

KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT

D e B i l t

WETENSCHAPPELIJK RAPPORT

W.R. 72-1

S.J. Bijlsma en B. van Rietschote

Over het optimaal routeren van schepen.

I. Een literatuuronderzoek

De Bilt, 1971

Publikationsnummer: K.N.M.I. W.R. 72-1 (I)

U.D.C.: 551.509.58

SUMMARY

This report contains a survey of the literature on minimal-time ship routing. The appearance of a paper by James (1957) can be considered as a starting point of the investigation of determining the least time track for a ship between two fixed points on earth. Herein the minimal-time track is determined manually by introducing timefronts analogous to the introduction of wavefronts in geometrical optics to describe the propagation of light. The use of the computer is introduced by Nagle (1961) who connects start- and endpoint by a network and compares the traveltimes along different paths determined by this network. A more advanced method using a network has been developed by Braddock (1968). A different approach, using the calculus of variations is made by Haltiner, Hamilton and Arnason (1962), who consider stationary waveconditions. This work is extended by Faulkner (1963), who allows the waveconditions to be time dependent. An application is given in Bleick and Faulkner (1965). We conclude with an application of the theory of optimally controlled processes, as done by Marks et al. (1968).

I N H O U D

	pag.
Inleiding	2
1. Variatierekening	3
2. De grafische tijdfrontenmethode	8
3. Het beschouwen van een netwerk	11
4. Toepassingen van de variatierekening	16
5. Een toepassing van de theorie van optimaal geregelde processen	22
Besluit	26
Literatuur	27

Inleiding

Om tot een beter inzicht te komen in de aanpak van het probleem van optimaal routeren is in dit rapport nagegaan wat er zoal in de loop der jaren op dit gebied aan methoden ontwikkeld is. Daartoe zijn de belangrijkste bijdragen verzameld en worden de daarin gevolgde methoden in het kort besproken. We beperken ons hier tot methoden die gebruikt worden bij het bepalen van de kortste-vaartijd route.

Andere criteria die men kan aanleggen bij het bepalen van een minimum-route zijn o.a.

- a. minimaal brandstofgebruik
- b. minimale schade

Als begin van het onderzoek naar het bepalen van optimale vaarroutes voor schepen kan wel gesteld worden het verschijnen van een publicatie van James (1957). Hierin wordt een methode aangegeven om manueel de kortste-vaartijd route voor een schip te bepalen. Dit gebeurt door het invoeren van tijdfrenten analoog aan het invoeren van golfrenten in de geometrische optica om de voortplanting van het licht te beschrijven. Deze methode wordt momenteel gevolgd op het K.N.M.I. Een en ander is verder beschreven in Hanssen en James (1960). Het gebruik van de rekenmachine wordt geïntroduceerd door Nagle (1961). Deze verbindt begin- en eindpunt van de reis door een netwerk en vergelijkt de vaartijden langs verschillende, door dit netwerk bepaalde routes. Een meer geavanceerde methode, die gebruik maakt van een netwerk, vinden we bij Braddock (1968). Een geheel andere aanpak van het probleem wordt voorgesteld in Haltiner, Hamilton en Arnason (1962), waar, gebruik makend van de variatierekening, de vaartijd tussen begin- en eindpunt wordt geminimaliseerd. Het golfveld wordt echter gedurende de hele reis stationair verondersteld. Door Faulkner (1963) wordt deze methode uitgebreid tot het geval waarin het golfveld van de tijd afhangt. Een toepassing wordt gegeven in Bleick en Faulkner (1965). Bovendien wordt in Faulkner (1963) onder meer aangegeven hoe men over kan gaan op het invoeren van tijdfrenten, hetgeen in wezen de achtergrond is van het rekenprogramma van De Wit (1968). We besluiten met een toepassing van de theorie van optimaal geregelde processen door Marks et al. (1968). Om onnodig herhalen van afleidingen van formules te vermijden zullen we beginnen met een inleiding in de variatierekening. Voor een volledig literatuuroverzicht zij nog verwezen naar een overzichtsartikel van James (1970), waarvan de voor ons belangrijkste bijdragen reeds in de literatuurlijst zijn opgenomen.

1. Variatierekening

1.1. Maxima en minima van functies

De extreme waarden van een functie van één variabele $y = f(x)$ kunnen gevonden worden uit

$$\frac{d}{dx} f(x) = 0$$

Deze voorwaarde is nodig, maar niet voldoende. Ook in hetgeen volgt zullen we slechts nodige voorwaarden geven. De extrema van een functie van twee variabelen $z = f(x,y)$ vinden we uit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (1.1.1)$$

Is er bovendien nog een nevenvoorwaarde $g(x,y) = 0$ gegeven dan kunnen de extrema volgens Lagrange bepaald worden door

$$z = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

als functie van de onafhankelijke variabelen x en y te beschouwen, terwijl λ een nog nader te bepalen constante is. Door (1.1.1) toe te passen vinden we

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (1.1.2)$$

terwijl bovendien geldt

$$g(x,y) = 0 \quad (1.1.3)$$

Door (1.1.2) en (1.1.3) zijn de combinaties (x,y,λ) bepaald, waarvoor $f(x,y)$ een extremum heeft. De parameter λ heet de multiplicator van Lagrange en de gevolgde methode de multiplicatorenmethode van Lagrange. We kunnen het voorgaande generaliseren door een functie van n variabelen te beschouwen met m nevenvoorwaarden ($m < n$)

$$z = f(x_1, \dots, x_n)$$
$$g_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

Analoog aan (1.1.2) en (1.1.3) wordt hier de oplossing verkregen door

$$z = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m$$

als functie van n onafhankelijke variabelen te beschouwen, terwijl $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ de multiplicatoren zijn.

1.2. Integralen

De variatierekening is in zekere zin een uitbreiding van het voorgaande. Het gaat er hier om een functie te bepalen zodanig dat een zekere functionaal, in ons geval een integraal, een extremum aanneemt. Veronderstel het volgende

probleem: Gevraagd wordt naar een functie met een continue tweede afgeleide

$$y = y(x)$$

die voldoet aan de randvoorwaarden

$$y(x_1) = y_1$$

$$y(x_2) = y_2$$

zodanig dat

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad (1.2.1)$$

waar het accent differentiatie naar x aangeeft, een minimum waarde aanneemt. We veronderstellen dat $f(x, y, y')$ continue, tweede-orde afgeleiden heeft met betrekking tot elk van de variabelen. Nemen we nu aan dat $y(x)$ de gezochte functie is, dan definiëren we een schaar naburige functies

$$\bar{y} = y(x) + \epsilon \eta(x) \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (1.2.2)$$

waar $\eta(x)$ een willekeurige functie is met continue eerste en tweede afgeleiden zodanig dat

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (1.2.3)$$

Substitueren we nu (1.2.2) in (1.2.1) dan vinden we als noodzakelijke voorwaarde, opdat (1.2.1) een minimum waarde aanneemt, de vergelijking

$$\left(\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0$$

Na partiële integratie krijgen we i.v.m. (1.2.3) de vergelijking

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0 \quad (1.2.4)$$

We maken nu gebruik van het fundamentele lemma van de variatierekening:

Is $M(x)$ continu voor $x_1 \leq x \leq x_2$ en is $\eta(x)$ een willekeurige functie met continue eerste en tweede afgeleiden, die voldoet aan $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ en is

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x) \eta(x) dx = 0$$

voor alle $\eta(x)$ dan geldt noodzakelijk identiek

$$M(x) = 0$$

Voor het bewijs, zie Courant en Hilbert (1953, p. 185). Gezien onze aannamen betreffende $f(x,y,y')$ en y is

$$M(x) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}$$

waar

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y'} y''$$

een continue functie voor $x_1 \leq x \leq x_2$. We kunnen dus het fundamentele lemma toepassen op (1.2.4) en vinden als noodzakelijke voorwaarde de Euler vergelijking

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Indien we de Euler vergelijking voor de hoogste afgeleide willen oplossen moeten we stellen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y'} \neq 0$$

Deze ongelijkheid staat bekend als de Legendre conditie en is van groot belang bij het onderzoek of een extremaal (d.w.z. een oplossing van de Euler vergelijking) werkelijk een extremum geeft.

We vermelden nog een oorspronkelijk door Lagrange ingevoerde terminologie, waar de naam variatierekening van afkomstig is. Zie Bliss (1946, p. 6).

In deze notatie wordt $\epsilon \eta = \delta y$ de variatie van y genoemd en

$$\delta I = \epsilon I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} \quad (1.2.5)$$

de eerste variatie van de integraal I , ook indien $\eta(x_1) \neq 0$ en $\eta(x_2) \neq 0$

Deze notatie is analoog aan die der differentiaalrekening, waar de uitdrukking $\epsilon f'(x) = df$ met een willekeurige parameter ϵ de differentiaal van de functie $f(x)$ genoemd wordt.

Analoog aan het in 1.1 behandelde kunnen we variatieproblemen met nevenvoorwaarden beschouwen.

a. Stel we zoeken een functie $y = y(x)$, die voldoet aan de randcondities

$$y(x_1) = y_1 \text{ en } y(x_2) = y_2$$

zodanig dat

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y') dx$$

minimaal is, met de nevenvoorwaarde

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y') dx = 0 \quad (1.2.6)$$

Volgens de multiplicatorenmethode van Lagrange passen we voorgaande techniek weer toe op de uitdrukking

$$I = \int_{x_1}^{x_2} [f(x, y, y') + \lambda g(x, y, y')] dx$$

waar λ een nader te bepalen parameter is. De differentiaalvergelijking van Euler

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} \right) (f + \lambda g) = 0$$

tezamen met (1.2.6) geeft weer een volledige bepaling van $y(x)$.

b. We beschouwen weer een geval als onder a maar nu met de nevenvoorwaarde

$$g(x, y, y') = 0 \quad (1.2.7)$$

In dit geval geldt voor de oplossing $y = y(x)$, behalve dat hij moet voldoen aan (1.2.7), bovendien:

Indien de oplossing niet voldoet aan de Euler-vergelijking corresponderend met de uitdrukking g , dan bestaat er een multiplicator $\lambda(x)$ zodat $y = y(x)$ voldoet aan de Euler vergelijking corresponderend met de uitdrukking

$$f^* = f + \lambda(x)g$$

Zie hierover Courant en Hilbert (1953, p. 221).

Vervolgens nog iets over randvoorwaarden.

c. Stel we zoeken een functie $y = y(x)$ zodanig dat de integraal

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$$

minimaal is en waaraan, wat betreft de randen x_1 en x_2 , geen eisen worden gesteld. Kiezen we een functie $n(x)$ met of $n(x_1) \neq 0$ of $n(x_2) \neq 0$ dan moet, willen we dat $y(x)$ aan de Euler vergelijking voldoet, volgens (1.2.5) bovendien voldaan zijn aan

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

voor $x = x_1$ of $x = x_2$. Deze randvoorwaarde noemt men een natuurlijke randvoorwaarde.

We merken op dat het voorgaande eenvoudig gegeneraliseerd kan worden door uitbreiding van zowel het aantal afhankelijke variabelen als het aantal nevenvoorwaarden als ook door hogere afgeleiden toe te laten.

Volledigheidshalve behandelen we hier nog het geval, waarin we het aantal onafhankelijke variabelen uitbreiden.

- d. Stel we zoeken een functie $z = z(x,y)$ van twee onafhankelijk variabelen x en y in de rechthoek R bepaald door $x_1 < x < x_2$, $y_1 < y < y_2$ zodanig dat

$$I = \iint_R f(x,y,z,z_x,z_y) \, dx dy \quad (1.2.8)$$

minimaal is. We veronderstellen dat $z = z(x,y)$ voorgeschreven waarden aanneemt op de rand van de rechthoek. We beschouwen weer een schaar naburige functies

$$\bar{z} = z(x,y) + \varepsilon n(x,y) \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.2.9)$$

waar $z = z(x,y)$ de oplossing voorstelt. Na substitutie van (1.2.9) in (1.2.8) vinden we, door de eerste variatie nul te stellen

$$\begin{aligned} & \iint_R \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial z_y} \right] \varepsilon \, dx dy \\ & + \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial f}{\partial z_x} \varepsilon \Big|_{x_1}^{x_2} dy + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial z_y} \varepsilon \Big|_{y_1}^{y_2} dx = 0 \end{aligned}$$

Dit leidt, daar $\varepsilon = 0$ op de rand van R , tot de Euler-vergelijking

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z_x} + \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial z_y}$$

Is $z = z(x,y)$ op de rand van R niet of slechts gedeeltelijk voorgeschreven, dan kunnen we weer natuurlijke randvoorwaarden afleiden

2. De grafische tijdfrenten methode

De verdienste van James (1957) is, dat hij voor de eerste keer ten behoeve van het optimaal routeren grafieken introduceerde voor een schip, die informatie gaven over zijn snelheid bij gegeven golfhoogte en golfrichting. Dit gebeurde op de volgende manier. Afhankelijk van de relatieve richting van de golven, die onderscheiden werden in tegen-, mee- en dwarsgolven (zie fig. 1), werd de scheepssnelheid uitgezet als functie van de golfhoogte (zie fig. 2).

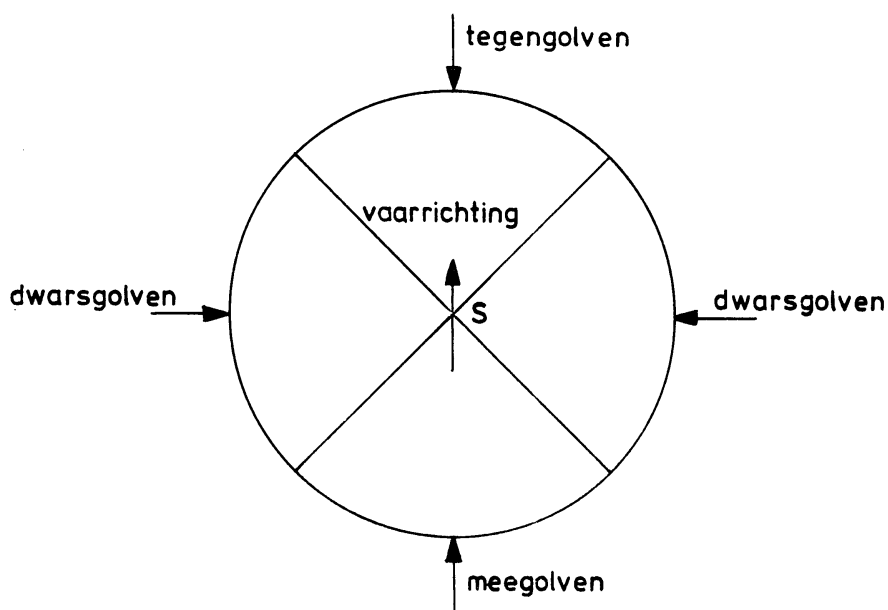


fig. 1. Het schip bevindt zich in punt S, terwijl de pijl de vaarrichting aangeeft. Het hoekbereik voor dwars-, tegen- en meegolven wordt door de cirkelsectoren aangegeven.

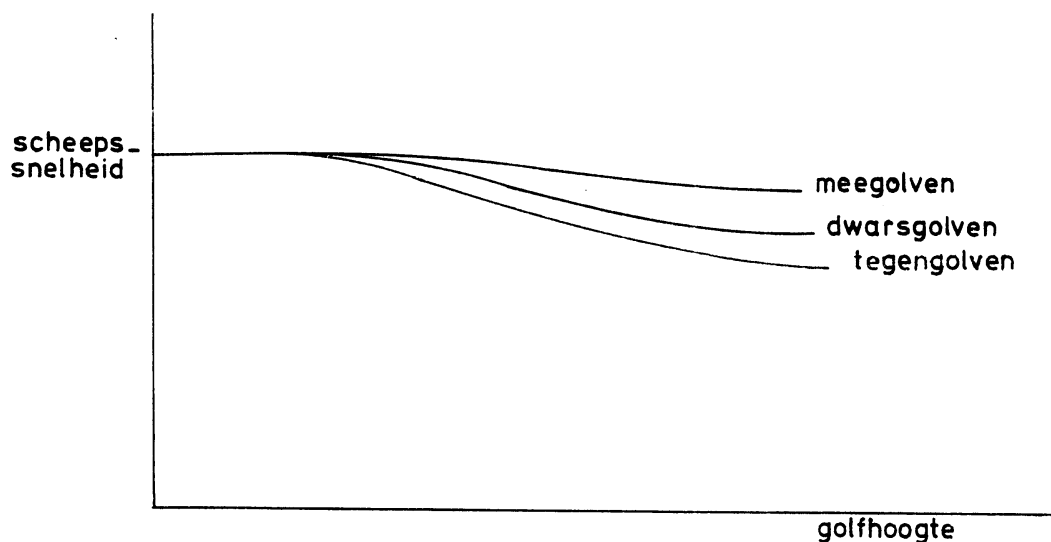


fig. 2

Door gebruik te maken van deze gegevens werd de kortste-vaartijd route geconstrueerd volgens een tijdfronten methode ontleend aan de geometrische optica. In de presentatie van de methode volgen we James (1970). We veronderstellen dat het te bevaren gebied is afgebeeld in een plat vlak, b.v. met behulp van de stereografische projectie.

Stap 1.

De eerste stap is uit een 24 uurs weervoorspelling de golfcondities te bepalen in een gebied wat gedurende deze tijd bereikbaar is vanuit het vertrekpunt.

Stap 2.

Deze golfgegevens worden gebruikt om m.b.v. fig. 2 in verschillende vaarrichtingen vanuit het vertrekpunt snelheden te schatten. Men moet hierbij wel bedenken dat fig. 2 in zekere zin gemiddelde scheepssnelheden aangeeft, zeker niet geldig voor elke gezagvoerder.

Stap 3.

Vanuit het startpunt worden nu in een aantal richtingen de afstanden bepaald, die in 24 uur kunnen worden afgelegd en een eerste tijdfront wordt geconstrueerd door de gevonden punten door een gladde lijn te verbinden (zie fig. 3). Men kan hierbij nog een correctie aanbrengen voor oceaanstromingen.

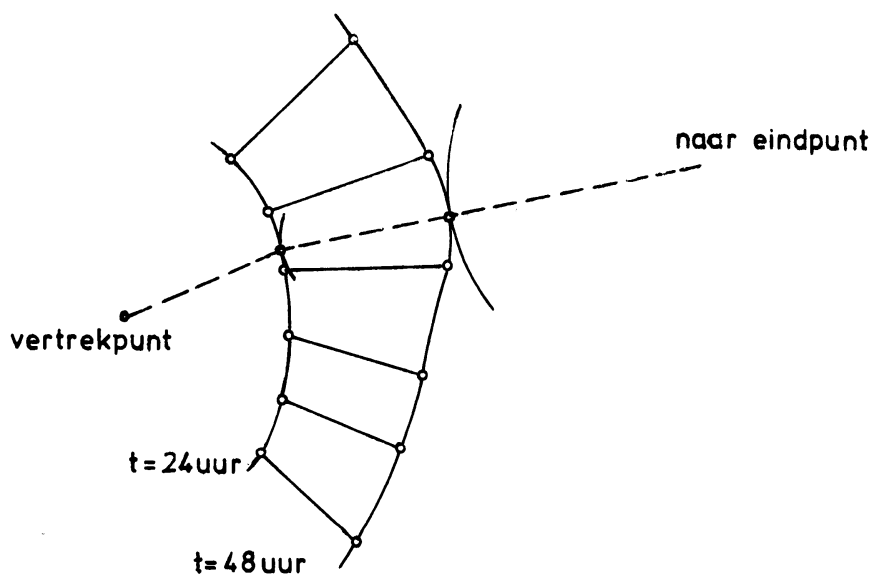


fig. 3

Stap 4.

Een tweede tijdfront wordt geconstrueerd door in de punten van het eerste tijdfront de normaalrichtingen te bepalen en de afstanden, die in 24 uur in deze richtingen kunnen worden afgelegd, afhankelijk van golfhoogte, golfrichting en eventueel oceaanstroming, opnieuw uit te zetten.

Stap 5.

Bovenstaande procedure wordt herhaald, totdat het eindpunt voldoende dicht genaderd is. Het bepalen van de kortste-vaartijd route gebeurt door een cirkel te contrueren met het eindpunt als middelpunt, die het laatste tijdfront raakt. Met dit raakpunt als middelpunt wordt nu weer een cirkel geconstrueerd, die het op een na laatste tijdfront raakt. Deze gang van zaken wordt herhaald tot men op het eerste tijdfront is aangekomen. De raakpunten bepalen de kortste-vaartijd route. Het kan ook zijn dat men slechts voor een gedeelte van de reis de weervoorspelling heeft. In dit geval kan men een route aangeven, waarlangs het schip gedurende deze tijd het dichtst bij het eindpunt komt (zie fig. 3).

Er zijn natuurlijk wel enige bezwaren aan te voeren tegen de gevolgde methode. Bij het construeren van de tijdfronten wordt er in feite van uitgegaan dat de snelheid in een bepaald punt van het tijdfront onafhankelijk is van de richting. Dit is onjuist, gezien de resultaten van fig. 2. Hoe tijdfronten op een correcte manier worden geconstrueerd zal later blijken (zie hoofdstuk 4).

3. Het beschouwen van een netwerk

3.1. We komen nu toe aan de bespreking van een publicatie van Nagle (1961), waarin het gebruik van de rekenmachine wordt geïntroduceerd. In deze publicatie wordt een tweetal methoden aangegeven voor het construeren van de kortste-vaartijd route, waarvan er slechts één in gewijzigde vorm wordt uitgewerkt.

a. Allereerst wordt een juiste toepassing van de tijdfrenten methode uit het vorige hoofdstuk gegeven (zie fig. 4). Beginnend vanuit het vertrekpunt S is een tijdfrent F_1 getekend. Dit tijdfrent is de meetkundige plaats van punten, die het schip kan bereiken aan het eind van het eerste tijdinterval. Aan de hand van vaartafvalgrafieken wordt een polair snelheidsdiagram opgesteld, wat na vermenigvuldiging met het tijdinterval, de in verschillende richtingen door het schip per tijdinterval maximaal bereikbare afstanden aangeeft. Dit wordt in feite gerepresenteerd door het eerste tijdfrent. Een tweede tijdfrent wordt nu geconstrueerd om de meetkundige plaats van punten P_1 aan te geven die, liggend op een maximale afstand van F_1 , gemeten langs de normaal n , door het schip in het tweede tijdinterval bereikt kunnen worden (zie fig. 4).

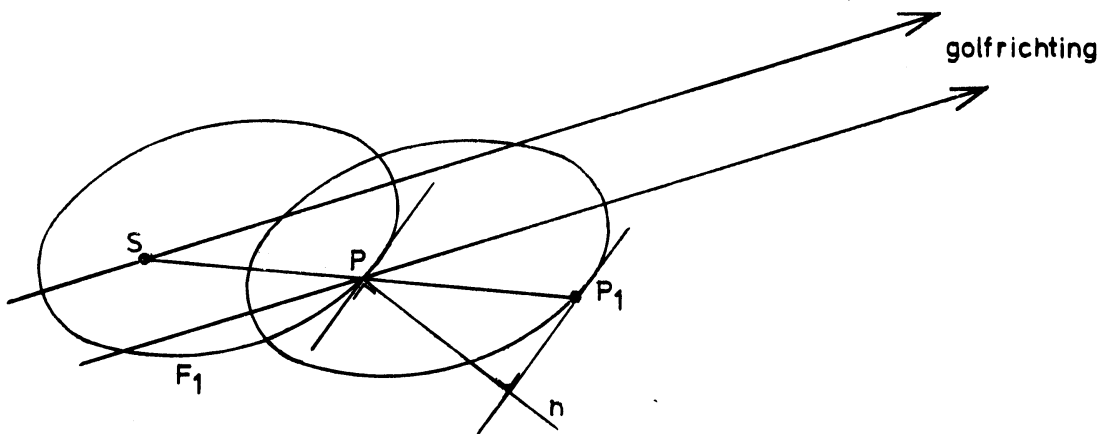


fig. 4

Opeenvolgende tijdfrenten worden bepaald totdat of de golfvoorspelling uitgeput is of het eindpunt bereikt. De uiteindelijke route kan dan bepaald worden door successieve approximatie.

- b. Een tweede manier is een netwerk van roosterpunten aan te brengen in het gebied tussen begin- en eindpunt (zie fig. 5), waarin routes mogelijk zijn. Voor de routeberekeningen veronderstelt men dat het schip langs grootcirkels vaart tussen deze punten, behalve wanneer de grootcirkels loodrecht staan op de grootcirkel, die begin- en eindpunt verbindt. Het aantal mogelijke routes van het vertrekpunt tot een roosterpunt is in fig. 5 bij het desbetreffende roosterpunt aangegeven.

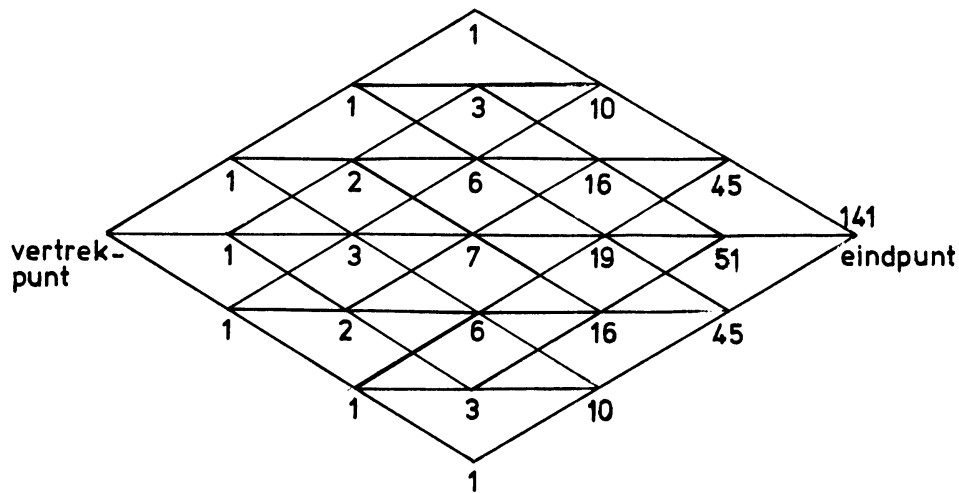


fig. 5

Per roosterpunt moeten niet meer dan 3 routes beschouwd worden om de beste van de 141 routes tussen begin- en eindpunt te vinden.

- c. Er is gerekend aan een modificatie van b (zie fig. 6). Hierbij kiest men vanuit het vertrekpunt een aantal startrichtingen, in dit geval 5. Vervolgens wordt in elk van deze richtingen het punt bepaald, wat het schip na een dag varen zou kunnen bereiken. Vanuit ieder van deze 5 punten worden 3 nieuwe richtingen gekozen, zodat 15 punten worden verkregen na de tweede dag en zo voortgaande 45 punten na de derde vaardag. Veronderstellen we dat een weervoorspelling voor 4 dagen gegeven was, dan wordt nu nagegaan welk van de 45 punten, gemeten langs de grootcirkel, het dichtst bij het eindpunt komt na de vierde vaardag. De route vanuit het vertrekpunt naar dit geselecteerde punt wordt genomen als de beste van de 45 routes.

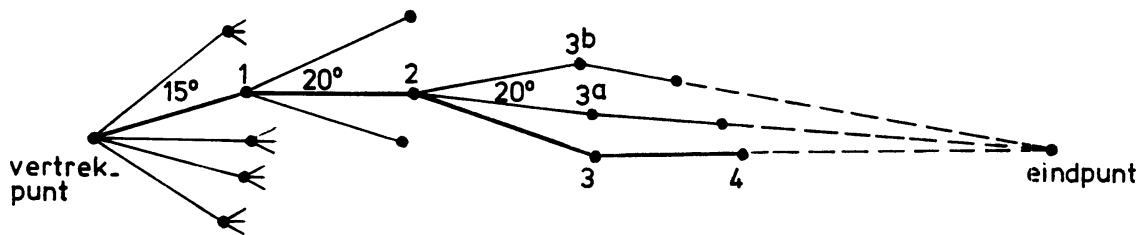


fig. 6

Uit de vaartafvalgrafieken, gegeven door James (1957) wordt de volgende vergelijking voor de snelheid samengesteld

$$S = S_0 - k_1 h^2 (1 + \cos \theta) - k_2 h^2 - k_3 h (1 - \cos 2\theta) + k_4 h \theta \quad (3.3.1)$$

Hierin is S_0 de maximale snelheid in kalme zee en h de golfhoogte, in voeten, terwijl de hoek θ , gemeten vanaf de boeg, de richting aangeeft van waaruit de golven komen.

De tweede term in (3.3.1) representeert het feit dat tegengolven in het algemeen meer weerstand bieden aan de beweging van een schip dan meegolven. De derde term dient om de scheepssnelheid te verminderen, indien de golfhoogte toeneemt, onafhankelijk van de richting. De vierde term werd ingevoerd om het effect van dwarsgolven te beschrijven. De vijfde term tenslotte geeft aan dat meegolven in het algemeen een positieve bijdrage leveren. De constanten k_1 , k_2 , k_3 en k_4 zijn voor verschillende typen schepen getabelleerd.

- 3.2. Een meer geavanceerd gebruik van een netwerk wordt gemaakt door Braddock (1968). We geven een globale schets van de methode. We kunnen de punten van een netwerk onderscheiden in aanliggende en niet aanliggende punten. Aanliggende punten zijn punten die door een pijl verbonden kunnen worden. Een weg die niet aanliggende punten verbindt bestaat derhalve uit een verzameling pijlen en is gespecificeerd door de punten waar hij doorheen gaat. We voeren nu een variabele P in die de reisduur in het netwerk tussen de verschillende punten aangeeft. Indien $P(s,t)$ de gemiddelde waarde van P is langs de lijn van s naar t dan kunnen we de matrix

$$D = \{d(s,t)\}$$

waarin deze vaartijden voor alle mogelijke punten s en t zijn vervat als volgt construeren. Indien de punten s en t aanliggend zijn, geldt

$$d(s,t) = P(s,t)$$

Zijn ze niet aanliggend dan vinden we

$$d(s,t) = \infty$$

terwijl bovendien geldt

$$d(s,s) = 0$$

De variabele P , corresponderend met een willekeurige weg door het netwerk, wordt verkregen door de waarden van P langs de verschillende pijlen te sommeren. Een probleem ontstaat, indien we een weg tussen twee punten van het rooster willen bepalen, waarlangs P een minimum waarde aanneemt. Men kan deze optimale weg weliswaar altijd vinden door de waarden van P langs alle mogelijke wegen met elkaar te vergelijken. Het is evenwel duidelijk dat dit een zeer tijdrovende zaak kan worden. Derhalve is het niet verwonderlijk dat hiervoor meer efficiënte algorithmes zijn ontwikkeld. Er wordt hier gekozen voor een algoritme ontwikkeld door Dantzig (1960). Stel nu dat we een optimale weg willen vinden van A naar B (zie fig. 7). Als eerste approximatie wordt hiervoor S_1 gekozen. We verdelen nu S_1 in intervallen van haast gelijke lengte met behulp van de punten $A = C_1, C_2, \dots, C_{L_1} = B$.

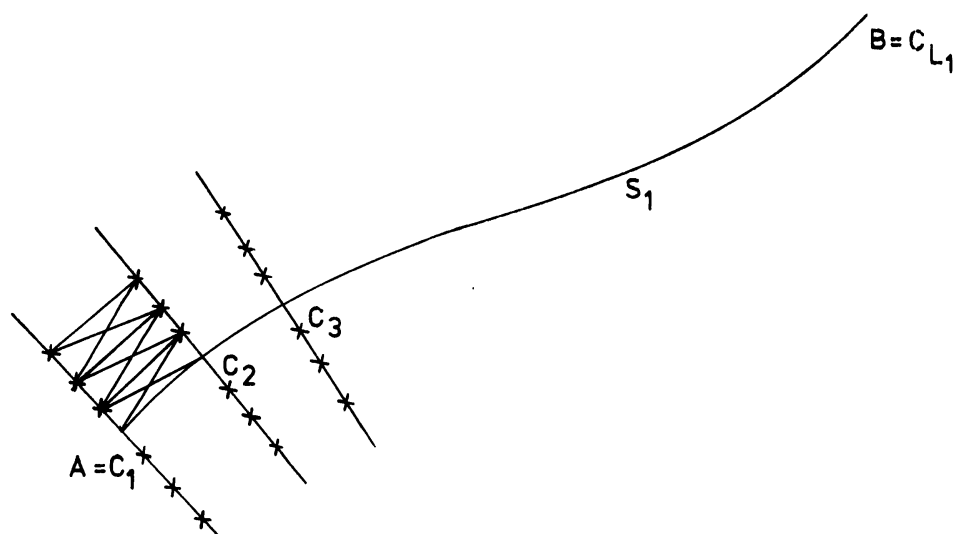


fig. 7

We berekenen nu DS_1 , de grootste afstand tussen opeenvolgende punten. In ieder punt C_i ($1 \leq i \leq L_1$) wordt nu een lijn geconstrueerd loodrecht op S_1 . Langs deze lijn worden ter weerszijden van C_i , K_i punten toegevoegd op onderlinge afstand DS_1 . De grootte van K_i hangt af van L_1 . Door verbindingslijnen tussen deze punten aan te brengen wordt een netwerk gevormd om S_1 . Vervolgens worden de waarden van P langs iedere toegestane verbindingslijn berekend en wordt Dantzig's Algorithm gebruikt om de tweede approximatie van de optimale weg van A naar B , S_2 te bepalen. Vervolgens kan S_2 gebruikt worden om een volgend netwerk met een geringere maximale roosterafstand DS_2 te construeren, enz. Het is duidelijk dat bovenstaande techniek leidt tot een rij van wegen $\{S_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) met een corresponderende rij van monotoom dalende waarden $\{P_i\}$. Daar de rij $\{P_i\}$ naar beneden begrensd is door nul zal hij naar een waarde P^* convergeren. Converteert $\{S_i\}$ naar S en neemt P op S de waarde P_S aan, dan kan worden aangetoond dat

$$P_S = \lim_{i \rightarrow \infty} \{P_i\} = P^*$$

De methode is met succes vergeleken met het geval dat behandeld wordt in Bleick en Faulkner (1965).

4. Toepassingen van de variatierekening

In dit hoofdstuk zullen enkele methoden aangegeven worden, die gebruik maken van de variatierekening. De kortste-vaartijd route wordt bepaald door de integraal die de vaartijd tussen begin- en eindpunt representeert te minimaliseren. Een uitdrukking voor deze integraal kan op verschillende manieren opgesteld worden. We beginnen met het eenvoudigste geval, waarin we het golfveld stationair veronderstellen.

4.1. Stationair golfveld

We gaan uit van een rechthoekig coördinatenstelsel, met coördinaten x en y , waarin het te bevaren gebied is afgebeeld (Haltiner, Hamilton en 'Arnason 1962). De vaartijd T van een schip langs een kromme C die begin- en eindpunt verbindt, kan, indien de snelheid van het schip V bedraagt, eenvoudig geschreven worden als

$$T = \int_C \frac{ds}{V} = \int_C \psi ds \quad (4.1.1)$$

waar $\psi = V^{-1}$. Daar ψ in het algemeen een functie is van de tijd, positie en vaarrichting, ligt het voor de hand de coördinaten x en y als functie van de tijd te beschouwen

$$x = x(t) , y = y(t)$$

Vervangen we ds in (4.1.1) door $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} dt$, waar de punt boven de variabele differentiatie naar de tijd aangeeft, dan gaat (4.1.1) over in

$$T = \int_0^T \psi(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} dt \quad (4.1.2)$$

Passen we nu de theorie uit hoofdstuk 1 toe op (4.1.2) dan vinden we dat de functies $x(t)$ en $y(t)$, die in feite de extremaal bepalen, moeten voldoen aan de Euler vergelijkingen

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \psi (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} \right] = 0$$

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \psi (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} \right] = 0$$

We beschouwen nu het eenvoudige geval, dat de snelheid niet expliciet van de tijd afhangt, zodat ψ slechts een functie is van de plaats en koers. Kiezen we x als de onafhankelijk variabele, dan gaat (4.1.2) over in

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \psi(x, y, y') (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (4.1.3)$$

We nemen bovendien nog aan dat ψ onafhankelijk is van y' d.w.z. we veronderstellen dat de termen, die tengevolge van dit feit uit de Euler vergelijking corresponderend met (4.1.3) verdwijnen, verwaarloosbaar waren t.o.v. de overigen. Door, aan de hand van vaartkarakteristieken, samengesteld door James (1957), de snelheid te approximeren door een uitdrukking van de vorm

$$V = V_0 - [a_1 + a_2 \cos(\beta - \alpha)] H$$

waar de hoek α de koers geeft van het schip en β de richting van waaruit de golven komen, terwijl a_1 en a_2 experimenteel bepaalde constanten zijn, kan dit inderdaad gerechtvaardigd worden, voor niet te grote waarden van de golfhoogte H . We vinden in dit geval

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \psi(x, y) (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

met de corresponderende Euler-vergelijking

$$\psi y'' + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} y' - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) (1 + y'^2) = 0 \quad (4.1.4)$$

De volgende oplossingsmethode voor (4.1.4) wordt voorgesteld. Indien we y' en y'' vervangen door

$$y_i' = (y_{i+1} - y_{i-1}) / 2d$$

$$y_i'' = (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) / d^2$$

vinden we

$$y_i = \frac{y_{i+1} + y_{i-1}}{2} + \frac{d^2}{2\psi} \left[y_i' \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] [1 + y_i'^2]$$

De eerste schatting van de y_i , tussen vaste beginwaarde $i = 0$ en vaste eindwaarde $i = m$, is willekeurig. Hiervoor kan de grootcirkelroute of een klimatologisch bepaalde route genomen worden. De n -de approximatie van y_i wordt berekend uit de n -de approximatie van y_{i-1} en de $(n-1)$ -ste approximatie van y_{i+1} . De iteratieprocedure wordt voortgezet totdat de kortste vaartijd route voldoende goed geapproximeerd is. Deze gang van zaken is voor enkele eenvoudige situaties getest.

4.2. Tijdafhankelijk golfveld

De bewegingsvergelijkingen van een schip in een rechthoekig coördinaten-systeem met coördinaten x en y kunnen geschreven worden als

$$\phi_1 = \dot{x} - V \cos p = 0 \quad (4.2.1)$$

$$\phi_2 = \dot{y} - V \sin p = 0 \quad (4.2.2)$$

waar $V = V(x, y, p, t)$ de snelheid van het schip is en p de hoek tussen de snelheidsvector en de x -as. De eis dat de vaartijd T voor een bepaalde route van een vast beginpunt A op tijdstip $t = 0$ naar een vast eindpunt B op tijdstip $t = T$ minimaal is, komt overeen met de eis dat de integraal

$$I = \int_0^T (1 + \lambda \phi_1 + \mu \phi_2) dt \quad (4.2.3)$$

waar $\lambda(t)$ en $\mu(t)$ Lagrange multiplicatoren zijn, stationair is (zie hoofdstuk 1). Indien δT de variatie is van de tijd in het vaste eindpunt, dan is de eerste variatie van (4.2.3)

$$\delta I = \delta T + \left[\lambda \delta x + \mu \delta y \right]_0^T - \int_0^T (\phi_3 \delta x + \phi_4 \delta y + \phi_5 \delta p) dt \quad (4.2.4)$$

De coëfficiënten van δx , δy en δp in $\delta I = 0$ geven de Euler vergelijkingen (4.2.5) en (4.2.6)

$$\phi_3 = \dot{\lambda} + (\lambda \cos p + \mu \sin p) V_x = 0 \quad (4.2.5)$$

$$\phi_4 = \dot{\mu} + (\lambda \cos p + \mu \sin p) V_y = 0 \quad (4.2.6)$$

en de scalair product vergelijking

$$\phi_5 = \lambda(V_p \cos p - V \sin p) + \mu(V_p \sin p + V \cos p) = 0 \quad (4.2.7)$$

Bovendien zijn de variaties van de tijd en de coördinaten in het vaste eindpunt niet onafhankelijk, immers

$$x(T + \delta T) + \delta x(T + \delta T) = x(T)$$

$$y(T + \delta T) + \delta y(T + \delta T) = y(T)$$

zodat

$$\dot{x}(T) \delta T + \delta x(T) = 0$$

$$\dot{y}(T) \delta T + \delta y(T) = 0$$

waarmee we vinden, daar $\delta x(0) = \delta y(0) = 0$

$$(\lambda V \cos p + \mu V \sin p)_T = 1 \quad (4.2.8)$$

Door bovendien een verband af te leiden tussen de variatie in $\alpha = \arctan \left(\frac{\mu(0)}{\lambda(0)} \right)$, de daarmee samenhangende coördinaatverschillen $\Delta x(T)$ en $\Delta y(T)$ tussen het bereikte en het vaste eindpunt bij vaartijd T en de variatie in de vaartijd δT (Faulkner 1963, Bleick en Faulkner 1965) kunnen we door integratie van (4.2.1), (4.2.2), (4.2.5), (4.2.6), (4.2.7) met (4.2.8) tezamen met een Newton-Raphson iteratie van ΔT en $\delta \alpha$ uit de optredende coördinaatverschillen $\Delta x(T)$ en $\Delta y(T)$, de korste-vaartijd route bepalen. In Faulkner (1963) wordt verder nog ingegaan op enkele meetkundige aspecten van het voorgaande, waarbij hij zich voor de eenvoudigheid beperkt tot het geval dat de snelheid niet expliciet van de tijd afhangt.

We gaan uit van

$$T = \int_0^X f(x, y, y') dx \quad (4.2.9)$$

De eerste variatie van (4.2.9) wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \delta T = & \int_0^X \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right) \delta y dx \\ & + \left[f(x, y, y') \right]_{x=X} \Delta X + \left[f_{y'} \delta y \right]_0^X \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Indien begin- en eindpunt vast zijn, dan geldt $\Delta X = \delta y(0) = \delta y(X) = 0$. Indien het eindpunt (X, Y) niet vast is, dan zullen de hiermee corresponderende termen in (4.2.10) niet nul worden. We beschouwen nu twee naburige extremalen $y = y(x)$ en $y = y(x) + \delta y(x)$ zodat de integraal in (4.2.10) nul wordt. De verandering in de eindwaarde $y = y(X)$ van $y = y(x)$ is (zie fig. 8)

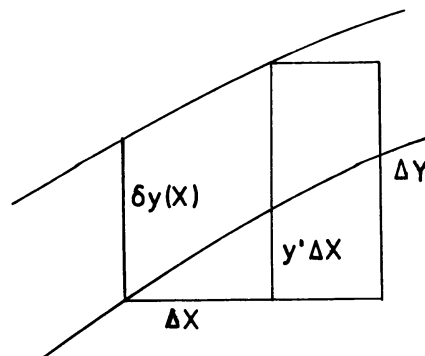


fig. 8

$$\Delta Y = \delta y(X) + y'(X) \Delta X$$

waar y' de richting op de extremaal is. Vergelijking (4.2.10) wordt nu

$$\delta T = [f\Delta X + (\Delta Y - y'\Delta X) f_{y'}]_{x=X} \quad (4.2.11)$$

De verschillende punten, één op iedere extremaal, die corresponderen met de zelfde waarde van T , worden verkregen door in (4.2.11) $\delta T = 0$ te stellen, waarmee we vinden

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = y' - \frac{f}{f_{y'}} \quad (4.2.12)$$

Vergelijking (4.2.12) definieert de transversaal-richting $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$. Een kromme S die elke extremaal van een verzameling extremalen transversaal snijdt, is een transversaal van deze verzameling. De helling van de raaklijn aan S wordt gegeven door (4.2.12) waarin y' de richting van de corresponderende extremaal is. We zullen krommen S met deze eigenschap voortaan tijdfronten noemen. De belangrijke eigenschap van een tijdfront is, dat alle punten die er op of links ervan liggen (zie fig. 9), vanuit het beginpunt bereikbaar zijn op dat tijdstip. Rechts van het tijdfront vinden we dergelijke punten niet. De punten van het tijdfront kunnen slechts langs extremalen bereikt worden. Door te bedenken dat $y' = \tan p$ en door (4.2.12) met (4.2.7) te vergelijken vinden we dat de vector $\vec{\lambda} = (\lambda, \mu)$ behorend bij een bepaalde extremaal-richting, loodrecht staat op het corresponderende tijdfront. Deze eigenschap, die in feite op een simpele manier volgt door in (4.2.4) $\delta T = 0$ te stellen, stelt ons in staat om op een eenvoudige wijze, door het construeren van tijdfronten, de kortste-vaartijd route te bepalen. We beschouwen daartoe een extremaal die vanuit het beginpunt vertrekt en die bepaald wordt door een hoek $\alpha = \arctan \left(\frac{\mu(0)}{\lambda(0)} \right)$ en vergelijkingen (4.2.1), (4.2.2), (4.2.5), (4.2.6), (4.2.7) met (4.2.8).

De beginhoers $p(0)$ die hieruit volgt is zodanig, dat de projectie van de snelheid, behorend bij die koers, in de richting α maximaal is. Na een bepaald tijdsinterval wordt een eerste tijdfront gevonden door de parameter α te variëren en de punten die in de hiermee corresponderende richtingen $p(0)$ in dit tijdsinterval bereikt kunnen worden door een gladde lijn te verbinden. Daar men behalve de punten, die op deze wijze S bepalen, ook de richting van de raaklijn aan S in die punten kent, kan men volstaan met relatief weinig punten. In ieder punt P van elke extremaal E , bestaat een relatie tussen de snelheid \vec{V} , de vector $\vec{\lambda}$ en het tijdfront S zoals aangegeven in fig. 9, waarin Γ de kromme is die in elke richting p weergeeft, welke afstand gedurende een bepaald tijdsinterval kan worden afgelegd.

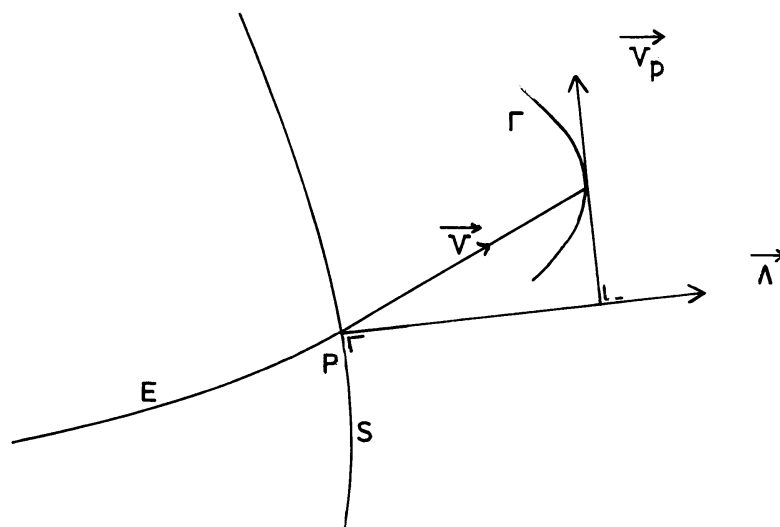


fig. 9

Door nu in de punten van het gevonden tijdfront de normaalrichtingen te bepalen en de daarmee samenhangende vaarrichtingen, kan een volgend tijdfront gevonden worden. Dit wordt herhaald tot het eindpunt bereikt is. De vaartijd T en de beginkoers $p(0)$ moeten door interpolatie bepaald worden. In een ietwat gewijzigde vorm wordt deze methode toegepast in het door ons bewerkte rekenprogramma van de Wit (1968). Andere methoden, die nog worden gegeven, betreffen het oplossen van het stelsel vergelijkingen (4.2.1), (4.2.2), (4.2.5), (4.2.6), (4.2.7) met (4.2.8). Enkele bestaande numerieke oplossingsmethoden voor dit soort problemen wordt vermeld. De formulering van dit variatieprobleem door bovenstaande vergelijkingen is analoog aan de toepassing van Pontryagin's Maximum Principe uit de theorie van optimaal geregelde processen, zoals in het volgende hoofdstuk zal blijken. Volledigheidshalve zij nog vermeld dat de sloopssnelheid in Bleick en Faulkner (1965) beschreven wordt door een polair snelheidsdiagram, dat de sloopssnelheid geeft als functie van de hoek tussen de vaarrichting van het schip en de golfrichting. Dit polair snelheidsdiagram heeft de vorm van een ellips. Het schip bevindt zich op de lange as van de ellips en is ten opzichte van het centrum verschoven tegen de golfrichting in.

5. Een toepassing van de theorie van optimaal geregelde processen

We beginnen met een korte bespreking van Pontryagin's Maximum Principe. Stel gegeven een dynamisch systeem

$$\dot{x}_i = f_i(x, p, t) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5.1)$$

waar $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ de toestand van het systeem beschrijft en $p(t)$ een stuurfunctie is d.w.z. door $p(t)$ te variëren zal de oplossing van (5.1) in het algemeen ook gevarieerd worden. In ons probleem is $p(t)$ de koers van een schip.* Veronderstel nu dat we $p(t)$ zodanig willen kiezen dat de integraal

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, p, t) dt \quad (5.2)$$

waar x voldoet aan (5.1) minimaal is. De functie $f_0(x, p, t)$ is karakteristiek voor een bepaald probleem. Indien de vaartijd geminimaliseerd moet worden vinden we b.v. $f_0(x, p, t) = 1$. We definiëren nu $x_0(t)$ door $\dot{x}_0 = f_0(x, p, t)$ en introduceren een vectorfunctie $\lambda(t) = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ die voldoet aan

$$\dot{\lambda}_i = - \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_j(x, p, t)}{\partial x_i} \lambda_j \quad (5.3)$$

Om (5.1) en (5.3) in een eenvoudiger vorm te schrijven voeren we de functie H in gedefinieerd door

$$H(\lambda, x, p, t) = \sum_{j=0}^n \lambda_j f_j(x, p, t) \quad (5.4)$$

Deze functie wordt de Hamiltoniaan genoemd. Uit (5.4) volgt

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \quad \text{en} \quad \dot{\lambda}_i = - \frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 0, \dots, n)$$

Het belangrijkste resultaat van het maximum principe luidt nu:

Opdat (5.2) minimaal is voor een bepaalde $p = p(t)$ is het noodzakelijk dat er een continue vectorfunctie $\lambda(t) = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ bestaat met $\lambda_0 \leq 0$ die voldoet aan (5.3) zodanig dat de Hamiltoniaan een maximum waarde aanneemt voor $p = p(t)$ d.w.z.

$$\frac{\partial H}{\partial p} = 0 \quad (5.5)$$

* In het algemeen zal $p = p(t)$ een vectorfunctie zijn, zoals $x = x(t)$.

Voor het bewijs zie Meditch (1965). Daar $f_0 = 1$ in ons geval, is het duidelijk dat (5.1), (5.3) en (5.5) corresponderen met (4.2.1), (4.2.2), (4.2.5), (4.2.6) en (4.2.7).

We gaan nu over op een toepassing hiervan zoals gegeven door Marks et al. (1968). We beschouwen een coördinatensysteem zoals beschreven in fig. 10, waarin de oorsprong in een willekeurig punt van de equator is geplaatst. De lengte wordt aangegeven door ϕ en de breedte door θ . De snelheid van het schip is V , terwijl ψ de hoek is tussen de snelheidsvector en de ϕ -as, kloksgewijs gemeten. De bewegingsvergelijkingen zijn

$$\dot{\phi} = \frac{1}{R} \frac{V \cos \psi}{\cos \theta} \quad (5.6)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{R} V \sin \psi \quad (5.7)$$

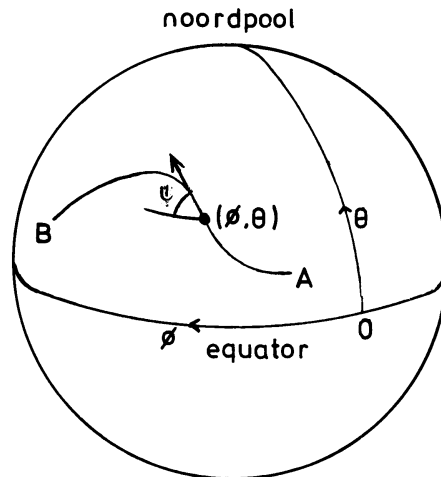


fig. 10

We benaderen de snelheid door

$$V = V_A - (V_A - V_H) \sin^2 \left(\frac{1}{2} \chi_w \right) \quad (5.8)$$

waarin V_A de sloopssnelheid is ingeval van meegolven, V_H met tegengolven en $\chi_w = \psi - \mu_w$ (zie fig. 11)

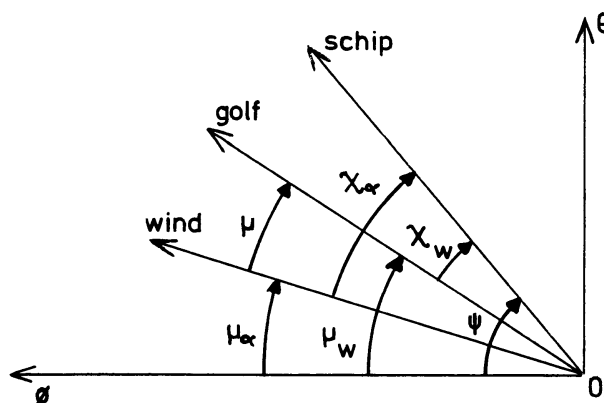


fig. 11

Substitutie van (5.8) in (5.6) en (5.7) geeft

$$\dot{\phi} = \frac{1}{R \cos \theta} \{U \cos \psi + \frac{1}{2} [u_1 (1 + \cos 2 \psi) + u_2 \sin 2 \psi] + u_c\} \quad (5.9)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{R} \{U \sin \psi + \frac{1}{2} [u_1 \sin 2 \psi + u_2 (1 - \cos 2 \psi)] + v_c\} \quad (5.10)$$

waar

$$U = \frac{1}{2}(V_A + V_H)$$

$$u_1 = \frac{1}{2}(V_A - V_H) \cos \mu_w$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(V_H - V_A) \sin \mu_w$$

en waar u_c en v_c de lengte- en breedtecomponenten zijn van eventuele oceaanstromingen. We hebben nu een dynamisch systeem gegeven door vergelijkingen (5.9) en (5.10) met begincondities

$$\phi(t_A) = \phi_A, \quad \theta(t_A) = \theta_A$$

en eindcondities

$$\phi(t_B) = \phi_B, \quad \theta(t_B) = \theta_B$$

Het probleem is nu $\psi(t)$ te bepalen zodat

$$J = \int_{t_A}^{t_B} dt = t_B - t_A$$

minimaal is. De Hamiltoniaan wordt gedefinieerd als

$$H = 1 + \frac{\lambda_1}{R \cos \theta} \{U \cos \psi + \frac{1}{2} [u_1 (1 + \cos 2 \psi) + u_2 \sin 2 \psi] + u_c\} + \frac{\lambda_2}{R} \{U \sin \psi + \frac{1}{2} [u_1 \sin 2 \psi + u_2 (1 - \cos 2 \psi)] + v_c\} \quad (5.11)$$

Vergelijking met (5.4) leert dat $\lambda_0 = 1$. Derhalve is hier sprake van Pontryagin's Minimum Principe (zie Athans en Falb (1966)).

Analoog aan (5.3) en (5.5) geldt nu

$$\dot{\lambda}_1 = - \frac{\partial H}{\partial \phi} \quad (5.12)$$

$$\dot{\lambda}_2 = - \frac{\partial H}{\partial \theta} \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \psi} = 0 \quad (5.14)$$

Door eliminatie van $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\lambda}_1$, $\dot{\lambda}_2$, λ_1 en λ_2 uit (5.9), (5.10), (5.12), (5.13) en (5.14) willen we nu een vergelijking opstellen voor $\dot{\psi}$. Dit is de stuurvergelijking. Daartoe worden enkele vereenvoudigingen aangebracht door te veronderstellen dat

$$\frac{u_1}{U} = 0(\varepsilon), \quad \frac{u_2}{U} = 0(\varepsilon), \quad \frac{u_c}{U} = 0(\varepsilon) \quad \text{en} \quad \frac{v_c}{U} = 0(\varepsilon)$$

en termen van de orde ε^2 en hoger te verwaarlozen.

Na een aanzienlijk aantal berekeningen vinden we als stuurvergelijking

$$R\dot{\psi} = A_1 \cos \psi + A_2 \sin \psi + A_3 \cos^2 \psi + A_4 \sin^2 \psi + A_5 \sin \psi \cos \psi \quad (5.15)$$

waarin de constanten A_i functies zijn van de overige variabelen. De vergelijkingen (5.9) en (5.10) kunnen in dezelfde vorm gebracht worden als de stuurvergelijking. Dit stelsel vergelijkingen tezamen met de beginconditie kan opgelost worden door ψ_A te kiezen en vervolgens voorwaarts in de tijd te integreren. De breedte van het eindpunt wordt gebruikt om de integratie te beëindigen en de lengte om de afwijking van het eindpunt te vergelijken, wat weer wordt gebruikt om de keuze van ψ_A te verbeteren.

Besluit

Volledigheidshalve geven we nog enkele, bij de Naval Postgraduate School te Monterey, California, verschenen rapporten: Faulkner (1962); Bleick, Faulkner en Haltiner (1967); Haltiner, Bleick en Faulkner (1967); Bleick (1968) en Faulkner (1969). Volgens James (1970) wordt nog geen van alle tot nu toe ontwikkelde rekenprogramma's operationeel gebruikt. Dit in verband met het ontbreken van een goede golfvoorspelling. Tenslotte hopen we, dat we door het schrijven van dit rapport voor een ieder, die geïnteresseerd is in het routeren van schepen, de zaken iets overzichtelijker gemaakt hebben.

Literatuur

- Athans, M. en Falb, P.L. (1966) Optimal control. An introduction to the theory and its application. New York.
- Bleick, W.E. en Faulkner, F.D. (1965) Minimal-time ship routing. Journ. appl. meteor., vol. 4, no. 2, pp. 217-221.
- Bleick, W.E., Faulkner, F.D. en Haltiner, G.J. (1967) Single ship routing. TR 73, Naval Postgraduate School, Monterey.
- Bleick, W.E. (1968) A general ship routing program. Naval Postgraduate School, Monterey. Pp. 40.
- Bliss, G.A. (1946) Lectures on the calculus of variations. Chicago.
- Braddock, R.D. (1968) Optimal problems in physical oceanography. Research Papers Horace Lamb Centre, Flinders University of South Australia, no. 19 and 21.
- Courant, R. en Hilbert, D. (1953) Methods of mathematical physics. Vol. 1. New York.
- Dantzig, G.B. (1960) Management science. Vol 6. Baltimore.
- Faulkner, F.D. (1962) Optimum ship routing. Pt. I and II, Research papers Naval Postgraduate School, no. 32 and 33.
- Faulkner, F.D. (1963) Numerical methods for determining optimum ship routes. Journ. Inst. of Navigation, vol. 10, no. 4, pp. 351-367.
- Faulkner, F.D. (1969) A survey of numerical ship routing, Naval Postgraduate School, Monterey. Pp. 12.
- Haltiner, G.J., Hamilton, H.D. en 'Arnason, G. (1962) Minimal-time ship routing. Journ. appl. meteor., vol. 1, no. 1, pp. 1-7.

- Haltiner, G.J., Bleick, W.E. en Faulkner, F.D. (1967) Use of long range weather forecasts in ship routing. TR 78, Naval Postgraduate School, Monterey. Pp. 10.
- Hanssen, G.L. en James, R.W. (1960) Optimum ship routing. Journ. Inst. of Navigation, vol. 13, no. 3, pp. 253-272.
- James, R.W. (1957) Application of wave forecasts to marine navigation. Navy Hydrographic Office, SP-1. Pp. 85.
- James, R.W. (1970) The present status of ship routing. In: Interocean 1970. VDI-Verlag, Düsseldorf.
- Marks, W. et al. (1968) An automated system for optimum ship routing. Trans. Soc. of Naval Architects and Marine Engineers, vol. 76, pp. 22-55.
- Meditch, J.S. (1965) An introduction to the Pontryagin maximum principle in modern control systems theory. Ed. by C.T. Leondes. New York.
- Nagle, F.W. (1961) Ship routing by numerical means. Navy Weather Research Facility, Norfolk. Pp. 35.
- de Wit, C. (1968) Mathematical treatment of optimal ocean ship routing. Diss. Delft.