegingsvergelijkingen afgeleid dat v_w kan worden samengesteld uit twee termen. De belangrijkste term is evenredig met de gemiddelde stroming, terwijl de tweede term, die als een correctie op de eerste kan worden beschouwd, evenredig is met de schuifspanning aan het oppervlak. Volgens (7.3.1.3) is $Z^z(H)^{\#}$ evenredig met v_w , zodat ook voor $Z^z(H)^{\#}$ een soortgelijke relatie geldt:

$$\overrightarrow{Z^z(H)^{\#}} = r \overrightarrow{v} + n \overrightarrow{Z_s} \quad (7.3.1.4)$$

waarbij n en r afhankelijk blijken te zijn van de snelheid van de getijstroom en van de diepte.

De betrekking (7.2.1.4) is door MIYAZAKI [3] en WEENINK [4] gebruikt.

In verschillende numerieke studies evenwel wordt de bijdrage van de schuifspanning aan het oppervlak verwaarloosd en wordt (7.3.1.4) gereduceerd tot:

$$\overrightarrow{Z^z(H)} = r \overrightarrow{v} \quad (7.3.1.5)$$

Deze benadering werd o.a. toegepast door FISCHER [5], WELANDER [6] en UUSITALO [7]. Een voordeel van deze benadering is, dat op deze wijze de bodemschuifspanning geen niet-lineariteit in de vergelijkingen

introduceert. WEENINK en FISCHER hebben voor de waarde r gekozen $2,4 \times 10^{-3}$ resp. $2,5 \times 10^{-3}$ m/s.

In de studies van HANSEN [8,9], SÜNDERMANN [10], BRETTSCHEIDER [11,12] en SCHMITZ [13] wordt echter verondersteld, dat de bodemschuifspanning een gedaante heeft analoog aan de kwadratische weerstandswet, die geldt voor vloeistoffen stromend over oppervlakken en rondom obstakels.

$$\vec{\tau}^z(H) = r \left| \vec{V} \right| \vec{V} \quad (7.3.1.6)$$

Toepassing hiervan betekent dan, dat ook de bodemschuifspanning een niet-lineariteit in de vergelijkingen introduceert. De voor r gekozen waarde loopt uiteen van $2,6 \times 10^{-3}$ tot $3,0 \times 10^{-3}$. Zie tabel 7.1

Tabel 7.1

1. HANSEN	$2,6 \times 10^{-3}$
2. SUNDERMANN, BRETTSCHEIDER	$3,0 \times 10^{-3}$
3. SCHMITZ	$2,7 \times 10^{-3}$

7.3.2 $\vec{\tau}^z(h)$

De analogie met de kwadratische weerstandswet speelt ook een rol bij de schuifspanning aan het zeeoppervlak. Alle onderzoekers gebruiken uiteindelijk de betrekking

$$\vec{\tau}^z(h) = C_d \left| V_a \right| V_a \quad (7.3.2.1)$$

V_a = windsnelheid op een of andere hoogte, niet te ver van het zeeoppervlak

C_d = een dimensieloze wrijvingskonstante

In het onderhavige geval van een luchtstroming over water kan C_d een functie zijn van V_a , van de stabiliteit, van de ruwheidsparameter z_0 en van de turbulentie in de atmosfeer. Ook is het mogelijk dat de diepte van het water invloed heeft op C_d . De afhankelijkheid van $\vec{\tau}^z(h)$ en \vec{V} kan daarom ook worden geschreven in de vorm $\vec{\tau}^z(h) = k \left| V_a \right|^{n-1} \vec{V}$, waarbij k dan niet meer afhangt van de bovengenoemde factoren, welke C_d bepalen. n blijkt uiteen te lopen tussen 2,5 en 4,0.

Ook ten aanzien van de waarde van C_d bestaat geen eenstemmigheid, getuige het grote aantal publikaties op dit gebied. WILSON [14] telde er tussen 1945 en 1960 op dit gebied in totaal 39. Dit grote aantal

gaf WILSON de mogelijkheid niet alleen een gemiddelde en een standaarddeviatie te bepalen, maar hij kon ook onderscheid maken tussen gevallen met een windsnelheid < 20 kts en > 20 kts.

WILSON vond voor de koëfficiënt C_d de volgende waarden:

$$\begin{aligned} C_d &= 1,85 \times 10^{-6} \pm 1,0 \times 10^{-6} \quad (\bar{V} < 20 \text{ kts}) \\ C_d &= 2,88 \times 10^{-6} \pm 0,6 \times 10^{-6} \quad (\bar{V} > 20 \text{ kts}) \end{aligned} \quad (7.3.2.2)$$

In de diverse studies met betrekking tot het numeriek voorspellen van waterstanden heeft men steeds waarden voor C_d gekozen, die binnen het door WILSON opgegeven vertrouwensinterval liggen. Toch lopen de waarden nogal uiteen, temeer als men bedenkt dat de grootte van de koëfficiënt in belangrijke mate het eindresultaat bepaalt. Zie tabel 7.2.

Tabel 7.2

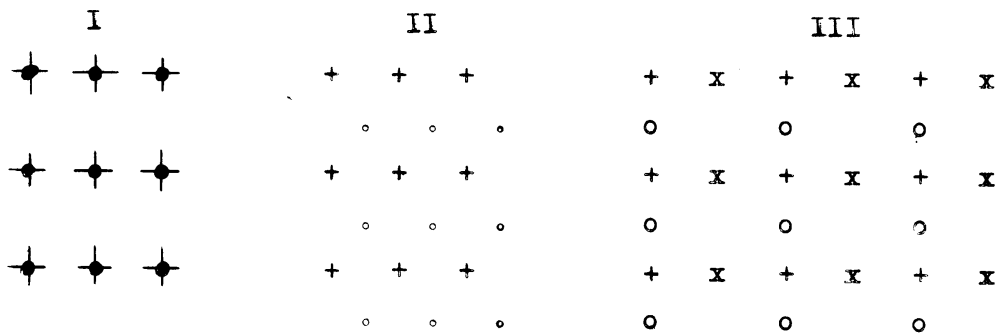
1. HANSEN, SUNDERMANN, BRETTSCHEIDER	$3,2 \times 10^{-6}$
2. FISCHER	$2,3 \times 10^{-6}$
3. JELESNIANSKI	$3,0 \times 10^{-6}$
4. WEENINK	$3,6 \times 10^{-6}$
5. MIYAZAKI	$2,6 \times 10^{-6}$
6. UUSITALO	$1,9 \times 10^{-6}$

7.4 De partiële differentievergelijkingen

7.4.1 Indien men wat betreft $Z^Z(H)$ en $Z^Z(h)$ een bepaalde keus heeft gemaakt, kunnen de differentiaalvergelijkingen (7.2.6.1) in principe op numerieke wijze worden opgelost, indien men de differentiaalvergelijkingen vervangt door een consistente serie differentievergelijkingen.

In tegenstelling tot een oplossing in de vorm van een Fourier-reeks of tot een analytische oplossing van de differentiaalvergelijkingen, waarbij men zoekt naar de functies $U(x,y,t)$, $V(x,y,t)$ en $h(x,y,t)$, die voor iedere x , y en t de differentiaalvergelijkingen en de randvoorwaarden exact vervullen, bestaat een numerieke oplossing uit een verzameling U , V en h in diskrete punten van de x,y,t -ruimte. Er dient dus een keus te worden gedaan met betrekking tot de punten van de x,y,t -ruimte, waarin we kennis willen nemen van de oplossing.

We beperken ons nu eerst tot het x,y -vlak. Er zijn dan verschillende mogelijkheden. Een drietal mogelijkheden is in fig. 7.1 weergegeven.



- + punten, waar h wordt berekend
- x punten, waar U wordt berekend
- o punten, waar V wordt berekend
- o punten, waar zowel U als V worden berekend
- punten, waar zowel h, U als V worden berekend

Fig. 7.1 Enkele voorbeelden van rekenroosters.

In rooster I zijn de waarden, die nodig zijn om de differentiequotiënten naar x en y door middel van centrale differenties te bepalen, zonder meer gegeven. In de roosters II en III zijn deze waarden pas beschikbaar na middeling van een aantal waarden afkomstig uit nabijgelegen roosterpunten. Daar staat tegenover dat bij een bepaalde gridlengte Δs de benadering in de roosters II en III nauwkeuriger is dan in rooster I, omdat in rooster I met 2 Δs moet worden gerekend, terwijl in het eerstgenoemde tweetal Δs kan worden gebruikt.

Wanneer nu ook de dimensie tijd in de beschouwingen wordt betrokken, komt er een aantal mogelijkheden bij. Men kan namelijk kiezen tussen een schema met twee en een schema met drie tijdniveaus. In het geval met twee tijdniveaus worden de differentiaalquotiënten als volgt benaderd:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \sim \frac{f(x,y,t+\Delta t) - f(x,y,t)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \sim \frac{f(x+\Delta x,y,t) - f(x-\Delta x,y,t)}{2 \Delta x} \tag{7.4.1.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \sim \frac{f(x,y+\Delta y,t) - f(x,y-\Delta y,t)}{2 \Delta y}$$

Bij gebruik van 3 tijdniveaus wordt de benadering:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \sim \frac{f(x,y,t+\Delta t) - f(x,y,t-\Delta t)}{2 \Delta t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ en } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ als (7.4.1.1)} \tag{7.4.1.2}$$

In beide gevallen is sprake van een expliciet differentieschema, d.w.z. bij de berekening van een functiewaarde op het tijdstip $t + \Delta t$ wordt gebruik gemaakt van bekende functiewaarden op het tijdstip t . Bij expliciete schema's is het noodzakelijk een kleine waarde voor Δt te kiezen, omdat het schema gemakkelijk onstabiel wordt. Dit is vooral het geval bij het gebruik van een fijn rooster, zoals bij de bestudering van details (bijv. de Waddenzee) is vereist. Impliciete differentieschema's daarentegen laten een aanzienlijk grotere waarde van Δt toe. Bij impliciete schema's wordt voor de berekening van een functiewaarde op het tijdstip $t + \Delta t$ gebruik gemaakt van onbekende functiewaarden op het tijdstip $t + \theta \Delta t$ ($0 < \theta < 1$). Er dient voor deze functiewaarden een schatting te worden gemaakt. De aldus berekende functiewaarde op het tijdstip $t + \Delta t$ wordt gebruikt voor een betere schatting van de functiewaarden voor $T = t + \theta \Delta t$ enz. Snelle convergentie van deze iteratiemethode is voorwaarde voor de bruikbaarheid van de impliciete methode.

De impliciete methode is door LEENDERTSE [15] toegepast in een model voor de berekening van getijstromen in het Haringvliet. Bij de grote Noordzeemodellen is tot dusverre echter vrijwel altijd gebruik gemaakt van de expliciete methode. Een uitzondering vormt de studie van FISCHER [5], die een combinatie van de expliciete en de impliciete methode heeft toegepast, omdat hij de voor het tijdstip $t + \Delta t$ uit de bewegingsvergelijkingen expliciet berekende U - en V -waarden in de continuïteitsvergelijking gebruikte. Bij de Noordzeemodellen heeft men tot nu toe vrijwel steeds de suggestie van J. v. NEUMANN en R.D. RICHTMYER [16] gevolgd. Er wordt dan een dissipatieve term toegevoegd bijv. in de vorm van een viskositeitsterm $A_h \Delta u$, $A_h \Delta v$. Dit blijkt voldoende voor stabiele rekenschema's, zoals diverse berekeningen hebben aangetoond.

Het model dat op de Universiteit te Hamburg is ontwikkeld maakt gebruik van het rooster III, terwijl met drie tijdniveaus wordt gewerkt. Het model van het Mathematisch Centrum te Amsterdam is gebaseerd op rooster II en verder op twee tijdniveaus.

7.4.2 De beschouwingen tot dusver zijn nog niet gericht geweest op de toepassing in een bepaald gebied. De vergelijkingen zijn immers algemeen geldig. Beperken we ons echter tot de Noordzee, dan dient de vorm van het rekenrooster zoveel mogelijk te zijn aangepast aan de geografie van de Noordzee. Om vervolgens een berekening te kunnen uitvoeren, moeten tevens de beginvoorwaarden en de voorwaarden aan de randen van het rooster worden geformuleerd. Daarbij worden in het bijzonder de randvoorwaarden bepaald door de geografische situatie.

7.5 Het rekenmodel van het Mathematisch Centrum Amsterdam

7.5.1 We bepalen onze aandacht nu verder tot het model van het Mathematisch Centrum, waarmee door de Projektgroep Numerieke Voorspelmethode wordt geëxperimenteerd.

Zoals reeds is opgemerkt, wordt in dit model rooster II gebruikt, terwijl er verder met twee tijd niveaus wordt gewerkt. We gaan verder uit van de vergelijkingen (7.2.6.1) en stellen $\tau^z(H) = rU$. Indien we nu voor de uitwendige krachten $\tau^{zx}(h) = \int \frac{H}{r} \frac{\partial p(h)}{\partial x}$ en $\tau^{zy}(h) = \int \frac{H}{r} \frac{\partial p(h)}{\partial y}$ resp. X en Y schrijven, gaat (7.2.6.1) over in:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} - fV + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{r}{H} U &= X \\ \frac{\partial V}{\partial t} + fU + g \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{r}{H} V &= Y \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{7.5.1.1}$$

We volgen nu verder de notatie van VAN DER HOUWEN [17, 18] en stellen daarom $HU = U'$, $HV = V'$ en $\frac{r}{H} = \lambda$. De vergelijkingen kunnen in een kompakte vorm als volgt worden geschreven (de accenten zijn eenvoudigheidshalve weer weggelaten):

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{s} = \begin{pmatrix} -\lambda & f & -gH \frac{\partial}{\partial x} \\ -f & -\lambda & -gH \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \vec{s} + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.5.1.2}$$

$\vec{s} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ h \end{pmatrix}$ is de toestandsvektor.

De begin- en randvoorwaarden kunnen als volgt worden geschreven:

$$w(x, y, 0) = 0, \quad h(x, y, 0) = 0 \tag{7.5.1.3}$$

\vec{w} is evenwijdig aan de kust.

$h = 0$ aan de open grens van de oceaen.

Indien $\vec{k} = \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix}$ en $\vec{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ de eenheidsvektor voorstelt evenwijdig aan de kust in positieve richting, dan kunnen voor de kust de volgende vergelijkingen worden afgeleid:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \lambda U - sg H \frac{\partial h}{\partial k} + s \vec{k} \cdot \vec{F}$$

$$s \neq 0 \quad V = \frac{c}{s} U \quad (7.5.1.4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \nabla \vec{w}$$

$$U = \frac{s}{c} V$$

$$c \neq 0 \quad \frac{\partial V}{\partial t} = - \lambda V - cg H \frac{\partial h}{\partial k} + c \vec{k} \cdot \vec{F} \quad (7.5.1.5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \nabla \vec{w}$$

Voor de konstanten λ , f , g en μ (pag.101) moeten nu geschikte waarden worden gekozen. Er wordt gewerkt met $\lambda = 2,4 \times 10^{-3}$ m/s, $f = 1,28 \times 10^{-4}$ s⁻¹, $g = 9,8$ m/s² en $\mu = 3,88 \{1 - 0,044(T_a - T_s)\} 10^{-6}$, waarbij $T_a - T_s$ het verschil voorstelt tussen de temperatuur van de lucht en de temperatuur van het zeewater.

Voor numerieke berekening moeten vervolgens de differentiaalquotiënten worden vervangen door differentiequotiënten. Indien hierbij centrale differenties of gemiddeld centrale differenties worden gebruikt, dan kan het verband tussen de differentiaal- en de differentie-operator als volgt worden gegeven:

$$\frac{\partial}{\partial x} = D_x + O(\Delta x^2) \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial y} = D_y + O(\Delta y^2) \quad (7.5.1.6)$$

In de randpunten worden D_x en D_y bepaald met behulp van gewogen centrale differenties.

Op de t -as beschouwen we de punten $t = k \Delta t$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) en we schrijven $\vec{s}_k = \vec{s}(x, y, k \Delta t)$. De differentie-operator D_t wordt als volgt gedefinieerd:

$$D_t \vec{s}_k = \frac{1}{\Delta t} (\vec{s}_{k+1} - \vec{s}_k)$$

Tussen $\frac{\partial}{\partial t}$ en D_t bestaat het verband:

$$\frac{\partial}{\partial t} = D_t + O(\Delta t) \quad (7.5.1.7)$$

7.5.2 Beschouwen we nu eerst het volgende expliciete differentieschema:

$$\vec{s}_{k+1} = (I + \Delta t D) \vec{s}_k + \Delta t \vec{f}_k \quad (7.5.2.1)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad D = \begin{pmatrix} -\lambda & f & -gHD_x \\ -f & -\lambda & -gHD_y \\ -D_x & -D_y & 0 \end{pmatrix} ; \quad f = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Het differentieschema (7.5.2.1) is consistent met (7.5.1.2). De stabiliteit van het differentieschema (7.5.2.1) kan worden onderzocht met de methode afkomstig van VON NEUMANN, waarbij op een tijdstip t een willekeurige kleine storing wordt geïntroduceerd. De mogelijke groei van deze storing kan worden bestudeerd met behulp van de eigenwaarden van de amplification matrix.

De volgende kleine storing \vec{s}^i wordt geïntroduceerd:

$$\vec{s}^i = \vec{m} \exp i \vec{\sigma} \vec{r} \quad (7.5.2.2)$$

$$\vec{s}^i = \begin{pmatrix} U^i \\ V^i \\ h \end{pmatrix} ; \quad \vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \sqrt{gH} \\ m_2 \sqrt{gH} \\ m_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{\sigma}$ en \vec{r} zijn vektoren in het x,y vlak met componenten resp. σ_1, σ_2 en x,y .

Indien we de uitwendige krachten buiten beschouwing laten en verder $H = \text{cst}$ nemen, dan geeft substitutie van (7.5.2.2) in (7.5.2.1)

$$\begin{aligned} \frac{u^i}{\sqrt{gH}} &= \alpha m_1 + \beta m_2 - i \gamma_1 m_3 \\ \frac{v^i}{\sqrt{gH}} &= -\beta m_1 + \alpha m_2 - i \gamma_2 m_3 \\ h^i &= -i \gamma_1 m_1 - i \gamma_2 m_2 + m_3 \end{aligned} \quad (7.5.2.3)$$

waarbij $\alpha = 1 - \lambda \Delta t$, $\beta = f \Delta t$ $\gamma_1 = \sqrt{gH} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \sigma_1 \Delta x \cos \sigma_2 \Delta y$

$$\gamma_2 = \sqrt{gH} \frac{\Delta t}{\Delta y} \cos \sigma_1 \Delta x \sin \sigma_2 \Delta y.$$

De eigenwaarden s van de amplification matrix worden gevonden uit de vergelijking:

$$(1-s) \left\{ (\alpha-s)^2 + \beta^2 \right\} + (\alpha-s)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) = 0$$

Een eis voorstabiliteit van het differentieschema is, dat alle wortels s binnen de eenheidskring liggen voor alle mogelijke waarden voor

δ_1 en δ_2 , d.w.z. in het interval $0 \leq \delta_1^2 + \delta_2^2 \leq \Delta t^2 \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) gH$.

LAUWERIER en DAMSTÉ [20] hebben aangetoond dat hieraan is voldaan, indien

$$\Delta t < \frac{\lambda}{gH} \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad \text{en} \quad (7.5.2.4)$$

$$\Delta t < \min \left(\frac{2}{3\lambda}, \frac{2\lambda}{\lambda^2 + f^2} \right)$$

Nu geeft uit praktische overwegingen de eerste voorwaarde een ontoelaatbare restrictie voor de tijdstap Δt , omdat

- de faktor $\frac{\lambda}{gH}$ erg klein is;
- de faktor $\frac{1}{H}$ een economische keuze voor Δt verhindert, in het geval dat H een sterk veranderende funktie van x en y is.

7.5.3 De ongelijkheden (7.5.2.4) suggereren, dat een toeneming van de wrijving een grotere waarde voor Δt toelaat. Bij afnemng van de inwendige energie van het systeem worden derhalve de stabiliteitsvoorwaarden minder stringent. Met het oog hierop wordt dikwijls de viskositeitsterm weer geïntroduceerd. Wanneer we opnieuw gebruikmaken van de notatie van VAN DER HOUWEN [17, 18], dan kunnen we deze viskositeitsterm schrijven als

$\Delta t^2 D_0 Q D_0 \vec{s}_k$ met

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -gHD_x \\ 0 & 0 & -gHD_y \\ -D_x & -D_y & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & q & 0 \\ -q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

We verkrijgen dan het volgende expliciete schema:

$$\vec{s}_{k+1} = (I + \Delta t D_0 + \Delta t^2 D_0 Q D_0) \vec{s}_k + \Delta t (D - D_0) \vec{s}_k + \Delta t f_k \quad (7.5.3.1)$$

VAN DER HOUWEN [17] heeft op analoge wijze als is beschreven bij het differentieschema zonder viskositeitsterm de stabiliteit nagegaan zowel voor het inwendige gebied als voor de kustcondities.

Voor het inwendige gebied werd gevonden

$$\Delta t < \frac{2 \Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \sqrt{gH}} \left\{ 1 - \frac{\lambda \Delta x \Delta y}{2 \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \sqrt{gH}} + \dots \right\} \quad (7.5.3.2)$$

$$\Delta t < \left(\frac{2}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda^2 + f^2} \right)_{\min}$$

De stabiliteitskonditie van het differentieschema van de vergelijkingen voor de kust luidde als volgt:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2 \sqrt{gH}} \frac{\Delta x \Delta y}{|s| \Delta y + |c| \Delta x} \quad (7.5.3.3)$$

Dit laatste criterium legt meer beperkingen op dan het eerste. Wanneer we uitgaan van de veronderstelling dat stabiliteit in ieder punt van het rekennet totale stabiliteit garandeert (O'BRIEN, HYMAN, KAPLAN [21] en LEENDERTSE [15]), dan wordt de keuze van Δt bepaald door (7.5.3.3).

In verband met de variabele dieptefunctie $H(x,y)$ en bij gebruik van een uniform net kan Δt niet op een economische wijze worden gekozen. Daarom is bij het model van het Mathematisch Centrum gebruik gemaakt van een grof en een fijn net, dat is aangepast bij de diepteverdeling. Het gehele rooster is in fig. 7.2 weergegeven.

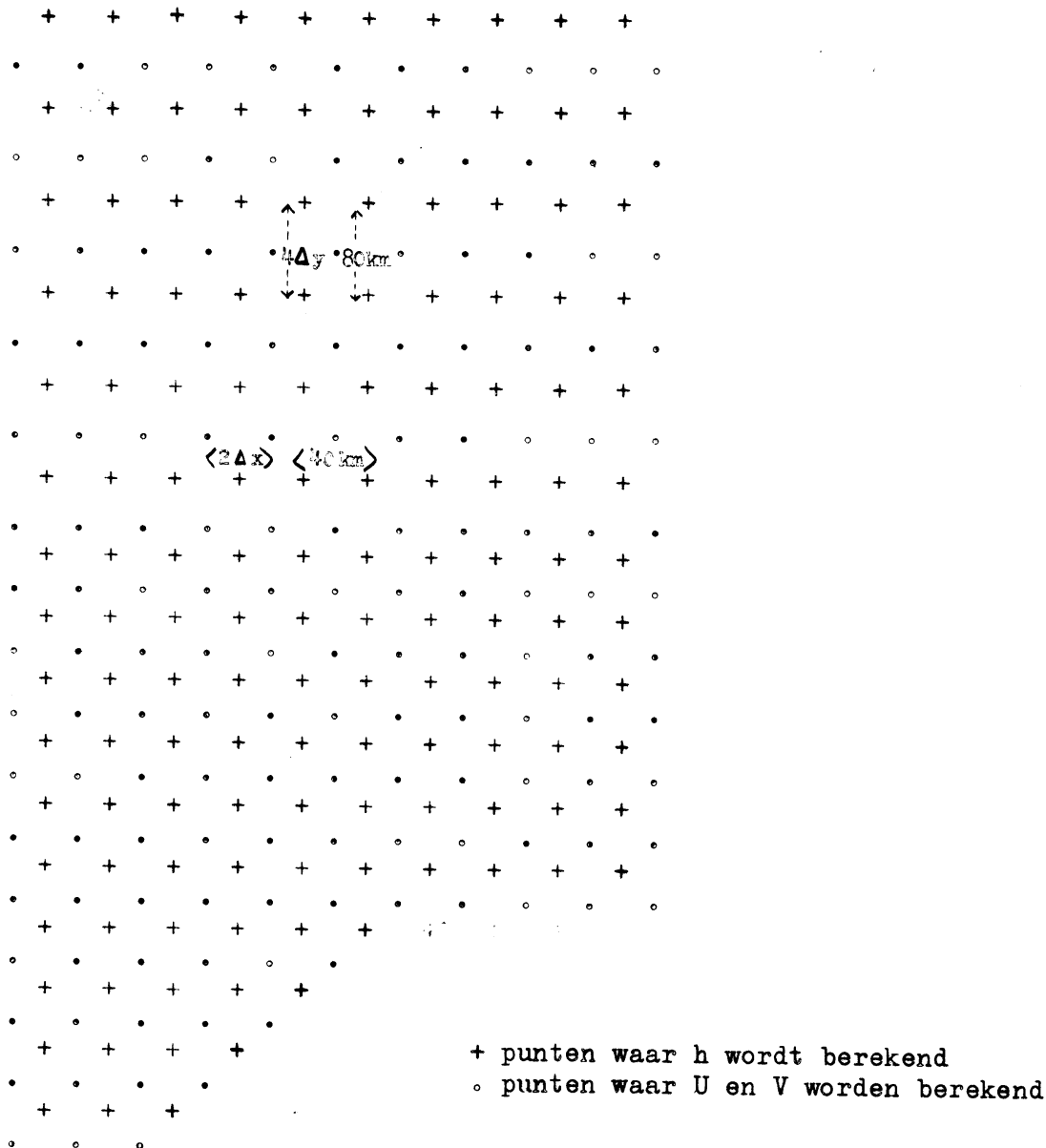


Fig. 7.2 Rekenrooster van de Noordzee.

Indien $\Delta x = 2 \cdot 10^4$ m, $\Delta y_{\text{zuid}} = 2 \cdot 10^4$ m en $\Delta y_{\text{noord}} = 4 \cdot 10^4$ m wordt gekozen, volgt uit (7.5.3.3) dat Δt niet groter dan 500 s moet worden genomen.

Uit een test is gebleken, dat $\Delta t = 450$ s inderdaad een stabiel resultaat geeft.

7.6 Het Kanaaleffekt

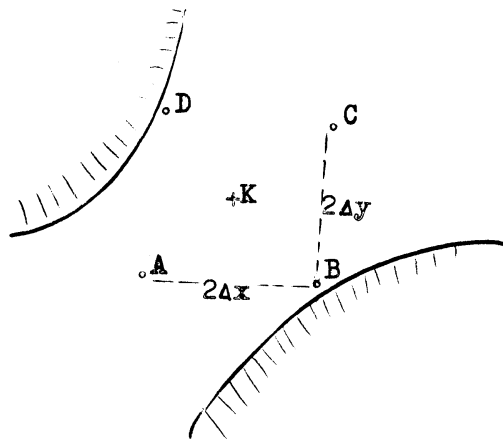
Het model zoals het nu is besproken, heeft nog een belangrijke tekortkoming, omdat er in werkelijkheid bij het Nauw van Calais een stroom van of naar Het Kanaal mogelijk is. In navolging van WEENINK [4] kan voor deze stroom worden geschreven

$$T = L h_K \quad (7.6.1)$$

T = hoeveelheid water dat de Noordzee verlaat of binnenkomt via Het Kanaal.

L = parameter, die van het rekenrooster afhangt.

h_K = verhoging van het zeeniveau in het meest zuidwestelijk gelegen roosterpunt van het rekennet.



De continuïteitsvergelijking kunnen we schrijven als:

$$-\frac{4t}{2} \left\{ 2 \Delta x (V_D(t) + V_C(t)) + 2 \Delta y (U_C(t) + U_B(t)) \right\} = L h_K \Delta t + 4 \Delta x \Delta y (h_K(t) - h_K(t - \Delta t)) \quad (7.6.2)$$

Hieruit volgt:

$$h_K(t) = \frac{1}{1 + \frac{L \Delta t}{4 \Delta x \Delta y}} \left\{ h_K(t - \Delta t) - \Delta t D_x U(t) - \Delta t D_y V(t) \right\} \quad (7.6.3)$$

Dit betekent, dat het Kanaaleffekt neerkomt op een vermenigvuldiging met een faktor $\frac{1}{1 + \frac{L \Delta t}{4 \Delta x \Delta y}}$ van de oorspronkelijke differentieformule

in het hoogtepunt K.

Een goede benadering van L blijkt $1,04 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{s}$ te zijn.

7.7 Literatuur

1. H. LAMB, 1962 - Hydrodynamics. Cambridge University Press.
2. K.F. BOWDEN, 1953 - Note on wind drift in a channel in the presence of tidal currents. Proc.Roy.Soc. A 219, 426-446.
3. M. MIYAZAKI, 1965 - A numerical computation of the storm surge of hurricane Carla 1961 in the Gulf of Mexico. The Oceanographical Magazine. Japan Meteorological Agency, November 1965.
4. M.P.H. WEENINK, 1958 - A theory and method of calculation of wind effects on sea levels in a partly enclosed sea, with special application to the southern coast of the North Sea. KNMI Mededelingen en Verhandelingen No. 73.
5. G. FISCHER, 1959 - Ein numerisches Verfahren zur Errechnung von Windstau und Gezeiten in Randmeeren. Tellus 11, 1.
6. P. WELANDER, 1961 - Numerical prediction of storm surges. Advances in Geophysics, Vol.8, Academic Press, New York, pp. 315-379.
7. S. UUSITALO, 1960 - The numerical calculation of wind effect on sea elevation. Tellus 12, 4.
8. W. HANSEN, 1965 - Theorie zur Errechnung des Wasserstandes und der Strömungen in Randmeeren nebst Anwendungen. Tellus 8, 3.
9. W. HANSEN, 1966 - The reproduction of the motion in the sea by means of hydrodynamical-numerical methods. Mitteilungen des Instituts für Meereskunde der Universität Hamburg, Nr. V.
10. J. SÜNDERMANN, 1966 - Ein Vergleich zwischen der analytischen und der numerischen Berechnung winderzeugter Strömungen und Wasserstände in einem Modellmeer mit Anwendungen auf die Nordsee. Mitteilungen des Instituts für Meereskunde der Universität Hamburg, Nr. IV.
11. G. BRETTSCHEIDER, 1967 - Anwendung des hydrodynamisch-numerischen Verfahren zur Ermittlung der M_2 -Mitschwingungszeit der Nordsee. Mitteilungen des Instituts für Meereskunde der Universität Hamburg, No. VII.
12. G. BRETTSCHEIDER, 1967 - Modelluntersuchungen der Gezeiten der Nordsee unter Anwendung des hydrodynamisch-numerischen Verfahrens. Mitteilungen des Instituts für Meereskunde der Universität Hamburg, No. VIII.

13. H.P. SCHMITZ, 1962 - On external surges and special meteorohydrographical problems in computing storm surges in adjacent seas and lakes by physical methods. Mitteilungen des Instituts für Meereskunde der Universität Hamburg, No. I.
14. B.W. WILSON, 1960 - Note on surface wind stress over water at low and high wind speed. J. of Geoph. Research 63, pp. 3377-3382.
15. J.J. LEENDERTSE, 1967 - Aspects of a computational model for long-period waterwaves propagation. Rand Memorandum R.M.-5294-P.R. Rand Corporation, Santa Monica, Californië.
16. J. v. NEUMANN en R.D. RICHTMYER, 1950 - A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. J. Appl. Physics 21, pp. 232-237.
17. P.J. van der HOUWEN, 1966 - On the stability of a difference scheme for the North Sea problem. Report TW 100, Mathematisch Centrum Amsterdam.
18. P.J. van der HOUWEN, 1968 - Finite difference methods for solving partial differential equations. Dissertatie. Mathematisch Centrum Amsterdam.
19. C.P. JELESNIANSKI, 1966 - Numerical computation of storm surges without bottom stress. Monthly Weather Review, Vol.94, nr. 6.
20. H.A. LAUWERIER en B.R. DAMSTÉ, 1963 - The North Sea problem VIII. A numerical treatment. Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wetenschappen A66, pp. 167-184.
21. G.G. O'BRIEN, M.A. HYMAN, S. KAPLAN, 1951 - A study of the numerical solution of partial differential equations. J. Math. Phys. 29, pp. 223-251.

7.8 Lijst van symbolen

x, y	horizontale Cartesische coördinaten in oostelijke resp. noordelijke richting.
z	vertikale coördinaat.
t	tijd
u, v, w	snelheidscomponenten in x, y resp. z richting.
τ^{xy}	wrijvingskracht per oppervlakte-eenheid, werkend in de richting van de y -as door een voldoende klein vlakje, dat loodrecht op de x -as staat.
f	$2 \omega \sin \varphi$
\bar{f}	$2 \omega \cos \varphi$
ω	hoeksnelheid van de aarde.
φ	geografische breedte van het punt x, y, z .

- Ω potentiaal van de getijkrachten.
- g versnelling van de zwaartekracht.
- p druk in het punt x, y, z ten tijde t .
- ρ dichtheid van het water in het punt x, y, z ten tijde t .
- h hoogte van het zeeoppervlak ten opzichte van een gemiddeld ongestoord zeeoppervlak.
- A_h horizontale uitwisselingscoëfficiënt.
- u_o, v_o, w_o snelheidscomponenten in x, y resp. z richting aan het zeeoppervlak.
- u_b, v_b, w_b snelheidscomponenten in x, y resp. z richting aan de zeebodem.
- r wrijvingsfactor
- H diepte van de zee.
- λ $\frac{r}{H}$
- U $\frac{1}{H+h} \int_{-H}^h u \, dz$
- V $\frac{1}{H+h} \int_{-H}^h v \, dz$

8. COLOFON

De hoofdstukken 2 en 3 zijn geschreven door drs. W.J.A. Kuipers, de hoofdstukken 5 en 6 door drs. J. van Galen en hoofdstuk 7 door de heer H. Timmerman. Dr. D.J. Bouman verzorgde de hoofdstukken 1 en 4 en had tevens de eindredactie. De door hem toegepaste gladstrijkoperator was zeer zwak en liet uit principe taalgebruik en spelling onaangetast.

-o-o-o-

I N H O U D

1. ALGEMENE INLEIDING

- 1.1 Opzet
- 1.2 Stereografische projectie
- 1.3 Rekenrooster
- 1.4 Programmeertechniek
 - 1.4.1 Booleans
 - 1.4.2 Arrays
 - 1.4.3 Trommel
 - 1.4.4 Schaling en verpakking
 - 1.4.5 Leesniveaus
 - 1.4.6 Programmeertalen
- 1.5 Proloog tot de hoofdstukken 2, 3 en 4

2. AUTOMATISCHE DATA EXTRACTIE

- 2.1 Algemeen opmerkingen
- 2.2 Doel van het programma
 - 2.2.1 Opsporen van een TEMP-bericht
 - 2.2.2 Decoderen van een TEMP-bericht
 - 2.2.3 Uitvoer van gegevens
- 2.3 Beschrijving van het programma
 - 2.3.1 Uitvoer van het programma
 - 2.3.2 Herkenning
 - 2.3.3 Decodering
- 2.4 Meervoudige berichten
- 2.5 Duur van het programma
 - 2.5.1 Rekening
 - 2.5.2 Verblijftijd in de machine
- 2.6 Protocollering
- 2.7 Stroombiagram

3. DATA-CORRECTIE

- 3.1 Doel van het programma
- 3.2 Principe voor het opsporen van fouten
- 3.3 Uitwerking van het principe
 - 3.3.1 Transformatie van parameters
 - 3.3.2 Ontbrekende gegevens
 - 3.3.3 Invloed van de waarnemingsfout
- 3.4 Beschrijving van het programma
 - 3.4.1 Voorprogramma
 - 3.4.2 Hoofdprogramma
 - 3.4.3 Uitvoer
- 3.5 Stroomdiagram

4. OBJECTIEVE ANALYSE

- 4.1 Doel
- 4.2 Methode Cressman
- 4.3 Bijzonderheden
 - 4.3.1 Aangepaste waarden
 - 4.3.2 Elliptische invloedssfeer
 - 4.3.3 Gladstrijkers
 - 4.3.4 Protocol
 - 4.3.5 Programma-organisatie
- 4.4 Uitbreidingen
- 4.5 Stroomdiagram

5. HET BAROTROPE MODEL

- 5.1 Bewegingsvergelijkingen
- 5.2 Geostrofische benadering en balansvergelijking
- 5.3 De eigenlijke prognose
 - 5.3.1 Smoothing
- 5.4 Schaling
- 5.5 Gebruik van het trommelgeheugen
- 5.6 Referenties

6. BAROKLIEN 3-PARAMETERMODEL

- 6.1 Model-aannamen
- 6.2 Basisvergelijkingen
- 6.3 Parameterisering
- 6.4 Specificatie van de functies A_0 , A_1 en A_2
- 6.5 Numerieke waarden van de coëfficiënten
- 6.6 Referenties
- 6.7 Appendix
 - a. Betekenis van de gebruikte symbolen
 - b. Dimensie van de gebruikte grootheden

7. NUMERIEKE BEREKENING VAN DE WATERSTANDEN LANGS DE NEDERLANDSE KUST

- 7.1 Inleiding
- 7.2 De partiële differentiaalvergelijkingen
- 7.3 Nadere bepaling van de schuifspanning aan de bodem en aan het aardoppervlak
- 7.4 De partiële differentievergelijkingen
- 7.5 Het rekenmodel van het Mathematisch Centrum Amsterdam
- 7.6 Het Kanaaleffekt
- 7.7 Literatuur
- 7.8 Lijst van symbolen

8. COLOFON

Bijlage: Stippenkaart van het rekenrooster