

KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT

De Bilt

WETENSCHAPPELIJK RAPPORT

W.R. 77-7

S.J. Bijlsma

Iteratieve methoden voor het oplossen
van stelsels gekoppelde elliptische
partiele differentiaalvergelijkingen.

De Bilt, 1977

Publikationsnummer: K.N.M.I. W.R. 77-7 (MBW)

U.D.C.: 517.9

Summary.

In this report systems of coupled Helmholtz equations are solved using point and line iterative (SOR) methods with different orderings. A comparison between these methods is made by giving the number of iterations needed to reduce a given initial error by different reduction factors.

1. Inleiding.

In dit rapport behandelen we iteratieve methoden voor het oplossen van stelsels elliptische differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$-\nabla^2 I \vec{\psi} + A \vec{\psi} = \vec{k}, \quad (1.1)$$

waar ∇^2 de 2-dimensionale Laplace operator is, $\vec{\psi}^T = (\psi_1(x,y), \dots, \psi_s(x,y))$ en $\vec{k}^T = (k_1(x,y), \dots, k_s(x,y))$ s -dimensionale vectoren, I de $(s \times s)$ -eenheidsmatrix en A een willekeurige reële $(s \times s)$ -matrix (als voorbeeld, zie hoofdstuk 4)

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(x,y) & \dots & a_{1,s}(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s,1}(x,y) & \dots & a_{s,s}(x,y) \end{pmatrix}.$$

De functies $\vec{\psi}$ moeten voorgeschreven waarden aannemen op een gegeven rand. We onderscheiden de volgende speciale gevallen.

1. De matrix elementen van A zijn constanten. Bovendien veronderstellen we dat matrix A symmetrisch is en strikt diagonaal dominant, met positieve diagonaalelementen. In dit geval kunnen we stelsel (1.1) ontbinden in s Helmholtz vergelijkingen. Schrijven we namelijk

$$\vec{\psi} = T \vec{\phi},$$

waar de kolommen van de $(s \times s)$ -matrix T eigenvectoren zijn van A dan vinden we

$$-\nabla^2 I \vec{\phi} + \Lambda \vec{\phi} = T^{-1} \vec{k},$$

waar $\Lambda = T^{-1} A T$ een diagonaal matrix is, waarvan de diagonaalelementen reële positieve eigenwaarden zijn van A .

2. De matrix elementen $a_{i,j}(x,y)$ van A kunnen geschreven worden als

$$a_{i,j}(x,y) = c_{i,j} m(x,y), \quad (1.2)$$

waar $c_{i,j}$ constanten zijn. Dit geval kan analoog aan het vorige worden behandeld, door de factor $m(x,y)$ uit te delen.

In het volgende behandelen we methoden om vergelijkingen van de algemene vorm (1.1) op te lossen. We zullen deze methoden toepassen op vergelijkingen, waarvan de matrix elementen voldoen aan (1.2). Bij de numerieke experimenten, waarbij we systeem (1.1) oplossen op een achthoek, beperken we ons voor de eenvoudigheid tot de gevallen $s = 2$ en $s = 3$. Voor een verklaring of definitie van de hierna gebezigde termen of begrippen wordt men verwezen naar Varga (1962).

2. Discretisatie van vgl. (1.1) en toepassing van punt-iteratieve methoden.

We overdekken het (x,y) -vlak met een rechthoekig rooster (x_p, y_q) , roosterafstand d , zodanig dat de rand door roosterpunten gaat. Door toepassing van een 5-punts differentie formule gaat vgl. (1.1) over in

$$A(p, q) \begin{pmatrix} \psi_1(p, q) \\ \vdots \\ \psi_s(p, q) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ell_1(p, q) \\ \vdots \\ \ell_s(p, q) \end{pmatrix} = d^2 \begin{pmatrix} k_1(p, q) \\ \vdots \\ k_s(p, q) \end{pmatrix},$$

waar

$$A(p, q) = \begin{pmatrix} 4 + a_{1,1}(p, q)d^2 & \dots & a_{1,s}(p, q)d^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s,1}(p, q)d^2 & \dots & 4 + a_{s,s}(p, q)d^2 \end{pmatrix},$$

en

$$\ell_j(p, q) = \psi_j(p, q-1) + \psi_j(p-1, q) + \psi_j(p, q+1) + \psi_j(p+1, q).$$

Nummeren we de inwendige roosterpunten van opeenvolgende rijen in de leesvolgorde dan vinden we in het i -de punt

$$A(i) \begin{pmatrix} \psi_1(i) \\ \vdots \\ \psi_s(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1(i) \\ \vdots \\ \ell_s(i) \end{pmatrix} + d^2 \begin{pmatrix} k_1(i) \\ \vdots \\ k_s(i) \end{pmatrix}, \quad i=1, \dots, n \quad (2.1)$$

met

$$\ell_j(i) = \psi_j(i+1) + \psi_j(i-1) + \psi_j(i_0) + \psi_j(i_b),$$

waar i_0 en i_1 de indices van de punten $(p,q-1)$ en $(p,q+1)$ zijn.
De waarden in de randpunten zijn opgenomen in de inhomogene term.
In matrix vorm luidt (2.1)

$$A\psi = B\psi + k, \tag{2.2}$$

waar

$$A = \begin{pmatrix} A(1) & & & 0 \\ & A(2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A(n) \end{pmatrix},$$
$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(1) \\ \vdots \\ \psi_s(1) \\ \psi_1(2) \\ \vdots \\ \psi_s(2) \\ \vdots \\ \psi_1(n) \\ \vdots \\ \psi_s(n) \end{pmatrix}, \quad k = d^2 \begin{pmatrix} k_1(1) \\ \vdots \\ k_s(1) \\ k_1(2) \\ \vdots \\ k_s(2) \\ \vdots \\ k_1(n) \\ \vdots \\ k_s(n) \end{pmatrix},$$

en B een $(s \times s \times n)$ matrix is met ten hoogste 4 eenheidselementen per rij.
Bestaat A^{-1} dan schrijven we (2.2) als

$$\psi = A^{-1}B\psi + A^{-1}k. \tag{2.3}$$

Is de matrix $A^{-1}B$ convergent, d.w.z. $\rho(A^{-1}B) < 1$, (ρ = spectrale straal) dan kunnen we daar $A^{-1}B$ zwak cyclisch is van index 2 de punt SOR methode toepassen op (2.3). Het blijkt in de praktijk voordelig om de roosterpunten te ordenen volgens \mathcal{C}_T -ordering (Young, 1954), m.a.w. ordenen we de roosterpunten volgens de witte en zwarte velden van een schaakbord en nummeren we eerst de witte en vervolgens de zwarte roosterpunten zodat

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_w \\ \psi_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (A^{-1}k)_w \\ (A^{-1}k)_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_w \\ q_z \end{pmatrix} = q,$$

dan krijgt $A^{-1}B$ de, in het algemeen niet symmetrische vorm

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & U_0 \\ L_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

waar de nulmatrices vierkant zijn. Toepassing van de SOR methode met (2.4) geeft het volgende iteratieproces

$$\begin{aligned} \psi_w^{(m+1)} &= \psi_w^{(m)} + \omega (U_0 \psi_x^{(m)} - \psi_w^{(m)} + q_w), \\ \psi_x^{(m+1)} &= \psi_x^{(m)} + \omega (L_0 \psi_w^{(m+1)} - \psi_x^{(m)} + q_x), \end{aligned} \quad (2.5)$$

of

$$\psi^{(m+1)} = M(\omega) \psi^{(m)} + N(\omega) q.$$

Zijn de eigenwaarden van $A^{-1}B$ uit (2.4) reëel dan is de optimale relaxatieparameter eenduidig bepaald door (Varga, 1962, p. 110)

$$\omega = \omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(A^{-1}B)}} \quad , \quad \rho(M(\omega_0)) = \omega_0 - 1. \quad (2.6)$$

Is matrix (2.4) bovendien symmetrisch dan wordt een versnelling van het iteratieproces verkregen door de eerste iteratie $\omega=1$ te nemen (Sheldon, 1959). Bovendien kunnen we de cyclische Chebyshev semi-iteratieve methode op (2.5) toepassen (Varga, 1962, p. 150). We gaan hier niet verder in op de punt-iteratieve methoden. Voor praktische toepassingen zie hoofdstuk 4. Strikt genomen is de hierboven besproken methode een blok-iteratieve methode, waarbij de vector iteraten (ψ_1, \dots, ψ_s) simultaan in één punt worden uitgerekend. Ter onderscheiding van de, in het volgende hoofdstuk behandelde methode handhaven we echter de aanduiding punt-iteratieve methode.

3. Blok-iteratieve methoden.

In het voorgaande inverteerden we steeds in een punt i een matrix $A(i)$ (zie (2.3) en (2.1)) zodat we de nieuwe waarden van $(\psi_1(i), \dots, \psi_s(i))$ tegelijk in één punt uitrekenden. We geven nu een methode aan volgens welke we nieuwe waarden voor de vector iteraten $(\psi_1(i), \dots, \psi_s(i))$ simultaan langs een roosterlijn uitrekenen. We gaan daartoe uit van (2.2). We kunnen (2.2) schrijven als de matrix vergelijking

$$H\psi = k, \tag{3.1}$$

waar $H = A - B$. Door middel van (2.2) werd een matrix splitsing van H toegepast en vervolgens de vergelijking

$$A\psi = B\psi + k$$

iteratief opgelost. We zullen in onderstaande laten zien dat er, onder bepaalde voorwaarden, geschiktere matrix splitsingen van H mogelijk zijn, aanleiding gevend tot iteratieprocessen, die sneller convergeren dan (2.2). We definiëren daartoe het begrip reguliere splitsing van een matrix (Varga, 1960, p. 122).

Definitie: $H = A - B$ is een reguliere splitsing van H dan en slechts dan als $A^{-1} \geq 0$ en $B \geq 0$. (A^{-1} , B geen nul matrices).

Stelling: Stel dat $H = H_1 - H_2 = H_3 - H_4$ twee reguliere splitsingen van H zijn, met $H^{-1} > 0$. Als $H_4 \geq H_2 \geq 0$ ($H_2, H_4, H_4 - H_2$ geen nul matrices) dan geldt

$$1 > \rho(H_3^{-1}H_4) > \rho(H_1^{-1}H_2) > 0.$$

Opdat $H^{-1} > 0$ is het voldoende dat $H = (h_{i,j})$ de volgende eigenschappen heeft

1. $h_{i,j} \leq 0$ voor alle $i \neq j, 1 \leq i, j \leq sn$.
2. H irreducibel. (3.2)
3. $\sum_{j=1}^{sn} h_{i,j} \geq 0$ voor alle $1 \leq i \leq sn$ met strikte ongelijkheid voor op z'n minst één i .

Is H bovendien symmetrisch, dus positief definit, dan heet H een Stieltjesmatrix. Er zijn echter ook gevallen waarin niet H , maar wel $A^{-1}H = I - A^{-1}B$ aan (3.2) voldoet. Schrijven we

$$B = B_1 + B_2,$$

waar de matrix B_1 de interactie van de punten van een lijn onderling bevat en B_2 de interactie met punten van onder- en bovenliggende lijnen, dan geldt voor beide gevallen (H of $A^{-1}H$ voldoet aan (3.2)) bovenstaande stelling met $H_1 = A - B_1$ of $A^{-1}H_1 = I - A^{-1}B_1$, $H_3 = A$ of $A^{-1}H_3 = I$ etc. zodat

$$\rho((A - B_1)^{-1}B_2) = \rho((I - A^{-1}B_1)^{-1}A^{-1}B_2) < \rho(A^{-1}B). \quad (3.3)$$

We beschouwen weer vgl. (3.1) en splitsen H volgens

$$(A - B_1)\psi = B_2\psi + k. \quad (3.4)$$

Zijn de eigenwaarden van $(A - B_1)^{-1}B_2$ reëel, dan convergeert de blok SOR methode, toegepast op (3.4) (de blok Jacobi matrix van (3.4) is zwak cyclisch van index 2), sneller dan het geval zou zijn met (2.3) volgens (2.6) en (3.3). Voorgaande geldt als H een Stieltjes matrix is (Varga, 1960, p. 127). Ordenen we de rijen volgens σ_j -ordering dan heeft $(A - B_1)^{-1}B_2$ analoog aan (2.4) de vorm

$$(A - B_1)^{-1}B_2 = \begin{pmatrix} 0 & U_1 \\ L_1 & 0 \end{pmatrix},$$

waar de nulmatrices wederom vierkant zijn. In het algemene geval, waar H of $A^{-1}H$ geen Stieltjes matrix is, blijkt het in de praktijk toch zinvol te zijn (3.4) toe te passen, zoals we zullen zien in hoofdstuk 5. We zullen nu enige aandacht besteden aan het construeren en inverteren van de matrix $A_j = A - B_j$ uit (3.4). Schrijven we

$$\begin{pmatrix} \psi_1(r+1) \\ \vdots \\ \psi_s(r+1) \\ \vdots \\ \psi_i(r+r_j) \\ \vdots \\ \psi_s(r+r_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(r_s+1) \\ \psi(r_s+2) \\ \vdots \\ \psi(r_s+r_j) \end{pmatrix} \quad (r = \sum_1^{j-1} r_k),$$

waar r_k het aantal roosterpunten van de k -de rij is, dan heeft de matrix $A_j^{(j)}$ voor de j -de rij de volgende vorm

waar $b_{j,k,j} = c_{j-k,j} = 0$ voor $j=1, \dots, s$ indien $j-k \leq 0$.
Indien matrix **A** symmetrisch is gaat (3.7) over in

$$c_{j,j+l} = -b_{j,j+l} / b_{j,j} \quad , \quad j=1, \dots, n-l \quad . \quad (3.8)$$

Vgl. (3.5) wordt nu opgelost door y te berekenen uit

$$By = k \quad ,$$

en volgens door terugwaartse substitutie x uit

$$Cx = y \quad .$$

4. Numerieke experimenten.

We zullen nu de methoden uit het vorige hoofdstuk toepassen op de, uit het BK-3 en BK-4 model afkomstige, vergelijkingen.

$$\begin{aligned} - \nabla^2 \psi_1 + a_{1,1} m(x,y) \psi_1 + a_{1,2} m(x,y) \psi_2 &= k_1, \\ - \nabla^2 \psi_2 + a_{2,1} m(x,y) \psi_1 + a_{2,2} m(x,y) \psi_2 &= k_2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

met

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= 4.318 \text{ } \omega^{-''}, & a_{1,2} &= -5.991 \text{ } \omega^{-''}, & a_{2,1} &= -3.214 \text{ } \omega^{-''}, \\ a_{2,2} &= 8.371 \text{ } \omega^{-''}, & m(x,y) &= \frac{f^2 \omega^8}{m_0^2}, \end{aligned}$$

waar f de coriolisparameter is en m_0 de omrekeningsfactor voor afstanden van aarde naar (x,y) -vlak voor stereografische projectie, en

$$\begin{aligned} - \nabla^2 \psi_1 + a_{1,1} m(x,y) \psi_1 + a_{1,2} m(x,y) \psi_2 + a_{1,3} m(x,y) \psi_3 &= k_1, \\ - \nabla^2 \psi_2 + a_{2,1} m(x,y) \psi_1 + a_{2,2} m(x,y) \psi_2 + a_{2,3} m(x,y) \psi_3 &= k_2, \\ - \nabla^2 \psi_3 + a_{3,1} m(x,y) \psi_1 + a_{3,2} m(x,y) \psi_2 + a_{3,3} m(x,y) \psi_3 &= k_3, \end{aligned} \quad (4.2)$$

met

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= 6.06 \text{ } \omega^{-''}, & a_{1,2} &= -2.53 \text{ } \omega^{-''}, & a_{1,3} &= 1.05 \text{ } \omega^{-''}, & a_{2,1} &= -3.66 \text{ } \omega^{-''}, \\ a_{2,2} &= 3.25 \text{ } \omega^{-''}, & a_{2,3} &= -4.22 \text{ } \omega^{-''}, & a_{3,1} &= 0.58 \text{ } \omega^{-''}, & a_{3,2} &= -2.05 \text{ } \omega^{-''}, \\ a_{3,3} &= 12.41 \text{ } \omega^{-''}. \end{aligned}$$

Het is duidelijk dat geen van beide matrices voldoet aan (3.2). De matrix in (4.1) kan uiteraard symmetrisch gemaakt worden. In het algemeen kunnen matrices, die tridiagonaal zijn en waarvan de elementen van de onder- en bovendagonaal van hetzelfde teken en niet nul zijn, gesymmetriseerd worden. Om de convergentie eigenschappen van (2.2) en (3.4) te onderzoeken, moeten we uiteraard itereren naar een bekende oplossing, zodat we de fout in de beginschatting kennen en kunnen aangeven hoeveel iteraties nodig zijn om deze fout met een bepaalde factor te reduceren. Daar de oplossing van (4.1) of (4.2) bepaald wordt door de inhomogene termen en randvoorwaarden kiezen we $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ en $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$ op de rand zodat beide systemen de nuloplossing hebben.

a. Toepassing van punt-iteratieve methoden.

We behandelen hier alleen (4.2). Vgl. (4.1) gaat analoog. Discretisatie van (4.2) geeft voor het i -de roosterpunt de vgl. (zie (2.1))

$$\begin{aligned} (4 + a_{1,1} d^2 m(i)) \psi_1(i) + a_{1,2} d^2 m(i) \psi_2(i) + a_{1,3} d^2 m(i) \psi_3(i) &= \ell_1(i), \\ a_{2,1} d^2 m(i) \psi_1(i) + (4 + a_{2,2} d^2 m(i)) \psi_2(i) + a_{2,3} d^2 m(i) \psi_3(i) &= \ell_2(i), \\ a_{3,1} d^2 m(i) \psi_1(i) + a_{3,2} d^2 m(i) \psi_2(i) + (4 + a_{3,3} d^2 m(i)) \psi_3(i) &= \ell_3(i), \end{aligned} \quad (4.3)$$

met

$$\begin{aligned} \ell_j(i) &= \psi_j(i_0) + \psi_j(i_6) + \psi_j(i_1) + \psi_j(i_5), \quad (j = 1, 2, 3) \\ d &= 375 \cdot 10^3, \end{aligned}$$

waar i_0 en i_6 de indices zijn van de roosterpunten, onder en boven het i -de roosterpunt.

Uitwerking van (4.3) geeft

$$\begin{aligned} \psi_1(i) &= \begin{vmatrix} 4 + a_{2,2} d^2 m(i) & a_{2,3} d^2 m(i) \\ a_{3,2} d^2 m(i) & 4 + a_{3,3} d^2 m(i) \end{vmatrix} \ell_1(i) / \Delta - \begin{vmatrix} a_{1,2} d^2 m(i) & a_{1,3} d^2 m(i) \\ a_{3,2} d^2 m(i) & 4 + a_{3,3} d^2 m(i) \end{vmatrix} \ell_2(i) / \Delta \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_{1,2} d^2 m(i) & a_{1,3} d^2 m(i) \\ 4 + a_{2,2} d^2 m(i) & a_{2,3} d^2 m(i) \end{vmatrix} \ell_3(i) / \Delta, \\ \psi_2(i) &= - \begin{vmatrix} a_{2,1} d^2 m(i) & a_{2,3} d^2 m(i) \\ a_{3,1} d^2 m(i) & 4 + a_{3,3} d^2 m(i) \end{vmatrix} \ell_1(i) / \Delta + \begin{vmatrix} 4 + a_{1,1} d^2 m(i) & a_{1,3} d^2 m(i) \\ a_{3,1} d^2 m(i) & 4 + a_{3,3} d^2 m(i) \end{vmatrix} \ell_2(i) / \Delta \\ &\quad - \begin{vmatrix} 4 + a_{1,1} d^2 m(i) & a_{1,3} d^2 m(i) \\ a_{2,1} d^2 m(i) & a_{2,3} d^2 m(i) \end{vmatrix} \ell_3(i) / \Delta, \\ \psi_3(i) &= \begin{vmatrix} a_{2,1} d^2 m(i) & 4 + a_{2,2} d^2 m(i) \\ a_{3,1} d^2 m(i) & a_{3,2} d^2 m(i) \end{vmatrix} \ell_1(i) / \Delta - \begin{vmatrix} 4 + a_{1,1} d^2 m(i) & a_{1,2} d^2 m(i) \\ a_{3,1} d^2 m(i) & a_{3,2} d^2 m(i) \end{vmatrix} \ell_2(i) / \Delta \\ &\quad + \begin{vmatrix} 4 + a_{1,1} d^2 m(i) & a_{1,2} d^2 m(i) \\ a_{2,1} d^2 m(i) & 4 + a_{2,2} d^2 m(i) \end{vmatrix} \ell_3(i) / \Delta, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$b_{1,1} = -(4 + a_{1,j} d^2 m(r+1))$$

$$b_{1,2} = -a_{2,1} d^2 m(r+1)$$

$$b_{1,3} = -a_{3,1} d^2 m(r+1)$$

$$b_{1,4} = 1$$

$$c_{1,2} = a_{1,2} d^2 m(r+1) / b_{1,1}$$

$$c_{1,3} = a_{1,3} d^2 m(r+1) / b_{1,1}$$

$$c_{1,4} = -1 / b_{1,1},$$

$$b_{2,2} = -(4 + a_{2,2} d^2 m(r+1)) + b_{1,2} c_{1,2}$$

$$b_{2,3} = -a_{3,2} d^2 m(r+1) + b_{1,3} c_{1,2}$$

$$b_{2,4} = b_{1,4} c_{1,2}$$

$$b_{2,5} = 1$$

$$c_{2,3} = (a_{2,3} d^2 m(r+1) - b_{1,2} c_{1,3}) / b_{2,2}$$

$$c_{2,4} = -b_{1,2} c_{1,4} / b_{2,2}$$

$$c_{2,5} = -1 / b_{2,2}$$

etc.

Vervolgens wordt de matrix vergelijking

$$B C \psi^* = l$$

opgelost met

$$\psi^* = \begin{pmatrix} \psi_1^*(r+1) \\ \psi_2^*(r+1) \\ \psi_3^*(r+1) \\ \vdots \\ \psi_2^*(r+r_j) \end{pmatrix}, \quad l = \begin{pmatrix} \psi_1((r+1)_b) + \psi_1^{(m)}((r+1)_o) \\ \vdots \\ \psi_3((r+r_j)_b) + \psi_3^{(m)}((r+r_j)_o) \end{pmatrix},$$

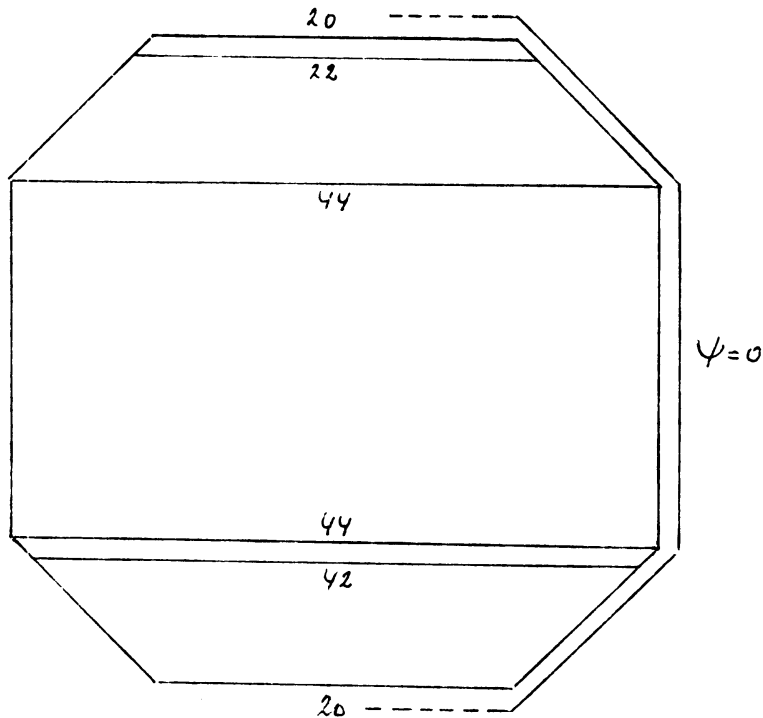
waar $(r+1)_o$ en $(r+1)_b$ de indices zijn van de roosterpunten, die onder en boven het roosterpunt met index $(r+1)$ liggen. Tenslotte wordt de nieuwe iteraat $\psi^{(m+1)}$ berekend uit

$$\psi^{(m+1)} = \psi^{(m)} + \omega (\psi^* - \psi^{(m)}).$$

De toepassing van σ_j -ordening gaat analoog aan het onder punt a. behandelde.

5. Resultaten.

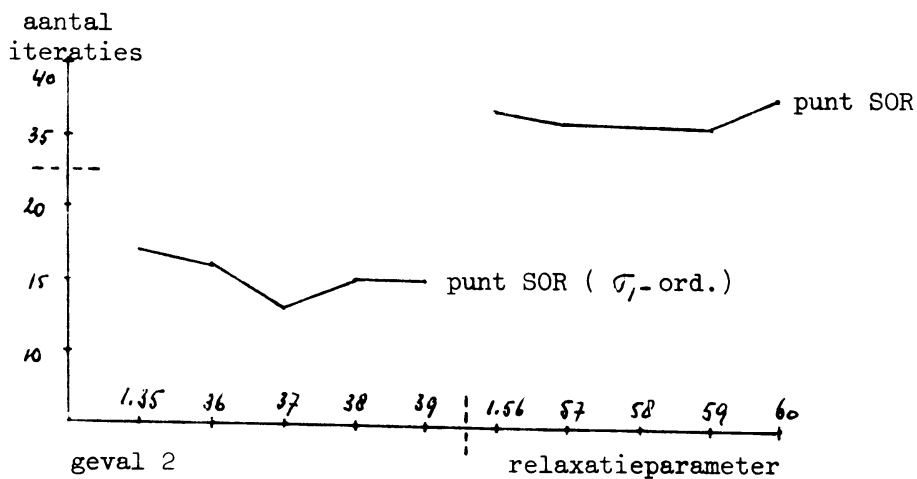
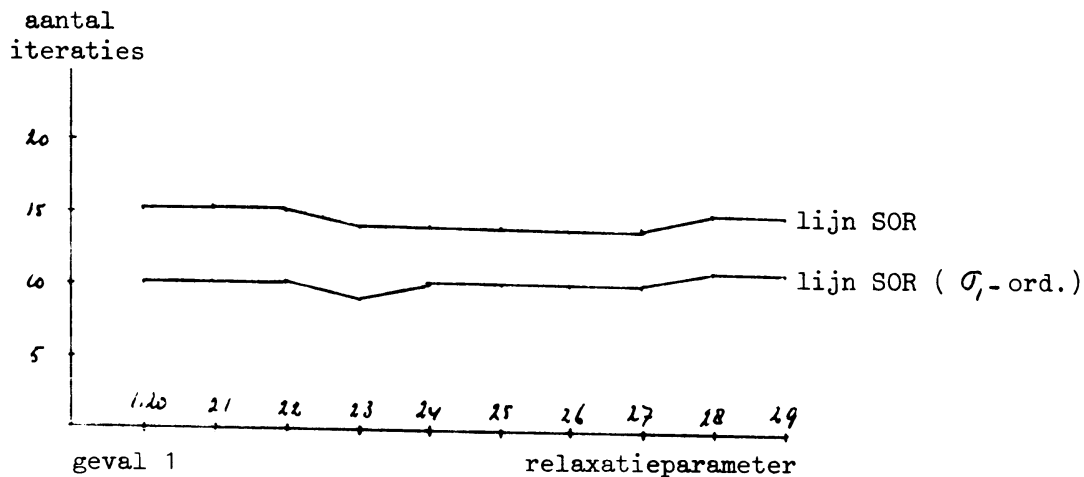
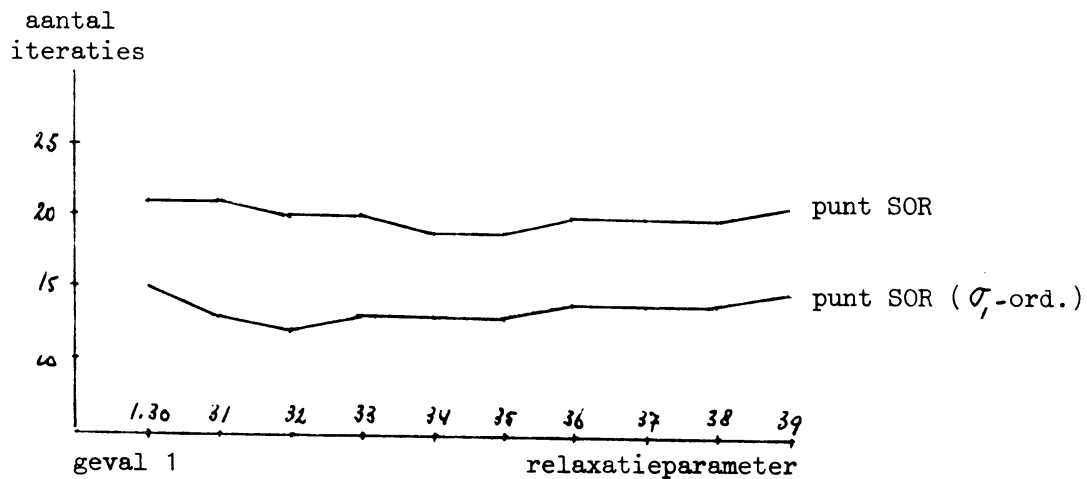
De in het vorige hoofdstuk beschreven experimenten worden uitgevoerd op een regelmatige achthoek van onderstaande vorm, waarin het aantal roosterpunten per rij is weergegeven.

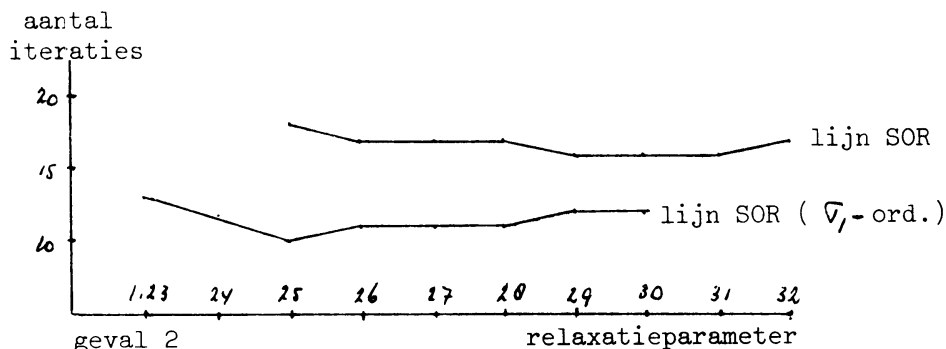


Het aantal inwendige roosterpunten bedraagt 1624. We starten met $\psi^{(0)}$ ($i=1, \dots, 8n$; $n=2, 3$; $m=1624$) waar $\psi^{(0)}(i)$ de i -de component is van $\psi^{(0)}$ en bepalen het aantal iteraties zodat

$$\|\psi^{(m)}\|_{\infty} = \max_i |\psi^{(m)}(i)| < 10^{-k} = \varepsilon, \quad (k=1, 2, 3, 4, 5).$$

Het stelsel van 2 respectievelijk 3 gekoppelde vgl'n noemen we geval 1 en geval 2. Ter bepaling van de experimenteel optimale relaxatiefactor geven we als voorbeeld het aantal iteraties afhankelijk van de relaxatiefactor, in geval van punt en lijn SOR methoden, voor $\varepsilon = 10^{-5}$. Verschillende consistente ordeningen hebben geen invloed op de optimale relaxatie parameter voor symmetrische, cyclische matrices van index 2, indien de matrix elementen van de corresponderende (blok) Jacobi matrix niet negatief zijn. (Varga, 1962, p. 124 en 125).





We geven nu voor de verschillende methoden het aantal iteraties dat nodig is om de beginfout met een factor ϵ te reduceren.

geval 1.

	$\epsilon = 10^{-1}$	$\epsilon = 10^{-2}$	$\epsilon = 10^{-3}$	$\epsilon = 10^{-4}$	$\epsilon = 10^{-5}$	ω_6
punt SOR	6	9	12	16	19	1.35
punt SOR (σ_1 -ord.)	4/5	6/7*	8/9	10	12	1.32
lijn SOR	4	7	9	11/12	14	1.23
lijn SOR (σ_1 -ord.)	3	5	6/7	8	9	1.23

* 6/7 wil zeggen: 7 iteraties voor genoemde parameter en 6 voor een parameter iets daarvan verschillend.

geval 2.

	$\epsilon = 10^{-1}$	$\epsilon = 10^{-2}$	$\epsilon = 10^{-3}$	$\epsilon = 10^{-4}$	$\epsilon = 10^{-5}$	ω_6
punt SOR	10	16	23	30	36	1.58
punt SOR (σ_1 -ord.)	5/6	7/8	9/10	12	13	1.37
lijn SOR	4/5	7/8	10	13	16	1.29
lijn SOR (σ_1 -ord.)	4	5/6	7/8	9	10	1.25

We moeten bovenstaande getallen uiteraard nog corrigeren in verband met de rekestijden per iteratie voor punt en lijn methoden t_{punt} en t_{lijn} . De verhouding van deze rekestijden hangt voor een groot deel af van de programmeer inspanning die men zich getroost heeft. In ons geval geldt

geval 1. (symmetrische matrix) $\frac{t_{\text{lijn}}}{t_{\text{punt}}} \approx 1.26$

geval 2. (niet symmetrische matrix) $\frac{t_{\text{lijn}}}{t_{\text{punt}}} \approx 1.41$

Waarschijnlijk kan men hier nog wel enige verbetering verkrijgen.

6. Conclusie.

Uit het voorgaande blijkt dat in geval 1 de lijn methode (\mathcal{G}_1 -ord.) te prefereren is en in geval 2 de punt methode (\mathcal{G}_1 -ord.) . De versnellingen t.o.v. de punt SOR methode variëren uiteraard met ϵ en lopen van 1.5 tot 2.5. Het versnellende karakter van de lijn methoden zal groter worden indien de matrix $H = A-B$ uit hoofdstuk 2 een Stieltjes matrix is en indien $\rho(A^{-1}B)$ groter is dan in de behandelde gevallen. Door een schatting te maken van de beginfout $\|\epsilon^{(0)}\|_\infty$ kan men de gewenste nauwkeurigheid $\|\epsilon^{(m)}\|_\infty$ verkrijgen door het, voor de reductiefactor $\|\epsilon^{(m)}\|_\infty / \|\epsilon^{(0)}\|_\infty$ benodigde, aantal iteraties toe te passen. Het criterium

$$\|\psi^{(m)} - \psi^{(m-1)}\|_\infty < \delta$$

geeft geen enkele informatie over de nauwkeurigheid van de gevonden oplossing en bevoordeelt slecht convergerende methoden. Zie ook opmerkingen hierover in Young and Ehrlich (1960).

7. Literatuur.

- Karlqvist, O. (1952) Numerical solution of elliptic difference equations by matrix methods, *Tellus*, 4, 374-384.
- Sheldon, J.W. (1959) On the spectral norms of several iterative processes, *J. Assoc. Comp. Mach.*, 6, 494-505.
- Varga, R.S. (1960) Factorization and normalized iterative methods in: *Boundary problems in differential equations*, R.E. Langer ed., University of Wisconsin Press, Madison, 121-142.
- Varga, R.S. (1962) *Matrix Iterative Analysis*, Prentice - Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- Young, D.M. (1954) Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type, *trans. amer. math. Soc.*, 76, 92-111.
- Young, D.M. and L. Ehrlich (1960) Some numerical studies of iterative methods for solving elliptic difference equations in: *Boundary problems in differential equations*, Univ. of Wisconsin Press, Ma, 143-162.