

# KONINKLIJK NEDERLANDS METEOROLOGISCH INSTITUUT

WETENSCHAPPELIJK RAPPORT

SCIENTIFIC REPORT

W.R. 83 - 2

A.C.M. Beljaars

De invloed van meetsystemen op de waarneming van  
gemiddelden, standaarddeviatie en maxima.



---

De Bilt, 1983

Koninklijk Nederlands  
Meteorologisch Instituut  
Bibliotheek,  
Postbus 201,  
3730 AE DE BILT.  
Nederland.

Kon. Ned. Meteor. Inst.  
De Bilt

II.q.504.

Publikatienummer: K.N.M.I. W.R. 83-2 (FM)

Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut  
Fysisch Meteorologisch Onderzoek  
Postbus 201,  
3730 AE DE BILT  
Nederland

U.D.C. : 551.501.4 :  
551.501.75

De invloed van meetsystemen op de waarneming van gemiddelden,  
standaarddeviatie en maxima.

A.C.M. Beljaars

WR 83-2

Januari 1983

Samenvatting

Waarnemingen kunnen niet los gezien worden van het gebruikte meetsysteem; zij worden door het instrumentarium beïnvloed. In dit rapport wordt een meetsysteem gezien als een serie achter elkaar geplaatste filters, die het aangeboden spectrum van fluctuaties beïnvloeden. Aangezien de grootte van de standaarddeviatie, de hoogte van de maxima, de karakteristieke duur van de maxima en de spreiding in de schattingen van gemiddelde en standaarddeviatie uitgedrukt kunnen worden in het spectrum, is hiermee in principe de invloed van de meetketen bepaald. Een en ander wordt toegepast op windmeetsystemen, zoals die in het verleden op het KNMI in gebruik waren en op enkele nog te ontwerpen meetsystemen.

## 1. Inleiding

Bij het doen van (meteorologische) waarnemingen is het van belang te weten in hoeverre de waarneming beïnvloed wordt door het gebruikte meetsysteem. Een langzame opnemer zal bijvoorbeeld in een kleinere standaarddeviatie resulteren dan een snelle opnemer. Deze problematiek is actueel bij de modernisering van meetsystemen; het is nodig te weten hoe de waarnemingen met het nieuwe systeem zich verhouden tot die met het oude systeem. Dit laatste is van belang voor de continuïteit van klimatologische reeksen. Het lijkt me overigens onjuist om moderne meetsystemen dusdanig te maken, dat ze lijken op de oude systemen, enkel en alleen vanwege de continuïteit van de reeksen. Het doel van de metingen behoort centraal te staan. Wel is het nuttig een rekenmethode te hebben, waarmee de output van een modern systeem bewerkt kan worden, zodat de uitkomst lijkt op die van het oude systeem.

In dit rapport worden spreiding, maxima en de nauwkeurigheid van de schatting van gemiddelden en spreiding berekend aan de hand van het spectrum van de fluctuerende grootte. Door de invloed van diverse onderdelen in de meetketen op te vatten als filters, kan het effect op de uitkomsten berekend worden. Als input van de meetketen worden de bekende oppervlaktelaagspectra gebruikt van het Kansas-experiment (zie Kaimal e.a., 1972).

De theorie wordt toegepast op een windmeetsysteem, bestaande uit een anemometer met gegeven aanspreek lengte, een RC-filter of een middelingstijd en een AD-omzetter met gegeven samplefrequentie en nauwkeurigheid.

Aangezien in een meetketen, componenten in verschillende combinaties voorkomen, zullen allereerst de filterfuncties van veel voorkomende componenten bepaald worden. Daarna zal de relatie tussen spectra en standaarddeviatie, maxima en nauwkeurigheid van schattingen behandeld worden. Een en ander wordt toegelicht aan de hand van de windmeting.

## 2. Definities en filterfuncties

We beschouwen een tijdfunctie met gemiddelde,  $\mu_x$  en variantie  $\sigma_x^2$ . De grootheden  $\mu_x$  en  $\sigma_x^2$  zijn verwachtingswaarden (aangegeven met  $E[\ ]$ ):

$$\mu_x = E[x(t)] \quad (1)$$

$$\sigma_x^2 = E[x^2(t) - \mu_x^2] \quad (2)$$

Bij stationaire signalen geldt:

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (3)$$

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x^2(t) - \mu_x^2) dt \quad (4)$$

Voor de correctiefunctie <sup>la</sup> geldt

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t+\tau) dt \quad (5)$$

Voor het bijbehorende powerspectrum geldt:

$$P_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{2\pi i f \tau} d\tau \quad (6)$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) e^{-2\pi i f \tau} df \quad (7)$$

Er geldt nu ook

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) df \quad (8)$$

of

$$\sigma_x^2 = \int_0^{\infty} S_x(f) df \quad (9)$$

waarbij  $S_x(f) = 2 P_x(f)$  voor  $f > 0$   
 $= 0$  voor  $f < 0$ .

Het enkelzijdige powerspectrum  $S(f)$  geeft aan hoe de fluctuaties in de grootheid  $x$  verdeeld zijn over de frequenties.

Het effect van een linear instrument kan over het algemeen beschreven worden met zijn impulsresponsfunctie  $h(t)$  (zie Fig. 1). Dit betekent, dat

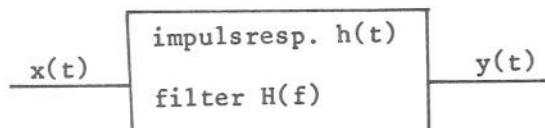


Fig. 1. De meetketen component met impulsrespons  $h(t)$  zet signaal  $x(t)$  om in  $y(t)$ .

een apparaat output  $h(t)$  geeft wanneer  $x(t) = \delta(t)$  (een Dirac-puls op  $t=0$ ). De output kan met behulp van een convolutieïntegraal uitgedrukt worden in het inputsignaal.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') h(t-t') dt' \quad (10)$$

Het spectrum van  $y(t)$  hangt op zeer eenvoudige wijze samen met dat van  $x(t)$ :

$$S_y(f) = H(f) S_x(f) \quad (11)$$

waarbij

$$H(f) = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{2\pi i f t} dt \right\|^2 \quad (12)$$

We noemen  $H(f)$  de filterfunctie, die bij het apparaat hoort. Wanneer een meetketen uit verschillende apparaten of onderdelen bestaat, die na elkaar geschakeld zijn, kan het spectrum aan de uitgang eenvoudigweg berekend worden door het spectrum aan de ingang met de verschillende filterfuncties te vermenigvuldigen.

Enkele voorbeelden van filters zijn:

#### A. RC-filter met tijdconstante $k$

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{k} e^{-t/k} \quad \text{voor } t > 0 \\ &= 0 \quad \text{voor } t < 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$H(f) = \frac{1}{1 + (2\pi f k)^2} \quad (14)$$

Een anemometer met aanspreek lengte  $l_0$  gedraagt zich als RC-filter met  $k = l_0/U$  en  $U$  als windsnelheid.

B. Lopend gemiddelde over tijdinterval  $t_0$

$$h(t) = \frac{1}{t_0} \quad \text{voor } -t_0 < t < 0$$

$$= 0 \quad \text{voor } t < -t_0 \text{ en } t > 0$$
(15)

$$H(f) = \left( \frac{\sin \pi f t_0}{\pi f t_0} \right)^2 \quad (16)$$

C. Optellen van 1 samples met tijdinterval  $\Delta$

$$k(t) = \frac{1}{l} \sum_{j=0}^{l-1} \delta(t-j\Delta) \quad (17)$$

$$H(f) = \frac{1}{l^2} \left( \frac{\sin \pi f l \Delta}{\sin \pi f \Delta} \right)^2 \quad (18)$$

D. Sampling met frequentie  $1/\Delta$

In tegenstelling tot de voorgaande operaties, kan sampling niet als een convolutie in het tijddomein geschreven worden. Om sampling te beschrijven vermenigvuldigen we de tijdfunctie  $x(t)$  met periodiek voorkomende pulsen. We kiezen hiervoor Dirac-pulsen:

$$y(t) = x(t) \cdot \Delta \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t-j\Delta) \quad (19)$$

De  $\delta$ -functie heeft alleen betekenis na integratie zoals Fourier-transformatie. Bij reële sampling wordt  $y(j) = x(j\Delta)$ . De correlatiefunctie wordt:

$$R_y(\tau) = \Delta \sum_{j=-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \delta(\tau+j\Delta)$$

$$P_y(f) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_x\left(f - \frac{j}{\Delta}\right) \quad (20)$$

Dit optellen van verschillende stukken van het spectrum met afstand  $1/\Delta$

wordt "aliasing" genoemd.

(Zie Blackman en, Tukey 1958 of Bendatt en Piersol, 1967 voor details).

### 3. Een praktijkvoorbeeld aan de hand van de windmeting

Het spectrum van windfluctuaties in de oppervlaktelaag is uitgebreid onderzocht in het Kansas experiment (zie Kaimal e.a., 1972). Voor neutrale omstandigheden (dit is een goede benadering bij harde wind) wordt de volgende uitdrukking voor het windspectrum  $S_u$  gevonden.

$$\frac{f S_u}{u_*^2} = \frac{105 f^+}{(1 + 33 f^+)^{5/3}} \quad (21)$$

$$\text{met } f^+ = \frac{fz}{U}$$

waarbij  $u_*$  = schuifspanningssnelheid

$z$  = hoogte

$U$  = gemiddelde windsnelheid

We beschouwen nu de meetketen van Fig. 2.

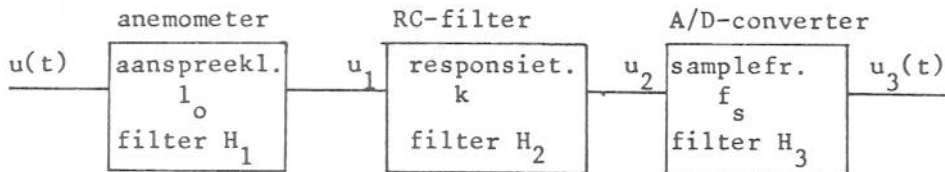


Fig. 2 Windmeetketen met 3 onderdelen.

Voor de diverse filters geldt volgens (14) en (20)

$$H_1 = \frac{1}{1 + (2\pi f l_0 / U)^2}$$

$$H_2 = \frac{1}{1 + (2\pi f k)^2}$$

$$P_{u_3}(f) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_{u_2}(f - j f_s) \quad (22)$$



$$\text{met } P_{u_2} = P_u \cdot H_1 \cdot H_2 \quad \text{en } P_u(f) = \frac{1}{2} S_u(f) \text{ voor } f > 0$$

$$P_u(f) = \frac{1}{2} S_u(-f) \text{ voor } f < 0.$$

In plaats van een frequentiemeter met A/D omzetter, kan ook direkt het aantal pulsen van de anemometer geteld worden. Dit houdt middeling in over de integratietijd  $t_0$  en sampling met een frequentie  $1/t_0$ . Er moet nu dus een looptijdfilter gebruikt worden voor  $H_2$ .

#### 4. Gemiddelde en spreiding van een signaal

Van een signaal  $x(t)$  kunnen we gemiddelde en  $\mu_x$  en variantie  $\sigma_x^2$  vinden door de samples en de kwadraten ervan te middelen.

$$\mu_x = E\left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x(j\Delta)\right] = E(\bar{x}) \quad (23)$$

$$\sigma_x^2 = E\left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x^2(j\Delta) - \mu_x^2)\right] = E(\overline{x'^2}) \quad (24)$$

$$\text{met } x' = x - \mu_x$$

Filtering door de verschillende onderdelen van de meetketen veroorzaakt geen afwijking in het gemiddelde, maar wel een afwijking in de variantie. De variantie van het signaal aan het einde van de meetketen is kleiner omdat een deel van de fluctuaties weggefilterd zijn. Het effect ervan kan berekend worden door het gefilterde spectrum te integreren. In het voorbeeld van Fig. 2 geldt:

$$\frac{\sigma_{u_3}^2}{\sigma_u^2} = \frac{\int_0^\infty H_1 H_2 S_u df}{\int_0^\infty S_u df} \quad (25)$$

Sampling van een signaal veroorzaakt geen "bias" in de variantie; de integraal van het spectrum blijft dezelfde voor en na sampling. Na sampling moet men  $\frac{1}{2}f_s$  als bovengrens van de integraal kiezen. De bijdrage tot de variantie boven deze frequentie is teruggevouwen. Dit betekent, dat de samplefrequentie niet noodzakelijkerwijs in de buurt van de maximale frequentie in het signaal hoeft te liggen. Voor de bepaling van gemiddelden en varianties mag  $f_s$  ook lager

zijn. Wanneer  $f_s$  echter te laag gekozen wordt, worden de schattingen (23) en (24) onnauwkeurig. Om dit effect te schatten, berekenen we de variantie van deze schattingen.

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = E\left\{\left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x(j\Delta)\right] \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k\Delta)\right]\right\} \quad (26)$$

$$\sigma_{\bar{x}^2}^2 = E\left\{\left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x^2(j\Delta) - \bar{x}^2)\right] \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x^2(k\Delta) - \bar{x}^2)\right]\right\} \quad (27)$$

Hierbij is aangenomen, dat  $\mu_x = 0$  hetgeen geen beperking inhoudt maar de formules iets korter maakt ( $x' = x$ ).

Uitwerken levert:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N E[x(j\Delta) x(k\Delta)] \quad (28)$$

$$\sigma_{\bar{x}^2}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N E[x^2(j\Delta) x^2(k\Delta)] - (\bar{x}^2)^2 \quad (29)$$

Wanneer  $x(t)$  Gaussisch is kan (29) omgewerkt worden tot (vg. Bendatt en Piersol, 1966, p. 345):

$$\sigma_{\bar{x}^2}^2 = \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \{E[x(j\Delta) x(k\Delta)]\}^2 \quad (30)$$

In (28) en (30) staan de verwachtingswaarden van het produkt van het signaal op twee tijdstippen. Dit is per definitie de correlatiefunctie:

$$E[x(j\Delta) x(k\Delta)] = R\{(j-k)\Delta\} = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) e^{i2\pi f(j-k)\Delta} df .$$

Uitwerken levert:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} P(f) e^{i2\pi f(j-k)\Delta} df$$

$$= \frac{1}{N^2} \int_{-\infty}^{\infty} P(f) \left( \frac{\sin \pi f N \Delta}{\sin \pi f \Delta} \right)^2 df \quad (31)$$

$$\frac{\sigma_x^2}{x^2} = \frac{2}{N^2} \int_{-\infty}^{\infty} P_2(f) \left( \frac{\sin \pi f N \Delta}{\sin \pi f \Delta} \right)^2 df \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \text{waarbij } P_2(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x^2(\tau) e^{2\pi f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(f') P(f-f') df' \end{aligned}$$

Via (31) en (32) zijn de varianties van de schattingen  $\bar{x}$  en  $\overline{x^2}$  gekoppeld aan het spectrum van  $x(t)$ .

Voor grote  $N$  kan de filterfunctie  $D(f) = (\sin \pi f N \Delta / \sin \pi f \Delta)^2$  benaderd worden door een rij pulsen:

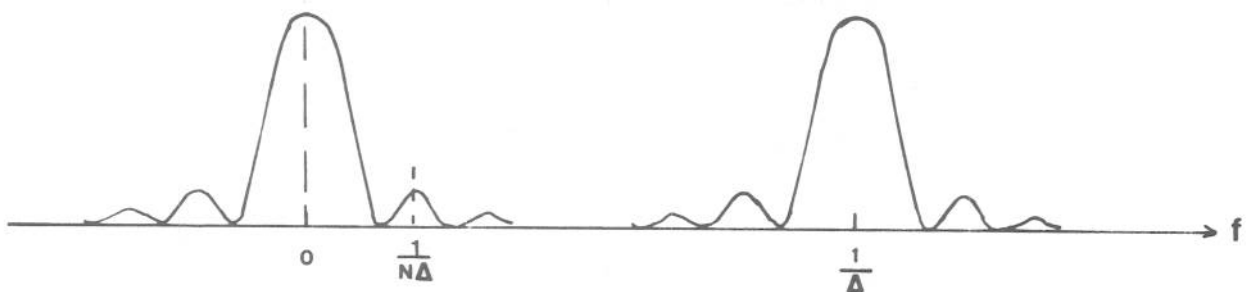


Fig. 3. Grafische representie van  $(\sin \pi f N \Delta / \sin \pi f \Delta)^2$ .

$$D(f) = \delta\left(f - \frac{n}{\Delta}\right) \bar{D} \quad \text{waarbij } n = 0, 1, 2, \dots, \text{ en}$$

$$\bar{D} = \int_{-\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}} D(f) df = \frac{N}{\Delta}$$

(zie Gradshteyn and Ryzhik, 1980 blz. 371).

De uitdrukkingen (31) en (32) kunnen nu als volgt benaderd worden voor grote  $N$ .

$$\sigma_{\frac{x}{x}}^2 = \frac{1}{N\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\left(\frac{n}{\Delta}\right) \quad (33)$$

$$\sigma_{\frac{x}{2}}^2 = \frac{2}{N\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_2\left(\frac{n}{\Delta}\right) \quad (34)$$

Bij een gegeven powerspectrum moet gesommeerd worden over een aantal diskrete frequenties met afstand  $1/\Delta$ . Wanneer de samplefrequentie  $1/\Delta$  groter is dan de maximale frequentie, die in het signaal voorkomt, is er alleen een bijdrage bij  $f = 0$ . Deze bijdrage noemen we de "fundamentele variantie", die onvermijdelijk is. Zij is een gevolg van de eindige middelingstijd, die gekozen wordt als compromis tussen kleine variantie in de schattingen en trend. (10 minuten blijkt in de praktijk goed te voldoen). De bijdrage van  $1/\Delta$ ,  $2/\Delta$  ... enz. zijn het gevolg van de lage samplefrequentie. We moeten er voor zorgen, dat deze sampleonnauwkeurigheid klein blijft t.o.v. de fundamentele onnauwkeurigheid.

Voor het windspectrum (21) kunnen we een en ander uitrekenen, door het  $-5/3$  spectrum als benadering te nemen ( $S(f) = c f^{-5/3}$ ).

$$\begin{aligned} \sigma_{\frac{x}{x}}^2 &= \frac{1}{N\Delta} \frac{1}{2} S(0) + \frac{1}{N\Delta} \{S(f_s) + S(2f_s) \dots\} \\ &= \frac{1}{2N\Delta} S(0) + \frac{1}{N\Delta} \frac{c}{f_s^{5/3}} \left\{1 + \frac{1}{2^{5/3}} + \frac{1}{3^{5/3}} \dots\right\} \\ &\sim \frac{1}{2N\Delta} S(0) \left\{1 + \frac{4 S(f_s)}{S(0)}\right\} \quad (35) \\ \sigma_{\frac{x}{x}} &= \left(\frac{S(0)}{2N\Delta}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{1 + 2 \frac{S(f_s)}{S(0)}\right\} \end{aligned}$$

Opgemerkt dient te worden, dat het resultaat overeenkomt met het teruggevouwen spectrum bij  $f = 0$ .

We moeten  $f_s$  nu dusdanig kiezen, dat de tweede term in (35) en (36) klein blijft t.o.v. 1.

Tabel 1. Numerieke berekeningen aan de hand van het windspectrum.

$\frac{f_s z}{U}$	$\frac{S(f_s)}{S(0)}$	$\frac{S_2(f_s)}{S_2(0)}$	$P_2$
0	-	-	0.0259
0.1	0.08	0.355	0.0092
0.2	0.03	0.169	0.0044
0.5	0.01	0.050	0.0013
1	0.005	0.015	0.0004

}  $*(\frac{1}{2} u_*^2 \frac{z}{U} 105)^2 \frac{U}{z}$

Wanneer we voor  $\frac{\sigma^2}{2}$  dezelfde sommatie toepassen als in (35) krijgen we:

$$\frac{\sigma^2}{2} = \left( \frac{1}{N\Delta} S_2(0) \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{2 S_2(f_s)}{S_2(0)} \right\} \quad (36)$$

Voorbeeld:

Bij  $z = 10$  en  $U = 10$  m/s en een samplefrequentie van 0.2 Hz wordt de fout in de schatting van  $U$  voor  $2 * 0.03 = 6\%$  bepaald door de lage samplefrequentie en de fout in de  $\sigma_u^2$  voor  $2 * 0.17 = 34\%$ .

Voor de fundamentele schattingsfouten vinden we

$$\frac{\sigma_u}{U} = \frac{\left\{ \frac{1}{2N\Delta} S(0) \right\}^{\frac{1}{2}}}{\frac{u_*}{k} \ln \frac{z}{z_0}} = 0.026 \quad (37)$$

$$\frac{\sigma_{u'^2}}{u'^2} = \frac{\left\{ \frac{1}{N\Delta} S(0) \right\}^{\frac{1}{2}}}{u'^2} \sim 0.12 \quad (38)$$

met  $N\Delta = 600$   
 $\frac{u'^2}{u_*^2} = 4$   
 $z_0 = 0.1, U = 10, z = 10$

Met 0.2 Hz sampling wordt dit: 3% en 16%.

Deze foutenberekeningen zijn gebaseerd op het ongefilterde windspectrum. Iedere meetketen zal echter een deel van de hoge frequenties wegfilteren

waardoor het aandeel van de sampleonnauwkeurigheid kleiner wordt.

### 5. Het optreden van maxima in een tijdreeks

We gaan uit van een stochastisch signaal  $x(t)$  met gemiddelde  $\mu_x$ , spreiding  $\sigma_x$ , powerspectrum  $S(f)$  en een Gaussische verdelingsfunctie  $\phi\{(x-\mu_x)/\sigma_x\}$ . De kans, dat in tijdinterval  $T_0$  het genormeerde signaalmaximum  $(x_{\max}-\mu_x)/\sigma_x$  kleiner is dan  $x_s$  kan als volgt geschreven worden (Dyhr-Nielsen, 1972):

$$P\left(\frac{x_{\max}-\mu_x}{\sigma_x} < x_s, T_0\right) = \Phi(x_s) \exp\left\{-T_0 \sqrt{\frac{\lambda_2}{2\pi}} \frac{\phi(x_s)}{\Phi(x_s)}\right\} \quad (39)$$

$$\text{met } \phi(x_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_s^2}{2}} \quad (40)$$

$$\Phi(x_s) = \int_{-\infty}^{x_s} \phi(x_s) dx_s = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x_s}{\sqrt{2}}\right)$$

De grootheid  $\lambda_2$  is het 2e moment van het power-spectrum

$$\lambda_2 = 4\pi^2 \int_0^{\infty} f^2 \frac{S(f)}{\sigma_x^2} df \quad (41)$$

We kiezen nu de waarde  $\tilde{x}_s$  voor de parameter  $x_s$ , dusdanig dat in de helft van de gevallen het maximum onder  $\tilde{x}_s$  ligt en noemen dit de te verwachten vlaag (dit is de mediaanwaarde in de verdeling van  $x_s$ )

$$0.5 = \Phi(\tilde{x}_s) \exp\left\{-T_0 \sqrt{\frac{\lambda_2}{2\pi}} \frac{\phi(\tilde{x}_s)}{\Phi(\tilde{x}_s)}\right\} \quad (42)$$

Aangezien we over maxima praten en  $\tilde{x}_s$  vrij groot zal zijn (in het algemeen

groter dan 2) kan  $\phi(\tilde{x}_s)$  gelijk aan 1 gesteld worden.

$$0.5 = \exp \left\{ - T_0 \sqrt{\frac{\lambda_2}{2\pi}} \phi(\tilde{x}_s) \right\}$$

of

$$\tilde{x}_s = \left[ 2 \ln \left\{ T_0 \sqrt{\frac{\lambda_2}{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln 2}} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (43)$$

De grootheid  $\left(\frac{\lambda_2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}$  kan opgevat worden als de karakteristieke tijdschaal van het spectrum. We definiëren

$$\tau_s = \left(\frac{2\pi}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\tau_s = \left[ \frac{2\pi \int_0^{\infty} S(f) df}{\int_0^{\infty} f^2 S(f) df} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (44)$$

Vergelijking (43) wordt nu:

$$\tilde{x}_s = \left[ 2 \ln \left\{ \frac{T_0}{\tau_s} \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln 2}} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (45)$$

Wieringa (1973) gebruikt een vlagformule die hier erg op lijkt namelijk

$$\tilde{x}_s = 1.42 + 0.3013 \left\{ \ln \left( \frac{T_0}{\tau_s} - 4 \right) \right\} \quad (46)$$

waarbij  $\tau_s$  de vlagtijd genoemd wordt. Uitdrukking (45) en (46) blijken goed met elkaar overeen te komen (zie tabel 2).

Tabel 2. Vergelijking met de vlagformule van Wieringa.

$T_0/\tau_s$	$\tilde{x}_s$ uit (45)	$\tilde{x}_s$ uit (46)
20	2.210	2.255
50	2.592	2.573
100	2.847	2.795
500	3.365	3.290
1000	3.565	3.500

Het voordeel van (45) t.o.v. de uitdrukking van Wieringa is, dat de grootheden, die erin voorkomen een duidelijke betekenis hebben. Met name de vlaagtijd  $\tau_s$  kan direkt gerelateerd worden aan het spectrum van het signaal, waardoor ook de invloed van filtering door de meetketen direkt bekeken kan worden. De invloed van sampling vormt hierop een uitzondering. De statistiek van diskrete signalen moet apart bekeken worden. Een en ander is uitgewerkt in Appendix A en levert een aangepaste waarde voor  $\lambda_2$  of  $\tau_s$  op. In de limiet voor  $f_s \rightarrow \infty$  gaat deze uitdrukking over in de continue oplossing.

Het is duidelijk, dat  $\tau_s$  iets zegt over de kortste tijdschalen in de tijdfunctie  $x(t)$ . Bij wind zijn we geïnteresseerd in vlagen die enkele seconden aanhouden met als toepassing de belasting op gebouwen. We zoeken naar vlagen met een lengsteschaal van 50 tot 100 m. Bij harde wind van 10 à 20 m/s komt dit neer op vlaagtijden van 2 à 10 s. We zullen nu nagaan hoe  $\tau_s$  zich gedraagt wanneer we een windsignaal filteren met een looptijd-filter met  $t_0$  seconden middelingstijd.

$$\tau_s^2 = \frac{2\pi \int_0^\infty \frac{1}{(1 + 33 \frac{fz}{U})^{5/3}} \left(\frac{\sin \pi ft_0}{\pi ft_0}\right)^2 df}{\int_0^\infty \frac{f^2}{(1 + 33 \frac{fz}{U})^{5/3}} \left(\frac{\sin \pi ft_0}{\pi ft_0}\right)^2 df} \quad (47)$$

De dimensieloze relatie tussen  $U\tau_s/z$  en  $Ut_0/z$  is weergegeven in Fig. 4. Het blijkt, dat  $\tau_s$  en  $t_0$  dezelfde orde van grootte hebben; de relatie is echter niet lineair, waardoor  $U/z$  een rol blijft spelen.

De absolute hoogte van de vlaag wordt niet alleen bepaald door de tijdschaal  $\tau_s$  via (45), maar ook door de mate waarin de standaarddeviatie beïnvloed wordt door de meetketen. De verhouding van standaarddeviatie voor en na een looptijdfilter wordt gegeven in Fig. 5 als functie van de middelingstijd van het filter. (Dit filter is toegepast op een neutraal windspectrum).



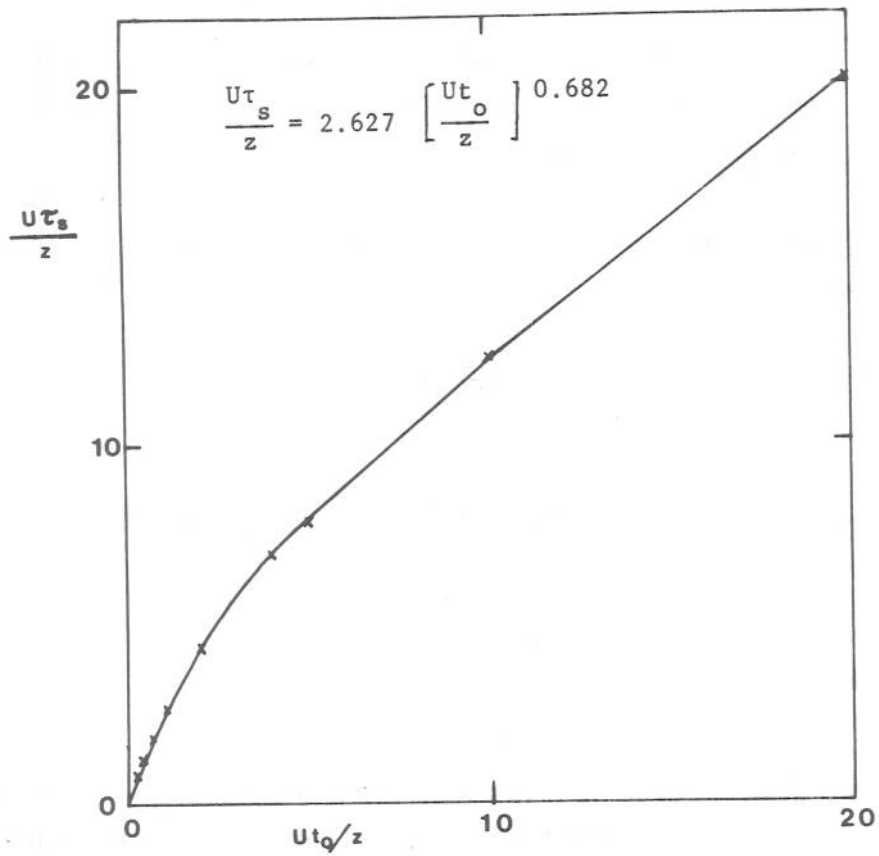


Fig. 4. De grootheid  $\tau_s$  uit (44) horend bij een neutraal windspectrum na filtering met een looptijdfilter met middelingstijd  $t_0$ .

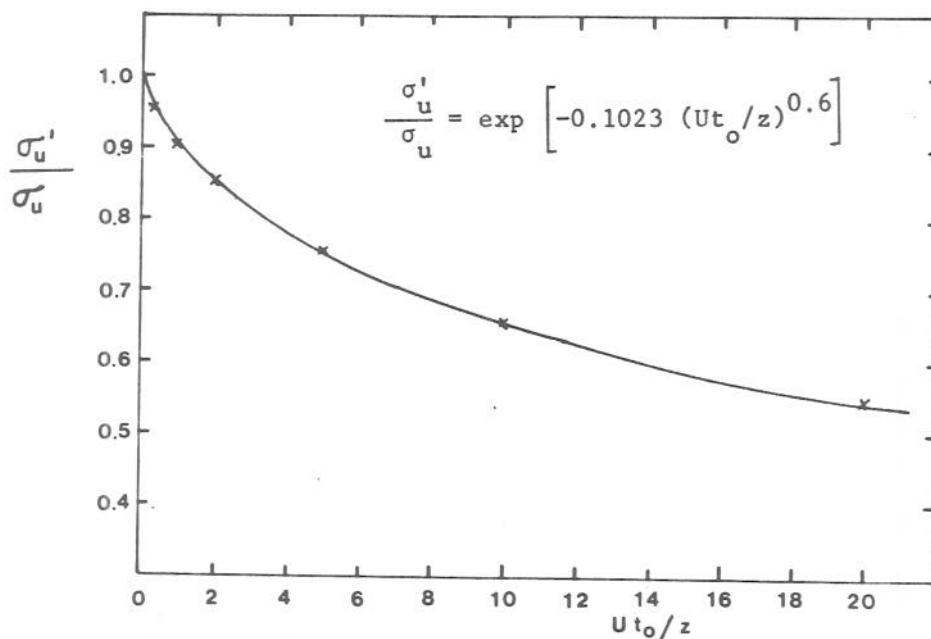


Fig. 5. De verhouding van de standaarddeviatie  $\sigma_u'/\sigma_u$  voor en na een looptijdfilter met integratietijd  $t_0$  toegepast op een neutraal windspectrum.

De mediaanwaarde van het maximum zoals, dat na een looptijdfilter geregistreerd wordt is:

$$\frac{U_{\max} - U}{u_*} = \frac{\sigma_u'}{u_*} [2 \ln \left\{ \frac{T_0}{\tau_s} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \ln 2} \right\}]^{\frac{1}{2}} \quad (48)$$

$$= 2.184 \exp \left\{ -0.1023 \left( \frac{Ut_0}{z} \right)^{0.60} \right\} [2 \ln \left\{ \frac{T_0}{\tau_s} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \ln 2} \right\}]^{\frac{1}{2}} \quad (49)$$

$$\text{met } \tau_s' = \frac{z}{U} 2.627 \left( \frac{Ut_0}{z} \right)^{0.682} \quad (50)$$

De accenten geven aan, dat het gaat om grootheden na het filter. De constante 2.184 is de verhouding  $\sigma_u'/u_*$ , die hoort bij het gekozen neutrale windspectrum. De empirische uitdrukkingen geven de berekende punten in Fig. 4 en 5 slechts bij benadering weer. Deze functie zijn niet bruikbaar voor  $Ut_0/z > 20$ .

Bij een gegeven meetsysteem zijn we niet alleen geïnteresseerd in de hoogte van de maxima, die aan de uitgang verschijnen, maar ook in de karakteristieke tijdschaal of lengteschaal, die bij dit soort maxima hoort. De lengte van een windstoot of windmaximum is in principe oneindig klein. Toch is

er wel een karakteristieke tijdschaal aan toe te kennen in de vorm van  $\tau_s$ . Het is echter universeler (de invloed van  $\sigma_x'/\sigma_u$  komt dan ook tot uitdrukking) om de vlaagtijd te definiëren aan de hand van een standaardfilter. We gebruiken hiervoor een looptijdfilter.

De karakteristieke vlaagtijd  $t_0$  is nu als volgt gedefinieerd. Voor een gegeven meetketen, rekenen we  $(U'_{\max} - U)/u_*$  uit en kiezen de tijd  $t_0$  dusdanig, dat een looptijdfilter met integratietijd  $t_0$  hetzelfde maximum oplevert. De tijd  $t_0$  noemen we de vlaagtijd;  $U t_0$  noemen we de vlaaglengte.

Voor twee eenvoudige meetsystemen bestaande uit een looptijdfilter met middelingstijd  $t_0$  of een RC-filter met tijdconstante  $k$  is de effectieve vlaaglengte uitgezet in Fig. 6 en de vlaagamplitude in Fig. 7. De vlaaglengte geschaald op  $z$  wordt een functie van  $U t_0/z$  of  $U k/z$ ; de vlaagamplitude hangt van  $U T_0/z$  en van  $U t_0/z$  of  $U k/z$  af. Hierbij wordt er dus vanuit gegaan, dat het windspectrum direct gefilterd wordt zonder tussenkomst van een anemometer.

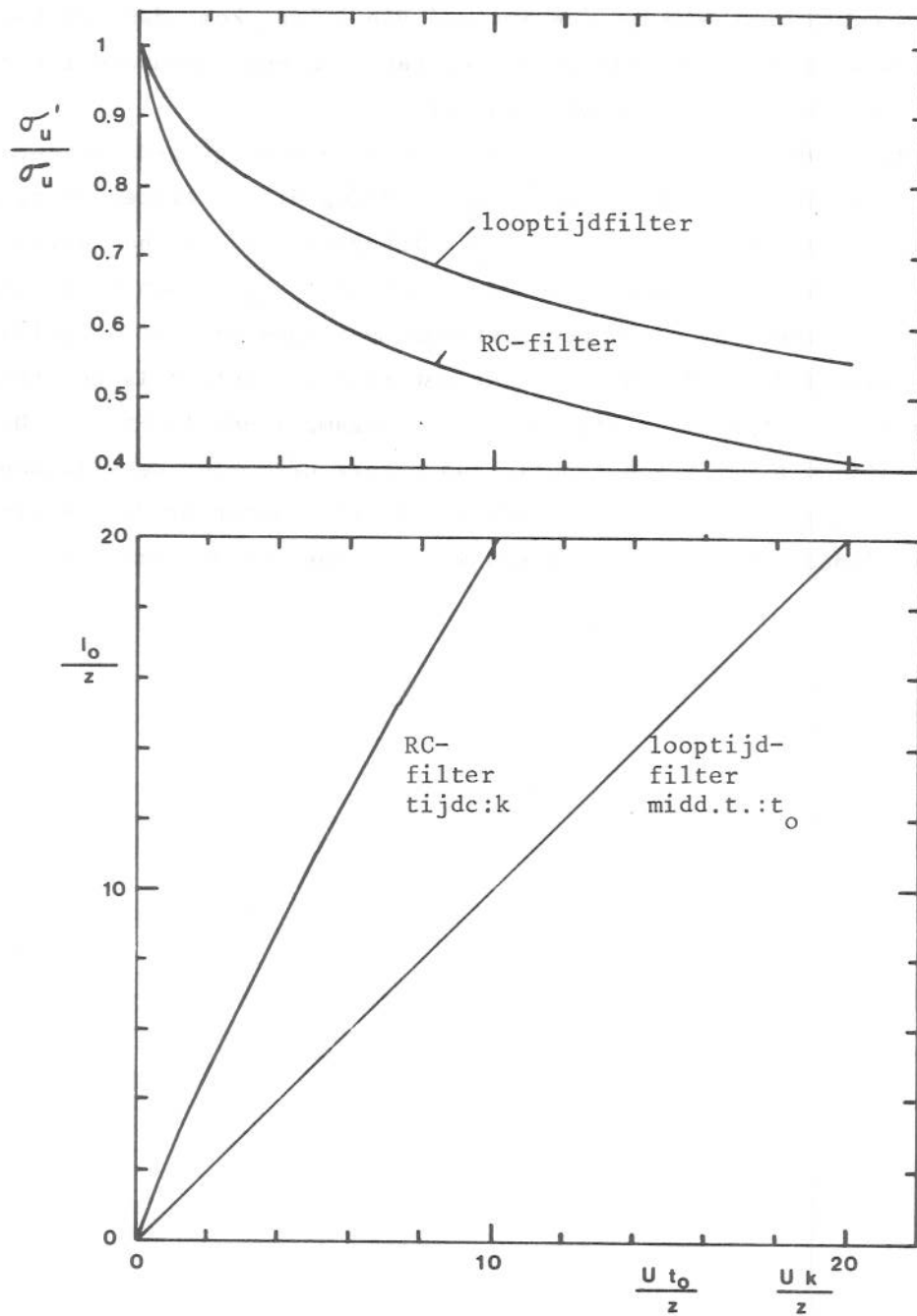


Fig. 6. De invloed van een RC-filter en een looptijdfilter (toegepast op een neutraal windspectrum) op de geregistreeerde standaarddeviatie en vlaaglengte.

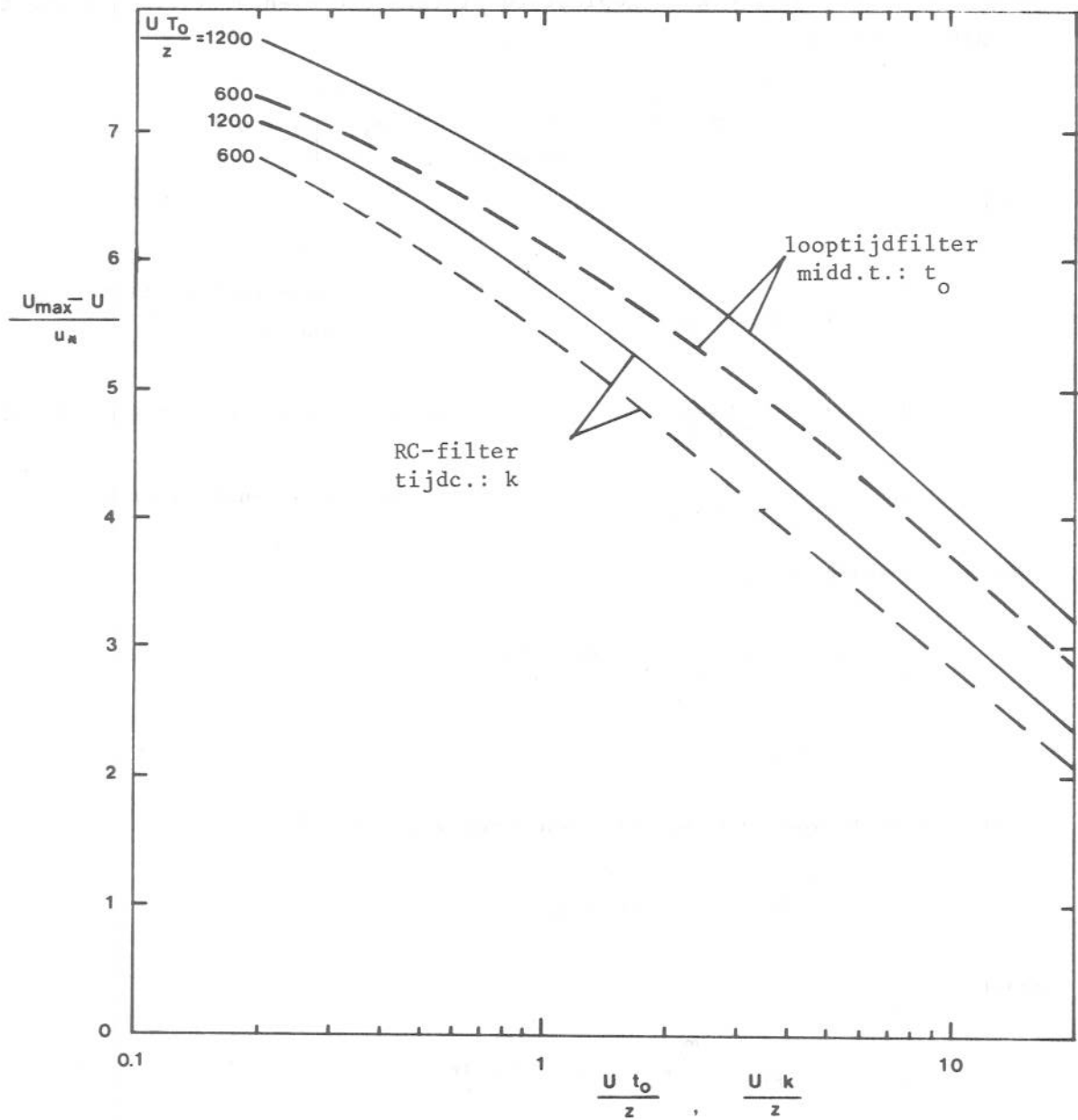
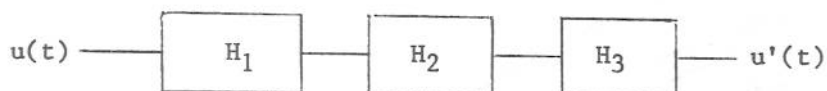


Fig. 7. De invloed van een RC-filter of een looptijdfilter op de geregistreeerde laagamplitude.

## 6. De karakteristieken van een gegeven wind-meetsysteem

We nemen aan, dat een bestaand meetsysteem gekarakteriseerd kan worden door een serie achter elkaar geplaatste filters met eventueel als laatste trap een A/D-omzetting.



Bijvoorbeeld:

$$H_1 = \frac{1}{1 + (2\pi f \frac{l_0}{U})^2}$$

met  $l_0$  = aanspreek lengte van de anemometer.

$$H_2 = \frac{1}{1 + (2\pi f k_2)^2}$$

met  $k_2$  = tijdconst. frequentiemeter.

$$H_3 = \frac{1}{1 + (2\pi f k_3)^2}$$

met  $k_3$  = tijdconst. recorder.

Voor de spreiding geldt:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{u'}'}{\sigma_{u_*}} &= \left\{ \int_0^{\infty} H_1 H_2 H_3 S(f) df \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= F \left( \frac{l_0}{z}, \frac{U k_2}{z}, \frac{U k_3}{z} \right) \end{aligned} \quad (51)$$

Bovendien geldt voor het neutrale spectrum volgens (21):

$$\sigma_u = \int_0^{\infty} S(f) df = 2.184 u_* \quad (52)$$

zodat:

$$\frac{\sigma_{u'}'}{\sigma_u} = \frac{1}{2.184} \left\{ \int_0^{\infty} H_1 H_2 H_3 S(f) df \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (53)$$

Bij een gegeven situatie met bekende meethoogte  $z$ , aanspreek lengte  $l_0$  en tijdconstanten  $k_2$  en  $k_3$ , hangt  $\sigma_{u'}'/u_*$  alleen van de windsnelheid  $U$  af. Eenmalige evaluatie van (50) levert dus de fout op, die in de meting van  $\sigma_u$  gemaakt wordt. Eventuele sampling heeft hier geen invloed op.

Een tweede aspect van het meetsysteem is de invloed op de vlagmeting. Wanneer we in een meetinterval een maximum opsporen, doet zich de vraag voor

hoe hoog dit maximum is en welke vlagduur hier bij hoort. Hiertoe moet eerst de korte tijdschaal  $\tau'_s$  uitgerekend worden.

$$\tau'_s = \left[ \frac{2\pi \int_0^{\infty} H_1 H_2 H_3 S(f) df}{\int_0^{\infty} f^2 H_1 H_2 H_3 S(f) df} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (54)$$

In dimensieloze vorm levert dit

$$\frac{\tau'_s U}{z} = G \left( \frac{l_0}{z}, \frac{u k_2}{z}, \frac{u k_3}{z} \right) \quad (55)$$

Voor bekende  $z$ ,  $l_0$ ,  $k_2$  en  $k_3$  geeft deze uitdrukking  $\tau'_s$  als functie van  $U$ . Het geregistreeerde maximum wordt nu

$$\frac{U'_{\max} - U}{u_*} = \frac{\sigma'_u}{u_*} \left[ 2 \ln \left\{ \frac{T_0}{\tau'_s} \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln 2}} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (56)$$

waarbij voor  $\sigma'_u/u_*$  uitdrukking (53) van toepassing is.

Volgens de definitie van de vlagtijd moet er nu een looptijdfilter met integratietijd  $t_0$  gekozen worden, dat hetzelfde maximum oplevert. Hiervoor kan de empirische uitdrukking (49) gekozen worden. Opnieuw geldt, dat de vlagtijd  $t_0$  of de vlaglengte  $U t_0$  afhangt van de windsnelheid, wanneer de meethoogte  $z$  en de karakteristieken van het meetsysteem gegeven zijn. Het is nu ook vrij eenvoudig om van een gemeten maximum  $U'_{\max}$  by vlagduur  $t_0'$  om te rekenen naar een ander vlagtijd  $t_0''$ . Hiertoe kan uitdrukking (48) gebruikt worden, waarbij deze zowel toegepast wordt op het gemeten maximum als op de gewenste vlag:

$$\frac{U''_{\max} - U}{U'_{\max} - U} = \frac{\exp\{-0.1023 \left(\frac{U t_0''}{z}\right)^{0.60}\} \left[ 2 \ln \left\{ \frac{T_0}{\tau_s''} \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln 2}} \right\} \right]^{\frac{1}{2}}}{\exp\{-0.1023 \left(\frac{U t_0'}{z}\right)^{0.60}\} \left[ 2 \ln \left\{ \frac{T_0}{\tau_s'} \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln 2}} \right\} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (57)$$

$$\text{met } \tau_s' = \frac{z}{u} 2.627 \left(\frac{U t_0'}{z}\right)^{0.682} \text{ en } \tau_s'' = \frac{z}{u} 2.627 \left(\frac{U t_0''}{z}\right)^{0.682}$$

#### Opmerking

Uit het bovenstaande zou geconcludeerd kunnen worden, dat de windstoten berekend kunnen worden uit gemiddelde en standaarddeviatie. Dit is alleen het

geval wanneer aan de veronderstellingen bij de gepresenteerde theorie voldaan is (o.a. Gaussische verdelingsfunctie, stationariteit en neutraal spectrum). Aan deze veronderstellingen is zelden voldaan, vooral niet in de gevallen waarbij windstoten van belang zijn (bijv. bij buifg weer). Het is daarom van belang dat windstoten geregistreerd worden met een vlaglengte in de buurt van de lengte, die de toepassing vraagt. De theorie wordt wel voldoende geacht om het gedrag van windstoten en de invloed van meetsystemen hierop te bepalen. Dit is gebaseerd op het idee, dat de fout in correcties door overgang van het ene meetsysteem op het andere of door omrekening van de ene vlaglengte naar de andere, groot mag zijn wanneer de correcties klein zijn.

## 7. Diskretisatie

Bij het gebruik van een A/D omzetter wordt een continue signaal omgezet in een diskreet signaal bestaande uit een eindig aantal diskretisatieniveau's. Zo'n omzetter kan bestaan uit een codeschijf in de windvaan, uit een A/D-omzetter of uit een procedure waarbij pulsen van een anemometer worden omgezet in meetsamples. (Zie fig. 8).

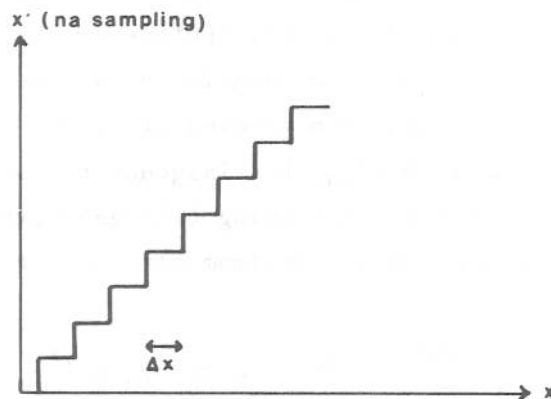


Fig. 8. Signaal voor en na diskretisatie.

Volgens (Dyhr-Nielsen, 1972) geldt voor de tijdreeks na A/D-omzetting:

$$x'(t) = x(t) + n(t) \quad (58)$$

waarbij  $n$  de diskretisatieruis voorstelt. De verdelingsfunctie van  $n$  is uniform tussen  $-\Delta x/2$  en  $\Delta x/2$ . Voor de spreiding geldt:



$$\sigma_{x',2}^2 = \sigma_x^2 + \frac{1}{12} (\Delta x)^2 \quad (59)$$

De bias in het gemiddelde is nihil indien de fluctuaties groter zijn dan de diskretisatiefout.

#### 8. Enkele numerieke voorbeelden en conclusies

Voor een aantal meetconfiguraties is de verhouding van gemeten en aangeboden spreiding  $\sigma_u'/\sigma_u$ , de vlaglengte  $U t_0'$ , die het systeem genereert en de vlagintensiteit  $(U_{\max}-U)/u_*$  berekend. De tussenresultaten na ieder element van de meetketen worden in tabel 4 gegeven. Hiermee kan nagegaan worden welke element een dominante invloed heeft in het geheel.

Uit de resultaten kunnen een aantal conclusies getrokken worden:

- Alleen bij snelle meetsystemen (bijv. KNMI-nieuw met servorecorder) heeft de aanspreeklengte van de anemometer invloed op de vlaglengte. Bij een oneindig snel meetsysteem wordt de vlaglengte ongeveer 2 maal de aanspreeklengte van de anemometer. Wanneer we geïnteresseerd zijn in vlaglengten van 50 à 100 m vormt de anemometer dus zelden een beperking.
- De vlaglengten van tabel 3 zijn enkele malen kleiner dan die door Wieringa gehanteerd worden voor dezelfde systemen (zie tabel 4). Dit verschil heeft voornamelijk te maken met de definitie. De vlaglengten van Wieringa zijn gedefinieerd aan de hand van metingen met RC-filters (recorders), terwijl de huidige vlaglengten gebaseerd zijn op looptijdfilters. Bovendien moet de vlagduur van Wieringa (voorzover gebaseerd op de filterfunctie van een RC-netwerk) gezien worden als een periodetijd, terwijl de huidige vlagduur gezien kan worden als de tijd, dat een maximum aanwezig is. De laatste definitie heeft een duidelijke fysische betekenis: Een geregistreerd maximum na een looptijdfilter met integratietijd  $t_0$  is inderdaad aanwezig geweest over een tijdinterval met duur  $t_0$ .
- De huidige theorie gaat uit van afhankelijke metingen (voor de wind is de correlatietijd van de orde van enkele minuten) en kan toegepast worden op een breed scala van meetsystemen.
- De samplefrequentie heeft invloed op de hoogte van maxima, omdat bij groter wordende afstand tussen opeenvolgende samples steeds meer maxima worden overgeslagen. Dit maakt het meten van maxima onbetrouwbaar bij te grote afstand tussen twee samples. De samplefrequentie moet daarom in zekere verhouding staan tot de afsnijfrequentie van het filter. Bij een looptijd-

Tabel 3. De consequenties van enkele windmeetconfiguraties.

Systeem	meet- hoogte z (m)	anemo- meter aanspr. l (m)	RC- filter tj.jdc. (s)	loopt. filter m.t. (s)	A/D omz. $f_s$ (Hz)	$\sigma_u' / \sigma_u$			vlaaglengthe u to' (m)			$(U_{\max} - U) / U_x$		
						u=5	u=10	u=20	u=5	u=10	u=20	u=5	u=10	u=20
1. KNMI-oud	10	5	0.8	-	-	0.86	0.82	0.77	19	28	47	5.1	5.2	5.1
2. KNMI-nieuw	10	3	0.1	-	-	0.91	0.91	0.90	7	8	10	5.9	6.3	6.5
3. Milit. oud	10	3	0.8	-	-	0.88	0.84	0.77	15	24	43	5.4	5.4	5.2
4. Milit. Thiess-molen	10	5	0.80	-	-	0.86	0.82	0.77	19	28	47	5.1	5.2	5.1
5. Meetpalen	10	3	2	-	-	0.82	0.75	0.66	28	52	97	4.7	4.6	4.2
6. Dines	10	0.5	0.6	-	-	0.91	0.87	0.81	7	14	29	5.9	5.8	5.6
7. Schiphol	10	3	1	-	1/3	0.87	0.82	0.75	24	43	78	4.9	4.8	4.5
8. Cabauw-AEG	10	1	-	5	0.2	0.83	0.76	0.66	38	73	134	4.5	4.1	3.7
9. Cabauw-AEG	80	1	-	5	0.2	0.95	0.93	0.89	39	76	151	4.7	4.7	4.7
10. KEMA (voorstel)	70	5	-	3	1/3	0.96	0.94	0.91	28	49	92	4.9	5.1	5.1
11. Cabauw '84 (voorstel)	10	1	1	-	1/3	0.88	0.83	0.75	22	41	76	5.0	4.8	4.5
12. " "	80	1	1	-	1/3	0.97	0.95	0.92	23	44	86	5.1	5.2	5.2
13. " "	200	1	1	-	1/3	0.98	0.97	0.96	24	46	88	4.9	5.0	5.1
14. Modern station (voorstel)	10	3	1	-	1/3	0.87	0.82	0.75	24	43	78	4.9	4.8	4.5
15. " "	10	3	-	3	1/3	0.86	0.81	0.73	19	35	67	5.1	5.0	4.7

Opmerking: KNMI-oud bestaat uit een metalen cupanemometer met stroomregistr.

KNMI-nieuw bestaat uit een kunststof cupanemometer met servorecorder.

Militair-oud bestaat uit een kunststof cupanemometer met stroomregistr.

Tabel 4. De resultaten van tabel 3 met tussenresultaten na ieder element in de meetketen. Het symbool 1 geeft de vlaaglengthe  $U_{10}$ .

z (m)	$T_0$ (s)	$l_0$ (m)	k (s)	$f_0$ (Hz)	U (m/s)	Na anemometer		Na RC-filter		Na RC-filter ber. Wieringa						
						$\sigma'_u / u_h$	$\sigma'_u / \sigma_u$	$\sigma'_u / u_h$	$\sigma'_u / \sigma_u$	$\sigma'_u / u_h$	$\sigma'_u / \sigma_u$	$\frac{U}{U_{max}}$	$\frac{U}{U_{max}}$			
1	10	600	5.000	0.800	1.000	5.0	1.93 0.88	11	5.65	1.87 0.86	19	5.14	1.87 0.86	20	5.02	82
	10.0	1.93 0.88	11	6.09	1.80 0.82	28	5.22	1.80 0.82	31	5.11	105					
	20.0	1.93 0.83	11	6.50	1.67 0.77	47	5.07	1.67 0.77	54	4.89	44					
2	10	600	3.000	0.100	1.000	5.0	2.00 0.91	6	6.07	1.99 0.91	7	5.94	1.99 0.91	10	5.69	44
	10.0	2.00 0.91	6	6.51	1.99 0.91	8	6.30	1.99 0.91	14	5.89	46					
	20.0	2.00 0.91	6	6.93	1.96 0.90	10	6.55	1.96 0.90	20	5.97	68					
3	10	600	3.000	0.800	1.000	5.0	2.00 0.91	6	6.07	1.92 0.88	15	5.37	1.92 0.88	16	5.29	97
	10.0	2.00 0.91	6	6.51	1.85 0.84	24	5.38	1.85 0.84	28	5.23	97					
	20.0	2.00 0.91	6	6.93	1.69 0.77	43	5.17	1.69 0.77	52	4.95	97					
4	10	600	5.000	0.800	1.000	5.0	1.93 0.88	11	5.65	1.87 0.86	19	5.14	1.87 0.86	20	5.08	
	10.0	1.93 0.88	11	6.09	1.80 0.82	28	5.22	1.80 0.82	31	5.11						
	20.0	1.93 0.83	11	6.50	1.67 0.77	47	5.07	1.67 0.77	54	4.89						
5	10	600	3.000	2.000	1.000	5.0	2.00 0.91	6	6.07	1.79 0.82	28	4.75	1.79 0.82	30	4.71	109
	10.0	2.00 0.91	6	6.51	1.63 0.75	52	4.55	1.63 0.75	55	4.47	149					
	20.0	2.00 0.91	6	6.93	1.43 0.66	97	4.16	1.43 0.66	105	4.05	44					
6	10	600	0.500	0.600	1.000	5.0	2.13 0.97	1	7.23	1.99 0.91	7	5.94	1.99 0.91	10	5.69	75
	10.0	2.13 0.97	1	7.65	1.70 0.87	14	5.85	1.70 0.87	20	5.55	75					
	20.0	2.13 0.97	1	8.05	1.77 0.81	29	5.60	1.77 0.81	40	5.25	76					
7	10	600	3.000	1.000	0.333	5.0	2.00 0.91	6	6.07	1.89 0.87	17	5.25	1.89 0.87	24	4.91	76
	10.0	2.00 0.91	6	6.51	1.79 0.82	29	5.20	1.79 0.82	43	4.75	132					
	20.0	2.00 0.91	6	6.93	1.63 0.75	52	4.94	1.63 0.75	78	4.45						
11	10	600	1.000	1.000	0.333	5.0	2.09 0.96	2	6.83	1.92 0.88	13	5.49	1.92 0.88	22	5.02	
	10.0	2.09 0.96	2	7.26	1.81 0.83	25	5.35	1.81 0.83	41	4.81						
	20.0	2.09 0.96	2	7.67	1.64 0.75	49	5.02	1.64 0.75	76	4.47						
12	80	600	1.000	1.000	0.333	5.0	2.16 0.99	2	6.57	2.11 0.97	12	5.49	2.11 0.97	23	5.06	
	10.0	2.16 0.99	2	7.05	2.08 0.95	23	5.63	2.08 0.95	44	5.15						
	20.0	2.16 0.99	2	7.49	2.02 0.92	44	5.68	2.02 0.92	66	5.15						
13	200	600	1.000	1.000	0.333	5.0	2.15 0.99	2	6.36	2.14 0.98	13	5.29	2.14 0.98	24	4.86	
	10.0	2.15 0.99	2	6.87	2.12 0.97	23	5.51	2.12 0.97	46	5.04						
	20.0	2.17 0.99	2	7.33	2.09 0.96	43	5.65	2.09 0.96	88	5.14						
14	10	600	3.000	1.000	0.333	5.0	2.00 0.91	6	6.07	1.89 0.87	17	5.25	1.89 0.87	24	4.91	
	10.0	2.00 0.91	6	6.51	1.79 0.82	29	5.20	1.79 0.82	43	4.75						
	20.0	2.00 0.91	6	6.93	1.63 0.75	52	4.94	1.63 0.75	78	4.45						
15	10	600	1.000	5.000	0.200	5.0	2.09 0.96	2	6.83	1.82 0.83	27	4.81	1.82 0.83	33	4.46	
	10.0	2.09 0.96	2	7.26	1.65 0.76	54	4.51	1.65 0.76	73	4.16						
	20.0	2.09 0.96	2	7.67	1.44 0.66	105	4.05	1.44 0.66	134	3.71						
16	80	600	1.000	5.000	0.300	5.0	2.16 0.99	2	6.57	2.03 0.95	27	4.95	2.03 0.95	39	4.66	
	10.0	2.16 0.99	2	7.05	2.03 0.93	51	5.03	2.03 0.93	76	4.71						
	20.0	2.16 0.99	2	7.49	1.94 0.89	102	5.01	1.94 0.89	151	4.65						
17	70	600	5.000	3.000	0.333	5.0	2.11 0.97	10	5.67	2.09 0.96	23	5.03	2.09 0.96	28	4.92	
	10.0	2.11 0.97	10	6.19	2.05 0.94	37	5.29	2.05 0.94	49	5.03						
	20.0	2.11 0.97	10	6.67	1.99 0.91	66	5.35	1.99 0.91	92	5.03						
18	10	600	3.000	3.000	0.333	5.0	2.00 0.91	6	6.07	1.89 0.87	17	5.25	1.89 0.87	24	4.89	
	10.0	2.00 0.91	6	6.51	1.77 0.81	35	5.00	1.77 0.81	46	4.69						
	20.0	2.00 0.91	6	6.93	1.60 0.73	67	4.65	1.60 0.73	85	4.33						

filter met integratietijd  $t_0$  lijkt  $f_s = 1/t_0$  redelijk; bij een RC-filter is  $f_s = 1/(3k)$  een redelijke keuze.

- Het equivalente looptijdfilter voor een RC-filter met RC-tijd  $k$  heeft een integratietijd van  $t_0 = 3k$  (zie ook Fig. 7).
- De resultaten met betrekking tot de vlaglengte moeten in hun onderlinge verband gezien worden. De absolute vlaglengte hangt af van de gekozen definitie. Wanneer we de verschillende meetsystemen vergelijken, zien we, dat de meeste oude systemen vlaglengten leveren van 50 m bij harde wind. Voor de nieuwe systemen is een looptijdfilter met  $t_0 = 3$  of een RC-filter met  $k = 1$  gekozen waardoor we in dezelfde buurt uitkomen. De samplefrequentie is hierbij 1/3 Hz. De aanspreeklengte van de anemometer heeft hierop nauwelijks invloed. (Grote zware anemometers hebben over het algemeen wel meer last van overspeeding).

#### Dankwoord

Bij de theorie voor het berekenen van extremen is veel steun ondervonden van Adri Buishand. Hij heeft de ideeën aangedragen, waardoor een en ander toegepast kon worden op diskrete reeksen.

## APPENDIX A

De kans op extremen bij gediskretiseerde signalen.

Voor een Gaussisch proces geldt voor de kans op een maximum kleiner dan een gegeven waarde in tijdinterval  $T_0$ :

$$P\left\{\frac{\max_x x - \mu}{\sigma_x} < x_s, T_0\right\} = \exp\{-E(x_s, T_0)\} \quad (\text{A.1})$$

hierbij is  $E(x_s, T_0)$  het aantal "upcrossings" in interval  $T_0$ . Voor een continu proces geldt voor  $E$  (Dyhr-Nielsen, 1972)

$$E(x_s, T_0) = T_0 \sqrt{\frac{\lambda_2}{2\pi}} \phi(x_s)$$

Hierbij is  $\lambda_2$  het 2e spectrale moment van het stochastische proces.

In een diskreet proces geldt voor het aantal "upcrossings" (Tick en Shaman, 1966)

$$E(x_s, T_0) = \frac{T_0}{\Delta t} \frac{1}{\pi} \int_0^a \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{x_s^2 (1+y^2)}{1+y^2}\right\} dy \quad (\text{A.2})$$

waarbij

$$a = \left[ \frac{1 - \frac{R_x(\Delta t)}{R_x(0)}}{1 + \frac{R_x(\Delta t)}{R_x(0)}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{en } \Delta t \text{ is het diskretisatieinterval}$$

Voor kleine  $a$  geldt:  $\frac{R_x(\Delta t)}{R_x(0)} = 1 - \lambda_2 \frac{(\Delta t)^2}{2}$  zodat  $a = \sqrt{\lambda_2} \frac{\Delta t}{2}$ .

Uitdrukking A.2 wordt nu:

$$\begin{aligned} E(x_s, T_0) &= \frac{T_0}{\Delta t} \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2} x_s^2} \sqrt{\lambda_2} \frac{\Delta t}{2} \\ &= T_0 \sqrt{\frac{\lambda_2}{2\pi}} \phi(x_s) \end{aligned}$$

Voor minder kleine sample-intervallen  $\Delta t$  kan  $a$  expliciet uitgerekend worden uit het spectrum. Uitdrukking A.2 kan benaderd worden door een reeksontwikkeling (zie Owen, 1956)

$$\begin{aligned}
E(x_s, T_0) &= \frac{T_0}{\Delta t} \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}x_s^2} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{j+1}} \prod_{i=0}^j \frac{x_s^{2i+1}}{2^i i!} a^{2j+1} \right\} \\
&= \frac{T_0}{\Delta t} \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}x_s^2} \left[ a - \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{x_s^2}{2} \right) a^3 + \frac{1}{5} \left( 1 + \frac{x_s^2}{2} + \frac{x_s^4}{8} \right) a^5 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{7} \left( 1 + \frac{x_s^2}{2} + \frac{x_s^4}{8} + \frac{x_s^6}{48} \right) a^7 \dots \dots \dots \right] \\
&= T_0 \phi(x_s) \frac{2}{\Delta t \sqrt{2\pi}} \left[ a - \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{x_s^2}{2} \right) a^3 \dots \dots \dots \right]
\end{aligned}$$

Aangezien  $\tilde{x}_s$  op deze manier niet expliciet uitgerekend kan worden uit  $P(\tilde{x}_s, T_0) = 0.5$ , wordt een iteratieve procedure gevolgd. Allereerst wordt  $x_s$  geschat door slechts een term in de reeks mee te nemen. Met behulp hiervan worden de volgende termen uitgerekend.

Rekenprocedure:

$$\lambda_2 = \left( a \frac{2}{\Delta t} \right)^2 \quad \text{1e schatting}$$

$$\tilde{x}_s = \left[ 2 \ln \left\{ T_0 \sqrt{\frac{\lambda_2}{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln 2}} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{1e schatting}$$

$$\lambda_2 = \left[ a - \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{\tilde{x}_s^2}{2} \right) a^3 + \frac{1}{5} \left( 1 + \frac{\tilde{x}_s^2}{2} + \frac{\tilde{x}_s^4}{8} \right) a^5 \dots \dots \right]^2 \frac{4}{(\Delta t)^2}$$

2e schatting

$$\tilde{x}_s = \left[ 2 \ln \left\{ T_0 \sqrt{\frac{\lambda_2}{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln 2}} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{2e schatting}$$

De waarden van  $\lambda_2$ , die op deze manier uit de iteratieve procedure volgt, kan op dezelfde manier gebruikt worden als die voor continue signalen.

Referenties

- Bendat, J.S. and Piersol, A.G. (1966). Measurement and analysis of random data. J.Wiley & Sons Inc., New York.
- Blackman, R.B. and Tukey, J.W. (1958). The measurement of power spectra. Dover Publications, Inc., New York.
- Dyhr-Nielsen, M. (1972). Loss of information by discretizing hydrologic series. Hydrology papers, no. 51, Colorado State University, Fort Collins, Colorado 80521.
- Kaimal, J.C., Wyngaard, J.C., Izumi, Y. and Coté, O.R. (1972). Spectral characteristics of surface-layer turbulence. Quart. J. R. Met. Soc., 98, 563-589.
- Owen, D.B. (1956). Tables for computing bivariate normal probabilities. The annals of mathematical statistics, 27, 1075-1090.
- Tick, L.J. and Shaman, P. (1966). Sampling rates and appearance of stationary Gaussian process. Technometrics, 8, 91-106.
- Wieringa, J. (1973). Gust factors over open water and built-up country. Boundary-layer meteorology, 3, 424-441.
- Wieringa, J. (1976). An objective exposure correction method for average wind speeds measured at a sheltered location. Quart. J. R. Met. Soc., 102, 241-253.

