

K O N I N K L I J K N E D E R L A N D S
M E T E O R O L O G I S C H I N S T I T U U T

D e B i l t

WETENSCHAPPELIJK RAPPORT

W.R. 77-8

S.J. Bijlsma

Iteratieve methoden voor het oplossen
van elliptische partiële
differentiaalvergelijkingen.

De Bilt, 1977.

Publikationsnummer: K.N.M.I. W.R. 77-8 (M.B.W.)

U.D.C.: 517.9

Summary.

In sections 1, 2, 3 and 4 of this report a survey is given of various iterative methods for solving the Poisson and Helmholtz equation, starting with Richardson's (1910) method. Using Chebyshev polynomials Richardson's method is generalized, resulting in what is called Richardson's first and second-order method, closely related to first and second-degree accelerations of the Jacobi iterative method (Sheldon, 1960).

Related to the second-order Richardson method is also the Chebyshev semi-iterative method (Varga, 1962, p. 138), for cyclic matrices leading to the cyclic Chebyshev semi-iterative method (Varga, 1962, p. 150).

Acceleration of the Gauss - Seidel iterative method leads to the successive overrelaxation (SOR) method of Young (1954,a) (see also Frankel (1950)), which, in his Sheldon (1959) speeded form, has much resemblance to the cyclic Chebyshev semi-iterative method. An acceleration of the Gauss - Seidel iterative method using Chebyshev polynomials is found in Sheldon (1960).

Arms, Gates and Zondek (1956) generalized Young's point-iterative method and introduced block-iterative methods. Hageman (1962) remarked that, by the cyclic nature of the matrix equation the number of variables could be reduced and applied block-iterative methods to this cyclically reduced matrix equation.

A different way of matrix splitting results in the alternating - direction implicit (ADI) iterative method of Peaceman and Rachford (1955).

In section 5 a number of foregoing methods is applied to solve the Poisson and Helmholtz equation on a regular octagonal region.

With respect to Poisson's equation numerical experiments are given using the following methods: the point SOR method, the Sheldon-speeded form of this method, the point cyclic Chebyshev semi-iterative method, the two-line SOR method (using normal and σ_1 ordering), the two-line cyclic Chebyshev semi-iterative method, the two-line SOR (σ_1 ordering) method applied to the cyclically reduced equations along the diagonals of the grid (see Parter (1965), Hageman and Varga (1964)), where we applied a transformation due to Parter (1959) to make the resulting matrix equations easily invertible, and the Wachspress and Habetler (1960) form of the ADI method using 4 and 8 Wachspress (1962) parameters.

Concerning the Helmholtz equation the application of point-iterative methods is preferable if the Helmholtz coefficient is sufficiently large.

For each method the number of iterations is given needed to reduce a given initial error by different reduction factors and also the iteration time ratio with respect to the point SOR method.

Inhoud.

1.	Inleiding.	1
2.	Punt-iteratieve methoden.	6
3.	Blok-iteratieve methoden (1).	12
4.	Blok-iteratieve methoden (2).	20
5.	Experimenten.	24
6.	Besluit.	27
7.	Literatuur.	28

1. Inleiding.

In de numerieke weersvoorspelling heeft men veelvuldig te maken met het oplossen van elliptische partiële differentiaalvergelijkingen van de vorm (Leslie and McAvaney, 1973)

$$\begin{aligned}
 -\Delta U + C(x,y) U &= F(x,y), \\
 U &= G(R) \text{ op gegeven rand } R,
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

waar Δ de tweedimensionale Laplace operator is, $C(x,y)$ een niet-negatieve functie en $F(x,y), G(R)$ bekende functies zijn.

We beschouwen hier een gebied in het (x,y) -vlak begrensd door een regelmatige achthoek. (Zie hoofdstuk 5). We overdekken dit gebied met een rechthoekig rooster (x_i, y_j) , roosterafstand h , zodanig dat de rand door roosterpunten gaat. Door toepassing van de gebruikelijke 5-punts approximatie voor de Laplace operator Δ gaat (1.1) over in (Forsythe and Wasow, 1960)

$$(4 + h^2 c_{i,j}) u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} = h^2 f_{i,j} \tag{1.2}$$

voor inwendige roosterpunten, met de notatie $u_{i,j} = U(x_i, y_j)$, $c_{i,j} = C(x_i, y_j)$, $f_{i,j} = F(x_i, y_j)$. Bovendien neemt $u_{i,j}$ op de rand vaste waarden aan, dus op de rand R

$$u_{i,j} = G(R_{i,j}).$$

Door een geschikte ordening van de roosterpunten, bijvoorbeeld in de leesvolgorde, gaat het stelsel differentievergelijkingen (1.2) over in een lineair stelsel vergelijkingen van de vorm

$$A u = k, \tag{1.3}$$

waar de vector k behalve de inhomogene termen uit (1.2) ook de randwaarden bevat. De componenten van de vector u worden uiteraard gevormd door de waarden van de roosterfunctie $u_{i,j}$ in de geordende inwendige roosterpunten en de matrix A is de daarbij behorende coëfficiënten matrix. Bij n inwendige roosterpunten zijn u en k dus n -dimensionale vectoren en is A een symmetrische $(n \times n)$ -matrix, die, gezien (1.2), maximaal 5 niet-nul elementen per rij bevat.

Het doel van dit rapport is na te gaan welke iteratieve methode we het best kunnen gebruiken om grote lineaire systemen van de vorm (1.3) op te lossen. Voor de eenvoudigheid beschouwen we eerst het geval dat $C(x,y) \equiv 0$. Meer dan een halve eeuw geleden heeft Richardson (1910) zich met het oplossen van de Poisson vergelijking beziggehouden en de volgende iteratieve methode voorgesteld

$$u^{(m+1)} = u^{(m)} - \alpha_m^{-1} (A u^{(m)} - k), \tag{1.4}$$

waar α_m parameters zijn, die de convergentie van het iteratieproces moeten versnellen. Voor $\alpha_m = 4$ vinden we de punt Jacobi iteratieve methode. Uit (1.4) volgt voor de fout na de $(m+1)$ ste iteratie, $\epsilon^{(m+1)} = u^{(m+1)} - u$, waar u de oplossing is van (1.3)

$$\varepsilon^{(m+1)} = (I - \alpha_m^{-1} A) \varepsilon^{(m)}, \quad m \geq 0,$$

zodat

$$\varepsilon^{(m)} = Q_m(A) \varepsilon^{(0)}, \quad (1.5)$$

waar

$$Q_m(A) = \prod_{j=0}^{m-1} (I - \alpha_j^{-1} A).$$

Toepassing van matrix en vector normen (Varga, 1962, p.7) op (1.5) geeft

$$\|\varepsilon^{(m)}\| \leq \|Q_m(A)\| \|\varepsilon^{(0)}\|.$$

Omdat A een reële, symmetrische, irreducibele matrix is, diagonaal dominant met positieve diagonaal elementen, geldt dat A positieve eigenwaarden λ_i ($i=1, \dots, n$) heeft met

$$\delta = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \rho(A),$$

waar $\rho(A)$ de spectrale straal is, terwijl bovendien

$$\|Q_m(A)\| = \rho(Q_m(A)) = \max_{1 \leq i \leq n} |q_m(\lambda_i)|.$$

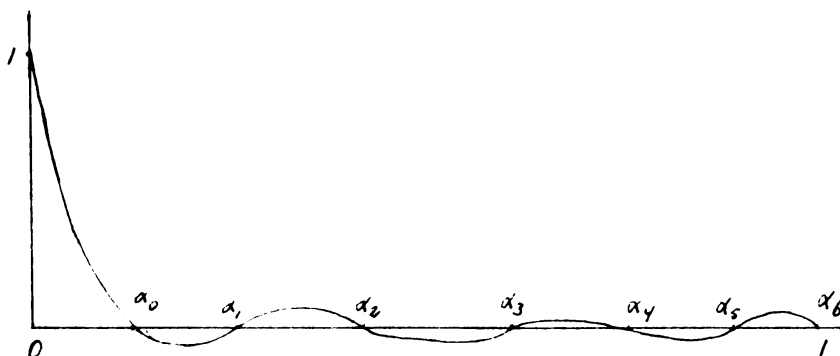
Verder geldt

$$\max_{1 \leq i \leq n} |q_m(\lambda_i)| \leq \max_{\delta \leq x \leq \rho(A)} |q_m(x)|,$$

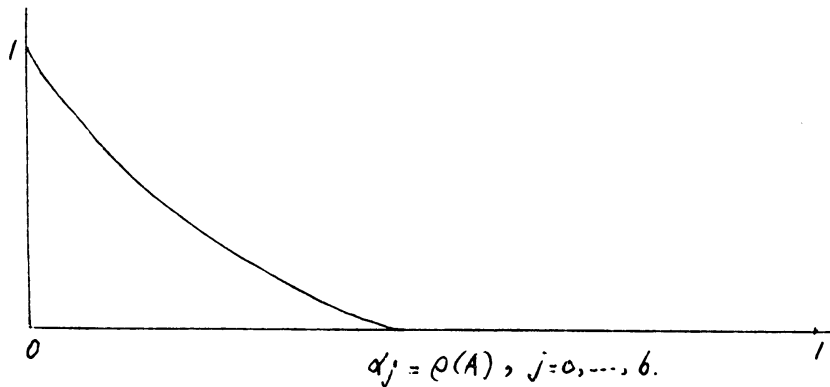
zodat het van belang is

$$\max_{\delta \leq x \leq \rho(A)} |q_m(x)|$$

te minimaliseren. Richardson kwam tot dit resultaat door $\varepsilon^{(0)}$ te ontwikkelen naar de eigenvectoren van A en geeft (p. 322) voor een tweetal verdelingen van de α_j , $q_m(\lambda)$ als functie van $\lambda/\rho(A)$ (zie figuur 1 en 2).



figuur 1 $\Delta U = F$ op vierkant, met 10 coördinaat differenties in elke coördinaat-richting. De α_j 's ($j=0, \dots, 6$) zijn tamelijk uniform verdeeld over interval $[\delta, \rho(A)]$.



figuur 2

Tot zover de methode van Richardson. Nu is bekend (Young, 1954, b) dat het polynoom

$$p_m(a, b, x) = C_m^{-1} \left(\frac{b+a}{b-a} \right) C_m \left(\frac{b+a-2x}{b-a} \right), \quad (1.6)$$

waar $C_m(y) = \begin{cases} \cos(m \cos^{-1} y), & -1 \leq y \leq 1 \\ \cosh(m \cosh^{-1} y), & y \geq 1 \end{cases}$ het Chebyshev polynoom is, van alle polynomen $q_m(x)$ van de graad m in x , die voldoen aan $q_m(c) = 1$, een minimale maximum norm heeft over het interval $0 < a \leq x \leq b$. Omdat $p_m(a, b, x)$ reële nulpunten heeft kunnen we $p_m(a, b, x)$ factoriseren in reële lineaire factoren van de vorm

$$1 - x/X_j(a, b),$$

waar $X_j(a, b)$, $j=0, \dots, m-1$ een nulpunt is van $p_m(a, b, x)$. Er geldt

$$X_j(a, b) = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(b-a) \cos \frac{2j+1}{2m} \pi, \quad j=0, \dots, m-1.$$

Hieruit volgt dat

$$\max_{\delta \leq x \leq \rho(A)} |q_m(x)|$$

minimaal is, indien

$$\alpha_j = X_j(\delta, \rho(A)). \quad (1.7)$$

De methode waarbij α_j voldoet aan (1.7) komt voor de Poisson vgl. in feite overeen met de Chebyshev versnelde Jacobi iteratieve methode (zie hoofdstuk 2) en wordt ook wel de methode van Richardson genoemd. We merken op dat schema (1.4) ook beschouwd kan worden als differentieschema voor de warmtegeleidingsvergelijking

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \Delta \mathcal{U} + F, \quad (1.8)$$

met randvoorwaarden als in (1.1). De parameters α_j spelen dan de rol van

$$\alpha_j = \frac{h^2}{\Delta t}.$$

Hieruit volgt dat het oplossen van (1.1) met behulp van (1.4) overeenkomt met het bepalen van een stationaire oplossing van (1.8).

Als generalisatie van bovenstaande kunnen we nu de oplossing van (1.8) ook zien als de stationaire oplossing van de vergelijking

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial t^2} + C \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \Delta \mathcal{U} + F. \quad (1.9)$$

Vergelijking (1.9) geeft aanleiding tot een stationair iteratieproces

$$u^{(m+1)} = u^{(m)} - \alpha (A u^{(m)} - k) + \beta (u^{(m)} - u^{(m-1)}) \quad (1.10)$$

(zie Frankel, 1950, p. 72). Schema (1.10) wordt wel de tweede-orde Richardson methode genoemd. We herschrijven (1.10) als

$$u^{(m+1)} = (1 + \beta_m - \alpha_m A) u^{(m)} - \beta_m u^{(m-1)} + \alpha_m k; \quad \beta_0 = 0, \quad (1.11)$$

waar α_m en β_m nu niet-stationaire iteratieparameters zijn. Schrijven we vervolgens analoog aan (1.5) met (1.6)

$$\varepsilon^{(m)} = \beta_m (\delta, \rho(A), A) \varepsilon^{(0)}, \quad (1.12)$$

met $\varepsilon^{(m)} = u^{(m)} - u$, waar u voldoet aan (1.3) dan geldt

$$\begin{aligned} \beta_0(\delta, \rho, A) &= 1, \\ \beta_1(\delta, \rho, A) &= 1 - \frac{2}{\delta + \rho} A, \\ \beta_{m+1}(\delta, \rho, A) &= \left(2\alpha - \frac{4}{\rho - \delta} A\right) \frac{C_m(\alpha)}{C_{m+1}(\alpha)} \beta_m(\delta, \rho, A). \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\frac{C_{m-1}(\alpha)}{C_{m+1}(\alpha)} \beta_{m-1}(\delta, \rho, A), \quad \alpha = \frac{\delta + \rho}{\rho - \delta},$$

waar we gebruik hebben gemaakt van de relaties

$$\begin{aligned} c_0(\gamma) &= 1, \\ c_1(\gamma) &= \gamma, \\ c_{m+1}(\gamma) &= 2\gamma c_m(\gamma) - c_{m-1}(\gamma). \end{aligned} \quad (1.13)'$$

Opdat schema (1.11) voldoet aan (1.12) moeten we de coëfficiënten α_m en β_m van (1.11) kiezen in overeenstemming met (1.13). Dit geeft

$$\alpha_0 = \frac{2}{\delta + \rho}, \quad \alpha_m = \frac{4}{\rho - \delta} \frac{c_m(\alpha)}{c_{m+1}(\alpha)}, \quad \beta_m = \frac{c_{m-1}(\alpha)}{c_{m+1}(\alpha)} = \frac{2\alpha c_m(\alpha)}{c_{m+1}(\alpha)} - 1. \quad (1.14)$$

De gemiddelde convergentiesnelheid $R(p_m(\delta, \rho, A))$ voor beide methoden bedraagt

$$\begin{aligned} R(p_m(\delta, \rho, A)) &= \frac{-\ln \|p_m(\delta, \rho, A)\|}{m} = \\ &= \frac{-\ln \rho(p_m(\delta, \rho, A))}{m}. \end{aligned}$$

De iteratieve methode (1.11) met (1.14) wordt ook, zoals (1.10), de tweede-orde Richardson methode genoemd. Voor verdere discussie betreffende (1.4) en (1.11) wordt men verwezen naar Van der Houwen (1968). We hebben voorgaande methoden beschouwd, omdat ze een aansluiting vormden op de oorspronkelijk door Richardson ontwikkelde ideeën. We zullen er verder geen praktisch gebruik van maken. In de loop der jaren zijn snellere iteratieve methoden ontwikkeld om vergelijkingen van de vorm (1.3) op te lossen, die in de volgende hoofdstukken ter sprake zullen komen.

Voor literatuur op dit gebied wordt men verwezen naar Varga (1962), Wachspress (1966) en Young (1971).

2. Punt-iteratieve methoden.

We keren terug naar de matrix vergelijking (1.3) uit het vorige hoofdstuk

$$Au = k. \quad (2.1)$$

De eenvoudigste iteratieve methode om (2.1) op te lossen is de punt Jacobi iteratieve methode

$$u^{(m+1)} = Bu^{(m)} + C^{-1}k, \quad (2.2)$$

waar de matrix C een diagonaal matrix is van de diagonaal elementen van A (zie (1.2)) en

$$B = I - C^{-1}A.$$

De matrix B zal dus in het algemeen, als $C(x,y) \neq \text{constant}$, geen symmetrische matrix zijn. We schrijven (2.1) als

$$C^{-1/2} A C^{-1/2} C^{1/2} u = C^{-1/2} k. \quad (2.3)$$

Definiëren we $B^* = I - C^{-1/2} A C^{-1/2}$, $u^* = C^{1/2} u$, $k^* = C^{-1/2} k$, dan gaat (2.3) over in

$$(I - B^*) u^* = k^*. \quad (2.4)$$

De matrix B^* is nu wel symmetrisch en bovendien hebben B en B^* dezelfde eigenwaarden. In dit hoofdstuk gaan we uit van (2.4) in plaats van (2.1) en laten de (*) weg. Analoog aan (2.2) schrijven we

$$u^{(m+1)} = Bu^{(m)} + k, \quad \rho(B) < 1. \quad (2.5)$$

Een matrix, met de eigenschap $\rho(B) < 1$, heet convergent. Toepassing van spectrale norm en spectrale straal geeft in dit geval (B symmetrisch) (Varga, 1962, p. 9)

$$\begin{aligned} R(B^m) &\equiv \text{gemiddelde convergentiesnelheid (na m-iteraties)} \equiv \\ &= - \frac{\ln \|B^m\|}{m} = - \frac{\ln \rho^m(B)}{m} = - \ln \rho(B) \\ &\equiv \text{asymptotische convergentiesnelheid} \equiv R_\infty(B). \end{aligned} \quad (2.6)$$

In het algemeen geldt (Varga, 1962, p. 67) voor een convergente matrix M

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R(M^m) = - \ln \rho(M) \equiv R_\infty(M). \quad (2.7)$$

In het onderstaande bespreken we punt-iteratieve methoden om vgl. (2.4) op te lossen, met andere woorden, de nieuwe vector iteraten worden punt voor punt bepaald, terwijl dit bij blok-iteratieve methoden, die in het volgende hoofdstuk ter sprake komen, voor groepen van punten (bijv. punten behorende tot een of meer roosterlijnen) simultaan gebeurt.

Toepassing van een lineaire versnelling op (2.5) geeft

$$\begin{aligned} u^{(m+1)} &= B u^{(m)} + k, \\ u^{(m+1)} &= u^{(m+1)} + \omega_m (u^{(m+1)} - u^{(m)}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Eliminatie van $u^{(m+1)}$ geeft, analoog aan (1.4)

$$u^{(m+1)} = ((1+\omega_m)B - \omega_m I) u^{(m)} + (1+\omega_m)k. \quad (2.9)$$

Stellen we verder

$$\omega_m = \frac{\beta_m}{1 - \beta_m},$$

dan vinden we, analoog aan (1.5)

$$\varepsilon^{(m)} = r_m(B) \varepsilon^{(0)}, \quad (2.9)'$$

waar

$$r_m(B) = \prod_{j=0}^{m-1} \left(\frac{B - \beta_j I}{1 - \beta_j} \right)$$

en $\rho(r_m(B))$ kan weer geminimaliseerd worden door gebruik te maken van Chebyshev polynomen (Sheldon, 1960, p. 146), analoog aan het in de inleiding besprokene. De reden van deze kleine uitwijding is aan te tonen dat elementaire iteratieve methoden, zoals (2.5), indien de eigenwaarden van de iteratie matrix B reëel zijn, met behulp van Chebyshev polynomen versneld kunnen worden, iets wat in de inleiding uit de lucht kwam vallen. Het moet duidelijk zijn dat de methode van Richardson ((1.4) met (1.7)) en de Chebyshev versnelde Jacobi methode in feite volkomen identiek zijn. Een tweede elementaire iteratieve methode om (2.4) op te lossen is de punt Gauss-Seidel iteratieve methode. Schrijven we

$$B = L + U,$$

waar L resp. U de onder resp. boven driehoeksmatrix is dan luidt de Gauss-Seidel methode in matrix vorm

$$u^{(m+1)} = (I-L)^{-1} U u^{(m)} + (I-L)^{-1} k. \quad (2.10)$$

Omdat de eigenwaarden van de Gauss-Seidel matrix $H = (I-L)^{-1} U$ reëel zijn, zoals later zal blijken, kunnen we ook op (2.10) een Chebyshev versnelling toepassen, zodat we voor $\varepsilon^{(m)} = u^{(m)} - u$, waar u voldoet aan (2.4) analoog aan (2.9)' vinden

$$\varepsilon^{(m)} = r_m(H) \varepsilon^{(0)}.$$

Bovendien kunnen we, analoog aan (1.10), versnellingen van de tweede orde of graad toepassen, overeenkomend met de tweede-orde Richardson methode. Voor verdere discussie van bovengenoemde methoden wordt men verwezen naar Sheldon (1960). We zullen in het onderstaande enige methoden beschouwen

die versnellingen zijn van de Jacobi iteratieve methode (2.5) en de Gauss-Seidel iteratieve methode (2.10) en waarvan de belangrijkste (de cyclische Chebyshev methode en de Sheldon versnelling van de successieve overrelaxatie methode) superieur zijn aan bovengenoemde methoden.

a. Versnelling van de Jacobi methode.

We gaan uit van (2.5) en beschouwen een algemenere iteratieve methode gedefinieerd door (2.5) en

$$y^{(m)} = \sum_{j=0}^m v_j^{(m)} u^{(j)},$$

met

$$\sum_{j=0}^m v_j^{(m)} = 1.$$

Is u de exacte oplossing van (2.4) en schrijven we

$$\varepsilon^{(m)} = u^{(m)} - u, \quad \tilde{\varepsilon}^{(m)} = y^{(m)} - u, \quad (2.11)$$

dan geldt

$$\tilde{\varepsilon}^{(m)} = \sum_{j=0}^m v_j^{(m)} u^{(j)} - \sum_{j=0}^m v_j^{(m)} u = \sum_{j=0}^m v_j^{(m)} \varepsilon^{(j)},$$

zodat

$$\tilde{\varepsilon}^{(m)} = Q_m(B) \varepsilon^{(0)}, \quad (2.11)'$$

waar

$$Q_m(x) = \sum_{j=0}^m v_j^{(m)} x^j, \quad Q_m(1) = 1.$$

Liggen de eigenwaarden λ_i ($i=1, \dots, n$) van B in het interval

$$-1 < a \leq \lambda_i \leq b < 1, \quad i=1, \dots, n, \quad (2.12)$$

dan is $\rho(Q_m(B))$ minimaal, indien $Q_m(x) = \tilde{\beta}_m(x)$, waar

$$\tilde{\beta}_m(x) = C_m^{-1} \left(\frac{2-(b+a)}{b-a} \right) C_m \left(\frac{2x-(b+a)}{b-a} \right), \quad (2.13)$$

analoog aan (1.6). Gebruiken we in (2.12) alleen de spectrale straal van B zodat $b = \rho(B) \leq -a$ dan gaat (2.13) over in

$$\hat{\beta}_m(x) = C_m^{-1}(1/\rho) C_m(x/\rho), \quad \rho = \rho(B). \quad (2.14)$$

Nu geldt (1.13)', (zie Varga, 1962, p. 136)

$$C_{m+1}(y) = 2y C_m(y) - C_{m-1}(y), \quad (2.15)$$

zodat met (2.14)

$$C_{m+1}(1/\rho) \hat{\beta}_{m+1}(x) = \frac{2x}{\rho} C_m(1/\rho) \hat{\beta}_m(x) - C_{m-1}(1/\rho) \hat{\beta}_{m-1}(x), \quad m \geq 1.$$

Vervangen we de variabele X door de matrix B , dan geldt met (2.11)'

$$C_{m+1}(\rho) \tilde{E}^{(m+1)} = \frac{2}{\rho} C_m(\rho) B \tilde{E}^{(m)} - C_{m-1}(\rho) \tilde{E}^{(m-1)}, \quad m \geq 1,$$

of met (2.4), (2.11) en (2.15)

$$\begin{aligned} y^{(m+1)} &= \omega_{m+1} (B y^{(m)} + k - y^{(m-1)}) + y^{(m-1)}, \quad m \geq 1, \\ y^{(1)} &= \omega_1 (B y^{(0)} + k), \end{aligned} \quad (2.16)$$

waar

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_{m+1} = \frac{2 C_m(\rho)}{\rho C_{m+1}(\rho)}, \quad m \geq 1. \quad (2.16)'$$

Uit (2.16)' volgt met (2.15)

$$\begin{aligned} \omega_{m+1} &= \frac{1}{1 - \rho \frac{C_{m-1}(\rho)}{2 C_m(\rho)}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\rho^2 \omega_m}{4}\right)}, \quad m \geq 2, \\ \omega_1 &= 1, \quad \omega_2 = \frac{2}{2 - \rho^2}. \end{aligned} \quad (2.16)''$$

wat handiger is in praktisch gebruik. Iteratieproces (2.16) wordt de Chebyshev semi-iteratieve methode genoemd (Varga, 1962, p. 138) en is nauw verwant aan de tweede-orde Richardson methode. In termen van gemiddelde convergentiesnelheid (2.6) is (2.16) superieur aan deze methode. We zullen nu (2.16) toepassen in het geval dat de matrix B de speciale vorm heeft

$$B = \begin{pmatrix} G & F \\ F^T & O \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

waar de nulmatrices vierkant zijn. F^T is de getransponeerde van F . In ons geval verkrijgen we (2.17) door de roosterpunten in twee groepen te verdelen, zoals de witte en zwarte velden van een schaakbord. Een matrix B heet zwak cyclisch van index 2 (Varga, 1962, p. 39) of bezit "property A" (Young, 1954, a), indien er een permutatie matrix P bestaat zodat $P B P^T$ de vorm (2.17) heeft. Verder heet een matrix van de vorm (2.17) consistent geordend volgens σ_j -ordening (Young, 1954, a). Is B bovendien irreducibel (Varga, 1962, p. 19) met niet-negatieve matrix elementen, zoals in ons geval, dan wordt B cyclisch van index 2 genoemd. Ordenen we nu de vectoren y en k in overeenstemming met (2.17) dan gaat (2.16) over in de twee vergelijkingen

$$\begin{aligned} y_1^{(m+1)} &= \omega_{m+1} (F y_2^{(m)} + k_1 - y_1^{(m-1)}) + y_1^{(m-1)}, \\ y_2^{(m+1)} &= \omega_{m+1} (F^T y_1^{(m)} + k_2 - y_2^{(m-1)}) + y_2^{(m-1)}, \quad m \geq 1, \end{aligned} \quad (2.18)$$

met

$$y_1^{(1)} = F y_2^{(0)} + k_1, \quad y_2^{(1)} = F^T y_1^{(0)} + k_2.$$

Uit (2.18) beschouwen we de deelrijen

bepaald door het iteratieproces

$$\left\{ y_1^{(2m+1)} \right\}_{m=1}^{\infty}, \quad \left\{ y_2^{(2m)} \right\}_{m=1}^{\infty}$$

$$\begin{aligned}
 y_1^{(2m+1)} &= \omega_{2m+1} (F y_2^{(2m)} + k_1 - y_1^{(2m-1)}) + y_1^{(2m-1)}, \quad m \geq 1, \\
 y_2^{(2m+2)} &= \omega_{2m+2} (F^T y_1^{(2m+1)} + k_2 - y_2^{(2m)}) + y_2^{(2m)}, \quad m \geq 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

met

$$y_1^{(1)} = F y_2^{(0)} + k_1.$$

De iteratieve methode (2.19) wordt de cyclische Chebyshev semi-iteratieve methode genoemd (Varga, 1962, p. 150), omdat gebruik wordt gemaakt van het cyclische karakter van de matrix B .

Uit het voorgaande zal het duidelijk zijn, dat de asymptotische convergentiesnelheid van (2.19) tweemaal zo groot is als die van (2.16), omdat slechts gebruik wordt gemaakt van de helft van het aantal vector iteraten (vergelijk (2.18) en (2.19)).

b. Versrelling van de Gauss-Seidel methode.

We gaan uit van (2.10) en schrijven

$$u^{(m+1)} = L u^{(m+1)} + U u^{(m)} + k.$$

We veronderstellen dat de matrix B , die zoals we boven zagen cyclisch is van index 2, consistent geordend is (zie ook Varga, 1962, p. 101 of Young, 1971, p. 157 ev.). We definiëren

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_i^{(m+1)} &= L_{i,j} u_j^{(m+1)} + U_{i,j} u_j^{(m)} + k_i, \\
 u_i^{(m+1)} &= u_i^{(m)} + \omega (\tilde{u}_i^{(m+1)} - u_i^{(m)}).
 \end{aligned}$$

Eliminatie van $\tilde{u}_i^{(m+1)}$ geeft

$$u^{(m+1)} = u^{(m)} + \omega (L u^{(m+1)} + U u^{(m)} + k - u^{(m)}). \tag{2.20}$$

De parameter ω wordt de relaxatiefactor genoemd. We spreken van onder- of overrelaxatie, indien $\omega < 1$, $\omega > 1$. De iteratieve methode (2.20) noemen we (Varga, 1962, p. 59) de punt successieve overrelaxatie iteratieve methode. We schrijven (2.20) als

$$u^{(m+1)} = (I - \omega L)^{-1} ((1 - \omega)I + \omega U) u^{(m)} + \omega (I - \omega L)^{-1} k. \tag{2.21}$$

De matrix

$$H(\omega) = (I - \omega L)^{-1} ((1 - \omega)I + \omega U)$$

noemen we de punt successieve relaxatie matrix. Het is duidelijk dat we voor $\omega = 1$ de Gauss-Seidel methode (2.10) terug vinden. De matrix B is zodanig dat we direct de resultaten van Young (1954, a) (zie ook Frankel (1950)) kunnen toepassen.

1. Als λ een eigenwaarde is van B en μ een eigenwaarde van $H(\omega)$ dan geldt

$$(\mu + \omega - 1)^2 - \omega^2 \lambda^2 \mu = 0.$$

gevolg: als $\omega = 1$ dan $\mu = \lambda^2$.

2. De waarde van ω die $\rho(H(\omega))$ minimaliseert wordt gegeven door

$$\omega = \omega_b = 1 + \left(\frac{\rho(B)}{1 + (1 - \rho^2(B))^{1/2}} \right)^2 = \frac{2}{1 + (1 - \rho^2(B))^{1/2}} \quad (\text{Varga, 1962, p. 110}).$$

3. $\rho(H(\omega_b)) = \omega_b - 1.$

Uit resultaat 1. blijkt dat we inderdaad Chebyshev versnellingen kunnen toepassen op de Gauss-Seidel methode. Sheldon (1959) heeft aangetoond dat, als B de vorm (2.17) heeft een versnelling van (2.21) kan worden verkregen (wat betreft de gemiddelde convergentie snelheid) door de eerste iteratie $\omega = 1$ te nemen. In dat geval kunnen we (2.21) analoog aan (2.19) schrijven als

$$\begin{aligned} u_1^{(m+1)} &= u_1^{(m)} + \omega (F u_2^{(m)} + k_1 - u_1^{(m)}), \\ u_2^{(m+1)} &= u_2^{(m)} + \omega (F^T u_1^{(m+1)} + k_2 - u_2^{(m)}), \quad m \geq 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

De asymptotische convergentie snelheden van (2.22) en (2.19) zijn gelijk. Wat betreft de convergentie snelheid na m iteraties is (2.19) superieur. We keren nog even terug naar de oorspronkelijke vergelijking (2.4)

$$(I - B) u = k.$$

Met de partitie van u en k in overeenstemming met (2.17) vinden we

$$\begin{aligned} u_1 &= F u_2 + k_1, \\ u_2 &= F^T u_1 + k_2, \end{aligned} \quad (2.23)$$

zodat

$$\begin{aligned} u_1 &= F F^T u_1 + (F k_2 + k_1), \\ u_2 &= F^T F u_2 + (F^T k_1 + k_2). \end{aligned} \quad (2.24)$$

We noemen (2.24) de cyclische reductie van de matrix vgl. (2.23). Omdat $F^T F$ een convergente, symmetrische matrix is (bovendien primitief), kunnen we de Chebyshev semi-iteratieve methode (2.16) op een van de cyclisch gereduceerde matrix vergelijkingen van (2.24) toepassen, bijv. op

$$u_2 = F^T F u_2 + (F^T k_1 + k_2), \quad (2.25)$$

en vervolgens u_1 volgens (2.23) berekenen. Toepassing van (2.16) op (2.25) geeft dezelfde gemiddelde convergentie snelheid als iteratieproces (2.19). In het volgende hoofdstuk zal blijken dat er geschiktere matrix splitsingen van (2.25) mogelijk zijn, aanleiding gevend tot blok-iteratieve methoden, die in termen van convergentie snelheid, superieur zijn aan de tot nu toe besproken methoden.

3. Blok-iteratieve methoden (1).

We beschouwen de matrix vgl. (2.1)

$$Au = k. \quad (3.1)$$

In het vorige hoofdstuk splitsen we de matrix A volgens

$$A = C - (C - A), \quad (3.2)$$

waar de diagonaalmatrix C de diagonaal elementen van A bevatte en losten we (3.1) op door een iteratieproces toe te passen op

$$Cu = (C - A)u + k,$$

of

$$u = C^{-1}(C - A)u + C^{-1}k = Bu + C^{-1}k, \quad (3.3)$$

of

$$u^* = C^{1/2} B C^{-1/2} u^* + C^{-1/2} k = B^* u^* + k^*. \quad (3.3)'$$

In het volgende zal blijken dat er geschiktere matrix splitsingen van A mogelijk zijn. We definiëren daartoe het begrip reguliere matrix splitsing (Varga, 1960, p. 123) en schrijven (3.2) als

$$A = C - D, \quad D = C - A.$$

We gebruiken de volgende notatie. Als een willekeurige matrix M niet-negatieve matrix elementen heeft schrijven we $M \geq 0$. Als M slechts positieve elementen bevat dan $M > 0$. Heeft de matrix M_1, M_2 tenslotte niet-negatieve elementen dan schrijven we $M_1 \geq M_2$.

Definitie. $A = C - D$ is een reguliere splitsing van A dan en slechts dan als $C^{-1} \geq 0$ en $D \geq 0$.

Stelling 1. Stel dat $A = C_1 - D_1 = C_2 - D_2$ twee reguliere splitsingen zijn van A met $A^{-1} > 0$. Als $D_1 \geq D_2 \geq 0$ (D_1 en D_2 niet identiek) dan geldt

$$1 > \rho(C_1^{-1} D_1) > \rho(C_2^{-1} D_2) > 0.$$

Opdat $A^{-1} > 0$ is het voldoende dat $A = (a_{ij})$ de volgende eigenschappen heeft

1. $a_{i,j} \leq 0$ voor alle $i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$.
2. A is irreducibel. (3.4)
3. $\sum_{j=1}^n a_{i,j} \geq 0$ voor alle $1 \leq i \leq n$ met strikte ongelijkheid voor tenminste één i .

In ons geval voldoet de matrix A uit (3.1) aan (3.4) en is bovendien symmetrisch, zodat A een stieltjes matrix is (Varga, 1962, p. 85).

We veronderstellen nu dat de matrix A de volgende blokvorm heeft, de partitie van u en k is overeenkomstig

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s,1} & \dots & \dots & A_{s,s} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_s \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

waar de $A_{j,j}$, $(n_j \times n_j)$ matrices zijn, $\sum_{j=1}^s n_j = n$ en u_j, k_j vectoren met n_j componenten. De matrix A heet 2-cyclisch, indien de blok Jacobimatrix

$$B = I - C^{-1}A, \quad (3.6)$$

waar

$$C = \begin{pmatrix} A_{1,1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & O & \\ & & & A_{s,s} \end{pmatrix} \quad (3.6)'$$

(zwak)-cyclisch is van index 2. Indien de diagonaal submatrices $A_{j,j}$, (1×1) matrices zijn, is bovenstaande equivalent met Young's "property A" (hoofdstuk 2). Zijn er geen beperkingen op de orde van de submatrices $A_{j,j}$, dan komt de bewering dat A 2-cyclisch is overeen met "property A" van Arms, Gates en Zondek (1956), die de resultaten van Young (1954, a) hebben gegeneraliseerd. Toepassing van de successieve overrelaxatie methode op (3.1) met (3.5) geeft

$$u_i^{(m+1)} = u_i^{(m)} + \omega \left(A_{i,i}^{-1} \left(-\sum_{j \neq i} A_{i,j} u_j^{(m+1)} - \sum_{j \neq i} A_{i,j} u_j^{(m)} + k_i \right) - u_i^{(m)} \right). \quad (3.7)$$

$(i=1, \dots, s)$

We schrijven (3.7) in de vorm

$$u^{(m+1)} = H(\omega) u^{(m)},$$

waar $H(\omega)$ staat voor de successieve blok overrelaxatie iteratie matrix.

Stelling 2. Stel dat de Stieltjes matrix A van (3.5) voldoet aan "property A^{π} " en consistent geordend is. Dan wordt de optimale waarde van ω , ω_b , die $\rho(H(\omega))$ minimaliseert als functie van de reële variabele ω , gegeven door

$$\omega_b = \frac{2}{1 + (1 - \rho^2(A))^{1/2}}$$

en

$$\rho(H(\omega_b)) = \omega_b - 1.$$

We kunnen de roosterpunten bloksgewijs weer zodanig ordenen dat B de vorm heeft

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & B_{1,p+1} & \dots & B_{1,s} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & B_{p,p+1} & \dots & B_{p,s} \\ B_{p+1,1} & B_{p+1,p} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s,1} & \dots & B_{s,p} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Hiermee gaat (3.7) over in

$$u_j^{(m+1)} = u_j^{(m)} + \omega \left(\sum_{k=1}^{s-p} B_{j,p+k} u_{p+k}^{(m)} + A_{j,j}^{-1} k_j - u_j^{(m)} \right), \quad 1 \leq j \leq p, \quad (3.9)$$

$$u_{p+j}^{(m+1)} = u_{p+j}^{(m)} + \omega \left(\sum_{k=1}^p B_{p+j,k} u_k^{(m+1)} + A_{p+j,p+j}^{-1} k_{p+j} - u_{p+j}^{(m)} \right), \quad 1 \leq j \leq s-p.$$

Definiëren we, analoog aan (3.6)

$$B^* = I - C^{-1/2} A C^{-1/2}, \quad (3.6)'$$

dan gaat met $u^* = C^{-1/2} u$, $k^* = C^{-1/2} k$, waar u en k gegeven zijn door (3.5), vgl. (3.1) over in

$$u^* = B^* u^* + k^*, \quad (3.10)$$

waar B^* een symmetrische, convergente matrix is, met $\rho(B) = \rho(B^*)$. Toepassing van de cyclische Chebyshev semi-iteratieve methode op (3.10), waar B^* geordend is volgens (3.8), geeft

$$u_{p+j}^{*(2m+1)} = u_{p+j}^{*(2m-1)} + \omega_{2m+1} \left(\sum_{k=1}^p B_{p+j,k}^* u_k^{*(2m)} + k_{p+j}^* - u_{p+j}^{*(2m-1)} \right), \quad 1 \leq j \leq s-p, \quad (3.11)$$

$$u_j^{*(2m+2)} = u_j^{*(2m)} + \omega_{2m+2} \left(\sum_{k=1}^{s-p} B_{j,p+k}^* u_{p+k}^{*(2m+1)} + k_j^* - u_j^{*(2m)} \right), \quad 1 \leq j \leq p,$$

waar de vector componenten $u_j^{*(0)}$, $1 \leq j \leq b$ zijn gegeven. De ω_s^2 worden bepaald volgens (2.16)'. Op analoge wijze kunnen we uiteraard de succesieve overrelaxatie methoden toepassen op (3.10). Het zal duidelijk zijn dat we in de praktijk de succesieve overrelaxatiemethode en de cyclische Chebyshev methode toepassen volgens (3.7) (waar de matrix A al dan niet geordend is volgens (3.8)) en niet volgens (3.9) of (3.11). Voor verdere discussie betreffende (3.9) en (3.11), zie Golub and Varga (1961).

Toepassingen.

We kunnen nu het voorgaande toepassen in concrete situaties door de roosterpunten van één of meerdere opeenvolgende roosterlijnen als een blok te beschouwen. We bespreken hier twee-lijn methoden, andere methoden spreken voor zich.

a. Twee-lijn methoden toegepast op vgl. (3.1).

We splitsen matrix A volgens

$$A = C_i - D_i, \quad (3.12)$$

waar C_i gedefinieerd is volgens (3.6)' en D_i volgens (3.12). Nummeren we roosterpunten bijvoorbeeld in de leesvolgorde (natuurlijke ordening) dan is het duidelijk dat stelling 1 toegepast kan worden op de matrix splitsingen (3.2) en (3.12), m.a.w. $\rho(C_i' D_i) < \rho(C_i' D)$ zodat

$$R_\infty(H_i(\omega_b)) > R_\infty(H(\omega_b)).$$

We herschrijven (3.7) in de handiger vorm

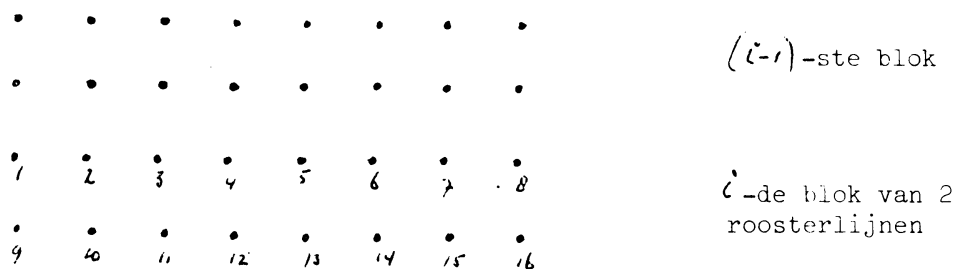
$$A_{i,i} \tilde{u}_i^{(m+1)} = - \sum_{j < i} A_{i,j} u_j^{(m+1)} - \sum_{j > i} A_{i,j} u_j^{(m)} + k_i, \quad (3.13)$$

$$u_i^{(m+1)} = u_i^{(m)} + \omega \left(\tilde{u}_i^{(m+1)} - u_i^{(m)} \right), \quad (i=1, \dots, s) \quad (3.13)'$$

en zullen in onderstaande enkele methoden aangeven om vgl. (3.13) te inverteren. We maken daarbij onderscheid tussen de gevallen $C(x,y) \equiv \text{constant}$ en $C(x,y) \neq \text{constant}$, waarbij we de constante voor de eenvoudigheid gelijk nemen aan nul.

1. $C(x,y) = 0$, roosterlijnen van gelijke lengte.

We passen (3.13) en (3.13)' toe op het i -de blok van twee roosterlijnen, waarvan de punten geordend zijn in de leesvolgorde, zoals onder aangegeven.



$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \quad (i+1)\text{-ste blok}$$

Daar A afkomstig is van een 5-punts differentieformule is het duidelijk dat in (3.13) slechts $u_{i-1}^{(m+1)}$ en $u_{i+1}^{(m)}$ voorkomen. De (16x16)-matrix $A_{i,i}$ heeft de volgende vorm

$$A_{i,i} = \begin{pmatrix} D & -I \\ -I & D \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & 0 \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & & & & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Definiëren we (Parter, 1959)

$$P = \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix},$$

dan geldt

$$P^{-1} A_{i,i} P = \begin{pmatrix} D+I & 0 \\ 0 & D-I \end{pmatrix} = L,$$

waar L een eenvoudig te inverteren tridiagonale matrix is. Vermenigvuldigen we vgl. (3.13) en (3.13)' links met P^{-1} en definiëren we

$$u_i = P x_i, \quad (i=1, \dots, s),$$

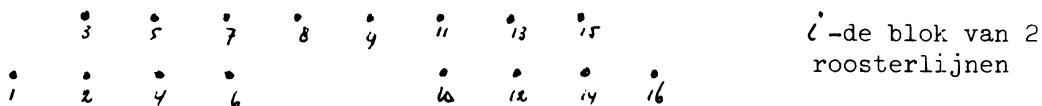
dan gaat (3.13), (3.13)' over in

$$\begin{aligned} L \tilde{x}_i^{(m+1)} &= -P^{-1} A_{i,i-1} P x_{i-1}^{(m+1)} - P^{-1} A_{i,i+1} P x_{i+1}^{(m)} + P^{-1} k_i, \\ x_i^{(m+1)} &= x_i^{(m)} + \omega (\tilde{x}_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}). \end{aligned} \quad (3.13)''$$

Indien de roosterlijnen geen gelijke lengte hebben, kan men (3.13)'' in een gewijzigde vorm blijven toepassen, door de extra punten geschikt te behandelen. Door de blokken om en om te nummeren, zal de matrix A een vorm, analoog aan (3.8) aannemen, enigszins verstoord door de aanwezigheid van extra punten. Is het aantal roosterlijnen niet even, dan kan men uiteraard één en twee-lijn methoden combineren.

2. $\mathcal{C}(x,y)$ en lengte roosterlijnen willekeurig.

Nummeren we de roosterpunten van 2 willekeurige roosterlijnen als volgt en noemen we de vector, op de aldus geordende roosterpunten X_i .



dan kunnen we vgl.(3.13)

$$A_{i,i} \tilde{u}_i = g_i,$$

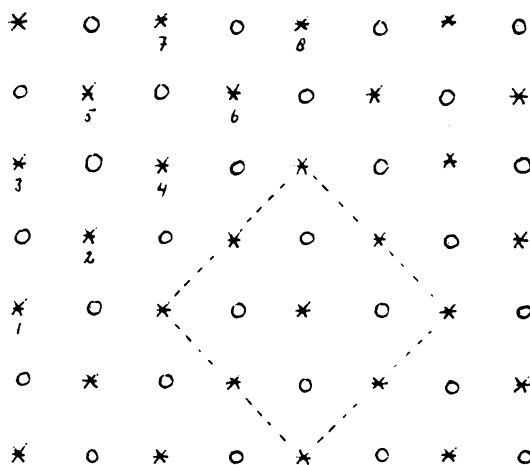
waarin \tilde{u}_i in de leesvolgorde genummerd is, inverteren door \tilde{X}_i te berekenen uit

$$A_{i,i}^* \tilde{X}_i = g_i^*,$$

waar $A_{i,i}^*$ een symmetrische, 5-diagonale (16x16)-matrix is, waarmee ook \tilde{u}_i bekend is. Aan het eind van dit hoofdstuk geven we een methode om symmetrische, $(2\ell+1)$ -diagonale matrices te inverteren. We geven nu een toepassing van twee-lijn methoden op de cyclisch gereduceerde vgl.(2.25).

b. Twee-lijn methoden toegepast op vgl.(2.25).

Het is Hageman's (1962) idee geweest om lijn methoden toe te passen op de cyclisch gereduceerde vergelijkingen. We zagen in hoofdstuk 2 dat we de roosterpunten konden ordenen volgens de witte en zwarte velden van een schaakbord (vgl (2.23)), en vervolgens door cyclische reductie de "helft" van de variabelen konden elimineren. Geven we de roosterpunten aan door (O) en (*), zoals in figuur 3 dan geldt vgl.(2.25) bijvoorbeeld op de (*) roosterpunten.



figuur 3

We schrijven (2.25) als

$$A_* u_* = k_* \quad (3.14)$$

We kunnen, analoog aan het onder a. vermelde, twee-lijn methoden toepassen op (3.14). Het zal duidelijk zijn dat A_* overeenkomt met een 9-punts differentiebenadering voor de (*) roosterpunten (zie figuur 3).

Hebben we na m iteraties $u_*^{(m)}$ voldoende nauwkeurig bepaald, dan volgt u_0 uit de eerste vgl. van (2.23). In Hageman and Varga (1964) vindt men asymptotische convergentiesnelheden voor verschillende lijnmethoden als functie van de roosterafstand h , voor kleine waarden van h , afgeleid door Parter (1961). Bovendien heeft Parter (1965) in dit verband aange- toond dat het zeer voordelig is lijnmethoden langs de diagonalen toe te passen. We zullen ons tot deze laatste methode bepalen en toepassingen (1,2) onder a. hier in het kort bespreken. Voor het gemak veronderstellen we $C(x,y) \equiv 0$.

1. roosterlijnen langs diagonalen hebben gelijke lengte.

Geldt voor overeenkomstige punten op twee opeenvolgende roosterlijnen het- zelfde schema d.w.z. worden deze punten omgeven door een zelfde configu- ratie van (O) punten, zodat

$$A_{*i,i} = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 \\ E_2 & E_1 \end{pmatrix},$$

waar E_1 en E_2 tridiagonale, symmetrische matrices zijn, dan wordt door de transformatie

$$P^{-1} A_{*i,i} P = \begin{pmatrix} E_1 - E_2 & 0 \\ 0 & E_1 + E_2 \end{pmatrix} = L \quad (3.15)$$

de matrix $A_{*i,i}$ gereduceerd tot een eenvoudig te inverteren tridiagonale matrix. Zijn de roosterlijnen niet even lang (zie figuur 3), dan zal men meer punten dan de "extra" punten moeten uitzonderen om (3.15) te kunnen toepassen. In dit algemene geval kan men zeggen dat we (3.15) kunnen toe- passen op (*) roosterpunten behorende tot twee lijnen, indien overeenkomstige punten op deze lijnen door 4 (O) punten worden omgeven. De overige punten zal men als extra punten moeten behandelen.

2. roosterlijnen langs diagonalen hebben geen gelijke lengte, wat in het algemeen het geval zal zijn (zie figuur 3).

Nummeren we de roosterpunten zoals in figuur 3 aangegeven, dan neemt de matrix $A_{*i,i}$ op deze roosterpunten de vorm aan van een symmetrische, 7- diagonale matrix, die geïnverteerd kan worden zoals onder aangegeven. Door de twee-lijn blokken om en om te nummeren, wordt A_* geordend volgens σ_1 -ordening. Daar L een tridiagonale matrix is, blijkt het, in een regelmatig rooster zoals figuur 3, ook indien de roosterlijnen niet even lang zijn, voordelig om (3.15) in gewijzigde vorm toe te passen.

Tot slot geven we een methode om een $(k \times k)$ symmetrische $(2l+1)$ -diagonale matrix te invertieren. Stel dat we de oplossing u willen bepalen uit

waar
$$Au = g, \quad (3.16)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,l+1} & 0 \\ & a_{2,2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{l+1,l+1} & \\ 0 & & & & a_{k-l,k} & a_{k,k} \end{pmatrix}.$$

Schrijven we

$$A = BC,$$

waar

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & & & & \\ & b_{2,2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & b_{l+1,l+1} & \\ 0 & & & & b_{k-l,k} & b_{k,k} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & c_{1,2} & \dots & c_{1,l+1} & 0 \\ & & & & c_{k-l,k} \\ & & & & & -1 \end{pmatrix},$$

dan geldt

$$b_{j,j} = -a_{j,j} + \sum_{m=1}^l b_{j-m,j} c_{j-m,j}, \quad j=1, \dots, k,$$

$$b_{j,j+i} = -a_{j,j+i} + \sum_{m=1}^{l-i} b_{j-m,j+i} c_{j-m,j}, \quad j=1, \dots, k-i,$$

$$b_{j,j+l} = -a_{j,j+l}, \quad j=1, \dots, k-l,$$

$$c_{j,j+i} = -b_{j,j+i} / b_{j,j}, \quad (b_{j-m,j} = 0 \text{ als } m \geq j),$$

en vgl. (3.16) wordt opgelost volgens

$$\begin{aligned} Bv &= g, \\ Cu &= v. \end{aligned}$$

4. Blok-iteratieve methoden (2).

We splitsen de matrix (3.1) volgens

$$A = H + V + \Sigma ,$$

waar de $(n \times n)$ Stieltjes matrices H , V en Σ overeenkomen met de centrale differentie approximaties van $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $-\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ en $\mathcal{C}(x, y)$ (zie (1.2)). We kunnen vgl.(3.1) schrijven als

$$(H + \frac{1}{2} \Sigma + \omega I) u = (\omega I - V - \frac{1}{2} \Sigma) u + k,$$

of

$$(V + \frac{1}{2} \Sigma + \omega I) u = (\omega I - H - \frac{1}{2} \Sigma) u + k.$$

(4.1)

Als

$$H_1 \equiv H + \frac{1}{2} \Sigma , \quad V_1 \equiv V + \frac{1}{2} \Sigma ,$$

dan is de Peaceman-Rachford (1955) "alternating-direction implicit (ADI)" iteratieve methode gedefinieerd door

$$(H_1 + \omega_{m+1} I) u^{(m+1/2)} = (\omega_{m+1} I - V_1) u^{(m)} + k ,$$

$$(V_1 + \omega_{m+1} I) u^{(m+1)} = (\omega_{m+1} I - H_1) u^{(m+1/2)} + k , \quad m \geq 0 ,$$

(4.2)

waar $u^{(0)}$ een begin approximatie is en de ω_m 's parameters, die de convergentie moeten versnellen. We zien dat (4.2) overeenkomt met een lijn methode, die afwisselend in de x- en y- richting wordt toegepast. Combinatie van de twee vergelijkingen (4.2) geeft

$$u^{(m+1)} = T_{\omega_{m+1}} u^{(m)} + \ell_{\omega_{m+1}} , \quad m \geq 0 ,$$

waar

$$T_{\omega} = (V_1 + \omega I)^{-1} (\omega I - H_1) (H_1 + \omega I)^{-1} (\omega I - V_1) ,$$

$$\ell_{\omega} = (V_1 + \omega I)^{-1} \{ (\omega I - H_1) (H_1 + \omega I)^{-1} + I \} k .$$

De matrix T_{ω} wordt de Peaceman-Rachford matrix genoemd. Commuteren de matrices H , V en Σ (dit zal in het algemeen niet het geval zijn) dan bezitten H , V en Σ een complete verzameling simultane eigenvectoren met eigenwaarden $\lambda_i, \mu_i, \sigma_i$ ($i=1, \dots, n$). Indien $\varepsilon^{(m)} = u^{(m)} \cdot u$, waar u voldoet aan (4.1) dan geldt

$$\varepsilon^{(m)} = \left(\prod_{j=1}^m T_{\omega_j} \right) \varepsilon^{(0)} ,$$

of

$$\| \varepsilon^{(m)} \| \leq \left\| \prod_{j=1}^m T_{\omega_j} \right\| \| \varepsilon^{(0)} \| .$$

Nu geldt

$$\left\| \prod_{j=1}^m T_{\omega_j} \right\| = \rho \left(\prod_{j=1}^m T_{\omega_j} \right) =$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| \prod_{j=1}^m \frac{(\omega_j - \lambda_i')(\omega_j - \mu_i')}{(\omega_j + \lambda_i')(\omega_j + \mu_i')} \right| < 1, \quad (4.3)$$

met

$$\lambda_i' = \lambda_i + \frac{1}{2} \sigma_i, \quad \mu_i' = \mu_i + \frac{1}{2} \sigma_i, \quad 0 < a' \leq \lambda_i', \mu_i' \leq b',$$

zodat

$$\left\| \prod_{j=1}^m T_{\omega_j} \right\| \leq \left\{ \max_{a' \leq x \leq b'} \left| \prod_{j=1}^m \left(\frac{\omega_j - x}{\omega_j + x} \right) \right| \right\}^2.$$

Het probleem is nu de ω_j 's zo te kiezen dat

$$\max_{a' \leq x \leq b'} \left| \prod_{j=1}^m \left(\frac{\omega_j - x}{\omega_j + x} \right) \right|$$

minimaal is (zie Varga, 1962, p. 226 e.v., de Boor and Rice (1963)). We beschouwen de Peaceman-Rachford methode in een iets gewijzigde vorm (Wachspress and Habetler, 1960). We schrijven (4.1) als

$$\begin{aligned} (H + \Sigma + \omega I)u &= (\omega I - V)u + k, \\ (V + \Sigma + \omega I)u &= (\omega I - H)u + k, \end{aligned} \quad (4.1)'$$

waarmee (4.2) overgaat in

$$\begin{aligned} u^{(m+1/2)} &= (H + \Sigma + \omega_{m+1} I)^{-1} \{ (\omega_{m+1} I - V)u^{(m)} + k \}, \\ u^{(m+1)} &= (V + \Sigma + \omega_{m+1} I)^{-1} \{ (\omega_{m+1} I - H)u^{(m+1/2)} + k \}, \quad m \geq 0, \end{aligned} \quad (4.2)'$$

zodat de te inverteren matrices meer diagonaal dominant zijn dan in (4.2). Analoog aan (4.3) vinden we, daar $\sigma_i \geq 0$ ($i=1, \dots, n$)

$$\left\| \prod_{j=1}^m T_{\omega_j}^* \right\| = \rho \left(\prod_{j=1}^m T_{\omega_j}^* \right) = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \prod_{j=1}^m \frac{(\omega_j - \lambda_i)(\omega_j - \mu_i)}{(\omega_j + \lambda_i + \sigma_i)(\omega_j + \mu_i + \sigma_i)} \right| \leq$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| \prod_{j=1}^m \frac{(\omega_j - \lambda_i)(\omega_j - \mu_i)}{(\omega_j + \lambda_i)(\omega_j + \mu_i)} \right| < 1,$$

en met

$$0 < a \leq \lambda_i, \mu_i \leq b,$$

$$\left\| \prod_{j=1}^m T_{w_j}^* \right\| \leq \left\{ \max_{a \leq x \leq b} \left| \prod_{j=1}^m \left(\frac{w_j - x}{w_j + x} \right) \right| \right\}^2 \quad (4.4)$$

Voor het geval $m=2^k$, $k \geq 0$, heeft Wachspress (1962) formules afgeleid voor de w_j 's, als functie van a en b , die de spectrale normen van (4.4) minimaliseren. Definiëren we

$$\begin{aligned} [a_0, b_0] &= [a, b], \\ [a_1, b_1] &= \left[\sqrt{a_0 b_0}, \frac{a_0 + b_0}{2} \right], \\ [a_k, b_k] &= \left[\sqrt{a_{k-1} b_{k-1}}, \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2} \right], \end{aligned}$$

dan worden de 2^k parameters gevonden uit

$$\begin{aligned} \omega_1^{(i-1)} &= \omega^{(i)} + \sqrt{(\omega^{(i)})^2 - (a_i)^2}, \\ \omega_2^{(i-1)} &= \omega^{(i)} - \sqrt{(\omega^{(i)})^2 - (a_i)^2} = \frac{(a_i)^2}{\omega_1^{(i-1)}}, \end{aligned}$$

met

$$\omega^{(k)} = \sqrt{a_k b_k} = a_{k+1}$$

Een schatting voor de bovengrens van de eigenwaarden, b , kan eenvoudig gemaakt worden door Gerschgorin's theorema (Varga, 1962, p. 17) toe te passen. In het geval van een Poisson vgl. vinden we de ondergrens a , door de kleinste eigenwaarde te nemen van de grootste, irreducibele submatrix van H of V , die correspondeert met de koppeling van roosterpunten op de langste horizontale of verticale roosterlijn. Voor het algemene geval, zie Varga (1962, p. 289). We schrijven iteratieproces (4.2)' in een voor werkelijk gebruik handiger vorm (Wachspress and Habetler (1960)). Eliminatie van $u^{(m+1/2)}$ geeft

$$k - (V + \Sigma + \omega_{m+1} I) u^{(m+1)} =$$

$$(H - \omega_{m+1} I) (H + \Sigma + \omega_{m+1} I)^{-1} \left[k - (V - \omega_{m+1} I) u^{(m)} \right], \quad m \geq 0. \quad (4.2)''$$

Met

$$H - \omega_{m+1} I = H + \Sigma + \omega_{m+1} I - (\Sigma + 2\omega_{m+1} I)$$

gaat (4.2)'' over in

$$k - (V + \Sigma + \omega_{m+1} I) u^{(m+1)} = \left[I - (\Sigma + 2\omega_{m+1} I)(H + \Sigma + \omega_{m+1} I)^{-1} \right] \cdot \quad (4.2)'''$$

$$\cdot \left[k - (V + \Sigma + \omega_m I) u^{(m)} + (\Sigma + (\omega_{m+1} + \omega_m) I) u^{(m)} \right], \quad m \geq 1.$$

Voor $m=0$ is de tweede factor uit het rechterlid van (4.2)''' gelijk aan $\left[k - (V - \omega_0 I) u^{(0)} \right]$ uit (4.2)'' . Definieren we

$$\begin{aligned} v^{(m)} &= k - (V + \Sigma + \omega_m I) u^{(m)}, \\ \omega^{(m)} &= v^{(m)} + (\Sigma + (\omega_{m+1} + \omega_m) I) u^{(m)}, \end{aligned}$$

dan kan (4.2)''' geschreven worden als

$$\omega^{(0)} = k - (V - \omega_0 I) u^{(0)}, \quad (a)$$

$$v^{(m+1)} = \left[I - (\Sigma + 2\omega_{m+1} I)(H + \Sigma + \omega_{m+1} I)^{-1} \right] \omega^{(m)}, \quad (b)$$

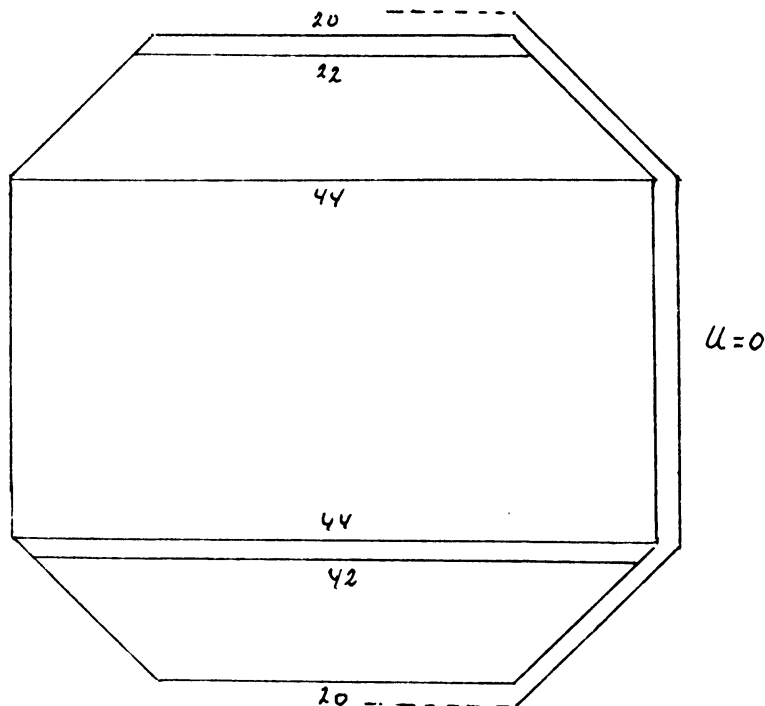
$$u^{(m+1)} = (V + \Sigma + \omega_{m+1} I)^{-1} (k - v^{(m+1)}), \quad (c)$$

$$\omega^{(m+1)} = v^{(m+1)} + (\Sigma + (\omega_{m+2} + \omega_{m+1}) I) u^{(m+1)}, \quad m \geq 0. \quad (d)$$

Indien $\omega^{(0)}$ berekend is en daarmee $v^{(1)}$ en $u^{(1)}$, passen we vervolgens de cyclus (d, b, c) zolang toe totdat $u^{(m+1)}$ aan een vereiste nauwkeurigheid voldoet.

5. Experimenten.

We zullen nu de in de vorige hoofdstukken beschreven methoden toepassen om vgl. (1.1) in de gediscrètiseerde vorm (1.2) op te lossen op een achthoekig rooster, zoals hier onder geschetst, waar het aantal roosterpunten per rij is weergegeven. Het aantal inwendige roosterpunten bedraagt 1624.



We veronderstellen dat $F, G \equiv 0$, zodat vgl. (1.1) de nuloplossing heeft. We starten met $u_i^{(0)} = 1$, $i = 1, \dots, 1624$, waar $u_i^{(0)}$ de i -de component is van $u^{(0)}$ en bepalen het aantal iteraties, zodat

$$\|u^{(m)}\|_{\infty} = \max_i |u_i^{(m)}| < 10^{-k} = \varepsilon, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

In het nu volgende maken we, om voor de hand liggende redenen, onderscheid tussen de Poisson en Helmholtz vergelijking ($C(x, y) \equiv 0$ en $C(x, y) \neq 0$).

a. Poissonvergelijking.

De resultaten van de verschillende methoden zijn in de volgende tabel weergegeven, waar we voor verschillende waarden van ε , het aantal iteraties hebben vermeld.

	$\varepsilon = \omega^{-1}$	$\varepsilon = \omega^{-2}$	$\varepsilon = \omega^{-3}$	$\varepsilon = \omega^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-5}$	
punt SOR	38/43*	59	76	88	108	$\omega_b = 1.87$
punt SOR/Sheldon	23/29	36/42	55	76/78	94	$\omega_b = 1.87$
punt cycl. Cheb.	23/25	39/40	55	72	87/90	$\rho_b = 0.9974$
2-lijn SOR	17/20	24/26	33/36	42	48	$\omega_b = 1.75$
2-lijn SOR σ_1 -ord.	12/16	19/24	28/31	39	44	$\omega_b = 1.75$
2-lijn cycl. Cheb.	13/14	20	28	37	46	$\rho_b = 0.99$
2-lijn SOR σ_1 -ord. langs diag. (cycl. gered. vgl.)	9/11	15	19	26/28	32/34	$\omega_b = 1.69$
ADI 4 par.	6	7	10	14	16	
8 par.	6	10	11	14	18	

* $\frac{38}{43}$ betekent: 43 iteraties met ω_b en 38 iteraties met een, in het algemeen, grotere parameter.

Voor bovengenoemde waarden van ω_b en ρ_b werd het minimale aantal iteraties gevonden. Voor de eenvoudigheid beperken we ons, bij de volgende opmerkingen tot de punt methoden. Theoretisch kan men de waarde van ρ_b en ω_b op de volgende wijze berekenen. Iteratie van (1.2) volgens Gauss-Seidel methode geeft

$$u_{i,j}^{(m+1)} = \frac{1}{4} \left(u_{i-1,j}^{(m+1)} + u_{i,j-1}^{(m+1)} + u_{i+1,j}^{(m)} + u_{i,j+1}^{(m)} \right). \quad (5.1)$$

Onder het residu in punt (i,j) verstaan we $u_{i,j}^{(m+1)} - u_{i,j}^{(m)}$.

Definiëren we σ_m als het maximum van de absolute waarden van de residuen na m iteraties dan geldt (zie ook Young (1955))

$$\frac{\sigma_{m+1}}{\sigma_m} \longrightarrow \rho^2(B),$$

waar B de bij (5.1) behorende Jacobi matrix is, zodat

$$\omega_b = 1 + \frac{\rho^2(B)}{(1 + (1 - \rho^2(B))^{1/2})^2}.$$

Voor $m=170$ vonden we $\omega_b = 1.8628$, wat in goede overeenstemming is met bovenstaande waarde. Bovendien geldt dat verschillende consistente ordeningen geen invloed hebben op de relaxatie parameter ω_b (in feite op $\rho(B)$), indien de Jacobi matrix irreducibel en symmetrisch is en niet-negatieve matrix elementen heeft, hetgeen bevestigd wordt door de eerste twee resultaten uit de tabel.

b. Helmholtz vergelijking.

De convergentie snelheid van de iteratieve methoden hangt in dit geval af van de term $h^2 c_{i,j}$ in vgl.(1.2). In ons geval geldt

$$h = 375 \omega^3, \quad c_{i,j} = c \cdot m_{i,j}^2$$

waar $m_{i,j}$ het quotiënt is van de coriolis parameter en de omrekeningsfactor voor afstanden van aarde naar (X,Y)-vlak voor stereografische projectie, en c een Cressman correctie factor is. We geven in onderstaande het aantal iteraties voor een tweetal waarden van c .

Voor zeer kleine waarden van $h^2 c_{i,j}$, zal het voordelig zijn gebruik te maken van bovenstaande blok-iteratieve methoden, voor redelijk grote waarden daarentegen kan men, vanwege de grote convergentie snelheid volstaan met onderstaande punt-iteratieve methoden ($h^2 c_{i,j}$ heel klein betekent $h^2 c_{i,j} \ll 4$).

	$c = \omega^{-1}$	$c = \omega^{-2}$	$c = \omega^{-3}$	$c = \omega^{-4}$	$c = \omega^{-5}$	
punt SOR	10/11, 5	17/18, 9	25, 12	33, 15	40, 19	$\omega_3 = 1.60, 1.34$
punt SOR/Sheldon	7/8, 4/5	11/12, 7	15, 8/9	20/22, 10	25/26, 12	$\omega_6 = 1.60, 1.32$
punt cycl. Chev.	7, 4	11, 6	17, 8	22, 10	25, 12	$\rho_8 = 0.9682, 0.8572$

Het eerste getal geeft het aantal iteraties voor $c = 1.5 \omega^{-12}$, het tweede voor $c = 1.5 \omega^{-11}$. We besluiten met enkele opmerkingen over de rekentijden van de blok-iteratieve methoden in vergelijking met die der punt methoden, per iteratie. Price and Varga (1962) geven een vermenigvuldigingsfactor van **1.26** voor de iteratietijd van de 2-lijn SOR methoden ten opzichte van de punt SOR methode, en een factor **2.04** voor de ADI methode. Deze getallen lijken onwaarschijnlijk klein. Voor de ADI methode vinden Young and Ehrlich (1960) een factor **3** (zie ook Dorr (1970), p. 259 en 260). Zelf vonden we voor de 2-lijn SOR methode een factor **1.66**, waar we hebben gekozen voor de methode van Parter (1959), zie hoofdstuk 3, in verband met het feit dat we bij de toepassing van 2-lijn methoden op de cyclisch gereduceerde vgl. nu wederom een tridiagonale matrix moeten inverteren, zodat de rekentijden per iteratie van de 2-lijn SOR methode toegepast op de cyclisch gereduceerde vgl. (helft van het aantal roosterpunten) en de punt SOR methode elkaar niet veel zullen ontlopen. Voor rekentijden van 2- en 3-lijn SOR methoden, toegepast op de cyclisch gereduceerde vgl. (niet langs diagonalen) en 2-lijn methoden toegepast op de oorspronkelijke vgl, waar matrix inversie plaats vindt volgens de algemene methode van hoofdstuk 3, wordt men verwezen naar Hageman and Varga (1964). Resumerend kan men zeggen dat de 2-lijn SOR methode (σ_7 -ord.) globaal een factor 2 sneller is dan de punt SOR methode, de ADI methode een factor 3 en de 2-lijn SOR methode (σ_7 -ord.) toegepast op de cyclisch gereduceerde vgl. een factor 4 (gebaseerd op een reductie factor ω^{-3}). Deze getallen hangen (speciaal voor de ADI methode) ook sterk af van het aantal roosterpunten (zie Price and Varga (1962)).

6. Besluit.

In de voorgaande hoofdstukken hebben we een overzicht gegeven van standaard iteratieve methoden om grote stelsels lineaire vergelijkingen op te lossen. We hebben enige experimenten besproken, waarbij we deze methoden toepasten bij het numeriek oplossen van een Poisson en Helmholtz vergelijking op een achthoek. Het bleek dat bij het oplossen van de Poisson vgl.blok-iteratieve methoden een convergentie snelheid hadden, die verre superieur was aan die van de punt methoden. In verband hiermee verdient het aanbeveling de rekenprogramma's voor de blok-iteratieve methoden te optimaliseren, zodat een minimale rekentijd per iteratie verkregen wordt en men zoveel mogelijk munt kan slaan uit de grotere convergentie snelheid van deze methoden. In de loop der jaren zijn nog wel andere technieken ontwikkeld om de convergentie te versnellen, zoals het toepassen van multi-rooster methoden (Nicolaidis (1975), Hyman (1977)) en het combineren van directe en iteratieve methoden (Dietrich, McDonald and Warn-Varnas (1975)). De indruk bestaat echter dat voor ons probleem, wat betreft convergentie snelheid en eenvoud, geen significante verbetering verkregen is ten opzichte van de 2-lijn diagonaal methode, toegepast op de cyclisch gereduceerde vergelijkingen.

7. Literatuur.

- Arms, R.J., Gates, L.D. and Zondek, B. (1956) A method of block iteration, J. Soc. Indust. Appl. Math., 4, pp. 220-229.
- de Boor, C. and Rice, J.R. (1963) Chebyshev approximation by $a \sqrt{(x-t_i)/(x+s_i)}$ and application to ADI iteration, J. Soc. Indust. Appl. Math., 11, pp. 159-169.
- Dietrich, D., McDonald, B.E., and Warn-Varnas, A. (1975) Optimized Block-implicit relaxation, J. Comp. Phys., 18, pp. 421-439.
- Dorr, F.W. (1970) The direct solution of the discrete Poisson equation on a rectangle, SIAM Review, 12, pp. 248-263.
- Forsythe, G.E. and Wasow, R. W. (1960) Finite Difference Methods for Partial Differential Equations, John Wiley, New York.
- Frankel, S.P. (1950) Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations, Math. Tables Aids Comput., 4, pp. 65-75.
- Golub, G.H. and Varga, R.S. (1961) Chebyshev semi-iterative methods, successive overrelaxation iterative methods, and second order Richardson iterative methods, Num. Math., 3, part I: pp. 147-156, part II: pp. 157-168.
- Hageman, L.A. (1962) Block iterative methods for two-cyclic matrix equations with special application to the numerical solution of the second order self adjoint elliptic partial differential equations in two dimensions, Report WAPD-TM-327, Bettis Atomic Power Laboratory, Pittsburgh, Pa.
- Hageman, L.A. and Varga, R.S. (1964) Block iterative methods for cyclically reduced matrix equations, Num. Math., 6, pp. 106-119.
- van der Houwen, P.J. (1968) Finite difference methods for solving partial differential equations, Math. Centre Tract, no. 20, Mathematisch Centrum, Amsterdam.
- Hyman, J.M. (1977) Mesh Refinement and Local Inversion of elliptic partial differential equations, J. Comp. Phys., 23, pp. 124-134.

- Leslie, L.M. and
McAvaney, B.J. (1973) Comparative Test of Direct and Iterative methods for solving Helmholtz-Type equations, Mon. Wea. Rev., 101, no. 3, pp. 235-239.
- Nicolaides, R.A. (1975) On multiple grid and related techniques for solving discrete elliptic systems, J. Comp. Phys., 19, pp. 418-431.
- Parter, S.V. (1959) On "two-line" iterative methods for the Laplace and biharmonic difference equations, Num. Math., 1, pp. 240-252.
- Parter, S.V. (1961) Multi-line iterative methods for elliptic difference equations and fundamental frequencies, Num. Math., 3, pp. 305-319.
- Parter, S.V. (1965) On estimating the "rates of convergence" of iterative methods for elliptic difference equations, Trans. Amer. Math. Soc., 114, pp. 320-354.
- Peaceman, D.W. and
Rachford, H.H. (1955) The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, J. Soc. Indust. Appl. Math., 3, pp. 28-41.
- Price, H.S. and
Varga, R.S. (1962) Recent Numerical experiments comparing successive overrelaxation iterative methods with alternating direction implicit methods, Report no. 91, Reservoir Mechanics Division, Gulf Research and Development Company, Pittsburgh, Pa.
- Richardson, L.F. (1910) The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 210, pp. 307-357.
- Sheldon, J.W. (1959) On the spectral norms of several iterative processes, J. Assoc. Comput. Mach., 6, pp. 494-505.
- Sheldon, J.W. (1960) Iterative methods for the solution of elliptic partial differential equations in: Mathematical methods for digital computers, A. Ralston, H.S. Wilf eds, John Wiley, New York, pp. 144-156.
- Varga, R.S. (1960) Factorization and normalized iterative methods in: Boundary Problems in Differential Equations, R.E. Langer ed, University of Wisconsin Press, Ma, pp. 122-142.

- Varga, R.S. (1962) Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N.J.
- Wachspress, E.L. and Habetler, G.J. (1960) An Alternating-Direction-Implicit iteration technique, J. Soc. Indust. Appl. Math., 8, pp. 403-424.
- Wachspress, E.L. (1962) Optimum Alternating-Direction-Implicit iteration parameters for a model problem, J. Soc.Indust.Appl. Math., 10, pp. 339-350.
- Wachspress, E.L. (1966) Iterative Solution of Elliptic Systems, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- Young, D.M. (1954,a) Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type, Trans. Amer. Math. Soc., 76, pp. 92-111.
- Young, D.M. (1954,b) On Richardson's method for solving linear systems with positive definite matrices, J. Math. Phys., 32, pp. 243-255.
- Young, D.M. (1955) ORDVAC solutions of the Dirichlet problem, J. Assoc. Comput. Mach., 2, pp. 137-161.
- Young, D.M. and Ehrlich, L. (1960) Some numerical studies of iterative methods for solving elliptic difference equations, in: Boundary Problems in Differential Equations, R.E. Langer ed., University of Wisconsin Press, Ma, pp. 143-162.
- Young, D.M. (1971) Iterative solution of large linear systems, Academic Press, New York.