

KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT

De Bilt

WETENSCHAPPELIJK RAPPORT

W.R. 75-12

H. Kelder

Een eenvoudig model voor de berekening
van de verandering in de ionendichtheid
van de E-laag veroorzaakt door
een inwendige zwaartekrachtgolf

De Bilt, 1975

Publikationsnummer: K.N.M.I. W.R. 75-12 (GO)

U.D.C.: 551.510.535.

Een eenvoudig model voor de berekening van de verandering in de ionendichtheid van de E-laag veroorzaakt door een inwendige zwaartekrachtgolf.

Samenvatting

Er wordt berekend welke veranderingen een inwendige zwaartekrachtgolf brengt in de ionendichtheid van de E-laag. Uitgegaan wordt van het Chapman model voor de ionendichtheidsverdeling in deze laag. Verdere onderstellingen zijn dat de neutrale atmosfeer oorspronkelijk in rust is en isotherm, en dat door viscositeit en warmtegeleiding de golfamplitude boven 150 km hoogte konstant blijft. De grootte van de transportterm en de fotoionizatieterm worden met elkaar vergeleken. De verandering van de ionendichtheid blijkt van de orde van procenten te zijn.

Summary

The changes induced by an internal gravity wave in the iondensity of the E layer are calculated. Assumed is the Chapman model of the iondensity distribution in this layer. Further assumptions are:

- 1) the neutral atmosphere is originally at rest and isothermal and
- 2) through viscosity and heat conduction is the wave amplitude above 150 km height constant.

The magnitude of the transportterm and the photo-ionization-term are compared. The changes in the iondensity appear to be of the order of percents.

1. Inwendige zwaartekrachtgolven

In de atmosfeer geldt de wet van behoud van massa. De atmosfeer is in goede benadering niet viskeus en als er verschijnselen worden beschouwd met een tijdsschaal kort t.o.v. de omwentelingstijd van de aarde geldt een eenvoudige bewegingsvergelijking. Indien wordt verondersteld dat in deze atmosfeer alle veranderingen adiabatisch geschieden, geldt bovendien dat de entropie behouden blijft. In formulevorm samengevat:

$$(1.1) \quad \frac{dp}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$(1.2) \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \vec{g}$$

$$(1.3) \quad \frac{dp}{dt} = c^2 \frac{dp}{dt}$$

waarbij ρ = dichtheid

p = druk

\vec{v} = snelheid

c = geluidssnelheid

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$$

\vec{g} = versnelling zwaartekracht

Stel dat de atmosfeer oorspronkelijk in rust is en dat alleen kleine afwijkingen uit het evenwicht worden beschouwd. De grootheden ρ , p en \vec{v} kunnen dan in een reeks worden ontwikkeld rond de evenwichtswaarden ρ_0 , p_0 en $\vec{v}_0 = 0$.

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \dots$$

$$p = p_0 + p_1 + p_2 + \dots$$

$$\vec{v} = 0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots$$

De nulde orde benadering van de vergelijkingen (1.1), (1.2) en (1.3) levert de hydrostatische vergelijking op

$$(1.4) \quad \frac{dp_0}{dz} = \rho_0 g$$

Voor een isotherme atmosfeer samengesteld uit een ideaal gas volgt uit (1.4) dat

$$(1.5) \quad p_0(z) = p_{00} e^{-\frac{z}{H}}, \quad \rho_0(z) = \rho_{00} e^{-\frac{z}{H}}$$

H is de schaalhoogte en daarvoor gelden de identiteiten

$$H = \frac{kT}{mg} = \frac{c^2}{\gamma g} \quad \text{met } \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Verder is p_{00} de druk en ρ_{00} de dichtheid in het vlak $z = 0$.
De 1e orde benaderingen van de vergelijkingen (1.1), (1.2) en (1.3) zijn

$$(1.6) \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} - v_{1z} \frac{\rho_0}{H} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$(1.7) \quad \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p_1 + \rho_1 \vec{g}$$

$$(1.8) \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} - v_{1z} \frac{\rho_0}{H} = c^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} - c^2 v_{1z} \frac{\rho_0}{H}$$

Inwendige zwaartekrachtgolven worden, in de lineaire benadering, geacht kleine afwijkingen uit het evenwicht te zijn met een ruimte- en tijdafhankelijkheid van de vorm [1]

$$(1.9) \quad \exp i(\omega \cdot t - k_x \cdot x - k_y \cdot y - K_z \cdot z)$$

met

ω = frequentie

k_x en k_y zijn de reële golfgetallen in x- resp. y-richting.

K_z is een complex golfgetal in de z-richting.

De eis van oplosbaarheid van het stelsel lineaire vergelijkingen (1.6), (1.7) en (1.8) leidt tot de vergelijkingen [1]:

$$(1.10) \quad K_z = \frac{i}{2H} + k_z$$

waarbij k_z het reële golfgetal is in de z-richting dat moet voldoen aan

$$(1.11) \quad \omega^4 - \omega^2 c^2 (k_z^2 + k_x^2 + k_y^2) + (\gamma - 1) g^2 k_h^2 - \frac{\gamma^2 g^2 \omega^2}{4c^2} = 0$$

waarbij $k_h^2 = k_x^2 + k_y^2$

Vergelijking (1.11) is de dispersierelatie voor interne zwaarte-krachtgolven. Deze is geldig als de amplitude van de golf klein is en de atmosfeer voldoet aan alle hierboven genoemde onderstellingen. De variaties in de druk, de dichtheid en de snelheid hebben op grond van (1.9) en (1.10) de vorm

$$(1.12) \quad \frac{p_1}{p_0 P} = \frac{\rho_1}{\rho_0 R} = \frac{v_{1x}}{X} = \frac{v_{1y}}{Y} = \frac{v_{1z}}{Z} = A \exp \frac{z}{2H} \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

Uit (1.6), (1.7), (1.8) en (1.12) volgen de polarisatierelaties

$$(1.13) \quad P = \gamma \omega^2 [k_z - i(1 - \gamma/2)g/c^2]$$

$$(1.14) \quad R = \omega^2 k_z + i(\gamma - 1)g (k_x^2 + k_y^2) - i\gamma g \omega^2 / 2c^2$$

$$(1.15) \quad X = \omega k_x c^2 [k_z - i(1 - \gamma/2)g/c^2]$$

$$(1.16) \quad Y = \omega k_y c^2 [k_z - i(1 - \gamma/2)g/c^2]$$

$$(1.17) \quad Z = \omega [\omega^2 - (k_x^2 + k_y^2) c^2]$$

Door (1.11) t/m (1.17) nu wordt de golf bepaald in afhankelijkheid van de parameters γ , c en g . In de berekeningen is echter een restrictie gemaakt. Uit (1.12) volgt namelijk dat de amplitude ongebreideld exponentieel zou groeien. Daar viscositeit en warmtegeleiding sterk toenemen met de hoogte is dit voor grote hoogtes een slechte benadering. Lindzen [2] heeft voor verschillende inwendige zwaartekrachtgolven het amplitude verloop met de hoogte berekend voor een viskeuse atmosfeer. Op grond hiervan is in de berekeningen aangenomen dat de golfamplitude boven 150 km hoogte konstant blijft.

2. De ionendichtheid

In dit hoofdstuk worden uit de continuïteitsvergelijkingen de uitdrukkingen afgeleid voor de 0e en 1e orde benaderingen van de verandering in de ionendichtheid. De continuïteitsvergelijkingen voortvloeiend uit de belangrijkste reacties in de E-laag zijn volgens Keneshea & Macleod [3]

$$(2.1) \quad \frac{\partial O_2^+}{\partial t} + \text{div } O_2^+ \cdot \vec{v}_{O_2^+} = q_{O_2^+} + \beta_1 \cdot O^+ \cdot O_2 + \beta_4 \cdot N_2^+ \cdot O_2 - \alpha_1 \cdot O_2^+ \cdot e$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial NO^+}{\partial t} + \text{div } NO^+ \cdot \vec{v}_{NO^+} = q_{NO^+} + \beta_2 \cdot O^+ \cdot N_2 + \beta_3 \cdot N_2^+ \cdot O - \alpha_2 \cdot NO^+ \cdot e$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial N_2^+}{\partial t} + \text{div } N_2^+ \cdot \vec{v}_{N_2^+} = q_{N_2^+} - \beta_3 \cdot N_2^+ \cdot O - \beta_4 \cdot N_2^+ \cdot O$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial O^+}{\partial t} + \text{div } O^+ \cdot \vec{v}_{O^+} = q_{O^+} - \beta_1 \cdot O^+ \cdot O_2 - \beta_2 \cdot O^+ \cdot N_2$$

Door O_2^+ , NO^+ etc. wordt aangeduid de dichtheid van de O_2^+ ionen resp. NO^+ ionen. De lokale snelheid van bijv. de O^+ ionen wordt aangegeven door \vec{v}_{O^+} . Verder is e de elektronendichtheid en $q_{O_2^+}$ is het aantal geproduceerde O_2^+ ionen per cm^3 per seconde. $\beta_i (i=1, \dots, 4)$ zijn reactiesnelheidscoëfficiënten; $\alpha_i (i=1, 2)$ zijn rekombinatiecoëfficiënten.

De waarden van deze coëfficiënten zijn volgens [3]

Tabel 1

α_1	α_2	β_1	β_2	β_3	β_4	
$2 \cdot 10^{-7} \frac{300}{T}$	$4 \cdot 10^{-7} \frac{300}{T}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-12}$	$2.5 \cdot 10^{-10}$	$5 \cdot 10^{-11}$	$\text{cm}^3 \text{s}^{-1}$

T is de temperatuur van de neutrale atmosfeer in Kelvin.

Door de vergelijkingen (2.1) t/m (2.4) bij elkaar op te tellen, wordt een uitdrukking verkregen voor de totale ionendichtheid m^+ .

$$(2.5) \quad \frac{\partial m^+}{\partial t} + \text{div} \left[O_2^+ \cdot \vec{v}_{O_2^+} + NO^+ \cdot \vec{v}_{NO^+} + N_2^+ \cdot \vec{v}_{N_2^+} + O^+ \cdot \vec{v}_{O^+} \right] =$$

$$= q_{O_2^+} + q_{NO^+} + q_{N_2^+} + q_{O^+} - (\alpha_1 \cdot O_2^+ + \alpha_2 \cdot NO^+) e$$

In de E-laag geldt [3] dat

$$O^+, N_2^+ \ll O_2^+, NO^+$$

Daar \vec{v}_{O^+} , $\vec{v}_{N_2^+}$ en $\text{div } \vec{v}_{O^+}$, $\text{div } \vec{v}_{N_2^+}$ van dezelfde grootte orde zijn als $\vec{v}_{O_2^+}$, \vec{v}_{NO^+} resp. $\text{div } \vec{v}_{O_2^+}$, $\text{div } \vec{v}_{NO^+}$ volgt uit bovenstaande ongelijkheid dat

$$\text{div } O^+ \cdot \vec{v}_{O_2^+}, \text{div } N_2^+ \cdot \vec{v}_{N_2^+} \ll \text{div } O_2^+ \cdot \vec{v}_{O_2^+}, \text{div } NO^+ \cdot \vec{v}_{NO^+}$$

Uit de eerste ongelijkheid volgt in goede benadering

$$m^+ = O_2^+ + NO^+$$

Definieer een effectieve waarde van de rekombinatiecoëfficiënt α_{eff} als

$$\alpha_{\text{eff}} = \frac{\alpha_1 O_2^+ + \alpha_2 NO^+}{m^+}$$

Noem verder de totale ionenproduktie q , dus

$$q = q_{O_2^+} + q_{NO^+} + q_N + q_{O^+}$$

Met deze definities en benaderingen kan (2.5) vereenvoudigd worden tot

$$(2.6) \quad \frac{\partial m^+}{\partial t} + \text{div} \left[O_2^+ \vec{v}_{O_2^+} + NO^+ \vec{v}_{NO^+} \right] = q - \alpha_{\text{eff}} (m^+)^2$$

De elektronendichtheid e is hier, op grond van elektrische neutraliteit, gelijkgesteld aan de totale ionendichtheid m^+ .

De ionensnelheid \vec{v}_{ion} is een functie van de snelheid van de neutrale deeltjes \vec{v} en de verhouding R_i tussen de botsingsfrequentie f_{in} en de gyrofrequentie ω_i . Volgens Macleod [4] heeft deze functie in geval van lokaal evenwicht de vorm

$$(2.7) \quad \vec{v}_{\text{ion}} = \frac{1}{1 + R_i^2} \left[R_i^2 \vec{v} + R_i (\vec{v} \times \vec{t}_b) + (\vec{v} \cdot \vec{t}_b) \vec{t}_b \right]$$

hierbij is \vec{i}_b de eenheidsvektor in de richting van het aardmagneetveld ter plekke.

De massa van het O_2^+ ion is 32 a.m.u. en van het NO^+ ion 29 a.m.u. Daar deze massa's weinig verschillen zullen de gyrofrekwenties ook praktisch gelijk zijn. Als verder de onderstelling wordt gemaakt dat de botsingsfrequentie van een ion met een neutraal deeltje gelijk is voor het O_2^+ ion en het NO^+ ion, kan geconcludeerd worden dat de R_i 's weinig verschillen. Dus volgt uit (2.7)

$$\vec{v}_{ion} = \vec{v}_O + \vec{v}_{NO^+}$$

Formule (2.6) kan nu verder vereenvoudigd worden tot

$$(2.8) \quad \frac{\partial m^+}{\partial t} + \text{div } m^+ \vec{v}_{ion} = q - \alpha_{eff} (m^+)^2$$

Indien slechts kleine afwijkingen uit het evenwicht worden beschouwd kunnen de grootheden ontwikkeld worden rond de evenwichtswaarden.

$$m^+ = m_0^+ + m_1^+ + m_2^+ + \dots$$

$$\vec{v}_i = 0 + \vec{v}_{i1} + \vec{v}_{i2} + \dots$$

$$q = q_0 + q_1 + q_2 + \dots$$

In 0e orde benadering volgt uit (2.8)

$$(2.9) \quad m_0^+ = \sqrt{\frac{q_0}{\alpha_{eff}}}$$

Deze formule bepaalt het ionengehalte in de ongestoorde E-laag. De 1e orde benadering van (2.8) is gelijk aan

$$(2.10) \quad \frac{\partial m^+}{\partial t} + \text{div } \vec{v}_{i1} \cdot m_0^+ = q_1 - 2 \alpha_{eff} m_0^+ m_1^+$$

De onderstelling dat de afwijkingen uit het evenwicht worden veroorzaakt door interne zwaartekrachtgolven impliceert een tijdsafhankelijkheid voor m^+ van de vorm $\exp(i\omega t)$. Daarmee wordt (2.10)

$$(2.11) \quad m_1^+(x,y,z) = \frac{q_1(x,y,z) - \text{div } m_0^+(z) \vec{v}_{i1}(x,y,z)}{i\omega + 2 \alpha_{eff} m_0^+(z)}$$

3. De ionenproduktie

3.1. De ongestoorde E-laag

Beschouw de ionenproduktie q in een ionizeerbaar gas met dichtheid n_i . Indien deze ionizatie wordt veroorzaakt door monochromatische straling met intensiteit I , wordt deze produktie gegeven door de formule

$$(3.1) \quad q = \epsilon \sigma n_i I$$

In (3.1) is ϵ de ionizatie-coëfficiënt en σ de werkzame moleculaire doorsnede van het gas voor deze monochromatische straling. De stralingsintensiteit I wordt berekend uit

$$(3.2) \quad dI = -\sigma n I ds$$

Hierbij wordt ds genomen langs de richting van de invallende straling.

Onderstel dat de dichtheid n_i van het ionizeerbare gas enkel van de hoogte afhankelijk is en wel op de volgende wijze

$$n_i(z) = n_0 e^{-\frac{z}{H_i}}$$

De schaalhoogte van het gas wordt hier aangeduid door H_i . Met deze gegeven z -afhankelijkheid van n_i kan (3.2) geïntegreerd worden en het resultaat is

$$(3.3) \quad I = I_\infty \exp \left[-\sigma n_0 H_i e^{-\frac{z}{H_i}} \sec \chi \right]$$

De zenithhoek van de zon wordt aangegeven door χ . De intensiteit I_∞ wordt de straling geacht te hebben bij het binnentreden in de atmosfeer.

Substitutie van (3.3) in (3.1) levert

$$(3.4) \quad q(z, \chi) = \epsilon \sigma n_0 I_\infty \exp \left[-\frac{z}{H_i} - \sigma n_0 H_i e^{-\frac{z}{H_i}} \sec \chi \right]$$

De ionenproduktie $q(z, \chi)$ is maximaal bij vaste χ als $\frac{dq}{dz} = 0$. Laat de hoogte waarbij dit maximum zich instelt, aangeduid worden door $z_m(\chi)$, en de bijbehorende produktie door $q_m(\chi)$.

Stel $q_0 = q_m(\chi=0) = \frac{\epsilon I_\infty}{eH_i}$

en

$$z_0 = z_m(\chi=0) = H_i \ln \sigma_0 H_i$$

Met behulp van deze definities kunnen $q_m(\chi)$ en $z_m(\chi)$ worden geschreven als

$$(3.7) \quad q_m(\chi) = q_0 \cos \chi$$

$$(3.8) \quad z_m(\chi) = z_0 + H_i \ln \sec \chi$$

Formule (3.4) kan nu vereenvoudigd worden tot

$$(3.9) \quad q(z, \chi) = q_m(\chi) \exp \left[1 - (z - z_m(\chi)) / H_i - \exp(-(z - z_m(\chi))/H_i) \right]$$

Dit is de uitdrukking voor de ionenproduktie in de Chapman-benadering. Ondersteld wordt dat de produktie in de ongestoorde E-laag van deze vorm is.

3.2. De gestoorde E-laag

Indien de E-laag verstoord wordt door een zwaartekrachtgolf, wordt de dichtheid van het ionizeerbare gas n_i een funktie van plaats en tijd. Dit houdt in dat de ionenproduktie zal veranderen.

Definieer de optische diepte τ door

$$\tau(x, y, z, t) = \int_z^\infty n_i(x, y, z, t) ds$$

waarbij de integratie geschiedt langs de richting van de invallende zonnestraling. Uit (3.2) volgt nu dat de intensiteit I kan worden geschreven als

$$(3.10) \quad I(x, y, z, t) = I_\infty e^{-\tau(x, y, z, t)}$$

Formule (3.1) voor de ionenproduktie wordt

$$(3.11) \quad q(x, y, z, t) = \epsilon \sigma n_i(x, y, z, t) I_\infty e^{-\tau(x, y, z, t)}$$

De storing door de golf wordt klein verondersteld, en ontwikkeling naar deze kleine storing levert

$$n_i(x,y,z,t) = n_i^0(z) + n_i^1(x,y,z,t) + \dots$$

$$q(x,y,z,t) = q^0(z) + q^1(x,y,z,t) + \dots$$

$$\tau(x,y,z,t) = \tau^0(z) + \tau^1(x,y,z,t) + \dots$$

De geïnduceerde verandering in de dichtheid van het ionizeerbare gas is, als de kompositie konstant is, van de vorm

$$n_i^1(x,y,z,t) = n_i^0(z) \cdot \frac{\rho_1(x,y,z,t)}{\rho_0(z)}$$

De 0e orde benadering van (3.11) levert weer (3.9).

De 1e orde benadering heeft de vorm

$$(3.12) \quad q^1(x,y,z,t) = q^0(z) \left[e^{-\tau^1(x,y,z,t)} - 1 + \frac{n_i^1(x,y,z,t)}{n_i^0(z)} \right]$$

De 1e orde benadering van de optische diepte is

$$\tau^1 = \sigma \int_z^\infty n_i^1 ds$$

hetgeen met behulp van (1.12) kan worden geschreven als

$$(3.13) \quad \tau^1(x,y,z,t) = \sigma n_i^0(o) \text{AR} \int_z^\infty e^{z(\frac{1}{2H} - \frac{1}{H_i}) + i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} ds$$

De hoogte waarboven de amplitude konstant is wordt b gesteld.

De existentie van deze b is geargumenteerd aan het einde van hoofdstuk 1. De uitdrukking voor de 1e orde korrektie van de optische diepte (3.13) kan worden gesplitst in

$$(3.14) \quad \tau^1(x,y,z,t) = n_i^0(o) \text{AR} \left[\int_z^\infty e^{z(\frac{1}{2H} - \frac{1}{H_i}) + i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} ds + e^{b(\frac{1}{2H})} \int_z^\infty e^{\frac{z}{H_i} + i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} ds \right]$$

Definieer $\vec{1}_\chi$ als de eenheidsvektor in de richting van de zonne-straling. Dan kan \vec{s} geparametriseerd worden als $\vec{s} = a \vec{1}_\chi$ en de lijnintegraal (3.14) kan worden berekend. Het resultaat is

$$(3.15) \quad \tau^1(x,y,z,t) = \sigma \ n_i^o(o) \ AR \ e^{b(\frac{1}{2H} - \frac{1}{H_i}) + i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - (\vec{k} \cdot \vec{1}_\chi)(b-z) \sec \chi)} \cdot \left[\frac{1}{(\frac{1}{2H} - \frac{1}{H_i}) \cos \chi - i(\vec{k} \cdot \vec{1}_\chi)} + \frac{1}{\frac{1}{H_i} \cdot \cos \chi + i(\vec{k} \cdot \vec{1}_\chi)} + \frac{e^{(z-b)(\frac{1}{2H} - \frac{1}{H_i}) + i(\vec{k} \cdot \vec{1}_\chi)(b-z) \sec \chi}}{(\frac{1}{2H} - \frac{1}{H_i}) \cos \chi - i(\vec{k} \cdot \vec{1}_\chi)} \right]$$

Deze formule kan met behulp van eerder gegeven definities ook worden geschreven als

$$(3.16) \quad \tau^1(x,y,z,t) = \frac{\rho^1(x,y,z,t)}{\rho_o(z)} \cdot \exp \left\{ \frac{z_m - b}{H_i} + \frac{b-z}{2H} - i(\vec{k} \cdot \vec{1}_\chi)(b-z) \sec \chi \right\} \cdot \left[\frac{1 - e^{(z-b)(\frac{1}{2H} - \frac{1}{H_i}) + i(\vec{k} \cdot \vec{1}_\chi)(b-z) \sec \chi}}{\frac{H_i}{2H} - 1 - i(\vec{k} \cdot \vec{1}_\chi) H_i \sec \chi} + \frac{1}{1 + i(\vec{k} \cdot \vec{1}_\chi) H_i \sec \chi} \right]$$

Als de dissipatie wordt verwaarloosd, dat wil zeggen, als de limiet wordt genomen voor $b \rightarrow \infty$, gaat deze formule voor de 1e orde correctie van de optische diepte over in die van Hooke [4]

$$(3.17) \quad \tau^1(x,y,z,t) = \frac{\rho^1(x,y,z,t)}{\rho_o(z)} \frac{e^{(z_m - z) / H_i}}{1 - \frac{H_i}{2H} + i(\vec{k} \cdot \vec{1}_\chi) H_i \sec \chi}$$

Deze limiet bestaat slechts als $H_i < 2H$ en hieraan wordt, uitgezonderd in pathologische atmosferen, voldaan.

4. De transportterm

4.1. De gradiënt in de ionendichtheid

De uitdrukking voor de gestoorde ionendichtheid bevat een transportterm die gesplitst kan worden:

$$(4.1) \quad \text{div } m_o^+ \vec{v}_i = \vec{v}_i \cdot \text{grad } m_o^+ + m_o^+ \text{div } \vec{v}_i$$

De eerste term in het rechterlid geeft de bijdrage van de gradiënt in de ongestoorde ionendichtheid. Daar deze dichtheid enkel van de hoogte afhangt, heeft de gradiënt alleen een z component ter grootte

$$(4.2) \quad \frac{dm_o^+(z)}{dz} = \frac{1}{2 \sqrt{q_o(z)} \alpha_{\text{eff}}} \frac{dq_o}{dz}$$

De gradiënt in de ongestoorde ionenproduktie kan met behulp van (3.1) worden geschreven als

$$\frac{dq_o}{dz} = \epsilon \sigma I(z) \frac{dn_i^o}{dz} + \epsilon \sigma n_i^o \frac{dI}{dz}$$

Deze formule gaat na substitutie van resultaten uit hoofdstuk 3 over in

$$(4.3) \quad \frac{dq_o}{dz} = \frac{q_o(z)}{H_i} (e^{(z_m - z) / H_i} - 1)$$

De formule (4.3) ingevuld in (4.2) levert

$$(4.4) \quad \frac{dm_o^+(z)}{dz} = m_o^+(z) \left[\frac{e^{(z_m - z) / H_i} - 1}{2H_i} \right]$$

4.2. De divergentie van de ionensnelheid

De ionensnelheid \vec{v}_i is volgens hoofdstuk 2, formule (2.7), gelijk aan

$$\vec{v}_i = \frac{R_i^2}{1+R_i^2} \vec{v} + \frac{R_i}{1+R_i^2} \vec{v} \times \vec{t}_b + \frac{1}{1+R_i^2} (\vec{v} \cdot \vec{t}_b) \vec{t}_b$$

De grootheid R_i was gedefinieerd als $\frac{f_{in}}{\omega_i}$.
 De botsingsfrequentie f_{in} tussen de ionen en de neutrale deeltjes kan volgens Chapman 6 worden geschreven als

$$(4.5) \quad f_{in} = 2.6 \cdot 10^{-5} n M^{-\frac{1}{2}}, \text{ waarbij } n \text{ de dichtheid is van de neutrale deeltjes.}$$

Het gedrag van R_i met de hoogte zal op grond van (4.5) bij benadering worden bepaald door de z-afhankelijkheid van n dus

$$R_i = p e^{\frac{120 - z}{H}}$$

Volgens Rishbeth [4] kan voor de waarde van p voor gematigde breedte voor de zomer 25 genomen worden en voor de winter 14. In tabel 2 zijn de waarden van

$$\rho_1 = \frac{R_i^2}{1+R_i^2}, \quad \rho_2 = \frac{R_i}{1+R_i^2}, \quad \rho_3 = \frac{1}{1+R_i^2} \quad \text{uitgezet als}$$

functie van de hoogte

tabel 2

hoogte (km)	zomer			winter		
	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3
100	1	10^{-3}	$3 \cdot 10^{-5}$	1	10^{-2}	10^{-4}
110	1	10^{-2}	$2 \cdot 10^{-4}$	1	$3 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-4}$
120	1	$4 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-4}$	1	$7 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$
130	0.99	0.1	$1 \cdot 10^{-2}$	0.96	0.19	0.04
140	0.92	0.27	0.08	0.78	0.41	0.2
150	0.39	0.49	0.61	0.12	0.31	0.89
160	0.19	0.39	0.81	0.07	0.25	0.93

Uit deze tabel blijkt dat beneden 130 km hoogte de ionensnelheid v_i goed benaderd kan worden door de snelheid van de neutrale atmosfeer v. Dit houdt in dat voor de gestoorde E-laag de divergentie van de ionensnelheid kan worden geschreven als (zie 1.12)

$$(4.6) \quad \text{div } \vec{v}_i = \text{div } \vec{v} = -i(\vec{k} \cdot \vec{v}) + \frac{v_z}{2H}$$

De 1e orde bijdrage in de continuïteitsvergelijking van de transportterm wordt daarmee

$$(4.7) \quad \operatorname{div} m_0^+ \cdot v_i = m_0^+(z) v_z \left(\frac{e}{H_i} + \frac{1}{2H} - \frac{1}{H_i} \right) - i m_0^+(z) (\vec{k} \cdot \vec{v})$$

5. De ionendichtheid

De verandering in de ionendichtheid is zoals in (2.11) beschreven van de vorm

$$(5.1) \quad m_1^+(x,y,z) = \frac{q_1(x,y,z) - \text{div } m_o^+(z) \vec{v}_{i1}(x,y,z)}{i\omega + 2\alpha_{\text{eff}} m_o^+(z)}$$

De ionenproduktie q_1 is nader gespecificeerd in formule (3.12)

$$(5.2) \quad q'(x,y,z) = q^o(z) \left| - e^{-\tau'(x,y,z)} - 1 + \frac{n_i'(x,y,z)}{n_i^o(z)} \right|$$

De verandering in de ionendichtheid m^+ kan verdeeld worden in een bijdrage door transport en door ionizatie. Daartoe kan formule (5.1) gesplitst worden in

$$(5.3) \quad (\Delta m_1^+)_{\text{transport}} = \frac{\text{div } m_o^+ \vec{v}_{i1}}{i\omega + 2m_o^+ \cdot \alpha_{\text{eff}}}$$

en

$$(5.4) \quad (\Delta m_i^+)_{\text{ionizatie}} = \frac{q_1}{i\omega + 2m_o^+ \cdot \alpha_{\text{eff}}}$$

Deze ionizatie bijdrage valt weer uiteen in twee stukken. Uit (5.2) volgt namelijk dat (5.4) te schrijven is als de som van

$$(5.5) \quad q_o(z) \frac{n_i'(x,y,z)}{n_o(z)} \quad \frac{1}{i\omega + 2m_o^+ \cdot \alpha_{\text{eff}}}$$

en

$$(5.6) \quad q_0(z) (e^{-\tau'(x,y,z)} - 1) \frac{1}{i\omega + 2m_0^* \cdot \alpha_{eff}}$$

De eerste uitdrukking geeft de bijdrage weer van de ionizatie van de gewijzigde hoeveelheid ionizeerbare atomen en de tweede term de gevolgen van de veranderde optische diepte.

6. Resultaten

De eerste stap in de berekening van het effect van een zwaarte-krachtgolf op de ionendichtheid met behulp van storingstheorie is de bepaling van het ongestoorde profiel. Hiervoor werd het Chapman-model gekozen.

In grafiek 1 is ter illustratie dit model uitgezet voor zenithhoek $\chi = 0^\circ$ en voor een hoogte van de maximum ionendichtheid van 120 km. Grafiek 2 toont het profiel van de door een zwaarte-krachtgolf verstoorde E-laag. De golf wordt verondersteld een periode van 30 minuten te hebben en een horizontale golflengte van 50 km. Uit de dispersierelatie volgt dan, in de onderstelling dat de geluidsnelheid $c = 300$ m/s en $\gamma = 1,4$, dat de verticale golflengte 11 km is. Verder is aangenomen dat de golf op 120 km hoogte een oscillerende wind veroorzaakt met een maximale snelheid van 17 m/s horizontaal en dus 3,7 m/s vertikaal. Uit grafiek 2 blijkt dat de grootste deformaties van de iso-ionen-lijnen optreden ter hoogte van het maximum van de laag, en maximaal 10% bedragen.

De bijdragen aan de verandering in ionendichtheid kunnen worden verdeeld in de bijdrage van de transportterm (5.3) en die van de ionizatieterm (5.4).

De grootte van deze termen zijn berekend met dezelfde golfparameters die eerder zijn gebruikt, maar nu voor 52° N tijdens equinox 's middags om 12 uur (dit wil zeggen voor $\chi = 28,5^\circ$) en voor een golf die zich voortplant in oostelijke richting. In grafiek 3 zijn de resultaten voor de afzonderlijke bijdragen en de totale verandering in de ionendichtheid uitgezet als functie van de hoogte. Uit deze grafiek blijkt dat rond het maximum van de laag de ionizatieterm domineert over de transportterm.

In grafiek 4 staan deze waarden nog eens uitgezet maar nu in procenten van de ongestoorde ionendichtheid.

De ionizatieterm is in hoofdstuk 5 gesplitst in een bijdrage door ionisatie van de gewijzigde hoeveelheid ionizeerbare atomen (5.5) en de bijdrage van de gewijzigde optische diepte (5.6). In grafiek 5 zijn de maximale absolute waarden van (5.5) en (5.6) getekend als functie van de hoogte. De eerste term blijkt, behoudens beneden de 115 km hoogte, groter te zijn dan de tweede term. Omdat de verandering in optische diepte een functie is van de hoek tussen het golffront en de invallende zonnestraling zijn de bijdragen ook bepaald voor een golf die zich naar het noorden voortplant. De resultaten zijn uitgezet in grafiek 6 en het effect van de gewijzigde optische diepte blijkt nu geringer te zijn.

7. Conclusie

Voor een bepaalde zwaartekrachtgolf werd de invloed op de ionendichtheid in een Chapman-model van de E-laag berekend. De geïnduceerde veranderingen in de ionendichtheid blijken in de orde van procenten te liggen, terwijl de grootste verticale verplaatsing van de iso-ionen lijn enkele kilometers blijkt te zijn.

Nadere beschouwing van de afzonderlijke bijdragen leert dat de ionizatieterm rond het maximum van de laag groter is dan de transport-term. Het effect van de ionizatie van de door de dichtheidsvariatie veroorzaakte gewijzigde hoeveelheid ionizeerbare molekulen blijkt, behoudens in het onderste gedeelte van de laag, groter dan de bijdrage geleverd door de verandering in optische diepte.

Dit model zou meer werkelijkheidsgetrouw gemaakt kunnen worden door o.a. een achtergrond met hoogte-afhankelijke winden. Ook zou de responsie op een spectrum van golven beschouwd moeten worden.

Op grond van dit eenvoudige model is te berekenen welk interferentiepatroon op aarde gevormd wordt door een elektromagnetische golf die aan dit gestoorde profiel wordt gereflecteerd. Analyse van dit patroon zal leren of detectie van interne zwaartekrachtgolven mogelijk is en of driftwaarnemingen hiervoor geschikt zijn.

Literatuur

1. C.O. Hines, *Can. Journ. of Physics* 38 (1960), 1441.
2. R.S. Lindzen, *Lectures in Applied Mathematics* 14 (1970), 357.
3. T.J. Keneshea & M.A. Macleod, *J. Atm. Sci.* 27 (1970), 981.
4. M.A. Macleod, *J. Atm. Sci* 23 (1966), 96.
5. W.H. Hooke, *J. Geophys. Res.* 75 (1970), 7229.
6. S. Chapman, *Nuevo Cimento* 4 (1956), 1385-1412.
7. H. Rishbeth & O. Garriott, *Introduction to Ionospheric Physics* (1969).

MODEL E-LAAG

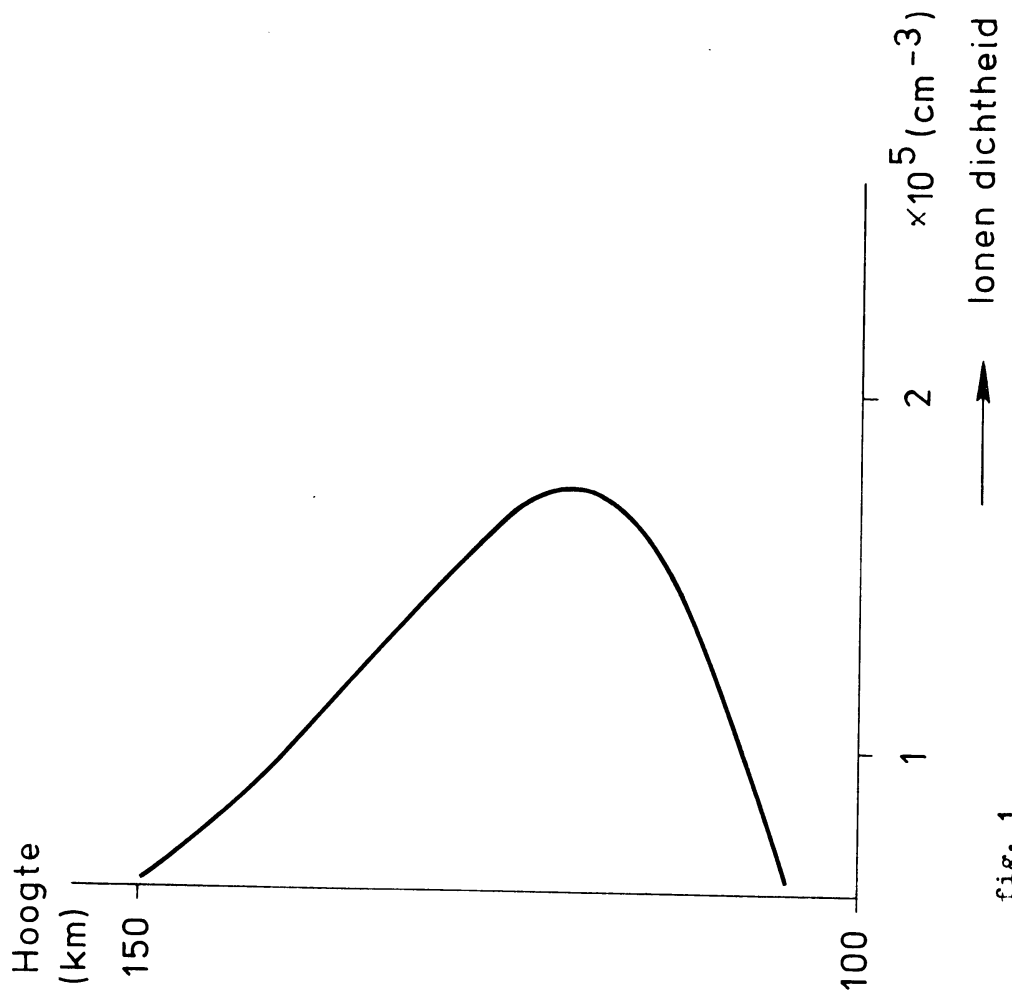


fig. 1

$\alpha = 10^{-7}$
 $q_0 = 3000 \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$
 $z_m = 120 \text{ km}$
 $\chi = 0^\circ$
 $H_j = 10 \text{ km}$

PROFIEL GESTOORDE E - LAAG

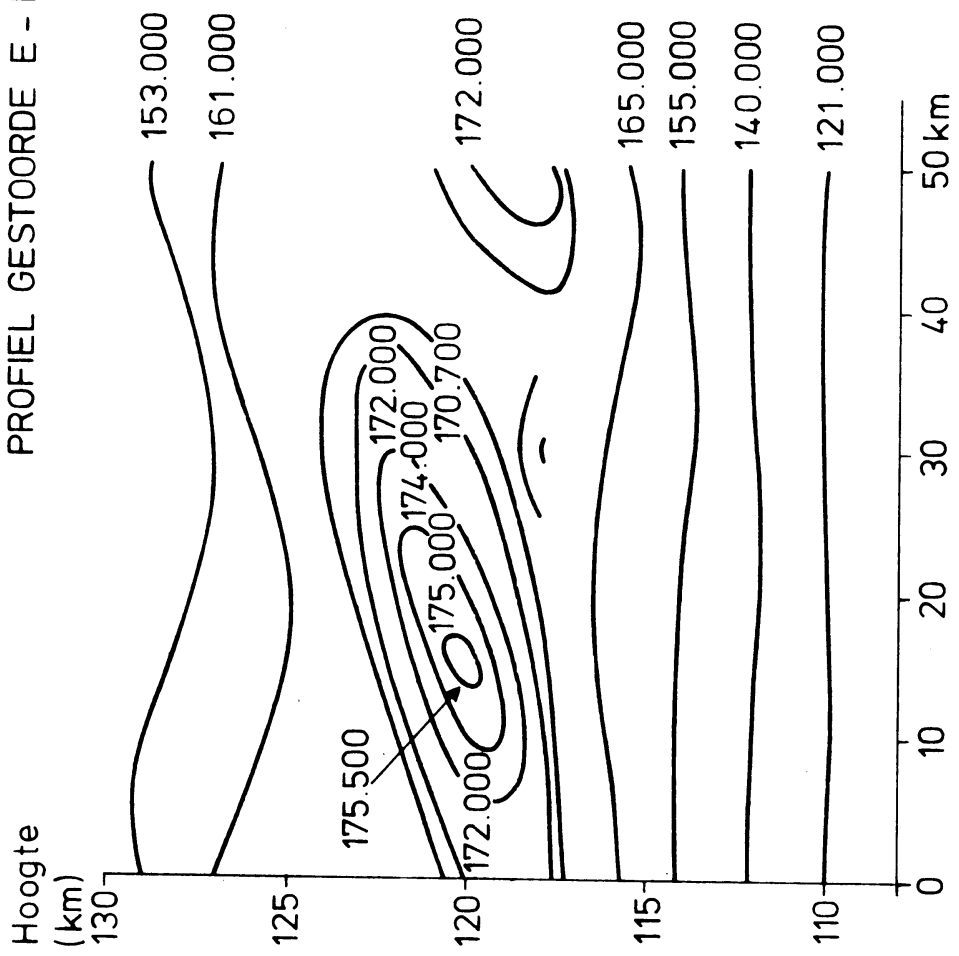


fig. 2

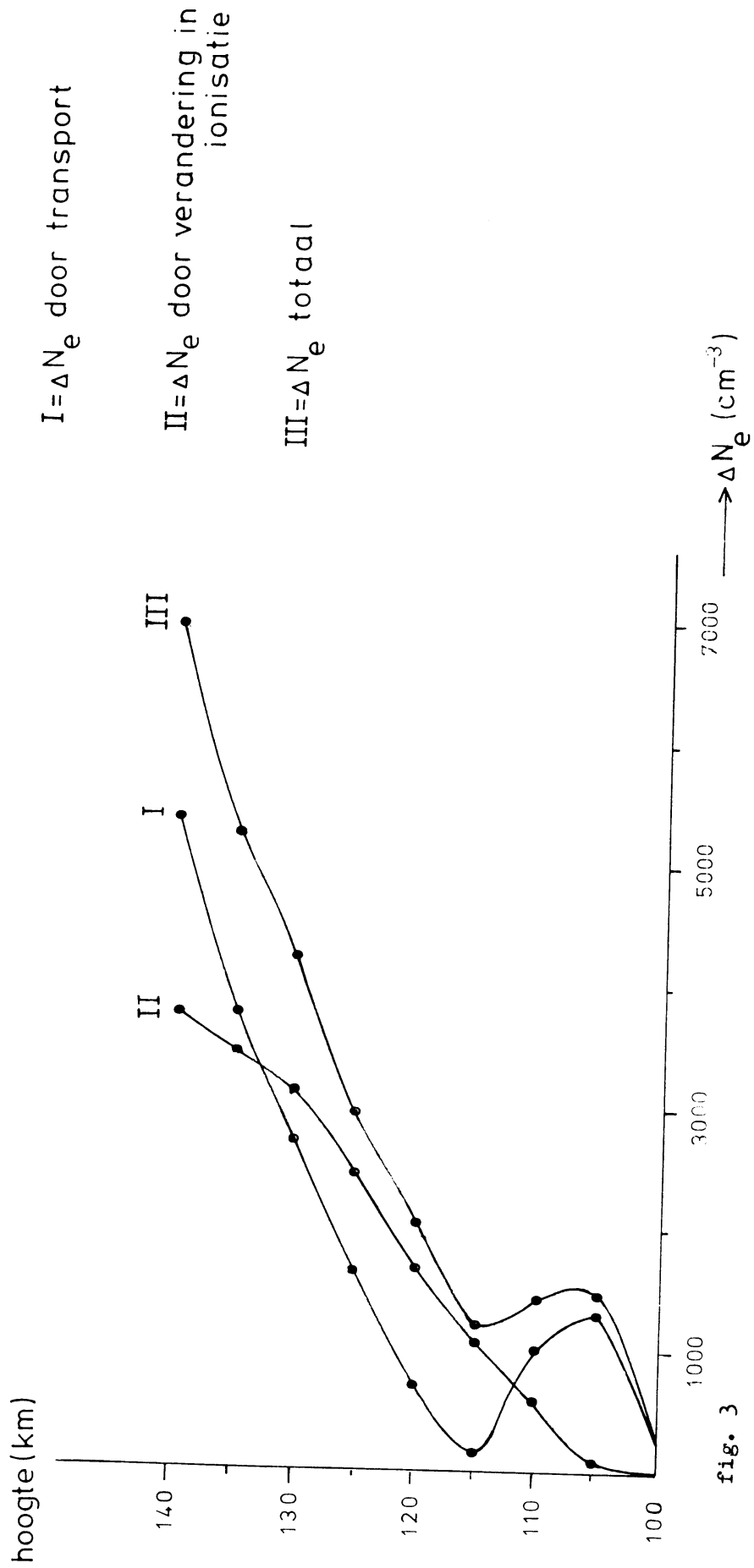


fig. 3

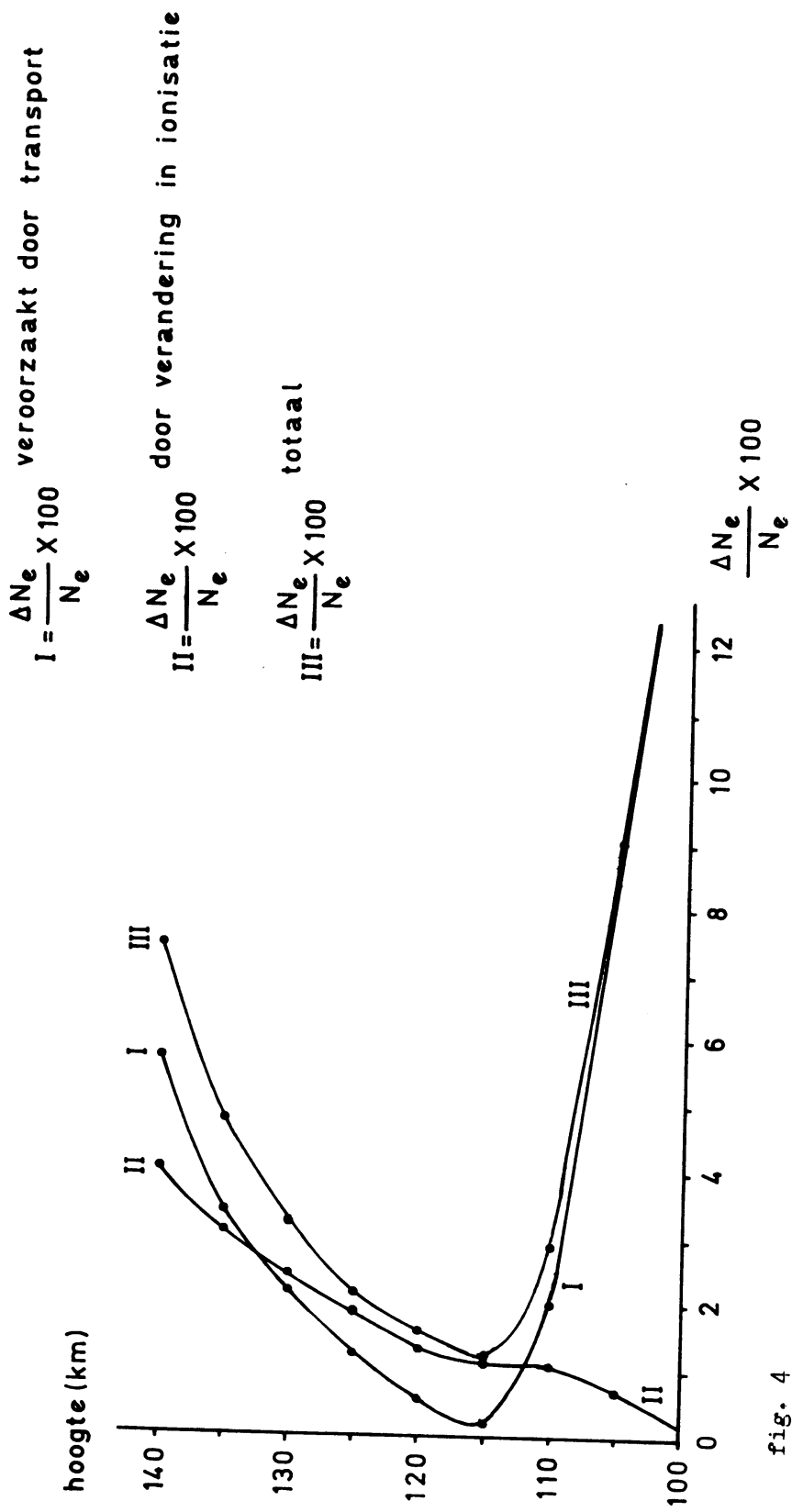


fig. 4

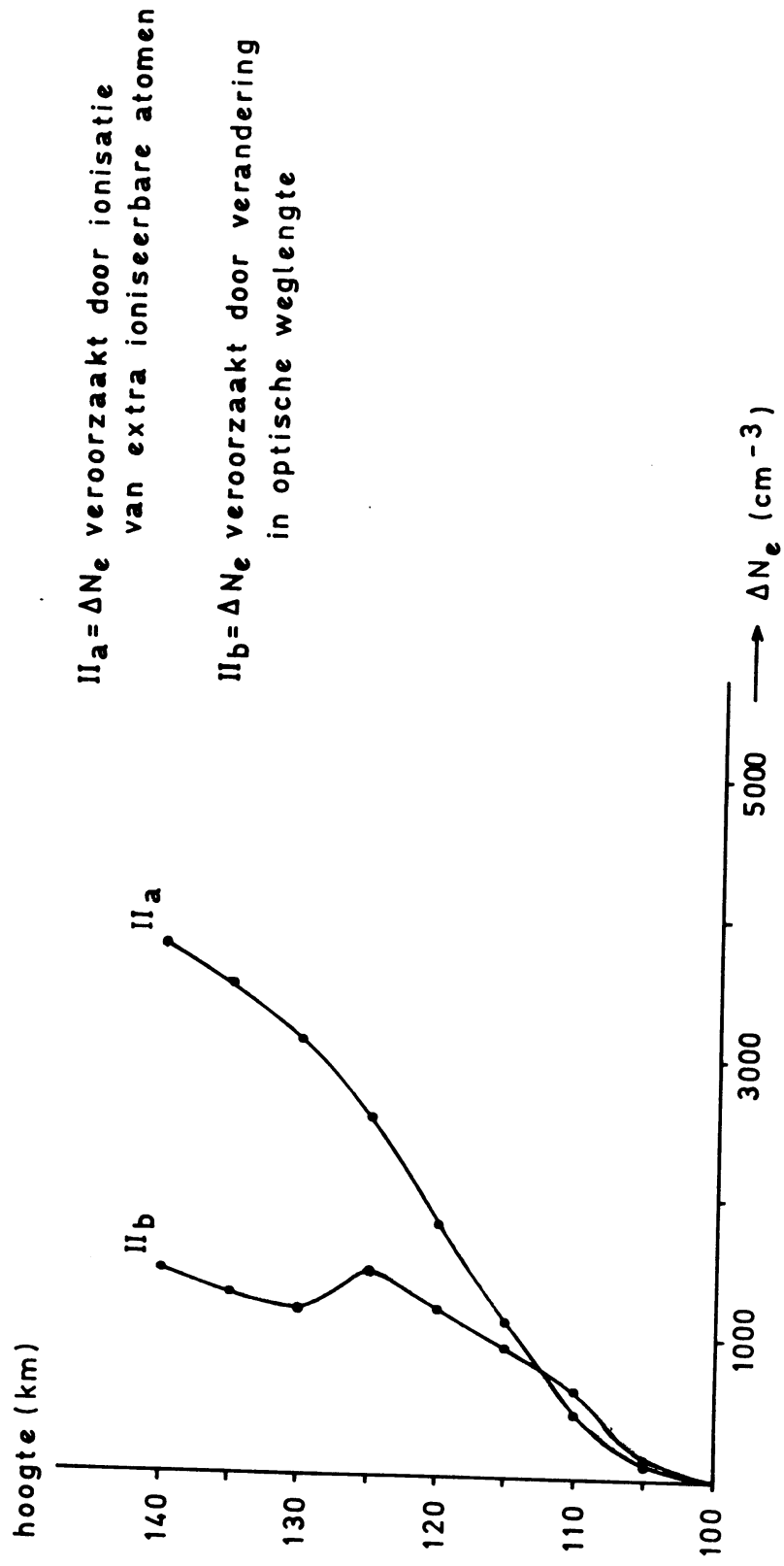


fig. 5

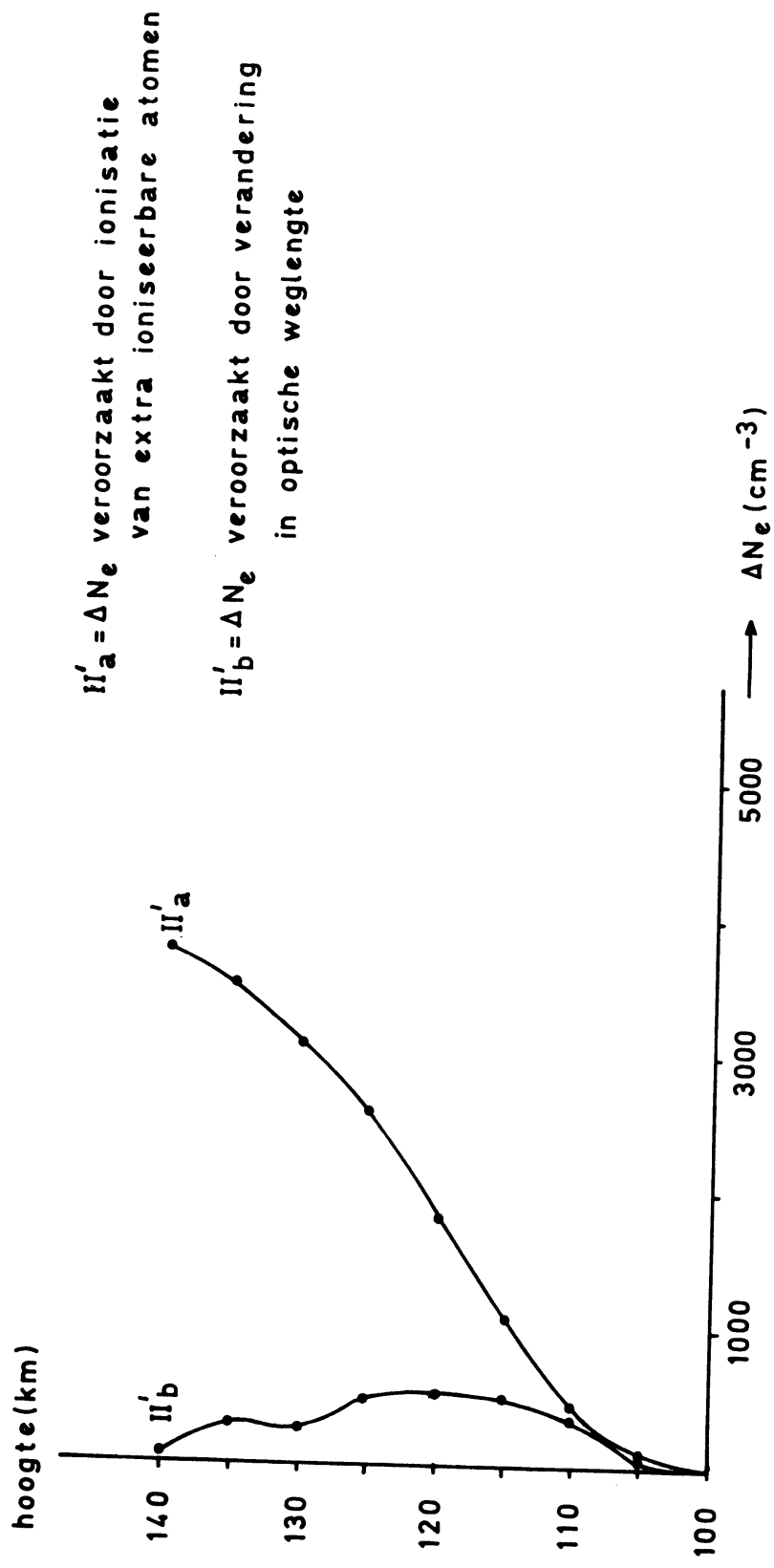


fig. 6