

**KONINKLIJK NEDERLANDS  
METEOROLOGISCH INSTITUUT**

WETENSCHAPPELIJK RAPPORT

SCIENTIFIC REPORT

W.R. 85 - 1

E.R. Stolp

Voortplanting van zwaarte golven in de atmosfeer en  
rond een kritieke laag



---

De Bilt, 1985

Publikatienummer: K.N.M.I. W.R. 85-1 (GO)

Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut,  
Geofysisch Onderzoek,  
Postbus 201,  
3730 AE De Bilt,  
Nederland.

U.D.C.: 551.511.32

ISSN : 0169-1651

Dit verslag is geschreven in het kader van mijn wiskunde-studie aan de Vrije Universiteit te Amsterdam. Bij deze dank ik prof. Nieuwland en het K.N.M.I. voor de geboden medewerking bij het verkrijgen van een stageplaats en de heer H. Kelder voor de begeleiding bij dit onderzoek.

E.R. Stolp  
Vrije Universiteit  
Amsterdam

## ABSTRACT

The atmosphere is a continuous, layered medium with vertical gradients in density caused by gravity forces. When a volume of gas is displaced from its equilibrium position it starts oscillating around its normal position. This movement generates waves in the fluid known as internal, gravity or buoyancy waves. Gravity waves can be generated by wind blowing over mountains, strong windshears and by vertical currents in the atmosphere.

The internal waves are influenced by the vertical velocity distribution of the background winds. The wind causes a Dopplershift in the frequency of the wave. Dependent of this frequency shift the wave will be deflected, reflected, absorbed or amplified. The level at which the Dopplershift equals the wave frequency is called the critical level. At this level the wind-velocity is equal to the horizontal phasevelocity of the wave. The behaviour of the wave at this level depends strongly on the windgradient. The motion of the air near the critical level is modelled by the Taylor-Goldstein equation. Usually the influence of viscosity and thermal conductance on the air movements is small, at the critical level however these effects cause important changes in the behaviour of the waves.

The first chapter of this report gives a short survey of the properties of the atmosphere and the various kinds of waves in the atmosphere. The second chapter gives a detailed analysis of the motion of a gravity-wave in an atmosphere with a vertical windgradient. This analysis is based upon the dispersionrelation of the waves.

In the third chapter the behaviour around the critical level is treated. Approximate and exact solutions of the Taylor-Goldstein eq. are derived for various windprofiles.

In chapter four the influence of viscosity and thermal conductivity around a critical level is studied.

The last chapter gives some notes on the observation of the waves in the ionosphere by means of the radiosignals of a navigationsatellite.

INHOUD

	blz.
Inleiding	4
I-1 De Basisvergelijkingen	6
2 De Achtergrondatmosfeer	7
3 De Brunt-Vaisala frequentie	9
4 Linearisering van de Vergelijkingen	11
5 Vier Soorten Golven	15
II De Achtergrondwind	
1 De groepssnelheid	23
2 Golfvoortplanting / Raytracing	25
3 Konklusie	33
III De Taylor Goldstein Vergelijking	
1 Afleiding van de T-G-vergelijking	34
2 Fase en Groepssnelheid rond de Kritieke Laag	37
3 Oplossingen van de T.G-vergelijking	38
4 Konklusie en Kritiek	49
IV De Invloed van Viskositeit en Thermische Geleiding	
1 De Dispersierelatie	51
2 Golfstralen	54
3 Konklusie en Kritiek	59
V Waarneming van Zwaarte Golven	
1 De Atmosfeer als Filter	61
2 Waarnemingsmethoden	64
Appendices	
A Dispersie relatie en Groepssnelheid	68
B Behoud van Golfaktie	73
C De WKB Methode	76
Literatuur	78

## INLEIDING

De atmosfeer is, onder invloed van de zwaartekracht, een gelaagd systeem. Zware bestanddelen (koude lucht)<sup>1</sup> zakken naar onderen, de lichte stijgen naar boven. Er ontstaat zo een kontinu dichtheidsverloop van beneden naar boven. In een situatie met een diskontinu dichtheidsverloop, b.v. een vloeistofoppervlak, zijn er oppervlakte golven mogelijk langs deze diskontinuiteit. Bij een kontinu dichtheidsverloop zijn er ook golven mogelijk die dan door het hele medium lopen. Dit zijn de interne of zwaartegolven (internal gravitywaves). Deze golven kunnen op verschillende wijzen opgewekt worden. Als de lucht door de wind over een gebergte wordt gevoerd forceert de op en neergaande beweging direkt zwaartegolven met een golflengte die overeen komt met de geometrie van het gebergte. Dit is te vergelijken met het golfpatroon rond een vast obstakel in een vloeistofstroom. Er ontstaan ook golven als er een sterke windgradient in de atmosfeer is. Een sprong in windsnelheid (Kelvin-Helmholtz profiel) is vrijwel altijd instabiel. Op de spronglaag ontwikkelt zich een exponentieel groeiende golfbeweging die in turbulentie eindigt. In het geval van een medium met een dichtheidsgradient werkt de zwaartekracht de groei van deze golf tegen. De uiteindelijke beweging wordt dan bepaald door de verhouding tussen de stabiliserende werking van de zwaartekracht en de storende werking van de windgradient. De zwaartekracht komt tot uiting in de z.g. Brunt-Vaisala frequentie  $N$ , dit is de frequentie waarmee een uit de evenwichtsstand verplaatste hoeveelheid lucht op en neer beweegt. Kenmerkende grootte voor de beweging is nu het Richardsongetal  $Ri$  dat de verhouding aangeeft tussen het effect van de zwaartekracht en de windgradient .  
 $Ri = (N/a)^2$  waarbij  $a$  de windgradient is. Dit proces van golfopwekking is te vergelijken met de wind die bij voldoende sterkte golven op een wateroppervlak kan opwekken.

Indien de atmosfeer instabiel is, warme lucht beneden en koude lucht boven, ontstaan er verticale stromingen die ook zwaarte golven kunnen opwekken. De golven zijn dan ook waarneembaar tijdens vulkaanuitbarstingen, kernexplosies etc. Dit is te vergelijken met een steen die in het water valt. De zwaarte golven hebben een aantal bijzondere eigenschappen. Kenmerkend is dat de groepssnelheid van de golven loodrecht op de fasesnelheid staat en dat de golfrichting t.o.v. de vertikaal alleen door de frequentie van de golfbeweging wordt bepaald.

Wanneer de golf door een inhomogeen windveld loopt ondervindt hij een frequentieverschuiving t.g.v. het Doppler effect. Bij een geschikt windveld kan de relatieve frequentie zo tot nul dalen.

De hoogte waarop dit gebeurt is de kritieke laag en hier doen zich een aantal bijzondere verschijnselen voor. Afhankelijk van het Richardsongetal vindt er versterking of verzwakking van de golf plaats.

De zwaarte golven zijn in de vrije natuur regelmatig waarneembaar. Zij komen bijvoorbeeld tot uiting in regelmatige ribbelpatronen in de bewolking. Deze golven zijn ontstaan door de windgradient tussen het onderste deel van de atmosfeer en de ongestoorde luchtstroming in hogere lagen. In de ionosfeer verstoort de golf de ladingsdichtheidsverdeling, dit is met behulp van radio signalen te zien.

Dit verslag heeft voornamelijk de baanbeweging van de golf en het gedrag rond de kritieke laag tot onderwerp.

- 1) Voor de toestand van de atmosfeer is het begrip potentiële temperatuur van belang. Dit is de temperatuur die de lucht zou hebben al hij adiabatisch op een druk van 1 atmosfeer wordt gebracht. Bij een luchtdruk lager dan 1 atm. zoals dat op grotere hoogte voorkomt is de pot.temperatuur dan hoger dan de echte temperatuur. Wanneer een hoeveelheid lucht snel omhoog beweegt blijft de pot.temperatuur konstant terwijl de echte temp. met de expansie daalt. In de aardatmosfeer daalt de temperatuur met de hoogte, de pot.temp. stijgt echter met de hoogte zodat de atmosfeer stabiel is voor verticale bewegingen. In deze inleiding hebben de begrippen koud en warm op de pot.temp. betrekking.

## § I-1 DE BASIS VERGELIJKINGEN

De toestand van de atmosfeer wordt bepaald door een aantal algemene behoudswetten die op ieder fysisch systeem van toepassing zijn en een toestandsvergelijking die de specifieke eigenschappen van het medium bepaald. De behoudswetten voor de stroming zijn:

1 Behoud van massa

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \nabla \cdot \bar{U} = 0 \quad 1)$$

$\rho$ : dichtheid ( $\text{Kg}/\text{m}^3$ )

$\bar{U}$ : stroomsnelheid ( $\text{m}/\text{sec}$ )

2 Behoud van impuls

$$\rho \frac{d\bar{U}}{dt} = -\nabla p + \rho \cdot \bar{g} + \mu \cdot \nabla^2 \bar{U}$$

$p$ : druk ( $\text{N}/\text{m}^2$ )

$g$ : zwaartekracht ( $\text{m}/\text{sec}^2$ )

$\mu$ : viscositeit ( $\text{Kg}/(\text{m} \cdot \text{sec})$ )

3 Behoud van energie

$$dE + \Delta W = \Delta Q$$

$dE$ : verandering van de inwendige energie

$\Delta W$ : door het gas verrichte arbeid

$\Delta Q$ : warmte toevoer

De toestand van het gas wordt verder beschreven met de ideale gaswet

$$4 \quad p = (R/M) \cdot \rho \cdot T$$

$R$ : gasconstante ( $8.3 \cdot 10^3 \text{ Nm}/\text{Kmol}$ )

$T$ : temperatuur ( $\text{K}^\circ$ )

$M$ : gemiddelde molaire massa

Dit stelsel vergelijkingen is in het algemeen nauwelijks oplosbaar. Oplossingen kunnen worden gevonden door verwaarlozing van termen en door linearisering van de vergelijkingen.

$$1) \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \cdot \text{grad}$$

Dit is de materiele afgeleide voor een punt dat met de stroming mee beweegt



§ I-2 DE ACHTERGROND ATMOSFEER

Neem aan dat de atmosfeer in rust is en dat er geen deeltjes of energiestroming is. dus  $d-/dt = 0$ ;  $U=0$ ;  $\Delta Q=0$ . De basisvergelijkingen reduceren dan tot:

$$\nabla p = \rho \cdot \bar{g} \quad \text{impulsbehoud} \quad \text{I-2'}$$

$$dE + \Delta W = 0 \quad \text{energiebehoud} \quad \text{I-3'}$$

$$p = (R/M) \cdot \rho \cdot T \quad \text{gaswet} \quad \text{I-4'}$$

Voor een ideaal gas volgt:

$$dE = M \cdot c_v \cdot dT \quad c_v: \text{soortelijke warmte bij constant volume}$$

$$\begin{aligned} \Delta W &= p \cdot dV = -p \cdot M / \rho^2 \cdot d\rho \\ &= -R \cdot T / \rho \cdot d\rho \end{aligned} \quad \text{I-5}$$

Met  $c_p$ , de soortelijke warmte bij constante druk.  $\gamma = c_p / c_v$  en  $R = M \cdot (c_p - c_v)$  volgt na invullen van I-5 in de energiewet en de gaswet:

$$\begin{aligned} T &= \text{const.} \cdot \rho^{(R/M \cdot c_v)} \\ p &= \text{const.} \cdot \rho^\delta \\ p &= \text{const.} \cdot T^{\delta/(\delta-1)} \end{aligned} \quad \text{I-6}$$

DE BAROMETRISCHE VERGELIJKING

Van de impulsvergelijking I-2' blijft alleen de z-component over

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} &= -g \cdot \rho = -\frac{Mg}{RT} \cdot p \\ p(z) &= p_0 \cdot \exp\left(-\int \frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot dz\right) \end{aligned} \quad \text{I-7}$$

De grootte  $H = \frac{R \cdot T}{M \cdot g}$  is de schaalhoogte van de atmosfeer. Vergelijking I-7 die de druk als functie van de hoogte in de atmosfeer geeft is nu de barometrische vergelijking.

Als T en M niet van de hoogte afhankelijk zijn verloopt de druk als  $p = p_0 \cdot \exp(-z/H)$  en strekt de atmosfeer zich tot oneindige hoogte uit. Bij een constante temperatuurgradient a met  $T(z) = T_0 + a \cdot z$  volgt uit I-7:

$$P(z) = p_0 \cdot \left(\frac{T_0 + a \cdot z}{T_0}\right)^{\frac{-Mg}{R a}}$$

Wanneer de temperatuur daalt met de hoogte wordt dus op eindige hoogte een punt bereikt met  $p=T=0$

De atmosfeer is in adiabatisch evenwicht als een hoeveelheid gas die adiabatisch omhoog wordt gebracht dezelfde temperatuur en druk als de omgeving blijft aannemen. Naar boven toe daalt de druk zodat het gas uitzet en afkoelt. Voor adiabatische expansie volgt met I-6 en I-7 :

$$dp = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p}{T} \cdot dT$$

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{Mg}{R} = a^* \quad ; \text{ de adiabatische temp.gradient.}$$

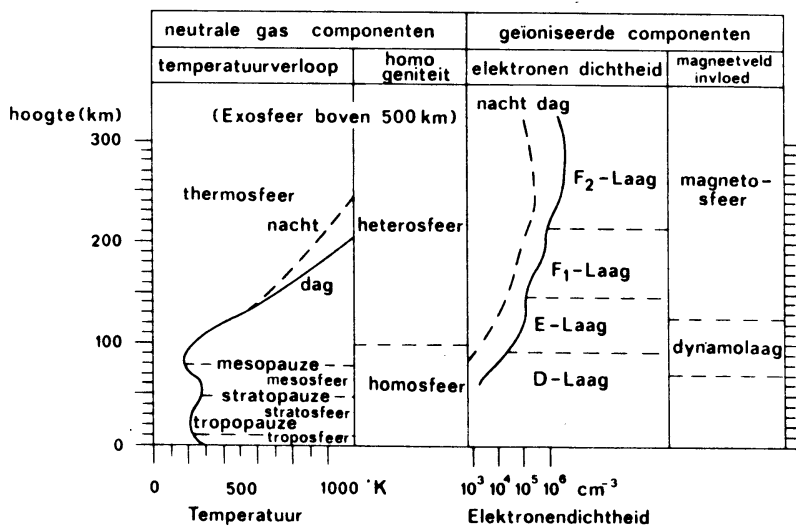
Aan het aardoppervlak is  $\gamma=1.4$ ;  $M=29$  en  $T=+300 \text{ K}^\circ$ .

dus,

$$a^* = -9.8 \text{ K}^\circ/\text{Km}$$

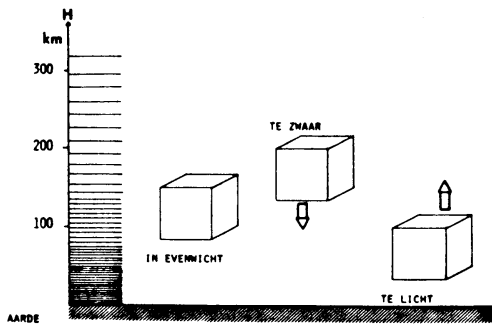
$$H = 8.8 \text{ Km} \quad (\text{isotherme schaalhoogte bij } T=300 \text{ K}^\circ)$$

Met deze waarden zou de atmosfeer zich uitstrekken tot een hoogte van ongeveer 30 Km. In de praktijk blijkt dat de menging van de atmosfeer onvoldoende is om de adiabatische temperatuurgradient te kunnen halen. Van 0 tot 10 Km hoogte, waar de meeste turbulentie is, is de gradient ongeveer  $-6.5 \text{ K}^\circ/\text{Km}$ . Daarboven komen gebieden voor waar de temperatuur weer stijgt met de hoogte. Dit is een gevolg van de inkomende zonnestraling. De delen van het zonnespektrum die passen bij de eigenfrequenties van atmosfeerbestanddelen worden op grote hoogte geabsorbeerd. Een positieve temperatuurgradient heeft tot gevolg dat warm en licht gas drijft op kouder en zwaarder gas. Dit verhindert een verdere vermenging zodat de atmosfeer stabiel wordt. Omgekeerd houdt de stabiliteit de temperatuurgradient weer in stand. Wanneer een hoeveelheid lucht nu omhoog gestuwd wordt zal het te koud en dus te zwaar zijn voor zijn omgeving en daarom weer naar beneden zakken. Deze oscillaties zijn het onderwerp van de volgende paragrafen.



Ionosfeereigenschappen als functie van de hoogte

§ I-3 DE BRUNT-VÄISÄLÄ FREQUENTIE



Beschouw een pakketje lucht in een achtergrondatmosfeer met druk, dichtheid en temperatuurverdeling  $p_0(z)$ ,  $\rho(z)$ ,  $T_0(z)$ . Dit pakketje wordt nu uit de evenwichtspositie verplaatst en krijgt dan een tijdsafhankelijke druk, dichtheid temp. en positie  $p(t)$ ,  $\rho(t)$ ,  $T(t)$ ,  $z(t)$ . Wanneer de beweging langzaam is zullen  $p_0(z)$  en  $p(t)$  met elkaar in evenwicht zijn maar

de dichtheid en temperatuur niet.

De energie vergelijking wordt nu:

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dW}{dt} = J \quad \text{met } J = -\lambda (T - T_0) \quad \text{I-3"}$$

De term J geeft de warmtestroom door diffusie weer die ontstaat als er een temperatuurverschil is tussen het pakketje en de omgeving. Gebruik nu de gaswet en de barometervergelijking;

$$\frac{dW}{dt} = -p \cdot M / \rho^2 \cdot \frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = M \cdot c_v \cdot \frac{dT}{dt} = M \cdot c_v \cdot \frac{M}{R} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \cdot \frac{d\rho}{dt}$$

$$T - T_0 = \frac{M}{R} \cdot \left( \frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} \right) = p \cdot \frac{M}{R} \cdot \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 \cdot \rho}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_0 \cdot g \quad \frac{dp}{dt} = -\rho_0 \cdot g \cdot \dot{z}$$

Met de geluidssnelheid  $c^2 = \gamma p / \rho = \gamma R \cdot T / M$  kan dit in I-3" ingevuld worden tot:

$$\frac{\rho_0}{\rho} \cdot g \cdot \dot{z} + c^2 \cdot \frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\lambda \cdot c^2}{\gamma M \cdot c_v} \cdot \frac{\rho_0 - \rho}{\rho} = 0$$

Gebruik nu als nieuwe variabele het dichtheidsverschil tussen het pakketje en de omgeving  $\rho' = \rho - \rho_0$ ,  $\dot{\rho}' = \dot{\rho} - \frac{d\rho_0}{dz} \cdot \dot{z}$  en stel  $\lambda' = \lambda / M \cdot c_v$

Als de vergelijking nu wordt gelineariseerd in  $z$  en  $\rho'$  dan wordt de nieuwe energie vergelijking:

$$\left( \rho_0 \frac{g}{c^2} + \frac{d\rho_0}{dz} \right) \cdot \dot{z} + \dot{\rho}' + \lambda' \cdot \rho' = 0 \quad \text{I-8}$$

De bewegingsvergelijking volgens Newton is:

$$\rho \cdot \ddot{z} = -(\rho - \rho_0) \cdot g - K \cdot \dot{z}$$

$\kappa$  geeft de wrijvingskrachten op het pakketje weer. Ook deze vergelijking wordt gelineariseerd naar  $z$  en  $\rho'$ .

$$\ddot{z} + \kappa/\rho_0 \cdot \dot{z} + g/\beta \cdot \rho' = 0 \quad \text{I-9}$$

I-8 en I-9 vormen nu een lineair stelsel dat opgelost kan worden met  $z = \hat{z} \cdot \exp(i\omega \cdot t)$  en  $\rho' = \hat{\rho}' \cdot \exp(i\omega \cdot t)$

$$i\omega \cdot \left( \frac{\rho_0 \cdot g}{c^2} + \frac{d\rho_0}{dz} \right) \cdot \hat{z} + (i\omega + \lambda') \cdot \hat{\rho}' = 0 \quad \text{I-8'}$$

$$(-\omega^2 + i\omega \cdot \kappa') \cdot \hat{z} + g/\rho_0 \cdot \hat{\rho}' = 0 \quad \text{I-9'}$$

Dit stelsel heeft alleen een oplossing als de determinant nul is. Definieer nu de Brunt-Vaisala freq. als:

$$N^2 = - \left( \frac{g^2}{c^2} + g \cdot \frac{d \log(\rho_0)}{dz} \right)$$

Dan volgt nu

$$\omega = i \cdot \frac{(\lambda' + \kappa')}{2} \pm \sqrt{N^2 - \left( \frac{\lambda' - \kappa'}{2} \right)^2} \quad \text{I-10}$$

Zonder wrijving en termische geleiding is de frequentie gelijk aan de Brunt-Vaisala freq. De B-V freq bevat twee termen, de ene geeft aan dat de dichtheid van de achtergrond met de hoogte verandert, de andere geeft het effect van de adiabatische expansie en afkoeling van het luchtpakketje zelf.  $N^2$  kan nu geheel in termen van temperatuur gradienten geschreven worden.

$$\frac{d \log \rho_0}{dz} = \frac{d \log p_0}{dz} - \frac{d \log T}{dz} = \frac{-Mg}{RT} - \frac{a}{T}$$

Met  $c^2 = .R \cdot T/M$  volgt  $N^2 = g \cdot \frac{a-a^*}{T}$

Er zijn dus oscillaties mogelijk zodra de omgevingstemperatuur minder snel daalt dan die van het adiabatisch afkoelende luchtpakketje. Een opstijgend pakket wordt dan na verloop van tijd zwaarder dan de omgeving zodat het weer gaat zakken. Wanneer de omgevingstemperatuur te snel daalt met de hoogte worden verticale bewegingen juist versterkt. De atmosfeer is dan instabiel, dit komt voor in onweersbuien.

De viskositeit dempt omdat ze de beweging afremt, de termische geleiding werkt dempend omdat ze de lucht meer in evenwicht brengt met de omgeving. In de imaginaire term van de freq.  $w$  versterken deze twee factoren elkaar dan ook. Ieder voorzich hebben  $\lambda$  en  $\kappa$  een frequentie verlagend effect maar het is opvallend dat hier het geheel minder is dan de som der delen. Bij gelijke  $\lambda$ 'en  $\kappa$ ' is er zelfs geen frequentie verschuiving meer.

Bij  $a^* = -9.8 \text{ K}^\circ/\text{Km}$ ;  $a = -6.5 \text{ K}^\circ/\text{Km}$ ;  $T = 300 \text{ K}^\circ$  en  $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$  zoals op het aardoppervlak gebruikelijk is heeft de B-V freq. de waarde  $N = 1.0 \cdot 10^{-2}$  dit komt overeen met een periode van ongeveer 10 minuten. Verder werspiegelt het verloop van  $N$  met de hoogte het temperatuur verloop. Op hoogten boven de 100 Km begint de samenstelling van de atmosfeer sterk af te wijken van de waarden op zeeniveau. Er moeten dan andere waarden voor het gemiddelde molaire gewicht  $M$  en voor  $\gamma$  gebruikt worden.

§ I-4 LINEARISERING VAN DE VERGELIJKINGEN

De stromingsvergelijkingen zijn niet lineair wegens de konvektie term in de materiele afgeleiden  $d-/dt$  en produkt termen als  $\rho \cdot \vec{v} \cdot U$ , en zijn daarom moeilijk oplosbaar.

Golven zijn meestal op te vatten als kleine storingen op een achtergrondstroming. Het lineariseren rond deze achtergrondstroming levert dan een meer toegankelijk stel golfvergelijkingen op.

Er wordt daarom verder uitgegaan van een vertikaal gelaagde atmosfeer met een horizontaal in de x-richting gerichte wind waarvan de sterkte hoogte afhankelijk is. De achtergrond atmosfeer wordt geacht zelf al aan de stromings vergelijkingen te voldoen en in de tijd constant te blijven.

Een willekeurige grootheid  $A(x, t)$  wordt nu gesplitst volgens

$$A(x, t) = A_0(z) + a(x, t)$$

$$U(x, t) = V(z) + u(x, t)$$

$a$  en  $u$  zijn zo klein dat hun produkten verwaarloosd kunnen worden t.o.v. de andere termen. Linearisering van de materiele afgeleide geeft nu:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + U \cdot \vec{v} A = \frac{\partial a}{\partial t} + V \cdot \vec{v} a + u \cdot \vec{v} A_0 \quad \text{I-11}$$

De nulde orde term  $V \cdot \vec{v} A_0$  is weggelaten omdat  $A_0$  zelf al aan de stromingsvergelijkingen moet voldoen en er dus uit wegvalt.

De energie vergelijking I-3 is nog niet in een bruikbare vorm. Kies een klein volume gas,  $\text{Vol} = n \cdot M / \rho$  en  $n \rightarrow 0$ . de warmte toevoer is nu:

$$Q = - \int \vec{J} \cdot d\vec{O}_{pp} = - \int \vec{v} \cdot \vec{J} \cdot d\text{Vol} = - \vec{v} \cdot \vec{J} \cdot \text{Vol}$$

De energie vergelijking is nu

$$c_v \cdot \frac{dT}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \cdot \frac{d\rho}{dt} = \frac{-1}{\rho} \vec{v} \cdot \vec{J} \quad \text{I-12a}$$

Met de gaswet kan  $T$  als functie van  $p$  en  $\rho$  gezien worden en de warmte stroom  $J = -\kappa \cdot \vec{v} T$ .

$$\frac{dp}{dt} - c^2 \cdot \frac{d\rho}{dt} = -(\gamma-1) \cdot \kappa \cdot \vec{v}^2 T \quad \text{I-12b}$$

Bij de linearisering wordt nu nog gebruikt

$$T = T_0 + T_1 = \frac{M}{R} \left( \frac{P_0 + p}{\rho_0 + \rho} \right) = T_0 \left( 1 + p/P_0 - \rho/\rho_0 \right)$$

in eerste orde benadering.

Met deze resultaten kunnen de vergelijkingen nu gelineari-  
seerd worden.

A De continuïteitsvergelijking  $\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \bar{\nabla} \cdot \bar{U} = 0$  wordt nu

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \rho_1 + \bar{u} \cdot \bar{\nabla} \rho_0 + \rho_0 \cdot \nabla \cdot \bar{u} + \rho_1 \cdot \nabla \cdot \bar{V} = 0$$

$$(\partial_t + V \partial_x) \cdot \rho_1 + \frac{d\rho_0}{dz} \cdot u_z + \rho_0 \cdot \nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad \text{I-15}$$

De term  $\nabla \cdot \bar{V}$  is weggelaten omdat de achtergrond wind diver-  
gentie vrij is. In de z.g. Bousinesq benadering wordt het  
medium als niet samendrukbaar beschouwd zodat de cont.verg.  
reduceert tot  $\rho \cdot \bar{\nabla} \cdot \bar{U} = 0$

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad \text{I-15'}$$

B De impulsvergelijking  $\rho \cdot \frac{d\bar{U}}{dt} = -\nabla P + \rho \cdot g + \mu \cdot \nabla^2 \bar{U}$

$$X: \rho_0 \cdot (\partial_t + V \partial_x) \cdot u_x + \rho_0 \frac{dV}{dz} \cdot u_z = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \nabla^2 u_x$$

$$Y: \rho_0 \cdot (\partial_t + V \partial_x) \cdot u_y = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \nabla^2 u_y \quad \text{I-16}$$

$$Z: \rho_0 \cdot (\partial_t + V \partial_x) \cdot u_z = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \nabla^2 u_z - \rho_1 \cdot g$$

Het is zinvol om in plaats van p en  $\rho$ , over te gaan op de  
varia belen  $p' = p/P_0$  en  $\rho' = \rho/\rho_0$ . De vergelijkingen I-16  
kunnen dan door  $\rho_0$  gedeeld worden. Gebruik nu:

$$P_0/\rho_0 = R \cdot T/M = g \cdot H; \quad \frac{dP}{dz} = -g \cdot \rho_0; \quad \text{stel } \eta = \mu/\rho_0$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = \frac{1}{P_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{p}{P_0^2} \cdot \frac{dP_0}{dz} = (1/\rho_0 \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + g \cdot p') \cdot \rho_0/P_0$$

Nu volgt het nieuwe stelsel impulsvergelijkingen:

$$X: (\partial_t + V\partial_x)u_x + \frac{dV}{dz} \cdot u_z + g \cdot H \cdot \frac{\partial p'}{\partial x} - \eta v^2 u_x = 0$$

$$Y: (\partial_t + V\partial_x)u_y + g \cdot H \cdot \frac{\partial p'}{\partial y} - \eta v^2 u_y = 0 \quad I-16'$$

$$Z: (\partial_t + V\partial_x)u_z + g \cdot H \cdot \frac{\partial p'}{\partial z} - \eta v^2 u_z - \varepsilon \cdot p' + \varepsilon \cdot \rho' = 0$$

C De energie vergelijking  $\frac{dP}{dt} - c^2 \cdot \frac{d\rho}{dt} = \kappa(\gamma-1)v^2 T_0 \left(1 + \frac{p}{P_0} - \frac{\rho}{\rho_0}\right)$

Beschouw nu de achtergrondtemperatuur  $T_0$  verder als onafhankelijk van  $z$  en stel:

$$\lambda = \frac{\kappa(\gamma-1) \cdot T_0}{c^2} \quad , \text{ dan volgt}$$

$$\begin{aligned} (\partial_t + V\partial_x)p + \frac{d\rho_0}{dz} u_z - \lambda \rho v^2 (\rho/\rho_0) &= \quad I-17 \\ &= 1/c^2 \cdot (\partial_t + V\partial_x)p + 1/c^2 \cdot \frac{dP_0}{dz} \cdot u_z - \lambda \cdot \rho_0 \cdot v^2 (p/P_0) \end{aligned}$$

De termen  $d\rho_0/dz$  en  $1/c^2 \cdot dP_0/dz$  combineren tot  $-\rho_0 \cdot N^2/g$ , de Brunt-Vaisala frequentie. In de Bousinesq benadering is het medium niet samendrukbaar,  $c$  neemt dan de waarde oneindig aan. Het ligt dan voor de hand om ook in de energie vergelijking de resterende samendrukbaarheidstermen weg te laten. In de nieuwe variabelen  $p'$  en  $\rho'$  volgt:

$$(\partial_t + V\partial_x)\rho' - N^2/g \cdot u_z - \lambda v^2 \rho' = 0 \quad I-17'$$

De vergelijkingen 15, 16 en 17 zijn nu uitgangspunt voor de verdere behandeling van de golven in de atmosfeer.



§ I-5 VIER SOORTEN GOLVEN

De gelineariseerde vergelijkingen worden nu bepaald door vier verschijnselen die ieder aanleiding geven tot een karakteristiek soort golven. Deze vier zijn:

- 1<sup>e</sup>: de samendrukbaarheid van het gas veroorzaakt de geluidsgolven.
- 2<sup>e</sup>: de viskositeit met viskeuze golven.
- 3<sup>e</sup>: de termische geleiding met termische golven.
- 4<sup>e</sup>: de verticale gelaagdheid t.g.v. de zwaartekracht met zware of zwaarte golven (gravity waves).

Om enig inzicht in de aard van deze golven te krijgen zullen ze eerst ieder voor zich behandeld worden in een stilstaande achtergrond atmosfeer, dus  $V=0$ . In een later stadium zal het gekombineerde effect van viskositeit termische geleiding en verticale gelaagdheid besproken worden.

1<sup>e</sup>: Geluidsgolven,  $\mu=0$ ;  $\kappa=0$ ;  $g=0$

De gelineariseerde vergelijkingen zijn:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{continuïteit}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p \quad \text{impuls}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - c^2 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{energie}$$

Met de energie vergelijking kan de dichtheid door de druk worden vervangen, differentieer dan de cont.vergl. naar  $t$  en neem de divergentie van de impulsvergelijking:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \cdot \nabla^2 p = 0$$

Dit is een golfvergelijking met als oplossing

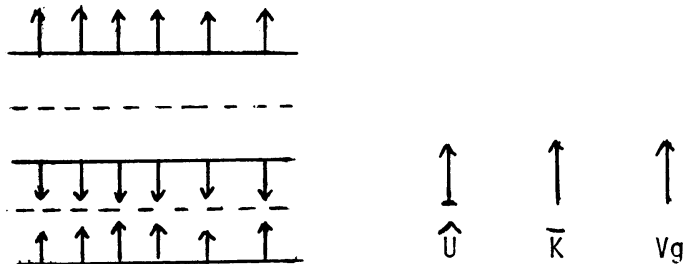
$$p = \hat{p} \cdot \exp i(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{x})$$

De dispersierelatie is  $w^2 = c^2 k^2$

De fase snelheid  $V_f = c$

De groepssnelheid  $V_g = c$

Uit de impulsvergelijking volgt dat de deeltjesbeweging u parallel is aan de golfvektor k. Ook  $V_f$  en  $V_g$  liggen in de richting van k.



Fase vlakken en deeltjesbeweging

2<sup>e</sup>: Viskeuze golven  $c = \infty$ ;  $\kappa = 0$ ;  $g = 0$

Het medium is nu onsamendrukbaar zoals past bij  $c = \infty$

De vergelijkingen zijn:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{continuïteit}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad \text{impuls diffusievergl.}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0 \quad \text{energie}$$

Stel  $p=0$ , er kan nu een vlakke golf  $u = \hat{u} \cdot \exp i(\omega t - k \cdot x)$  voor de deeltjesnelheid in de impuls vergl. ingevuld worden.

De dispersierelatie is i.w  $= -\eta \cdot k^2$

De fase snelheid  $V_f = \omega / \text{Re}(k) = \sqrt{2 \cdot \eta \cdot \omega}$

De groepssnelheid vereist nu wat meer zorg. Het toepassen van  $V_g = d\omega / dk$  geeft nu een imaginaire groepssnelheid.

Deze sterk gedempte golven transporteren echter wel degelijk energie. De invloed van een langs zichzelf heen en weer bewegend vlak breidt zich door het medium uit ook al wordt de invloed met de afstand snel zwakker.

Een bewegende luchtlaag oefent op de volgende laag een wrijvingskracht uit  $F = -\mu \nabla \vec{u} = -\mu \partial u / \partial z = i \cdot \mu \cdot k \cdot \hat{u} \cdot \exp(i(\omega t - kx))$  voor een één dimensionaal systeem. Het overgedragen vermogen wordt nu,

$$I = \langle u \cdot F \rangle = \left\langle \frac{u+u^+}{2} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{F+F^+}{2} \right\rangle = i \cdot \mu / 4 \cdot (k - k^+) \cdot \hat{u} \cdot \hat{u}^+$$

Met  $k = (1-i) / \sqrt{2} \cdot \sqrt{\omega / \eta}$  volgt  $I = \sqrt{\eta \cdot \omega / 8} \cdot \hat{u} \cdot \hat{u}^+$

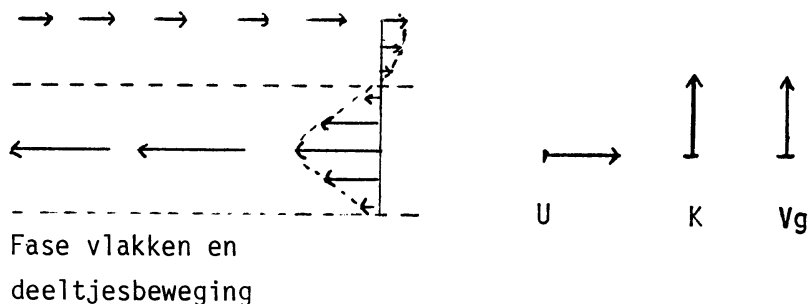
De energiedichtheid van de golf is  $E = 1/2 \cdot \rho \langle u^2 \rangle = 1/4 \cdot \rho \cdot \hat{u} \cdot \hat{u}^+$

De groepssnelheid wordt nu berekend met

$$V_g = I/E = \sqrt{2 \cdot \eta \cdot \omega}$$

Dit is een faktor 2 kleiner dan het resultaat van appendix A. Dit komt vermoedelijk omdat bij deze golf de energie langs twee wegen verdwijnt, enerzijds de overdracht naar de volgende vloeistof laag met de groepssnelheid en anderzijds de demping door inwendige wrijving. Door het energie transport te delen door de energiedichtheid wordt met dit inwendige verlies geen rekening gehouden zodat een te lage groepssnelheid wordt gevonden. Bij een grotere viskositeit is de groepssnelheid groter, dit is logisch omdat de viskositeit op te vatten is als de stijfheid van het medium. De amplitude van de golf dempt uit met een faktor  $\exp(-2 \cdot \pi)$  per golflengte. Uit de formule voor  $k$  blijkt dan dat lage freq. en grote viskositeit voor de meest effectieve energie overdracht zorgen.

Uit de cont.vergl volgt dat de deeltjesbeweging  $u$  loodrecht op de golfvektor  $k$  staat en dus parallel is aan de fase vlakken. De viskositeit transporteert energie langs de snelheidsgradienten dus  $V_g$  is evenwijdig aan  $k$ .



3<sup>e</sup>: Termische golven  $c=\infty$ ;  $\mu=0$ ;  $g=0$

Het medium is niet samendrukbaar. de enige vergelijking die overblijft is I-12 in de vorm

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\beta c_v} \cdot \nabla^2 T$$

Dit is weer een diffusie vergelijking met dezelfde soort oplossingen als bij de viskeuze golven. Er zijn nu echter alleen temperatuur golven en er is geen deeltjes beweging.

4<sup>e</sup>: Zwaarte golven  $c=\infty$ ;  $\mu=0$ ;  $\kappa=0$ ;  $\bar{g}=(0,0,-g)$

Het medium is niet samendrukbaar, de gelineariseerde vergelijkingen zijn:

$$\rho_0 \nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad \text{continuïteit}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\nabla p + \rho \cdot \bar{g} \quad \text{impuls}$$

Uit deze twee kan nu met verwaarlozing van het verschil tussen  $\nabla \cdot \rho \cdot \bar{u}$  en  $\rho \cdot \nabla \cdot \bar{u}$  een golfvergelijking afgeleid worden. Neem de divergentie van de impulsvergl:

$$\nabla^2 p = -g \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} ; \quad \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial z} = -g \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \quad \text{I-18}$$

stel  $q = \rho \cdot u_z$  de z component van de impulsvergl. geeft dan

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} - g \cdot \rho ; \quad \nabla^2 \frac{\partial q}{\partial t} = g \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} - g \cdot \nabla^2 \rho \quad \text{I-19}$$

In de laatste stap is I-18 gebruikt. Het dichtheidsverschil met de omgeving voor een over dz verplaatste hoeveelheid lucht is:

$$\rho = \frac{d\rho}{dz} \cdot dz \quad \text{dus} \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{dz} \cdot u_z = \frac{d \log \rho_0}{dz} \cdot q$$

De golfvergl. volgt nu als I-19 nog eens naar t wordt gedifferentieerd.

$$\nabla^2 \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = g \cdot \frac{d \log \rho_0}{dz} \cdot \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right) \quad \text{I-20}$$

$g \cdot d \log \rho / dz$  is nu de al bij I-10 gevonden Brunt-Vaisala frequentie, de term  $g/c^2$  ontbreekt omdat het medium als niet samendrukbaar is beschouwd zodat er bij het opstijgen van een hoeveelheid lucht ook geen expansie optreedt. De oplossing is weer de gebruikelijke vlakke golf.

$$\bar{u} = \hat{u} \cdot \exp i(\omega \cdot t - \bar{k} \cdot \bar{x})$$

$$\bar{k} = (k, l, m)$$

$$\text{De dispersierelatie is } \omega^2 = N^2 \cdot \frac{k^2 + l^2}{k^2 + l^2 + m^2} = N^2 \cdot \cos^2 \theta \quad \text{I-21}$$

De frequentie is dus alleen van de golfrichting en niet van de golflengte afhankelijk. Uit de cont.vergl. volgt weer dat de deeltjesbeweging  $\bar{u}$  loodrecht op de golfvektor  $\bar{k}$  staat. Uit de impulsvergelijking blijkt dat  $\bar{u}$  in het vlak van  $\nabla \cdot p = -i \cdot \bar{k} \cdot p$  en  $\bar{g}$  moet liggen. Hiermee is de bewegingsrichting van de deeltjes vastgelegd. Kies nu het assenstelsel zodanig dat de golfvektor geen component in de y richting heeft, dus  $l=0$  en  $u_y=0$ . Uit de cont.vergl volgt:  $u_x = -m/k \cdot u_z$ .  $u_x$  en  $u_z$  zijn dus in fase zodat de deeltjes rechtlijnig heen en weer bewegen. De enige kracht die het gas kan uitoefenen is de in allerichtingen gelijk werkende druk. Arbeid kan er dus alleen verricht worden langs de bewegingsrichting  $u$ . Het energietransport en daarmee de groepssnelheid zal dus net als bij de geluidsgolven in de richting van  $\bar{u}$  plaatsvinden, maar dat is hier loodrecht op het golfgetal  $\bar{k}$ .

De arbeid die de golf op een vlakje  $d\bar{a}$  verricht per sec is

$$P = p \cdot \bar{u} \cdot d\bar{a}$$

De golfenergieflux  $\bar{I}$  is nu de gemiddelde waarde hiervan. Met de x-impuls en de cont.vergl. volgt dat  $p$  en  $\bar{u}$  in fase zijn en:

$$p = -\rho_0 \cdot \omega \cdot m / k^2 \cdot u_z$$

$$\bar{I} = \left\langle \frac{p+p^+}{2} \cdot \frac{\bar{u}+\bar{u}^+}{2} \right\rangle = 1/2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{u} = -1/2 \cdot \frac{\rho_0 \cdot \omega \cdot m \cdot u_z}{k^2} \cdot \hat{u} \quad \text{I-21}$$

De energiedichtheid  $E$  van de golf is de som van de potentiële en kinetische energiedichtheid. Bij harmonische golven zijn deze twee gemiddeld gelijk dus:

$$E = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \hat{u} \cdot \hat{u}^+ = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(1 + \frac{m^2}{k^2}\right) \cdot \hat{u}_z^2 \quad \text{I-22}$$

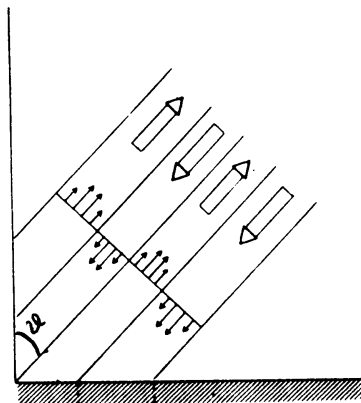
Met  $V_g = E/w$  volgt voor de grootte van de groepssnelheid

$$|V_g| = \frac{w \cdot m}{k \cdot \sqrt{k^2 + m^2}} = N \cdot \sin \varphi / |\bar{k}| \quad \text{I-23}$$

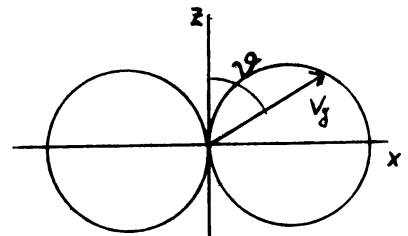
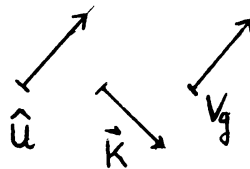
De groepssnelheid kan ook via de dispersierelatie berekend worden (appendix A). Omdat  $w$  wel van de richting maar niet van de grootte van  $k$  afhangt staat  $V_g$  loodrecht op  $k$ .

$$\bar{V}_g = \frac{\partial w}{\partial \bar{k}} = \frac{N \cdot m}{k^2 + l^2 + m^2} \cdot \left[ \frac{(k \cdot m, l \cdot m, -k^2 + l^2)}{((k^2 + m^2) \cdot (k^2 + m^2 + l^2))^{3/2}} \right] \quad \text{I-24}$$

De faktor tussen haken is een eenheidsvektor in de richting van de deeltjesbeweging  $\bar{u}$ .



Fase vlakken en deeltjesbeweging



Groepssnelheid als functie van de golfrichting bij  $|\bar{k}|$  konstant

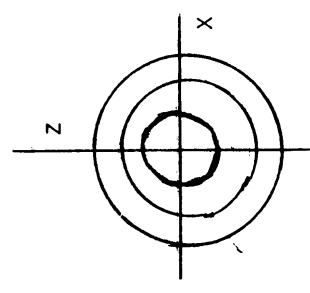
De zwaartegolf laat zich nu beschrijven als een stelsel van lagen (fasevlakken) die onder een hellingshoek  $\varphi$  heen en weer bewegen met een frequentie  $w = N \cdot \cos \varphi$ . De fase loopt in de richting  $\bar{k}$  loodrecht op deze vlakken de energie loopt loodrecht op  $\bar{k}$  langs de fasevlakken omhoog of omlaag.

Bij verticale bewegingen ( $\psi = 0$ ) wordt de maximale freq. bereikt, de voortplantingssnelheid is dan echter tot nul afgenomen. Bij schuine bewegingen is de component van de zwaartekracht in de bewegingsrichting zwakker zodat de freq. lager is. Er is dan wel energie transport langs de golf. Met  $V_g = \lambda / T_n \cdot \sin$  en een B-V. periode van  $T_n = 10$  min. volgt een groepssnelheid van 1 m/sec bij een golflengte van 1 Km onder een hoek van  $45^\circ$ . Bij zwaartegolven kunnen golflengten van meer dan 100 Km voorkomen zodat zeer grote voortplantingssnelheden mogelijk zijn.

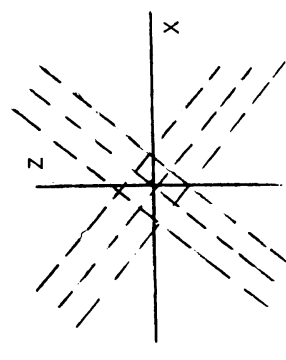
In de echte atmosfeer spelen de samendrukbaarheid, de viskositeit, de termische geleiding en de gelaagdheid tegelijkertijd hun rol. In Lighthill en Beer wordt een gecombineerde behandeling gegeven van zwaarte en geluidsgolven. Daarom zal in de volgende hoofdstukken de nadruk liggen op de effecten van wind, viskositeit en termische geleiding op zwaarte golven. In de Bousinesq benadering wordt het medium als onsamendrukbaar beschouwd zodat geluidsgolven buiten de oplossingen worden gehouden. Expansie van het gas wordt tot uiting gebracht met een veranderlijke dichtheid maar de deeltjes beweging die met deze expansie samenhangt wordt verwaarloosd t.o.v. de andere stromingen die een rol spelen.

OVERZICHT VAN DE VERSCHILLENDE SOORTEN GOLVEN

Eigenschap van het medium	Geluid	Viskeus	Thermisch	Zwaar
deeltjesbeweging	samendrukbaarheid $\vec{u}$ parallel aan $\vec{K}$ loodrecht op fasevlak	viskositeit $\vec{u}$ loodrecht op $\vec{K}$ parallel aan fasevlak	thermische geleiding $\vec{u} = 0$	gelaagdheid $\vec{u}$ loodrecht op $\vec{K}$ parallel aan fasevlak
groepsnelheid	$V_g$ parallel aan $\vec{K}$ parallel aan $\vec{u}$ $V_g = c$	$V_g$ parallel aan $\vec{K}$ loodrecht op $\vec{u}$ $V_g = \sqrt{2 \cdot \mu \cdot w / \rho}$	$V_g$ parallel aan $\vec{K}$	$V_g$ loodrecht op $\vec{K}$ parallel aan $\vec{u}$ $V_g = N \cdot \sin(\psi) /  K $
dispersie relatie	$w^2 = c^2 \cdot \vec{K}^2$	$w = i \cdot \mu / \rho \cdot \vec{K}^2$	$w = i \cdot \kappa / (\rho \cdot c_v) \cdot \vec{K}^2$	$w^2 = N^2 \cdot \cos(\psi)^2$
energie behoud	ja	nee	n.v.t	ja



Geluidsbron met konstante frequentie  
De golven lopen in alle richtingen  
De figuur geeft de fase vlakken



Zwaarte golfbron met konstante freq.  
Alleen golven in de richtingen met  $\cos(\psi) = \pm w/N$   
De figuur geeft weer de fase vlakken



## II DE INVLOED VAN DE ACHTERGRONDWIND OP DE GOLVEN

### § II-1 DE GROEPSSNELHEID

De zware golven hebben in de Bousinesq benadering de dispersie relatie:

$$w^2 = N^2 \frac{k^2 + l^2}{k^2 + l^2 + m^2} \quad \text{II-1}$$

Definieer nu het horizontale golfgetal H en het totale golfgetal K als

$$H^2 = k^2 + l^2$$
$$K^2 = k^2 + l^2 + m^2$$

De golfvoortplanting wordt nu gegeven door het Hamiltonstelsel (appendix A)

$$\dot{\bar{r}} = -\frac{\partial w}{\partial \bar{k}} \quad \text{II-2}$$
$$\dot{\bar{k}} = \frac{\partial w}{\partial \bar{r}}$$

Er is nu een achtergrond wind in de x richting die in sterkte hoogte afhankelijk is.  $\bar{V}(r) = (V(z), 0, 0)$ . De freq. van de golf ondergaat hierdoor t.o.v. het medium een doppler verschuiving  $w_D = (\bar{V} \cdot \bar{k}) = V(z) \cdot k$ . De freq. uit de dispersierelatie is nu de relatieve freq.  $w_r$  van de golf t.o.v. het medium. Voor een vaste waarnemer op de grond wordt de dispersierelatie nu

$$w = V \cdot k + N \cdot \frac{H}{K} \quad \text{en} \quad w_r = w - V \cdot k \quad \text{II-3}$$

w is nu een funktie van  $\bar{k}$  en z, uit II-2 blijkt dan direkt dat de horizontale componenten k en l van  $\bar{k}$  constant zijn en dat alleen het vertikale golfgetal m hoogteafhankelijk is. Bij grote windsnelheden kan de relatieve freq.  $w_r$  tot nul dalen en negatief worden. Het nivo waarop  $w = V \cdot k$ , dus  $w_r = 0$  is de kritieke laag. Hier is de horizontale fasesnelheid  $V_f = w/k$  gelijk aan de windsnelheid. Omdat de freq. hier nul is verdwijnt het golfkarakter van de beweging op de kritieke laag.

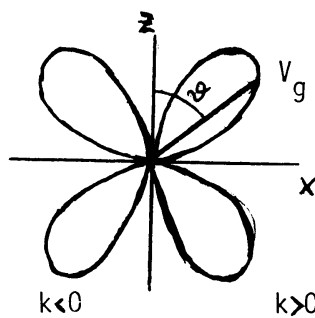
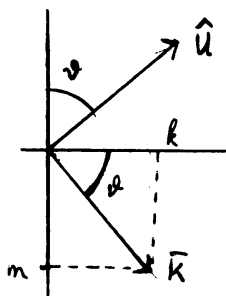
Met de x as in de golfrichting ( $l=0$ ) volgt nu voor de groeps-  
snelheid t.o.v. het medium:

$$U_x = \frac{\partial w}{\partial k} = \pm N \cdot \frac{m^2}{(k^2 + m^2)}$$

$$U_z = \frac{\partial w}{\partial m} = - N \cdot \frac{k \cdot m}{(k^2 + m^2)}$$

$$|\vec{U}| = \left| \frac{N \cdot m}{K^2} \right| = \frac{N}{K} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta$$

II-4



$m < 0$   
 $m > 0$

Groepsnelheid  
als functie van  
de golfrichting  
bij k konstant

Het klaverblad geeft nu de golfsnelheid als functie van de voortplantingsrichting bij een konstant horizontaal golfgetal. Via  $w_r = N \cdot \cos \vartheta$  hangt de golfrichting direkt samen met de freq. t.o.v. het medium. De figuur geeft dus de snelheden van een individuele golf die zich door lagen met verschillende windsnelheden beweegt. Voor golven met  $w \rightarrow N$   $\vartheta \rightarrow 0$  en  $w \rightarrow 0$ ,  $\vartheta \rightarrow 90^\circ$  gaat de golfsnelheid naar nul. Een vaste waarnemer zal deze golven met de snelheid van de achtergrond wind zien lopen.

Als de windsnelheid met de hoogte stijgt krijgt een tegen de wind in lopende golf door de Dopplerverschuiving een steeds hogere  $w_r$ . De horizontale golfsnelheid neemt hierdoor af zodat de golf uiteindelijk door de wind mee naar achteren wordt genomen. Bij nog sterkere wind wordt de B-V-freq. bereikt. De verticale snelheid is dan nul zodat de golf niet verder kan stijgen.

Een met de wind mee lopende golf ziet zijn  $w_r$  tot nul dalen bij de kritieke laag.  $\vartheta$  nadert nu tot  $90^\circ$  zodat ook hier de golf de kritieke laag niet kan passeren.

§ II-2 GOLFVOORTPLANTING / RAY TRACING

Met de dispersie relatie II-3 volgt nu in het algemene geval  $\bar{k}=(k.l.m)$  en wind in de x-richting:

$$U_x = V + N \cdot \frac{k \cdot m^2}{H \cdot K^3}$$

$$U_y = N \cdot \frac{l \cdot m^2}{H \cdot K^3}$$

$$U_z = - N \cdot \frac{H \cdot m}{K^3}$$

Met de transformaties:

$$r = w_r / N = \pm H/K = \frac{w - V \cdot k}{N} = \cos \psi$$

$$w' = w/N$$

$$v = V \cdot k/N ; \quad w' = v + r$$

kan dit stelsel geschreven worden als:

$$U_x = \frac{N}{K} \left[ w' - r + (\pm)_r \cdot \frac{k^2}{H^2} \cdot r \cdot (1-r^2) \right]$$

$$U_y = (\pm)_r \cdot \frac{N \cdot l}{H^2} \cdot r \cdot (1-r^2)$$

$$U_z = -(\pm)_m \cdot (\pm)_r \cdot \frac{N}{H} \cdot r^2 \cdot \sqrt{(1-r^2)} \quad \text{II-5}$$

Hierbij geven  $(\pm)_m$  en  $(\pm)_r$  de tekens van m en r aan. In II-5 zijn de frequenties  $w'$  en r en de Dopplerverschuiving v nu gemeten t.o.v. de natuurlijke frequentie N.

Wanneer r nu als functie van de hoogte z bekend is kan met II-5 de golfbaan berekend worden. Uit het behoud van golf-aktie (appendix B) kan daarna op ieder punt de sterkte van de golf uitgerekend worden zodat het hele probleem in principe opgelost is. Het stelsel II-5 bevat de tijd t in de vorm  $U = dr/dt$ , met  $U_z/U_x = dz/dx$  etc. kan de tijd geelimineerd worden om een golfbaanvergelijking in de x y.z ruimte te krijgen.

Het stelsel II-5 heeft nu een aantal punten waarop snelheidscomponenten nul worden. Deze karakteristieke punten zijn:

- 1<sup>e</sup> De kritieke laag  $r=0$ .  $U_y=0$ ,  $U_z=0$ ,  $U_x=V$ , de golf verliest zijn freq. en zijn snelheid t.o.v. het medium.  $\vartheta=90^\circ$  en uit  $m=k \cdot \tan \vartheta$  volgt  $m \rightarrow \infty$ .
- 2<sup>e</sup> De reflectie laag  $r=\pm 1$   $U_y=0$ ,  $U_z=0$ ,  $U_x=V$ , de golf verliest nu wel zijn snelheid maar niet zijn freq. t.o.v. het medium.  $\vartheta \rightarrow 0$  dus  $m \rightarrow 0$ .
- 3<sup>e</sup> De laag met  $(w' - r + (\pm)_r \cdot \frac{k^2}{H^2} \cdot r \cdot (1-r^2))=0$ . Hier wisselt  $U_x$  van teken zodat de golf van looprichting verandert.

Door nu het windveld te lineariseren rond deze punten kan het preciese gedrag van de golf op deze lagen onderzocht worden. Door nu geschikte schaaltransformaties in de x, y en z richting toe te passen kunnen de konstanten in II-5 op 1 gebracht worden en volgt  $r=r_0+z$ .

Het stelsel II-5 krijgt nu de vorm:

$$U_x = w' - r + (\pm)_r \cos^2 \beta \cdot r \cdot (1-r^2)$$

$$U_y = (\pm)_r \cdot r(1-r^2) \quad \text{II-5'}$$

$$U_z = -(\pm)_m (\pm)_r \cdot r^2 \cdot \sqrt{1-r^2}$$

met  $\cos(\beta) = k/H$

$$m = k \cdot \tan(\vartheta) = k \cdot \sqrt{\frac{1-r^2}{r}}$$

$$r = r_0 + z$$

$$v = w' - r = w' - r_0 - z$$

De snelheidsvergelijkingen II-5 kunnen nu rond de karakteristieke punten met een polynoom in z benaderd worden. Als alleen de laagste orde termen in z gebruikt worden is het stelsel eenvoudig oplosbaar.

1 De kritieke laag

$$r_0 = 0; \quad r = z; \quad v = w' - z$$

In laagste orde in  $z$  is de groeps-snelheid:

$$U_x = w'$$

$$U_y = (+)_{\underline{r}} \cdot z$$

$$U_z = -(+)_{\underline{m}} (+)_{\underline{r}} \cdot z^2$$

Dit heeft als oplossing

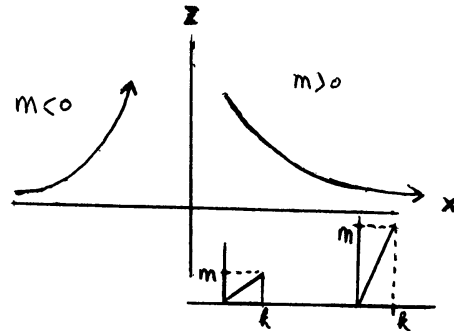
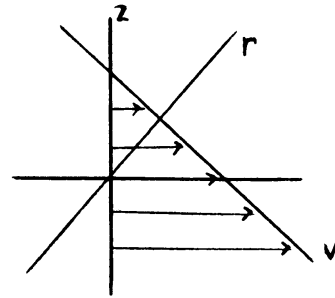
$$z = (+)_{\underline{m}} (+)_{\underline{r}} \cdot 1/t$$

$$= (+)_{\underline{m}} (+)_{\underline{r}} \cdot w'/x$$

$$y = (+)_{\underline{m}} \cdot \log(x/w')$$

$$x = w' \cdot t$$

$$m = \pm k/\sqrt{z}$$



Afhankelijk van het teken van  $m$  loopt de golf naar de kritieke laag toe of er van af. De golf verliest zijn snelheid echter zo snel dat hij oneindig veel tijd nodig heeft om de kritieke laag te bereiken. De golf loopt met de wind mee. Door de Doppler verschuiving is de freq. tov. het medium tot nul gedaald. Het golfgetal stijgt naar  $\infty$ . bij deze kleine golflengten gaat de viscositeit een rol spelen en klopt het gebruikte model niet meer.

2 De reflektie laag

$$r_0 = 1; \quad r = 1 + z; \quad v = w' - 1 - z$$

De groepssnelheid is nu

$$U_x = w' - 1 < 0$$

$$U_y = -2 \cdot z$$

$$U_z = -(+)_{\underline{m}} \cdot \sqrt{-2 \cdot z}$$

Met oplossing

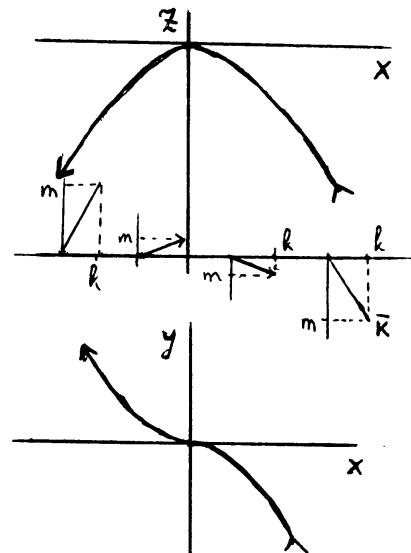
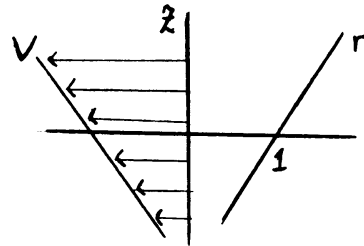
$$z = -1/2 \cdot t^2$$

$$= -1/(2 \cdot (w' - 1)^2) \cdot x^2$$

$$y = 1/3 \cdot (x/(w' - 1))^3$$

$$x = (w' - 1) \cdot t$$

$$m = \pm k \cdot \sqrt{-2 \cdot z}$$



De verticale snelheid daalt nu ook tot nul maar de golf kan de reflectie laag toch in eindige tijd bereiken zodat er inderdaad reflectie plaatsvindt. Een waarnemer die met de achtergrondstroming meebeweegt ziet dat de golf hier de Brunt-Vaisala freq. heeft. De golf loopt t.o.v. het medium naar rechts maar omdat de windsnelheid groter is dan de horizontale groepssnelheid, is  $U_x$  naar links gericht. De weerkaatsing gaat gepaard met een tekenwisseling in het verticale golf getal  $m$ .

3 De laag met  $F = w' - r + (\pm)_r \cdot \cos^2(\beta) \cdot r(1-r^2) = 0$

$$r = r_0 + z$$

$$v = w' - r_0 - z$$

de groepssnelheid is nu:

$$U_x = dF/dr \cdot z = (-1 + \cos^2 \beta) \cdot z$$

$$U_y = r_0 (1 - r_0^2)$$

$$U_z = -(\pm)_m \cdot r_0^2 \cdot \sqrt{1 - r_0^2}$$

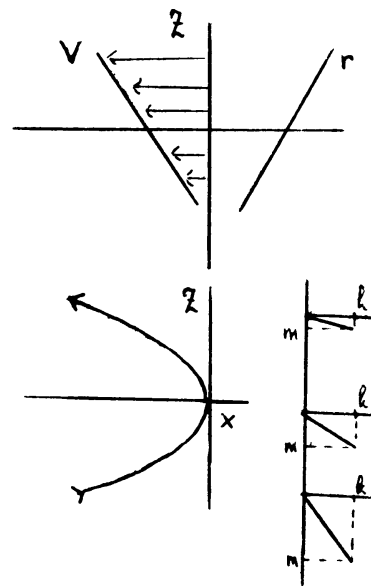
Met oplossing

$$z = -(\pm)_m \cdot c_1 \cdot t$$

$$y = c_2 \cdot t$$

$$x = (-1 + \cos^2 \beta) / 2 \cdot t^2$$

$$= -c_3 \cdot z^2$$



Op  $z=0$  keert hier de horizontale loop-richting van de golf om. De groepssnelheid wordt hier kleiner dan de windsnelheid. Dit kan alleen optreden als  $r > w'$ , dus voor golven die tegen de wind in lopen.

Bij een lineair windprofiel is het stelsel II-5 exact op te lossen. Stel  $r=z$  en  $N/H \cdot t = \tau \Rightarrow v=w'-r=w'-z$ . De kritieke laag ligt nu op  $z=0$ .

$$\frac{dz}{z^2 \sqrt{1-z^2}} = -(\pm)_m \cdot (\pm)_r \cdot d\tau$$

$$\sqrt{1-z^2}/z = (\pm)_m \cdot (\pm)_r \cdot \tau$$

$$z = \pm \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + 1}}$$

$m$  wisselt van teken op  $\tau=0$  dus  $(\pm)_m \cdot \tau = |\tau|$

$$\frac{dy}{dz} = -(\pm)_m \cdot (\pm)_r \cdot \frac{1}{H} \cdot \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$$

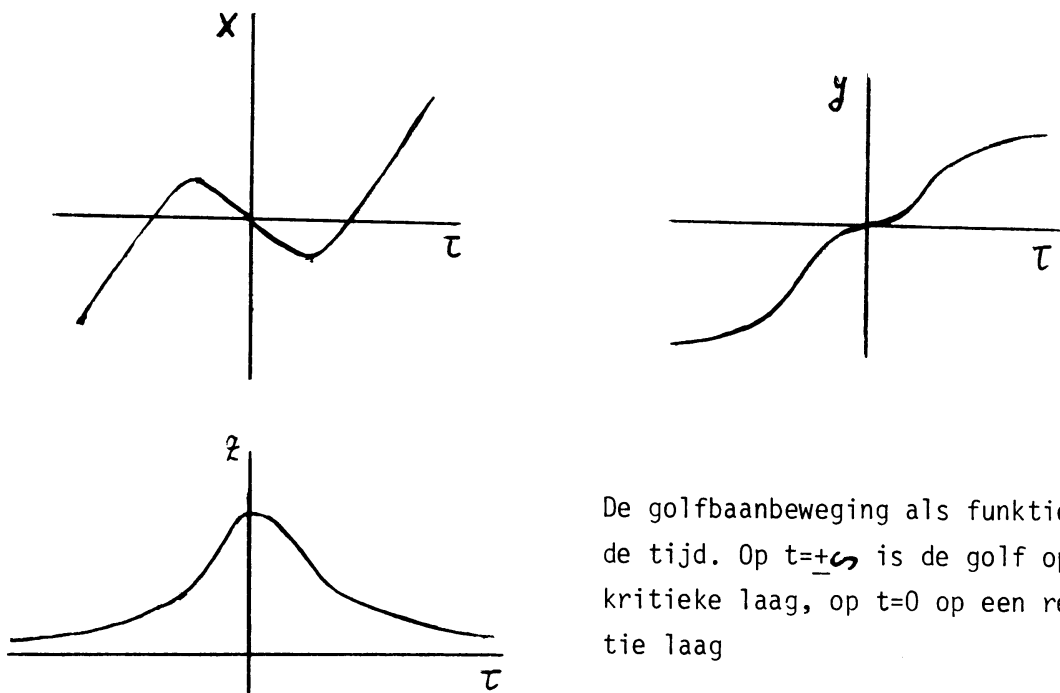
$$\begin{aligned} y &= (\pm)_m \cdot (\pm)_r \cdot \frac{1}{H} \cdot \left[ \log\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right) - \sqrt{1-z^2} \right] \\ &= (\pm)_m \cdot (\pm)_r \cdot \frac{1}{H} \cdot \left[ \log(\sqrt{\tau^2+1} + |\tau|) - \sqrt{\frac{\tau^2}{\tau^2+1}} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dz} = -(\pm)_m \cdot (\pm)_r \cdot \frac{H}{K} \cdot \left[ \frac{w'-z}{z^2 \sqrt{1-z^2}} + (\pm)_r \cdot \frac{k^2}{H^2} \cdot \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \right]$$

$$\begin{aligned} x &= (\pm)_m \cdot (\pm)_r \cdot \frac{H}{K} \cdot \left[ \left( \frac{w'}{z} - (\pm)_r \cdot \frac{k^2}{H^2} \right) \cdot \sqrt{1-z^2} + \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 - (\pm)_r \cdot \frac{k^2}{H^2} \right) \cdot \log\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right) \right] \\ &= (\pm)_m \cdot (\pm)_r \cdot \frac{H}{K} \cdot \left[ \left( w' \cdot \sqrt{\tau^2+1} - (\pm)_r \cdot \frac{k^2}{H^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{\tau^2}{\tau^2+1}} + \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 - (\pm)_r \cdot \frac{k^2}{H^2} \right) \cdot \log(\sqrt{\tau^2+1} + |\tau|) \right] \end{aligned}$$

Deze resultaten geven nu de levensloop van een individuele golf weer. Een golf start op  $t=-\infty$  op de kritieke laag loopt dan weg van deze laag naar een gebied met een hogere  $w_r$ . Dit gaat door tot de reflectie laag met  $w_r=N$ . Hier wisselt het verticale golfgetal  $m$  van teken en de golf loopt terug naar de kritieke laag voor  $t \rightarrow +\infty$ . In de limieten  $t \rightarrow \pm\infty$  gaan  $U_y$  en  $U_z$  naar nul en  $U_x$  naar de achtergrond wind  $V$ .

Wanneer de freq.  $w$  niet te hoog is wisselt  $U_x$  op zekere hoogte van teken, de golf wordt dan door de achtergrond wind meegesleept.



De golfbaanbeweging als functie van de tijd. Op  $t=+\infty$  is de golf op een kritieke laag, op  $t=0$  op een reflectie laag

Het is illustratief de golfbaan in het  $x,z$ -vlak uit te zetten voor het geval  $l=0$ ,  $r$  positief. De baan vergelijking is dan:

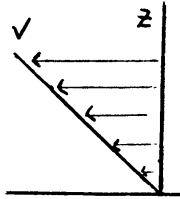
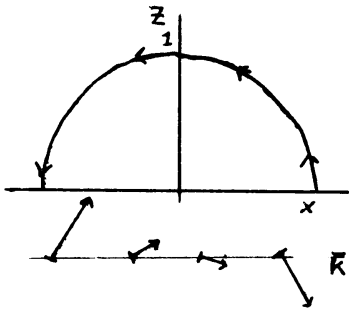
$$x = (\pm)_m \cdot \left(\frac{w'}{z} - 1\right) \cdot \sqrt{1-z^2} \quad \text{en } m = \pm k \cdot \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \quad \text{II-6}$$

$$r = z$$

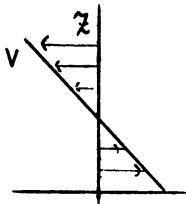
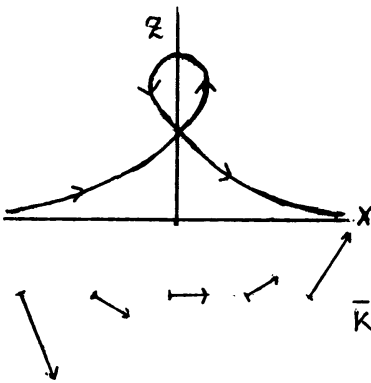
In de figuren wordt nu het windveld, de golfbaan en de golfvektor  $k$  uitgezet. Afhankelijk van de waarde van  $w'$  zijn er nu vier verschillende typen golfbanen. In de tekeningen bevindt zich op  $z=0$  een kritieke en op  $z=1$  een reflectielaag.



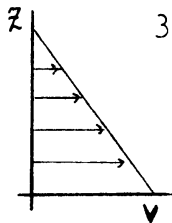
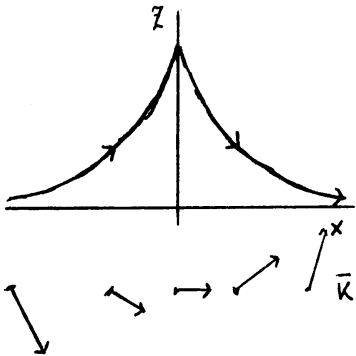
1<sup>e</sup>  $w'=0$  Dit zijn topografisch opgewekte golven t.o.v. een vaste waarnemer staat het golfpatroon stil. De golf beschrijft een halve cirkelbaan  $x=\pm\sqrt{1-z^2}$  met eindpunten op de kritieke laag. Ten opzichte van een vaste waarnemer loopt de golfenergie in de neg. x richting maar t.o.v. het medium in pos. x richting de windsnelheid is groter dan de horizontale golfsnelheid.



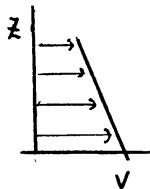
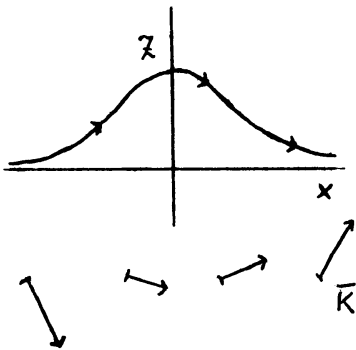
2<sup>e</sup>  $0 < w' < 1$  Dit soort golven kan opgewekt worden door opstijgende luchtmassa's turbulentie etc. Bij voldoende grote windsnelheid kan de horizontale loop-richting van de golven omkeren. In de limiet  $t \rightarrow \infty$  is de baan van de golf  $z=1/x$ .



3<sup>e</sup>  $w'=1$  De golf heeft de B.V-freq. zodat golven alleen maar mogelijk zijn als de Dopplerverschuiving de freq voldoende verlaagt.

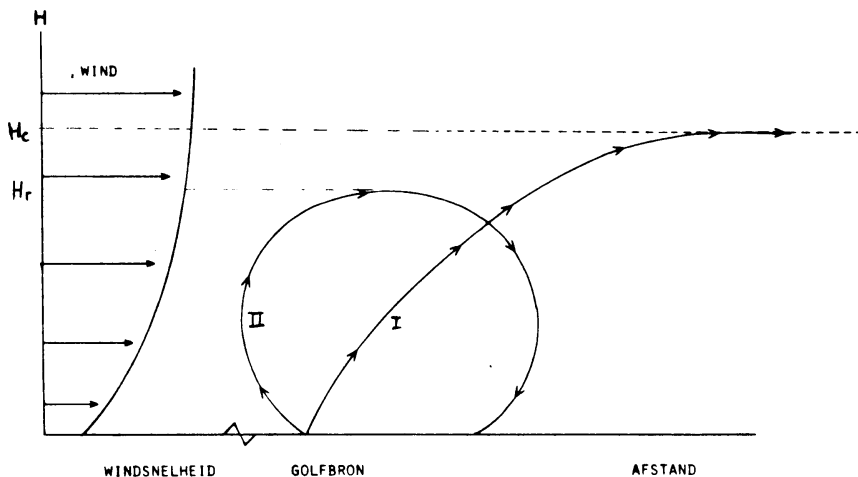


4<sup>e</sup>  $w' > 1$  De golf is nu beperkt tot een gebied waar de windsnelheid de freq tot lager dan 1 beperkt.



Bij een gegeven windveld gaan nu door iederpunt van het x-z vlak in principe vier golven; n.l. stijgend ( $m < 0$ ) dalend ( $m > 0$ ), naar links ( $k < 0$ ) en naar rechts ( $k > 0$ ). De banen van al deze golven kunnen gevonden worden door uit de bovenstaande figuren de juiste takken te kiezen.

Bij het lineaire windprofiel ligt de golfbaan in het gebied waarvoor  $w_r$  tussen nul en de B.V-freq. ligt. Dit gebied wordt aan de ene kant begrensd door een reflectie laag met  $w_r = N$ . Deze laag wordt in eindige tijd bereikt en het verticale golfgetal en voortplantingssnelheid wisselen hier van teken. Aan de andere kant ligt de kritieke laag. De looptijd hiernaar toe is oneindig en het verticale golfgetal is  $\pm \infty$ . De kritieke laag trekt de golven aan. altijd geldt voor  $t \rightarrow \infty$   $z \rightarrow z_c$ . In de praktijk zal er een extra grens optreden in de vorm van een vaste bodem. Hier geldt als randvoorwaarde dat de verticale deeltjesbeweging nul is. Dit leidt tot reflectie met een fase sprong van  $180^\circ$ .



In de figuur is er nu een golfbron B die met vaste freq  $w$  uitzend. Vanuit de bron loopt een golf met  $k > 0$  met de wind mee (I). Deze golf heeft een kritieke laag op  $z = H_c$ . Golf II loopt tegen de wind in met  $k < 0$ . Deze heeft een reflectie-laag op  $z = H_r$  en reflekteerd daarna opnieuw tegen de vaste bodem.

§ II-3 KONKLUSIE

In het voorgaande is aangegeven hoe de golfbaan van een zwaartegolf in een windveld berekend kan worden. Met het behoud van golfactie kan de sterkte van de golf zo op ieder punt worden gegeven. In principe is hiermee het helestromingsveld in gelineariseerde benadering hiermee bekend. Er zijn evenwel een aantal bezwaren tegen deze methode.

- 1<sup>e</sup> De golfstralen methode gaat alleen op bij een zeer geleidelijke verandering van de eigenschappen van het medium. Bij sprongen in de temperatuur of de windsnelheid treden partiele reflekties op waar de methode geen rekening mee houdt. Bij de kritieke laag gaat het vert. golfgetal naar oneindig. De golfstralen zijn niet goed bestand tegen dit soort singulariteiten.
- 2<sup>e</sup> Termische geleiding en viskositeit zijn hier verwaarloosd. Deze termen zijn van orde  $|\bar{k}|^2$  zodat ze vooral rond de kritieke laag van belang zijn. Uit I-16' blijkt dat de viskositeit voorkomt met een sterkte  $\eta = \mu/\rho_0$ . Aangezien de achtergrond dichtheid exponentieel daalt met de hoogte wordt de viskositeit op grotere hoogten dus snel belangrijk.
- 3<sup>e</sup> De achtergrond dichtheid  $\rho_0$  daalt met de hoogte, een energie behoudende golf moet dus een met de hoogte stijgende amplitude hebben.

Aan het eerste bezwaar kan tegemoet worden gekomen door niet langer met de dispersie relatie te werken maar de gelineariseerde stromingsvergelijkingen zelf op te lossen. Hier zal in hoofdstuk III aan worden gewerkt.

Het tweede en derde bezwaar kunnen worden verholpen door de viskositeit, hoogte afhankelijkheid en termische geleiding in de dispersie relatie op te nemen. Dit gebeurt in hoofdstuk IV.

### III DE TAYLOR-GOLDSTEIN VERGELIJKING.

In dit hoofdstuk wordt uitgegaan van een medium zonder viscositeit, termische geleiding of samendrukbaarheid (Bousinesq benadering). De achtergrond dichtheid  $\rho_0$  en de x-gerichte wind zijn vertikaal gelaagd, en in de y-richting zijn alle grootheden konstant.

De stromingsvergelijkingen zijn nu:

$$\partial_x u_x + \partial_z u_z = 0 \quad \text{cont.} \quad \text{I-15'}$$

$$(\partial_t + V\partial_x)u_x + \frac{dV}{dx} \cdot u_z + \frac{\partial p/\rho_0}{\partial x} = 0 \quad \text{x impuls} \quad \text{I-16}$$

$$(\partial_t + V\partial_x)u_z + \frac{\partial p/\rho_0}{\partial z} + g \cdot \rho'/\rho_0 = 0 \quad \text{z impuls} \quad \text{I-16}$$

$$(\partial_t + V\partial_x) \cdot \rho'/\rho_0 - N^2/g \cdot u_z = 0 \quad \text{energie} \quad \text{I-17'}$$

Het horizontale golfgetal is niet van de wind afhankelijk zodat oplossingen de vorm hebben van:

$$A(r, t) = A(z) \cdot \exp i(\omega t - k \cdot x)$$

Van de in deze vergelijkingen voorkomende differentiaaloperatoren zijn alleen  $(\partial_t + V\partial_x)$  en  $\partial_z$  niet verwisselbaar omdat V hoogte afhankelijk is. Bij de andere operatoren kan zonder bezwaar de volgorde worden verwisseld. Met de gekozen vorm voor de oplossing volgt:

$$(\partial_t + V\partial_x) = i(\omega - V \cdot k)$$

$$\partial_x = -i \cdot k$$

Uit de vier vergelijkingen kunnen nu  $u_x$ ,  $p/\rho_0$  en  $\rho'/\rho_0$  geelimineerd worden. Differentieer de x-impulsvergl. naar x en vervang met de cont.vergl. de  $\partial_x u_x$  door  $-\partial_z u_z$ .

$$-i(\omega - V \cdot k) \cdot \partial_z u_z - i \cdot k \cdot V' \cdot u_z - k^2 \cdot p/\rho_0 = 0 \quad \text{III-1}$$

Differentieer III-1 naar z

$$-i(w-V.k) \cdot \partial_z^2 u_z - i.k.V'' \cdot u_z - k^2 \cdot z p/\rho = 0$$

Werk nu  $p/\rho_0$  weg met de z-impuls vergelijking.

$$-i(w-V.k) \partial_z^2 u_z - i.k.V'' \cdot u_z + i.k^2(w-V.k)u_z + g.k^2 \cdot \rho/\rho_0 = 0$$

Pas hierop de operator  $(\partial_t + V\partial_x)$  toe. met behulp ven de energie vergl. volgt er dan een vergelijking in  $u_z$ .

$$(w-V.k)^2 \partial_z^2 u_z + (w-V.k) \cdot k \cdot V'' \cdot u_z - k^2(w-V.k)^2 \cdot u_z + N^2 \cdot k^2 u_z = 0$$

$$\partial_z^2 u_z + \left[ \frac{N^2 \cdot k^2}{(w-V.k)^2} + \frac{k \cdot V''}{(w-V.k)} - k^2 \right] u_z = 0 \quad \text{III-2}$$

Dit is nu de Taylor-Goldstein vergelijking voor de verticale golfbeweging. Met  $c_0 = w/k$ , de horizontale fasesnelheid kan het geschreven worden als:

$$\partial_z^2 u_z + \left[ \frac{N^2}{(c_0 - V)^2} + \frac{V''}{(c_0 - V)} - k^2 \right] u_z = 0 \quad \text{III-2'}$$

De vergelijking heeft een singulariteit als de horizontale fasesnelheid  $c_0$  gelijk is aan de windsnelheid. Dit is de kritieke laag met  $w_r = 0$ . De T.G-vergl kan ook nog geschreven worden als:

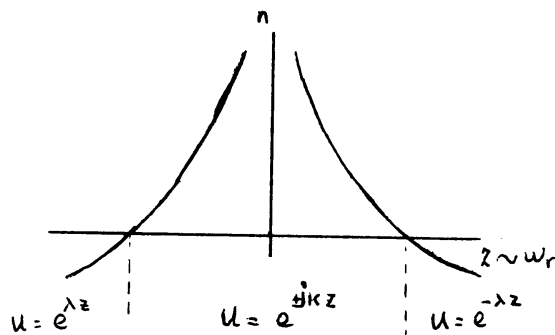
$$u_z'' + k^2 \cdot n^2 \cdot u_z = 0 \quad \text{III-2''}$$

$$n(z)^2 = \frac{N^2}{(w-V.k)^2} + \frac{V''}{k(w-V.k)} - 1$$

Dit is een golfvergelijking voor een medium met een veranderlijke brekings index. Ook de Schrödinger vergl heeft deze vorm. Wanneer  $n(z)$  een langzaam variërende functie van z is hebben de oplossingen lokaal de vorm,

$$u = u_0 \exp_{+i.k.n.z}$$

Voor  $n^2 > 0$  zijn dit echte golven met een periodieke ruimtelijke structuur, voor  $n^2 < 0$  zijn het dalende e-machten. Klassiek gezien is het punt met  $n(z)=0$  een keerpunt waar de golf wordt weerkaatst. Dit treedt voor een lineair profiel op bij  $(w-V.k)=w_r=N$ . Ook bij de golfstralen methode trad op dit punt reflectie op. Bij een lineair windprofiel is er nu een begrensd gebied tussen de omkeerpunten op  $w_r=\pm 1$  waarbinnen golfachtige oplossingen mogelijk zijn. Buiten deze grenzen zijn de oplossingen snel dalende e-machten. Tussen de keerpunten in ligt de kritieke laag met  $w_r=0$ .

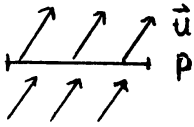


Bij een konstante wind volgt uit III-2 weer de dispersierelatie

$$-m^2 + (N^2/w_r^2 - 1)k^2 = 0$$

$$w^2 = \frac{N^2 \cdot k^2}{k^2 + m^2}$$

§ III-2 FASE- EN GROEPSSNELHEID ROND DE KRITIEKE LAAG



Beschouw een horizontaal vlakje in het medium dat met de deeltjesbeweging  $u$  van de golf mee gaat. Het gas onder dit vlakje oefent een druk  $p$  uit op het gas erboven. Het vertikaal overgedragen vermogen is dan:

$$P = p \cdot u_z$$

Bij een complexe schrijfwijze voor  $p$  en  $u_z$  moeten hier de reele delen gebruikt worden. Voor het tijdsgemiddelde van het overgedragen vermogen volgt:

$$\langle P \rangle = (p^+ \cdot u_z + p \cdot u_z^+) / 4$$

Bij het afleiden van de T.G-vergl bleek in III-1

$$p = -i \cdot \rho_0 / k^2 \cdot \left[ (w - V \cdot k) \partial_z u_z + k \cdot V' \cdot u_z \right]$$

Met een vlakke golf voor  $u_z = u_0 \exp i(w \cdot t - k \cdot x - m \cdot z)$  blijkt:

$$P = - \frac{\rho_0}{2 \cdot k^2} \cdot m \cdot w_r \cdot u_0^+ \cdot u_0 \quad \text{en } w_r = w - V \cdot k$$

Voor een naar boven gerichte golf moeten  $m$  en  $w_r$  dus verschillende tekens hebben. Wanneer de windsterkte met de hoogte stijgt geldt voor deze golf:

- Onder de kritieke laag:  $w_r > 0$ ,  $m < 0$  fasesnelheid  $w/m$  is neg.
- Boven " " " :  $w_r < 0$ ,  $m > 0$  " " " pos.

Onder de kritieke laag zijn de verticale fase en groep snelheid tegengesteld gericht, boven de kritieke laag waar de relatieve freq  $w_r$  negatief is zijn  $V_f$  en  $V_g$  paralel.

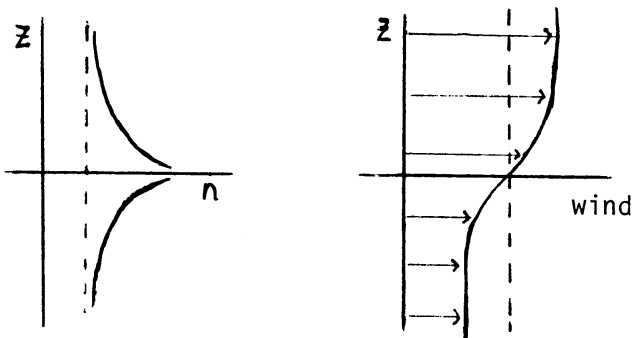
Bij een stijgende golf is de fasesnelheid onder en boven de kritiekelaag van deze laag afgekeerd, bij een dalende golf loopt de fase juist naar de kritieke laag toe.

§ III-3 OPLOSSINGEN VAN DE T.G.VERGELIJKING.

Bij een golfvergelijking als III-2 zijn alleen in gebieden met  $n(z)=\text{constant}$  de oplossingen duidelijk als omhoog of omhoog lopende golven te interpreteren. Als  $n(z)$  niet constant is treden er voortdurend partiele reflecties op en is een stijgende golf een bron voor de bij reflectie opgewekte dalende golven. Reflectie en transmissie coëfficiënten kunnen daarom alleen eenduidig worden vastgesteld bij windprofielen met

$$\begin{aligned} n(z) &\rightarrow c_1 \quad \text{voor } z \rightarrow +\infty \\ \text{en } n(z) &\rightarrow c_2 \quad \text{voor } z \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Omdat de golfkarakteristiek en niet de energie te behouden grootte is ligt het voor de hand de reflectie en transmissie te geven voor punten met gelijke relatieve frequentie  $w_r$ . Voor punten aan weerszijden van een kritieke laag betekent dit natuurlijk tegengestelde  $w_r$ .

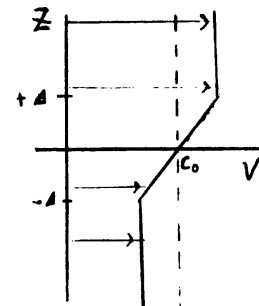


Er zijn nu verschillende methoden om het gedrag rond de kritieke laag te onderzoeken. hiervan zullen er enkele behandeld worden

A Ruwe oplossing.

Kies het windprofiel:.

$$\begin{aligned} V &= c_0 + a \cdot \Delta \quad \text{voor } z > \Delta \\ V &= c_0 + a \cdot z \quad \text{voor } -\Delta < z < \Delta \\ V &= c_0 - a \cdot \Delta \quad \text{voor } z < -\Delta \end{aligned}$$



En definieer het Richardsongetal als:

$$Ri = N^2/a^2 \quad \text{a is de windgradient}$$



De T.G-vergelijking wordt nu:

$$u'' + \left[ \frac{Ri}{z^2} - k^2 \right].u = 0 \quad \text{op } -4 < z < 4 \quad \text{III-3}$$

$$u'' + \left[ \frac{Ri}{z^2} - k^2 \right].u = 0 \quad \text{op het buitengebied} \quad \text{III-4}$$

De singulariteiten in  $V''$  op de aansluitpunten zijn hierbij weggelaten. Op het binnengebied wordt de vergelijking gedomineerd door de term  $Ri/z^2$  zodat hij kan worden benaderd met:

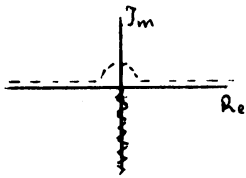
$$u'' + Ri/z^2.u = 0$$

met als oplossing

$$\begin{aligned} u = z^\lambda \quad \lambda &= 1/2 \pm \sqrt{1/4 - Ri} \\ &= 1/2 \pm i\sqrt{Ri - 1/4} \\ &= 1/2 \pm i.b \end{aligned} \quad \text{III-5}$$

De overgang van  $z < 0$  naar  $z > 0$  brengt problemen met zich mee die een zorgvuldige behandeling in het complexe vlak vereisen.

Kies de coupure langs de neg. Imaginaire as. dan



$$z = r \cdot \exp i\varphi$$

$$\begin{aligned} u &= \exp \left[ (1/2 \pm i.b) \cdot (\log(r) + i\varphi) \right] \\ &= \exp \left[ 1/2 \log(r) \pm b.\varphi \pm i.b \log(r) \pm 1/2.i.\varphi \right] \end{aligned}$$

$$u = \sqrt{z}. \exp(\pm i.b \log(z)) \quad \text{voor } z > 0. \quad \varphi = 0$$

$$u = i \cdot \exp(\mp b.\pi) \cdot \sqrt{-z}. \exp(\pm i.b \log(-z)) \quad \text{vor } z < 0 \quad \varphi = 180^\circ$$

De totale oplossing inclusief tijds- en x afhankelijk deel is:

$$u_1(x, z, t) = \sqrt{z}. \exp i(w.t - k.x - b \log(z)) \quad z > 0$$

$$= \sqrt{-z}. e^{b.\pi} \cdot \exp i(w.t - k.x - b \log(-z)) \quad z > 0$$

$u_2$  analoog met  $-b$ .

Bij  $u_1$  is de fasesnelheid van de kritieke laag afgekeerd zodat  $u_1$  grotendeels het karakter heeft van een stijgende golf.

Zo is  $u_2$  juist een dalende golf. Rond de kritieke laag ondergaan de golven dus een verzwakking met een faktor  $e^{-b \cdot \pi}$ . Voor een zuiver onderscheid tussen stijgende en dalende golven is het eigenlijk noodzakelijk de oplossingen  $u_1$  en  $u_2$  aan te sluiten op de oplossingen  $\exp_{\pm i.m.z}$  van het buitengebied. De sprong in windgradient geeft echter singulariteiten in de brekingsindex die grote partiele reflekties geven. Het aansluiten geeft daarom geen betere benadering van de oplossing. Voor  $Ri$  kleiner dan  $1/4$  zijn de oplossingen II-5 reel en hebben geen golfkarakter meer. Aansluiten op de randen is nu noodzakelijk om uit deze twee een golf te konstrueren maar wegens de singulariteiten op de randen niet goed mogelijk. Hier levert deze methode dus geen resultaten.

De konklusie kan dus zijn dat de golfaktie op de kritieke laag met een faktor  $e^{-b \cdot \pi}$  wordt verzwakt in het geval van een zwakke windgradient zodat  $Ri > 1/4$ .

B De W.K.B. methode (zie appendix B)

De vergelijking  $u'' + Q(z) \cdot u = 0$  heeft in de WKB benadering de oplossing:

$$u = Q \exp_{\pm} \{ S_0 + S_2 + \dots \}$$

$$S_0'(z) = \sqrt{-Q}$$

$$S_2'(z) = \frac{4 \cdot Q \cdot Q'' - 5 \cdot Q'^2}{32 \cdot Q^2 \cdot \sqrt{-Q}}$$

Voor de T.G-vergelijking:

$$Q = \frac{N^2}{(c-V)^2} + \frac{V''}{(c-V)} - k^2$$

Bij een lineair windprofiel rond de kritieke laag:

$$Q = \frac{Ri - k^2 \cdot z^2}{z^2}$$

$$S_0' = \pm i \frac{\sqrt{Ri - k^2 \cdot z^2}}{z}$$

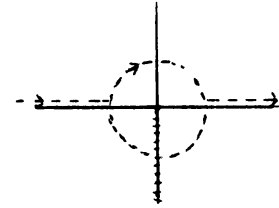
$$S_2' = \mp i \cdot \frac{Ri^2}{8 \cdot (Ri - z^2 \cdot k^2)^{5/2}} \cdot \frac{1 - 6 \cdot k^2 \cdot z^2}{z}$$

Uit de relatie tussen fase en groepssnelheid volgt nu dat de oplossing met het min teken voor  $S_0$  de stijgende golf is.

$$u = \left( \frac{z^2}{Ri - k^2 \cdot z^2} \right)^{1/4} \cdot \exp -i \int \frac{\sqrt{Ri - k^2 \cdot z^2}}{z} dz \quad \text{III-6}$$

De fase functie  $\frac{\sqrt{Ri - k^2 \cdot z^2}}{z}$  heeft een pool op  $z=0$  met residu  $+\sqrt{Ri}$

De fasefunctie is antisymmetrisch rond  $z=0$  dus bij een kringintegraal rond de pool dragen onder en bovenkant van de cirkel in gelijke mate bij aan de totale waarde  $2 \cdot \pi \cdot i \cdot \text{Residu}$ . De integraal over de boven cirkelhelft heeft dus een waarde  $-\pi \cdot i \cdot \sqrt{Ri}$  omdat hij in negatieve richting doorlopen wordt.



De complexe fasesprong over de pool leidt nu tot een reele golfverzwakking met een faktor  $\exp -\pi \cdot \sqrt{Ri}$ . Bij de gekozen integratie weg geeft de reele amplitude faktor in III-6 nu nog een extra fase faktor  $\exp (1/2 \cdot \pi \cdot i) = i$ . De tweede orde term  $S_2'$  geeft een bijdrage van  $-1/(8 \cdot \sqrt{Ri})$  aan de pool zodat de verzwakking wordt

$$\exp -\pi \cdot \sqrt{Ri} \cdot (1 - 1/(8 \cdot Ri))$$

Dit is een eerste orde benadering voor de bij de ruwe methode gevonden term  $\exp -\pi \cdot b$  met  $b^2 = Ri - 1/4$ .

Uit de vergelijking van nulde en tweede orde termen blijkt tevens dat de W.K.B. methode betrouwbaar is voor een Richardsongetal veel groter dan  $1/4$ . dus voor zwakke windgradiënten.

Bij deze twee methoden is de juiste keuze van de coupure van essentieel belang, Rond de kritieke laag wordt de T.G-vergl benaderd met

$$u'' + \frac{N^2 \cdot k^2}{(w - v \cdot k)^2} \cdot u = 0 \quad \text{III-1'}$$

Bij een konstant windveld heeft dit oplossing

$$u = \exp -i \cdot m \cdot z; \quad m = \frac{N \cdot k}{w - v \cdot k}$$

Bij een konstante golfbron een zwakke dissipatie in het medium moet de golf amplitude afnemen voor  $z \rightarrow +\infty$ .

Dit kan bereikt worden door te kiezen  $M=m+i.\epsilon$  en  $(w-V.k)$  te vervangen door  $(w-V.k+i.\gamma)$ ,  $\gamma = -\frac{(w-v.k)^2}{N.k}.\epsilon$   
 Met  $V = w/k + a.z$  rond de kritieke laag verschuift de pool nu van  $z=0$  naar  $z=i.\gamma/(a.k) = -i.\delta$  want  $\gamma < 0$ . Door nu de coupure vanaf  $-i.\delta$  langs de imaginaire as naar beneden te laten lopen kan er probleemloos langs de reële as geïntegreerd worden.

Booker en Bretherton kiezen de coupure door uit te gaan van een golfbron met sterkte nul op  $t=-\infty$  die daarna langzaam aangroeit volgens:

$$u = \exp i(\Omega.t - k.x - m.z) ; \quad \Omega = w - i.\epsilon$$

Met de bron onder de kritieke laag moet de golfamplitude boven nu altijd zwakker zijn dan beneden. Hiermee wordt dan de ligging van de coupure bepaald. Dit argument verliest een deel van zijn overtuigingskracht wanneer de bron weer langzaam wordt uitgezet.

Whitten en Riegel plaatsen de pool boven de reële as maar moeten om met de fase integraal goed uit te komen de coupure toch naar beneden leggen. Dit geeft een nogal onnatuurlijke integratie weg die ook niet helemaal correkt wordt behandeld.

De keuze voor de coupure wordt uiteindelijk waarschijnlijk meer door de gewenste uitkomst, nl. golfdamping bij zwakke windgradient, dan door echte argumenten bepaald. Whitten interpreteert de verzwakkingsfaktor  $\exp -\pi.\sqrt{R}$  als de overdracht van golfenergie aan de achtergrondstroming op de kritieke laag. Dit is niet juist. de amplitude faktor uit III-6, die evenredig is met de wortel uit  $z$  geeft de continue overdracht van energie aan de achtergrondstroming weer en is als zodanig verbonden met het begrip golfactie.

### C De Wronskiaan methode (zie Van Duin)

Deze methode levert geen reflectie of transmissie coëfficiënten op maar wel randvoorwaarden waaraan deze moeten voldoen. Voor een golfvergelijking van het type  $u'' + n^2.u = 0$  met  $n(z)^2$  reël volgt dat bij iedere oplossing  $u$  ook de complex toegevoegde  $\bar{u}$  een oplossing is.

Definieer nu de Wronskiaan als

$$W_r = i(u.\bar{u}' - u'.\bar{u}) \quad \text{III-7}$$

Dan volgt  $\frac{dW_r}{dz} = i.n^2(u.\bar{u} - \bar{u}.u) = 0$  voor  $n \neq \infty$

Zolang de brekingsindex  $n(z)$  geen polen heeft is de Wronskiaan dus een behouden grootte.

1<sup>e</sup> Stel dat het windprofiel zodanig is dat  $n(z)$  continu is en  $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} n = m_{\pm}$

Het transmissie reflectie probleem voor een stijgende golf is nu

$$u = \exp i.m_-z + R.\exp -i.m_-z \quad \text{voor } z \rightarrow -\infty$$

$$W_r = 2.m_-.(1-R^{\dagger}R)$$

$$u = T.\exp i.m_+z \quad \text{voor } z \rightarrow +\infty$$

$$W_r = 2.m_+.T^{\dagger}T$$

Gelijkstellen van de Wronskiaan onder en boven geeft nu de voorwaarde:

$$\frac{m_+}{m_-}.T^{\dagger}T + R^{\dagger}R = 1 \quad \text{III-8}$$

Dit resultaat laat zich interpreteren als het behoud van golfactie. Beschouw een golftrein met een lengte van een seconde en amplitude A. De deeltiessnelheid in de golfbeweging is:

$$u_z = A.\exp i(w.t - k.x + m.z)$$

$$u_x = m/k.u_z$$

De uitgebreidheid in verticale richting van dit golfpakket is evenredig met de groepssnelheid  $U_z$

$$U_z = \frac{N.m.k}{(k^2+m^2)^{3/2}} = -\frac{w_A k}{k^2+m^2}$$

De totale hoeveelheid energie in de golf is nu

$$E = 1/2.\beta.|\bar{u}|^2.U_z = 1/2.\beta.w.\frac{m}{k^2}.A^{\dagger}A$$

Stel nu  $m(z)=m_0$  voor de inkomende golf dan blijkt uit III-8 met  $A^+A=T^+T = m_0/m(z).(1-R^+R)$  voor de doorgelaten golf:

$$E_T = 1/2 \cdot \rho \cdot w_r(z) \cdot \frac{m_0}{k^2} \cdot (1-R^+R)$$

$$E_R = 1/2 \cdot \rho \cdot w_{r0} \cdot \frac{m_0}{k^2} \cdot R^+R$$

Nu blijkt de totale golfactie  $E_R/w_{r0} + E_T/w_r(z)$  konstant en behouden te zijn.

2<sup>e</sup> Het windprofiel is zodanig dat er een kritieke laag en dus een singulariteit voor  $n(z)$  is op  $z=0$ .

Bij een lineair windprofiel is de golfvergelijking weer

$$u'' + \left( \frac{Ri}{z^2} - k^2 \right) \cdot u = 0$$

met als benaderde oplossing:

$$u = z^\lambda \quad \begin{aligned} \lambda &= 1/2 \pm i \cdot \sqrt{Ri-1/4} \\ \lambda &= 1/2 \pm i \cdot b \end{aligned}$$

De oplossing is nu een lineaire combinatie van deze beide elementaire oplossingen. Bij de overgang van  $z > 0$  naar  $z < 0$  worden de oplossingen met een faktor  $i \cdot e^{-\pi \cdot b}$  vermenigvuldigd wegens de coupure in het complexe vlak.

Voor  $z > 0$

$$u = A_1 \cdot z^{\frac{1}{2} + i \cdot b} + A_2 \cdot z^{\frac{1}{2} - i \cdot b}$$

$$Wr(z) = 2 \cdot b \cdot (A_1 \cdot A_1^+ - A_2 \cdot A_2^+)$$

III-9

Voor  $z < 0$

$$u = i \cdot ( e^{-\pi \cdot b} \cdot A_1 \cdot |z|^{\frac{1}{2} + i \cdot b} + e^{\pi \cdot b} \cdot A_2 \cdot |z|^{\frac{1}{2} - i \cdot b} )$$

$$Wr(z) = -2 \cdot b \cdot ( e^{-2 \cdot \pi \cdot b} \cdot A_1 \cdot A_1^+ - e^{2 \cdot \pi \cdot b} \cdot A_2 \cdot A_2^+ )$$

De Wronskiaan maakt dus een diskontinue sprong op de kritieke laag. Op de limieten  $z \rightarrow \pm \infty$  met  $n(z)$  konstant heeft de golf de vorm:

Voor  $z < 0$

$$u = \exp i.m_-.z + R.\exp-i.m_-.z$$

$$Wr(z) = 2.m_-.(1-R.R^+)$$

Voor  $z > 0$

III-10

$$u = T.\exp-i.m_+.z$$

$$Wr(z) = -2.m_+.T.T^+$$

Bij de transmissie golf is het teken van het vertikale golfgetal  $m$  nu omgedraaid omdat er een kritieke laag is gepasseerd. De vergelijking van III-9 en 10 leert nu:

$$\frac{m_+}{m_-}.T.T^+ + R.R^+ = 1 - \frac{b}{m_-} \cdot \left[ (1 - e^{-2 \cdot \pi \cdot b}) A_1 \cdot A_1^+ + (e^{2 \cdot \pi \cdot b} - 1) A_2 \cdot A_2^+ \right] \leq 1$$

Dit resultaat houdt in dat er op de kritieke laag golf-aktie verloren gaat. Onder de kritieke laag verliest de golf geleidelijk zijn energie aan de achtergrond; op de kritieke laag gaat de golfaktie diskontinu verloren en boven deze laag wint de golf weer een deel van zijn energie, evenredig aan de overgebleven golfaktie terug. Voor  $Ri < 1/4$ , dus sterke windgradiënten levert de bovenstaande methode geen geschikte resultaten omdat de oplossingen rond  $z=0$  nu reel zijn.

D Exakte oplossing bij een speciaal windprofiel

De T.G-vergelijking is voor een algemeen windprofiel nauwelijks op te lossen. Door het windprofiel geschikt te kiezen kan het probleem tot een bekende vergelijking herleid worden.

Kies  $W = V - c_0$  en  $W$  zodanig dat:

$$\frac{N^2}{W^2} - \frac{W''}{W} - k^2 = R/z^2 + m^2$$

$$W'' + (k^2 + m^2 + R/z^2)W - N^2/W = 0$$

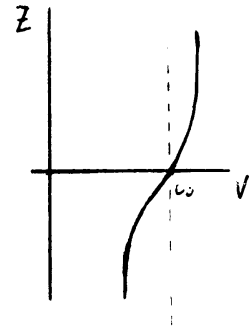
III-11

Vergelijking III-11 bepaalt nu de vorm van het windveld. Als  $W''$  erg klein is wordt de oplossing benaderd met

$$W = \frac{N \cdot z}{\sqrt{R + (k^2 + m^2)z^2}} \quad \text{III-12}$$

Dit windveld geeft een gladde overgang weer tussen een laag met

$V = c_0 + N/k$  op  $z$  veel groter dan 0 en  
 $V = c_0 - N/k$  op  $z$  veel kleiner dan 0  
 Rond de kritieke laag volgt  $V' = W' = N/VR$  zodat  $R$  inderdaad weer het Richardson-getal  $Ri$  is.



Met dit windveld wordt de T.G-vergl. III-2 nu omgezet in

$$z^2 \cdot u'' + (Ri + m^2 z^2) \cdot u = 0 \quad \text{III-13}$$

Met behulp van een Lommeltransformatie kunnen vergelijkingen van de vorm:

$$z^2 \cdot u'' + (1 - 2 \cdot a) \cdot z \cdot u' + (\beta^2 \cdot \gamma^2 \cdot z^{2\gamma} + a^2 - p^2 \gamma^2) \cdot u = 0$$

in een Besselvergelijking worden omgezet.

Kies  $a = 1/2$

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 \\ \beta^2 &= m^2 \\ p^2 &= a^2 - Ri = 1/4 - Ri \end{aligned}$$

en stel  $u = z^a \cdot g(z)$  ;  $y = m \cdot z$

Na enig rekenen blijkt  $g$  nu te voldoen aan

$$y^2 \cdot g(y)'' + y \cdot g(y)' + (y^2 - p^2)g(y) = 0$$

Dit is de Besselvergl. met oplossingen  $J_p(y)$  en  $J_{-p}(y)$ . De reeks ontwikkeling van Besselfuncties rond  $y=0$  is

$$J_{\pm p} = y^{\pm p} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} c_j \cdot y^{2 \cdot j}$$

Bij de overgang van  $y=r$  naar  $y=r \cdot e^{i \cdot \pi}$  heeft dit dus een fase sprong  $\exp_{+i \cdot p \cdot \pi}$

Voor  $y \rightarrow \infty$  convergeert de Besselfunctie naar:

$$J_{\pm p}(y) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \cos(y - 1/4 \cdot \pi - \pm 1/2 \cdot p \cdot \pi)$$



Voor de golffuncties  $u(z)$  betekent dit

$$\begin{aligned}
 u_{+p}(z) &\rightarrow \cos(m.z - 1/4.\pi - \pm 1/2.p.\pi) \quad \text{voor } z \rightarrow +\infty \\
 u_{+p}(z) &\rightarrow i.e^{\pm i p.\pi} . \cos(m.z - 1/4.\pi - \pm 1/2.p.\pi) \quad \text{voor } z \rightarrow -\infty
 \end{aligned}
 \tag{III-14}$$

De extra  $i$  bij  $z$  negatief is een gevolg van de faktor  $\sqrt{z}$  tussen  $u(z)$  en  $J(z)$ . Dit is echter voor  $+p$  en  $-p$  gelijk zodat dit verder geen rol speelt. Om reflectie en transmissie coëfficiënten te kunnen berekenen moeten deze oplossingen nu tot dalende en stijgende golven gekombineerd worden. Boven de kritieke laag is er alleen een stijgende golf van de vorm  $\Psi \uparrow = \exp -i.m.z$

Er onder is een stijgende golf  $\Psi \uparrow = \exp i.m.z$   
 en een gereflekteerde dalende  $\Psi \downarrow = \exp -i.m.z$   
 Definieer in het bovengebied  $\varphi = (m.z - 1/4.\pi)$

$$\begin{aligned}
 u_{+p} &\rightarrow 1/2 \left[ e^{-\frac{1}{2}i.\pi.p} . e^{i\varphi} + e^{\frac{1}{2}i.\pi.p} . e^{-i.\varphi} \right] = \\
 &= 1/2 \left[ e^{-\frac{1}{2}i.\pi.p} . \Psi \downarrow + e^{\frac{1}{2}i.\pi.p} . \Psi \uparrow \right] \\
 u_{-p} &\rightarrow 1/2 \left[ e^{\frac{1}{2}i.\pi.p} . \Psi \downarrow + e^{-\frac{1}{2}i.\pi.p} . \Psi \uparrow \right] \\
 \Psi \uparrow &= \frac{-i}{\sin(\pi.p)} . \left[ e^{\frac{1}{2}i.\pi.p} . u_{+} - e^{-\frac{1}{2}i.\pi.p} . u_{-} \right] \\
 &= \frac{-i}{\sin(\pi.p)} \begin{pmatrix} \exp(\frac{1}{2}i.\pi.p) \\ -\exp(-\frac{1}{2}i.\pi.p) \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{III-15}$$

Definieer in het beneden gebied  $\varphi = (m.z + 1/4.\pi)$

$$\begin{aligned}
 u_{+p} &\rightarrow i/2 \left[ e^{\frac{1}{2}i.\pi.p} . e^{-i.\varphi} + e^{\frac{3}{2}i.\pi.p} . e^{i.\varphi} \right] \\
 &= i/2 \left[ e^{\frac{1}{2}i.\pi.p} . \Psi \downarrow + e^{\frac{3}{2}i.\pi.p} . \Psi \uparrow \right] \\
 u_{-p} &\rightarrow i/2 \left[ e^{-\frac{1}{2}i.\pi.p} . \Psi \downarrow + e^{-\frac{3}{2}i.\pi.p} . \Psi \uparrow \right] \\
 \Psi \uparrow &= \frac{-1}{\sin(\pi.p)} \begin{pmatrix} \exp -i/2.\pi.p \\ -\exp i/2.\pi.p \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sin(\pi \cdot p)} \begin{pmatrix} \exp-3/2 \cdot i \cdot \pi \cdot p \\ -\exp 3/2 \cdot i \cdot \pi \cdot p \end{pmatrix} \quad \text{III-16}$$

Het transmissie-reflektie probleem is nu te schrijven als

$$\begin{aligned} \Psi &= T \cdot \Psi \uparrow && \text{in het bovengebied} \\ \Psi &= \Psi \uparrow + R \cdot \Psi \downarrow && \text{in het beneden gebied.} \\ \text{Dus } \Psi \uparrow + R \cdot \Psi \downarrow &= T \cdot \Psi \uparrow && \text{Met III-15 en 16 en } \pi \cdot p = a \text{ volgt nu:} \end{aligned}$$

$$- \begin{pmatrix} \exp-i/2 \cdot a \\ -\exp i/2 \cdot a \end{pmatrix} + R \cdot \begin{pmatrix} \exp-3/2 \cdot i \cdot a \\ -\exp 3/2 \cdot i \cdot a \end{pmatrix} = -i \cdot T \begin{pmatrix} \exp i/2 \cdot a \\ -\exp-i/2 \cdot a \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{\sin(a)}{\sin(2a)} = \frac{1}{2 \cdot \cos(a)}$$

III-17

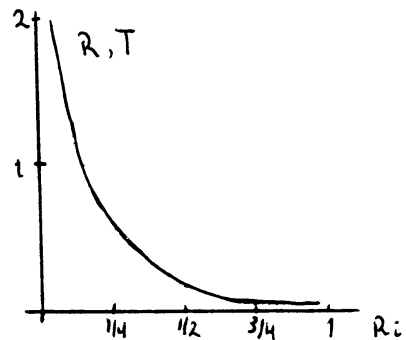
$$T = \frac{-i}{2 \cdot \cos(a)}$$

met  $a = \pi \cdot p = \pi \sqrt{1/4 - Ri}$

voor  $Ri > 1/4$  volgt met  $\beta = a/i = \pi \sqrt{Ri - 1/4}$

$$R = i \cdot T = \frac{1}{2 \cdot \cosh(\beta)} \approx \exp-\pi \cdot \sqrt{Ri - 1/4} \quad \text{voor } Ri \text{ groot.}$$

Uit deze resultaten blijkt dat bij zwakke windgradienten de golfactie verloren gaat op de kritieke laag; transmissie en reflectie zijn zwak en aan elkaar gelijk. Bij grote wind gradienten vindt er juist versterking van de golf plaats.



Overreflectie van de golf

treedt op als  $R > 1$  dus  $Ri < 5/36 = 0.139$ ; netto energie productie is er als  $|R|^2 + |T|^2 > 1$  dus  $Ri < 3/16 = 0.188$ .

De energie opwekking die bij sterke windgradienten optreedt is een verschijnsel dat te vergelijken is met de golfopwekking door wind over een wateroppervlak. Ook daar worden pas boven een bepaalde kritieke windsnelheid golven opgewekt. Bij sterke windgradienten wordt de achtergrondstroming instabiel. Deze instabiliteit komt tot uiting doordat kleine verstoringen, zoals zwaartegolven automatisch worden versterkt.

§ III-4 Konklusie en kritiek

De hier behandelde methoden geven voor grote waarden van het Richardsongetal allen dezelfde transmissie coefficient

$$T = \exp -\pi \sqrt{Ri - 1/4}$$

Rond de kritieke laag gedraagt de oplossing zich als

$$u_z = z^{1/2 + i.b} ; \quad b = \sqrt{Ri - 1/4}$$

Voor  $Ri > 1/4$  gedraagt  $u_z$  zich min of meer periodiek met een golfgetal van orde  $b/z$ , zodat de golflengte naar nul gaat. Voor de WKB methode moet de ruimtelijke schaal van het probleem groot zijn t.o.v. die van de oplossing zodat die hier met succes toegepast kan worden.

Voor  $Ri < 1/4$  is de oplossing rond de kritieke laag niet langer periodiek.

De golflengte kan de verandering van de relatieve freq. niet meer bijhouden. De Besselfunctie oplossing geeft hier de reflectie en transmissiecoefficienten:

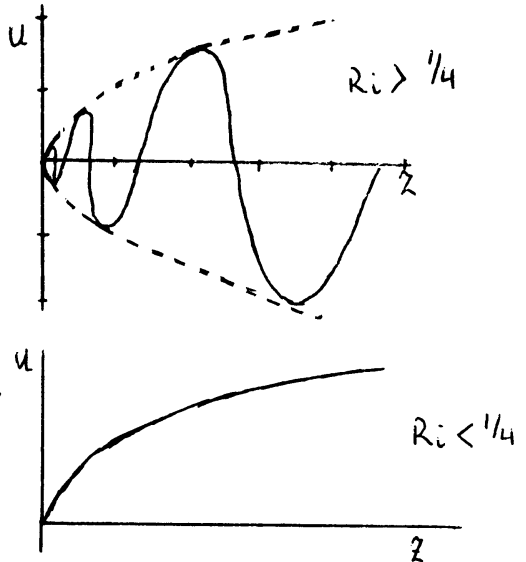
$$\begin{aligned} R = T &= 1/(2 \cdot \cos(\pi \cdot b)) & Ri < 1/4 \\ &= 1/(2 \cdot \cosh(\pi \cdot b)) & Ri > 1/4 \end{aligned} \quad \text{III-18}$$

Met de Besselfunctie methode is het probleem van de T.G vergl. naar de vergelijking voor het windveld III-11 verplaatst. Deze vergelijking is niet lineair en niet op voor de hand liggende wijze oplosbaar. De benadering III-12 doet het des te beter naar mate  $Ri$  groter is. In de praktijk is het preciese windveld doorgaans toch niet bekend en is het voldoende om te eisen dat  $V(z)$  een overgang beschrijft tussen twee lagen met verschillende windsnelheden.  $V$  moet continu zijn en op de kritieke laag de juiste gradient hebben maar de preciese vorm is verder van minder belang.

In de Bousinesq benadering voldoen  $u_x$  en  $u_z$  aan de continuïteitsvergelijking.  $\partial_x u_x + \partial_z u_z = 0$

Rond  $z=0$  leidt dit tot:

$$u_x = -i \frac{(1/2 + i.b)}{k} \cdot z^{-1/2 + i.b}$$



De horizontale deeltjessnelheid divergeert dus rond  $z=0$ . De bijdrage van de horizontale snelheid aan de golfenergie is evenredig met  $u_x \cdot u_x^* = 1/z$  zodat ook de golfenergie niet eindig blijft. De gegeven oplossingen horen bij een situatie waarbij er een konstante golfbron is die al lange tijd werkzaam is, omdat de groepssnelheid rond de kritieke laag naar nul gaat kan de energie zich in de loop der tijd rond deze laag op hopen. In deze situatie is de aanname dat de golf een kleine storing is op de achtergrond niet langer van toepassing.

Uit de vergelijking voor  $U_x$  blijkt ook dat rond de kritieke laag  $u_x$  en  $u_z$  niet langer in fase zijn. De deeltjes beschrijven dan elliptische banen.

#### IV DE INVLOED VAN VISKOSITEIT EN TERMISCHE GELEIDING

##### § IV-1 DE DISPERSIE RELATIE

De problemen uit de voorgaande hoofdstukken kunnen ten dele worden opgelost door rekening te houden met viskositeit en termische geleiding. Deze termen hebben een dempende invloed die groter wordt naarmate de golflengte kleiner is. Het hinderlijke gedrag van de horizontale deeltjes snelheid rond de kritieke laag wordt hiermee voldoende afgeremd. De stijfheid die de viskositeit aan het medium verleent kan ook bijdragen aan de energievoortplanting.

De dalende luchtdichtheid met de hoogte heeft tot gevolg dat de golfamplitude van een energiebehoudende golf met de hoogte moet groeien. De dempingstermen remmen deze groei weer af zodat de lineaire benadering over een groter gebied zijn geldigheid behoudt.

Uit de vergelijkingen I-15', 16' en 17' kan nu bij een konstant windveld een dispersie relatie afgeleid worden. De benaderingen die daarbij gebruikt worden zijn dan de niet samendrukbaarheid (Bousinesq) en de linearisering, verder zijn alle effecten inbegrepen. Door nu voor alle grootheden weer een vlakke golf te kiezen volgt het lineaire stelsel:

$$\begin{pmatrix} i\Omega + \eta \bar{k}^2 & v' & - & -i.g.H.k \\ - & i\Omega + \eta \bar{k}^2 & g & -g(i.H.m+1) \\ - & -N^2/g & i\Omega + \lambda \bar{k}^2 & - \\ k & m & - & - \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_z \\ \rho' \\ p' \end{pmatrix} = 0$$

IV-1

Met  $\Omega$  de (complexe) freq.,  $\eta$  de viskositeit en  $\lambda$  de termische geleiding. Dit stelsel heeft alleen een oplossing als de determinant van de matrix nul is. Dit levert als dispersierelatie

$$(\Omega - i.\eta.K^2).(\Omega - i.\lambda.K^2) - \frac{N^2.k^2}{K^2 - i.m/H} = 0 \quad \text{IV-2}$$

$$K^2 = k^2 + m^2$$

$$\Omega = i \cdot \left( \frac{\eta + \lambda}{2} \right) \cdot K^2 \pm \sqrt{\frac{N^2 \cdot k^2}{K^2 - i \cdot m/H} - \left( \frac{\eta - \lambda}{2} \right)^2 \cdot K^4} \quad \text{IV-3}$$

Bij  $\eta = \lambda = 0$  is er geen golfdemping en moet de frequentie reel blijven. Dit kan door de keuze  $m = m' + i/(2 \cdot H)$ . De golf  $\exp i(\Omega \cdot t - k \cdot x - m \cdot z)$  heeft nu een amplitude groei evenredig met  $\exp(z/2 \cdot H)$  die de als  $\exp(-z/H)$  dalende luchtdichtheid compenseert bij het berekenen van de energie dichtheid.

Net als bij het eenvoudige model uit §I-3 blijkt weer dat  $\eta$  en  $\lambda$  in de demping elkaar versterken maar dat hun frequentie verlagingen elkaar tegenwerken. De dempingstermen komen altijd voor in combinatie met  $K^2$ , dit is te verwachten omdat diffusieverschijselen het sterkste werken op de korte afstand.

Beschouw nu golven met een golflengte veel korter dan de schaalhoogte zodat de term  $m/H$  verwaarloosd kan worden. Vooral rond een kritieke laag waar de golflengte klein is zal deze benadering korrekt zijn. De dispersierelatie kan dan geschreven worden als:

$$D(\bar{k}, \Omega) = K^2 \cdot (\Omega - i \cdot \eta \cdot K^2) \cdot (\Omega - i \cdot \lambda \cdot K^2) - N^2 \cdot k^2 = 0 \quad \text{IV-4}$$

$$\Omega = w + i \cdot \gamma$$

Volgens de methode van Appendix A kan IV-4 nu in een reel en een imaginair deel worden gesplitst. Hiermee kan dan de groeps-snelheid uitgerekend worden.

$$H(\bar{k}, \Omega) = K^2(w^2 - \gamma^2) + (\eta + \lambda) \cdot \gamma \cdot K^4 - \eta \cdot \lambda \cdot K^6 - N^2 \cdot k^2 \quad \text{IV-5}$$

$$A(\bar{k}, \Omega) = K^2(2 \cdot \gamma - (\eta + \lambda) \cdot K^2) \cdot w \quad \text{IV-6}$$

Uit IV-6 volgt direkt de voorwaarde  $\gamma = \frac{(\eta + \lambda)}{2} \cdot K^2$

Met A-5 volgt nu de groepssnelheid uit IV-5 en 6

$$\frac{\partial D}{\partial \Omega} = 2 \cdot K^2 \cdot \left( \Omega - i \cdot \frac{(\eta + \lambda)}{2} \cdot K^2 \right) = 2 \cdot K^2 \cdot w$$

$$\frac{\partial H}{\partial w} = 2 \cdot K^2 \cdot w$$

$$\frac{\partial A}{\partial w} = 2 \cdot K^2 \left( \gamma - \frac{(\eta + \lambda)}{2} K^2 \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial k} &= 2 \cdot k (w^2 - \gamma^2 + (\eta + \lambda) \gamma \cdot 2 \cdot K^2 - \lambda \cdot \eta \cdot 3 \cdot K^4 - N^2) \\ &= 2 \cdot k (w^2 - N^2 + 3 \cdot \left(\frac{\eta - \lambda}{2}\right)^2 \cdot K^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial k} &= 2 \cdot w \cdot k (2 \cdot \gamma - 2(\eta + \lambda) \cdot K^2) \\ &= -2 \cdot w \cdot k \cdot (\eta + \lambda) \cdot K^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial m} &= 2 \cdot m (w^2 - \gamma^2 + 2 \cdot \gamma (\eta + \lambda) K^2 - 3 \cdot \eta \cdot \lambda \cdot K^4) \\ &= 2 \cdot m (w^2 + 3 \cdot \left(\frac{\eta - \lambda}{2}\right)^2 \cdot K^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial m} &= 2 \cdot w \cdot m (2 \cdot \gamma - 2(\eta + \lambda) K^2) \\ &= -2 \cdot w \cdot m (\eta + \lambda) K^2 \end{aligned}$$

Nu volgt de groepssnelheid:

$$U_x = - \frac{k}{w \cdot K^2} \cdot \left[ w^2 - N^2 + 3 \cdot \left(\frac{\eta - \lambda}{2}\right)^2 K^4 \right]$$

IV-7

$$U_z = - \frac{m}{w \cdot K^2} \cdot \left[ w^2 + 3 \cdot \left(\frac{\eta - \lambda}{2}\right)^2 K^4 \right]$$

uit IV-5 volgt nog een relatie voor de reële freq w

$$w^2 \cdot K^2 + \left(\frac{\eta - \lambda}{2}\right)^2 \cdot K^6 - N^2 \cdot k^2 = 0$$

IV-5'

Bij  $\lambda = \eta = 0$  komen deze resultaten overeen met de waarden van hoofdstuk I.

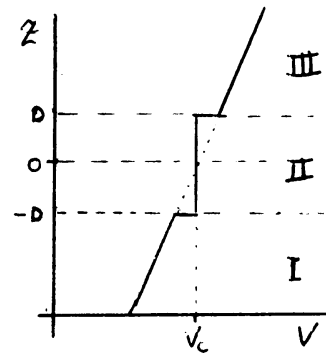
§ IV-2 GOLFSTRALEN

Met de groepssnelheid kan nu de baan van de golf de looptijd en de verzwakking berekend worden. Dit kan ook weer op de kritieke laag toegepast worden. Eerst zal echter een eenvoudiger model voor de transmissie rond deze laag besproken worden.

Beschouw een lineair windprofiel rond de kritieke laag op  $z = 0$

$$V = a \cdot z + V_c.$$

Dit profiel wordt nu benaderd met een profiel dat tussen  $z = -D$  en  $z = D$  de konstante waarde  $V_c$  heeft en daarbuiten het lineaire profiel volgt. De atmosfeer wordt



zo in drie gebieden verdeeld. In I komt een zware golf aan; op  $z = -D$  wordt deze in een viskeuze golf omgezet die door de tweede laag loopt. Op  $z = +D$  wordt deze viskeuze golf weer in een zwaarte golf omgezet. In I en III worden nu de dempings termen en in II de zwaartekracht verwaarloosd. De dispersie relaties van hoofdstuk I zijn nu van toepassing:

$$\begin{aligned} \text{in I en III} \quad K^2 &= \frac{N^2 \cdot k^2}{w^2} \\ w &= w_0 - V \cdot k = w_0 - a \cdot z \cdot k \\ \text{in II} \quad K^2 &= -\frac{i \cdot w}{\eta} \\ w &= \pm a \cdot D \end{aligned}$$

Het ligt nu voor de hand om de laagdikte  $D$  zo te kiezen dat  $|K|$  aan weerskanten van de grens dezelfde waarde heeft.

De viskeuze golf ondergaat nu een verzwakking met een faktor  $\exp -|K| / \sqrt{2} \cdot (z_2 - z_1)$  (zie Hoofdstuk I)

met  $|K| = N \cdot k / w = N / (a \cdot D)$ .

De golfverzwakking van I naar III is dan

$$\exp -\sqrt{2} \cdot N / a = \exp -\sqrt{2} \cdot R_i$$

Vergeleken met de waarde uit de WKB methode ( $\exp -\pi \sqrt{R_i}$ ) is dit een aardig resultaat.



Belangrijker dan de preciese waarde van de transmissie is de fysische achtergrond van dit resultaat. De viskositeit is uit de eindwaarde van T verdwenen. Een grotere viskositeit betekent een dikkere grenslaag maar ook door de grotere stugheid van het medium een betere energie overdracht over deze laag. Deze effecten compenseren elkaar zodat de viskositeit, hoewel ze het golfmechanisme rond de grenslaag bepaalt, niet meer in het eindresultaat voorkomt. Als bezwaar tegen dit model kan aangevoerd worden dat het windprofiel niet continu is, de golven op de randen niet netjes worden aangesloten en dat de overgang van  $w_r > 0, m < 0$  naar  $w_r < 0, m > 0$  bij de kritieke laag niet goed behandeld wordt. Een zorgvuldiger behandeling komt aan deze bezwaren tegemoet.

Uitgangspunt zijn de vergelijkingen:

$$w^2 \cdot K^2 + \left(\frac{\eta - \lambda}{2}\right)^2 \cdot K^6 - N^2 \cdot k^2 = 0 \quad \text{IV-5'}$$

$$U_z = - \frac{m}{w \cdot K^2} \cdot \left[ w^2 + 3 \cdot \left(\frac{\eta - \lambda}{2}\right)^2 \cdot K^4 \right] \quad \text{IV-7}$$

$$w = w_0 - V \cdot k$$

$$K^2 = k^2 + m^2$$

Uit IV-5' blijkt dat met viskositeit de golflengte rond de kritieke laag niet meer tot nul daalt.

-zonder viskositeit:  $K = N \cdot k / w$

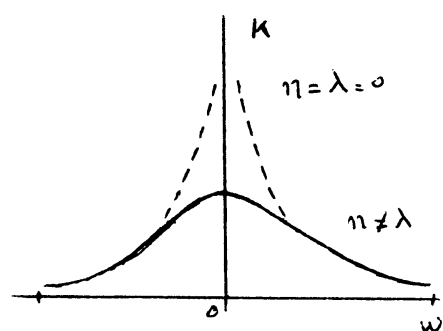
-met "  $K = (N \cdot k / \frac{\eta - \lambda}{2})^{1/3}$

rond  $w=0$ .

Uit de continuïteitswet volgt:

$k \cdot u_x + m \cdot u_z = 0$  Omdat  $m$  nu eindig blijft rond de kritieke laag blijft de horizontale deeltjessnelheid hier nu ook eindig.

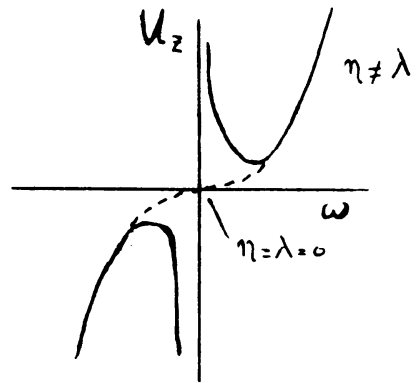
Dit brengt een nieuw probleem met zich mee, onder en boven de kritieke laag moet  $m$  voor de stijgende golf verschillende tekens hebben. Zonder viskositeit ligt het voor de hand deze teken wissel over  $m=0$  uit te voeren maar dat kan nu niet meer.



Uit IV-7 blijkt dat de groeps-  
snelheid rond de kritieke laag  
niet meer naar nul daalt.

-zonder viskositeit:  $U_z = \frac{w^2}{N.k}$

-met "  $U_z = \frac{-3(\frac{\eta-\lambda}{2})^2 m.k^2}{w}$



Nadat de golfsnelheid op enige  
afstand van de kritieke laag een  
minimun bereikt stijgt ze weer  
tot oneindige waarde bij de  
kritieke laag.

Omdat daar de relatieve freq.  $w$  van teken wisselt; draait  
daar ook de golfsnelheid om. De golf kan de kritieke laag  
dus nog steeds niet passeren.

Bij een vlakke golf heeft de amplitude lokaal de vorm:

$$A(t) = \exp -\gamma.t$$

Bij een variabele demping wordt dit

$$A(t) = A_0 \exp -\int \gamma . dt$$

Met de groepssnelheid kan  $dt$  naar  $dz$  omgerekend worden en als  
het windprofiel bekend is kan  $dz$  in  $dw$  omgerekend worden.

$$dt = 1/V_z . dz$$

$$dw = -d(V.k) = -a.k.dz \quad \text{met } dV/dz = a$$

dus

$$A(t) = A_0 . \exp \int \frac{\gamma}{V_z . k . a} . dw \quad \text{IV-8}$$

Vergelijking IV-5' kan nu met enkele transformaties in een  
handzamer vorm gebracht worden:

Stel  $(\frac{\eta-\lambda}{2}) = \pi$

$$\pi . N . k^2 = L^3$$

$$\pi . K^2 / L = y$$

$$w^2 / L^2 = b^2$$

$$\text{dus } m = \sqrt{K^2 - k^2} = \sqrt{\frac{L}{\pi} . y - k^2}$$

Dan volgt:

$$y . (y^2 + b^2) - 1 = 0$$

IV-9

In IV-9 is  $y$  nu een maat voor het golfgetal en  $b$  een voor de relatieve frequentie. Met deze relatie is  $y$  nu een functie van  $b$ . Voor  $y$  veel kleiner dan  $b$  volgt  $y \approx 1/b^2 \Rightarrow K^2 = N^2 \cdot k^2 / w^2$  dit is het resultaat van zwaarte golven. Voor  $y$  en  $b$  veel groter dan 1 volgt  $y \approx \pm i \cdot b \Rightarrow K^2 = \pm i \cdot w / \pi$  dit zijn viskeuze golven. Op de kritieke laag is  $b$  gelijk aan nul dus  $y^3 = 1$ . IV-9 heeft als derdegraadspolynoom altijd drie nulpunten. Omdat de vergelijking reel is, is er een reel nulpunt, de andere twee kunnen complex zijn.

Definieer  $F(y) = y \cdot (y^2 + b^2) - 1$

Als  $F$  nu meerdere nulpunten op de reële as heeft, dan zouden er tussen deze nulpunten extremen moeten liggen met

$$F' = 3 \cdot y^2 + b^2 = 0$$

Voor  $b \neq 0$  kan dit niet en voor  $b=0$  is er slechts een nulpunt. Er is dus altijd maar een reel nulpunt, de andere twee zijn complex. Omdat uitgegaan is van de dispersie relatie met  $K$  en  $y$  reel en  $\Omega$  complex geven IV-5' en 9 nu eenduidig het golfgetal als functie van de relatieve freq.

Met behulp van IV-8 kan men nu de golfverzwakking over een lineair windprofiel uitrekenen.

$$\begin{aligned} & \int \frac{\gamma}{(a \cdot k \cdot V_z)} dw = \\ & = \int \frac{((n+\lambda)/2)^2 \cdot K^2}{a \cdot k \cdot -m/(w \cdot K^2) \cdot (w^2 + 3 \cdot (\frac{n-\lambda}{2})^2 \cdot K^4)} \cdot dw \\ & = -\left(\frac{n+\lambda}{2 \cdot a \cdot k}\right) \cdot \left(\frac{L}{\pi}\right)^{3/2} \int \frac{b \cdot y^2}{\sqrt{y - \frac{\pi \cdot k^2}{L}} \cdot (b^2 + 3 \cdot y^2)} \cdot db \quad \text{IV-10} \end{aligned}$$

De faktor voor de integraal is te schrijven als:

$$-\left|\frac{n+\lambda}{n-\lambda}\right| \cdot \frac{N}{a} = -\left|\frac{n+\lambda}{n-\lambda}\right| \cdot \sqrt{Ri}$$

Ook de integraal kan herleid worden.

$$b^2 = 1/y - y^2 \quad 2 \cdot b \cdot db = -(1/y^2 + 2 \cdot y) dy$$

$$\int \dots db = -1/2 \int \frac{y}{\sqrt{y - \frac{\pi \cdot k^2}{L}}} \cdot dy = -1/3 \cdot \sqrt{1 - \frac{\pi \cdot k^2}{L}} \cdot (1 + 2 \cdot \frac{\pi \cdot k^2}{L})$$

De integraal loopt hierbij van  $y_1 = \pi \cdot k^2 / L$  ;  $m_1 = 0$  ;  $w = N$  tot  $y_2 = 1$  ;  $w = 0$  op de kritieke laag.

Wanneer de term  $\pi \cdot k^2 / L = (\pi \cdot k^2 / N^2)^{2/3}$  wordt verwaarloosd t.o.v. 1 dan krijgt de integraal afhankelijk van het teken van  $m$  de waarde  $\pm 1/3$ . De verzwakking van de golf tot aan de kritieke laag is dan:

$$A = \exp -1/3 \cdot \left| \frac{\eta + \lambda}{\eta - \lambda} \right| \cdot \sqrt{Ri} \quad \text{IV-11}$$

Het ruimtelijk deel van de golf heeft nu lokaal de vorm

$$u_z = A_0 \exp i(w_r \cdot t - k \cdot x - m \cdot z)$$

Op de kritieke laag met  $z=0$  is de relatieve freq. tot nul gedaald dus volgt daar bij een constante bron:

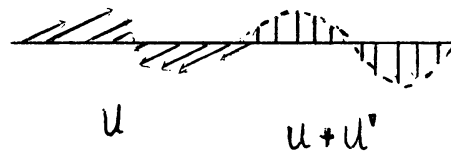
$$u_z = A_0 \cdot \exp -ik \cdot x$$

$$u_x = -m/k \cdot u_z = -m/k \cdot A_0 \cdot \exp -i \cdot k \cdot x$$

IV-12

Als gevolg van de viskositeit blijft  $m$  nu wel eindig maar zal i.h.a. toch veel groter dan  $k$  zijn. De horizontale snelheid is dan ook veel groter dan de verticale. Dit leidt tot een snelheidspatroon met sterke gradienten dat daarom niet stabiel is. Deze problemen rond de kritieke laag laten zich nu verhelpen door er een tweede golf bij op te tellen met  $m' = -m$  ;  $A'_0 = A_0$ . Met deze keuze verdwijnen nu de horizontale snelheidscomponenten rond  $z=0$  en blijven alleen de veel kleinere verticale componenten over.

Deze konstruktie is te vergelijken met de manier waarop de reflectie van een geluidsgolf aan een hard oppervlak wordt behandeld. Ook daar worden de



ongewenste snelheidscomponenten loodrecht op de wand weggewerkt door een weerkaatste golf bij het oorspronkelijke golfveld op te tellen. De eerste golf heeft een negatieve  $m$  waarde en daarom een naar de kritieke laag toe gekeerde groepssnelheid. Door de viskositeit is deze snelheid van nul weg begrensd zodat de kritieke laag in eindige tijd bereikt wordt.

Omdat bij deze golf de groepssnelheid naar de kritieke laag toe gekeerd is kan hij nu niet meer verder en treedt op als bron voor de tweede golf met tegengesteld vertikaal golfgetal. Deze nieuwe golf heeft een overal van de kritieke laag afgekeerde groepssnelheid en produceert dus de transmissie en de reflektie golf. Deze golven moeten opnieuw het viskeuze gebied passeren zodat ze opnieuw volgens IV-11 verzwakt worden. Zo volgt voor de transmissie en reflektie:

$$T = R = \exp -2/3 \cdot \left| \frac{\eta + \lambda}{\eta - \lambda} \right| \cdot \sqrt{Ri} \quad \text{IV-13}$$

### § IV-3 DISKUSSIE EN KRITIEK

De in dit hoofdstuk gebruikte methode bestaat uit twee delen

- 1 Eerst wordt met de dispersierelatie de vertikale groepsnelheid bepaald. Hiermee kan de looptijd en de golfverzwakking door viskositeit van de golf op zijn weg naar boven worden berekend. Voor  $\eta \neq \lambda$  blijft het vertikale golfgetal  $m$  eindig en daalt de groepssnelheid niet tot nul. De kritieke laag wordt in eindige tijd bereikt.
- 2 Een golf met  $m < 0$  loopt altijd naar de kritieke laag toe en kan deze laag dus niet passeren. Daarom werkt deze golf rond  $z=0$  als bron voor een nieuwe golf met  $m' > 0$ . Deze loopt altijd van de kritieke laag af en geeft de reflektie en transmissie.

Tegen dit model zijn nu de volgende bezwaren in te brengen:

- Het behoud van golfactie zit niet in de methode verwerkt. Golf amplitudes moeten dus overal voor de golf actie gekorrigeerd worden. In appendix B wordt uitgewerkt hoe viskositeit de golfactie beïnvloed. Indien de termische geleiding net zo werkt kunnen de resultaten van §IV-2 toegepast worden op de golfactie i.p.v. de energie.
- De konstruktie van de gereflekteerde golf rond de kritieke laag is nogal kunstmatig. Voor sterke windgradiënten  $Ri < 1/4$  is de achtergrondstroming niet stabiel maar vertoont spontaan exponentieel groeiende golven (zie De Baas). Het hier gegeven model gaat dan niet op.

- Een positief punt in dit model is dat er inderdaad zowel transmissie als reflectie optreedt bij de kritieke laag terwijl de WKB methode zonder viskositeit en termische geleiding alleen transmissie gaf. De coëfficiënten T en R uit IV-13 vertonen een duidelijke relatie met het WKB resultaat  $T = R = \exp -\pi \sqrt{Ri}$  voor  $Ri > 1/4$ . Bij  $\lambda = 0$  zijn T en R niet meer van de viskositeit afhankelijk. Bij een grotere viskositeit is enerzijds de laagdikte waarin viskositeit een rol speelt groter maar anderzijds is er in deze laag door de taaiheid van het medium een betere energie overdracht. Het Richardsongetal blijft wel van belang want bij een kleinere windgradient is het gebied met kleine  $w_r$  en dus een groot golfgetal en veel demping groter.

## V WAARNEMING VAN ZWAARTE GOLVEN

### V-1 DE ATMOSFEER ALS FILTER

De zwaartegolven lopen door de atmosfeer omhoog. De atmosfeer werkt hierbij als een filter dat de golven afhankelijk van frequentie en golflengte doorlaat, verzwakt of reflekteert. Er spelen drie mechanismen een rol, de demping door viscositeit en thermische geleiding, de kritieke laag en de reflectie laag.

#### A De demping

De dichtheid van de atmosfeer daalt exponentieel met de hoogte, om de golfenergie te kunnen behouden moet de amplitude dan stijgen met de hoogte. De dempingstermen in de vergelijkingen zijn evenredig met  $(\eta + \lambda) = (\mu + \kappa) / \rho$ . Deze termen winnen dus snel aan invloed met de hoogte. Er is daarom een hoogte waarop de golfamplitude een maximum bereikt, daarna verliest de golf snel zijn energie.

De demping is evenredig met  $k^2$  zodat korte golven per seconde sterker worden gedempt dan lange. Volgens I-23 is de voortplantingssnelheid evenredig met  $1/k$  zodat korte golven ook nog eens meer tijd nodig hebben om een bepaalde afstand af te leggen. Samen zorgen deze effecten ervoor dat lange golven tot aanzienlijk grotere hoogte doordringen dan korte. Met de dispersie relatie kan dit berekend worden.

$$(\Omega - i.\eta.k^2).(\Omega - i.\lambda.k^2) - N^2.k^2/(k^2 + i.m/H) = 0 \quad \text{IV-2}$$

$$K^2 = k^2 + m^2$$

Zonder demping ( $\eta = \lambda = 0$ ) volgt nu met A5'

$$U = \frac{N}{(k^2 + m^2 + 1/4H^2)} \begin{pmatrix} m^2 + 1/4H^2 \\ -m.k \end{pmatrix}$$

De groei van de golf met de hoogte door de atmosfeer verdunning heeft dus tot gevolg dat de golf minder stijl omhoog loopt. Stel nu dat de frequentie reel is en dat de dempings en groeitermen in het verticale golfgetal  $M = m + i.b$  verwerkt zijn. Uit werking van IV-2 levert dan :

$$\begin{aligned}
 M^2 &= k^2 \cdot (N^2/w^2 - 1) + i \cdot M/H + i(\eta + \lambda)(K^2 + i \cdot M/H) \cdot K^2/w \\
 &\quad + \eta \cdot \lambda \cdot (K^2 + i \cdot M/H) K^4/w^2 \\
 &= m^2 - b^2 + 2 \cdot i \cdot m \cdot b
 \end{aligned}$$

Wanneer b klein is t.o.v. m, dus H groot en de demping klein dan volgt bij benadering:

$$\begin{aligned}
 b &= 1/2H + \frac{1}{2}(\eta + \lambda) \cdot \frac{K^4}{m \cdot w} \\
 &= 1/2H + \frac{1}{2}(\eta + \lambda) \cdot \frac{K^3}{N \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\psi)}
 \end{aligned}$$

De demping is zoals te verwachten evenredig met  $K^3$  en is sterker naarmate de golfrichting meer van de  $45^\circ$  afwijkt. Dit komt omdat golven onder  $0$  of  $90^\circ$  een lagere voortplantingssnelheid hebben.

Met  $(\eta + \lambda) = (\mu + \lambda) / \rho$  blijkt nu dat de golf zijn maximale amplitude haalt op de hoogte met :

$$\rho = H \cdot (\mu + \lambda) \cdot \frac{K^3}{N \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\psi)}$$

Volgens Batchelor geldt  $\mu \approx 3 \cdot 10^{-5}$  Kg/m.sec

$$\begin{aligned}
 \lambda &\approx 4/3 \mu \\
 N &= 10^{-2} \text{ sec}^{-1}
 \end{aligned}$$

Met deze waarden blijkt dat golven met een golflengte van ongeveer 1000 m hun maximum hebben bij  $\rho = \exp(-9.5)$  Kg/m<sup>3</sup>. Dit komt overeen met een hoogte van ongeveer 200 Km. De golven met een golflengte korter dan 1 Km zijn dus verdwenen voor zij de ionosfeer bereiken. De waarde voor de diffusie coëfficiënt is hier gebaseerd op de moleculaire beweging. Als gevolg van de turbulentie zal de effectieve diffusie in de praktijk groter zijn.

## B De kritieke laag

De kritieke laag bevindt zich op de hoogte waar de relatieve frequentie tot nul is afgenomen. Dit is dus alleen mogelijk voor golven die met de windrichting mee lopen. De laag bevindt zich voor iedere golflengte of frequentie op een andere hoogte. Bij grote windgradienten is er hier versterkte transmissie en over reflectie. Deze windgradienten verdwijnen echter snel door turbulentie en op grotere hoogte door de viscositeit .



Kritieke lagen zullen dus in het algemeen een groot Richardsongetal hebben ( $Ri > \frac{1}{4}$ ) en daarom verzwakkend werken. Voor  $Ri = N^2/a^2 = \frac{1}{4}$  is een windgradient  $a = 20$  (m/sec)/Km nodig. Zulke sterke gradienten komen vrijwel alleen vlakbij het aardoppervlak voor.

Voor de kritieke laag geldt de voorwaarde:

$$w_r = w - V \cdot k = 0$$

Boven een laag met windsnelheid  $V$  komen dus alleen nog golven voor met:

$$k < w/V$$

Lange golven ( $k$  klein) en golven met  $\bar{K}$  loodrecht op de windrichting kunnen dus ver doordringen, de anderen worden tegen gehouden.

### C De reflectie laag

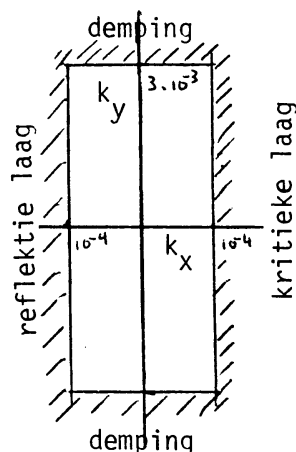
Voor golven die tegen de wind inlopen kan de Dopplerverschoven freq. boven de Brunt-Vaisala freq.  $N$  uit komen. Deze golven worden gereflekteerd. Dit gebeurt op de hoogte  $H_r$  waar :

$$w_r = w - V \cdot k = N$$

Boven  $H_r$  komen dan alleen nog golven voor met

$$k > (w-N)/V \quad \text{dus } |k| < (N-w)/V \quad \text{want } N > w$$

Ook hier blijkt dus dat alleen lange golven en golven loodrecht op de windrichting kunnen door dringen. Op grote hoogten komen er t.g.v. de opwarming door de zon en de getijden werking windsnelheden in de orde van 100 m/sec voor. Bij  $w = \frac{1}{2} \cdot N$  volgt er nu absorptie of reflectie voor  $|k| > 10^{-4}$ , dit komt overeen met een horizontale golflengte van ongeveer 60 Km.

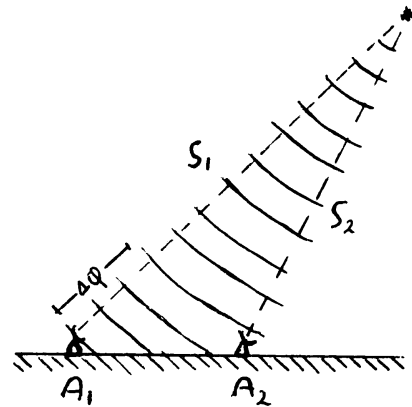


De atmosfeer werkt nu als een filter dat bepaalde golven tegenhoudt en andere door laat. Het doorgelaten gebied voor het horizontale golfgetal is nu een smalle rechthoek die in de  $k_x$  richting wordt begrensd door de reflectie en de kritieke laag en in de  $k_y$  richting door de viskeuze en turbulente demping.

## WAARNEMINGS METHODEN

De effecten van zwaarte golven zijn op verschillende manieren meetbaar. Een voor de hand liggende methode is de microbarograaf. Hiermee wordt de luchtdruk als functie van de tijd gemeten. Variaties op de tijdschaal van de Brunt-Vaisala freq worden dan als zwaarte golven geïnterpreteerd. In de oceanen verzorgen de variaties in zoutgehalte en temperatuur de verticale gelaagdheid die voor zwaartegolven noodzakelijk is. Met stromingsmeters kan men dan de golven zien. In de atmosfeer kunnen de golven omhooglopen tot de ionosfeer op  $\pm 300$  Km hoogte. De golfbeweging verstoort hier de ionendichtheid. Deze ionendichtheid is bepalend voor de looptijd van radio signalen. Met een geschikte buitenaardse bron kunnen de zwaarte golven nu gezien worden.

Bij de radiosterrewacht Westerbork wordt een ster als radiobron gekozen. Het signaal is dan als een vlakke golf op te vatten. Bij een homogene atmosfeer is het faseverschil tussen de signalen op twee antennes  $A_1$  en  $A_2$  alleen een functie van de sterpositie. Als gevolg van variaties in de ionendichtheid zijn de loopsnelheden langs de signaal-

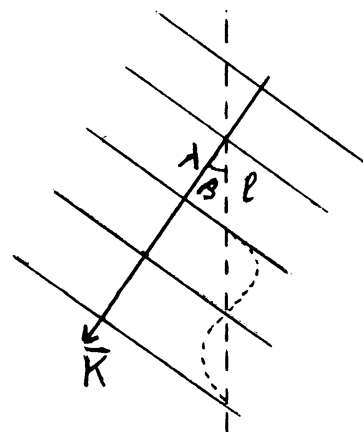


wegen  $S_1$  en  $S_2$  niet gelijk. Dit geeft extra fase variaties die op de aanwezigheid van zwaarte golven wijzen. Door de draaiing van de aarde loopt het punt waar het radiosignaal door de ionosfeer snijdt met grote snelheid door de atmosfeer. Deze snelheid is  $\pm 450$  m/sec voor een ster in het equator vlak. Deze waarde is in dezelfde orde van grootte als de fasesnelheid van de golven zodat het verkregen signaal een combinatie is van het tijds en ruimtelijk beeld van de golf.

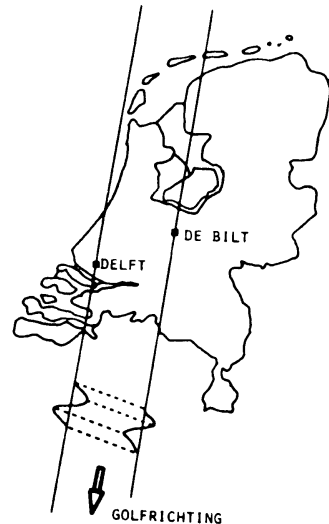
Op het K.N.M.I. wordt als radiobron een navigatie satelliet-systeem gebruikt. Dit bestaat uit een vijftal satellieten die in een polaire baan in 107 minuten rond de aarde draaien op ongeveer 1100 Km hoogte. Zij zenden radiosignalen uit op 400 en 150 Mhz. Als gevolg van de satellietbeweging ondergaan deze signalen een Dopplerverschuiving t.o.v. een ontvanger op aarde

Hiermee en met de door de satelliet zelf uitgezonden informatie over de baanparameters kan dan de positie van de ontvanger op aarde bepaald worden. Ionosferische variaties beïnvloeden ook hier weer de looptijd van het signaal. Deze looptijden komen tot uiting in extra fase of frequentie verschuivingen bovenop de Dopplerverschuiving. Met een satelliet ontvanger op het KNMI worden deze signalen continu gemeten. De faseverschuivingen t.g.v. ionosfeervariaties worden tegen de tijd uitgezet. Met deze methode wordt een profiel van de ionendichtheid boven een lijn over het aardoppervlak verkregen. Deze lijn is de projectie op aarde van het snijpunt van de voerstraal van De Bilt naar de satelliet en de ionosfeer op 300 Km hoogte. Voor een recht boven de ontvanger passerende satelliet valt deze "profiellijn" bijna samen met de Noord-Zuid meridiaan. Er is een afwijking van  $4.2^\circ$  wegens de aardrotatie. Voor satellieten die oostelijk of westelijk passeren is de profiellijn geen rechte meer en maakt hij grotere hoeken met de meridiaan. Voor een recht boven De Bilt komende satelliet is de snelheid van dit snijpunt ongeveer 2 Km/sec. Dit is veel groter dan de fasesnelheid van de golven zodat het profiel is op te vatten als een ruimtelijk beeld van de golf langs de profiellijn op een bepaald tijdstip. Informatie over het tijdsverloop van de golf is in principe te verkrijgen door de data van opeenvolgende satellieten naast elkaar te leggen. Omdat de satellieten iedere keer langs een ander deel van de hemel passeren liggen de profiellijnen echter vele honderden kilometers uit elkaar zodat ze op andere golven betrekking hebben.

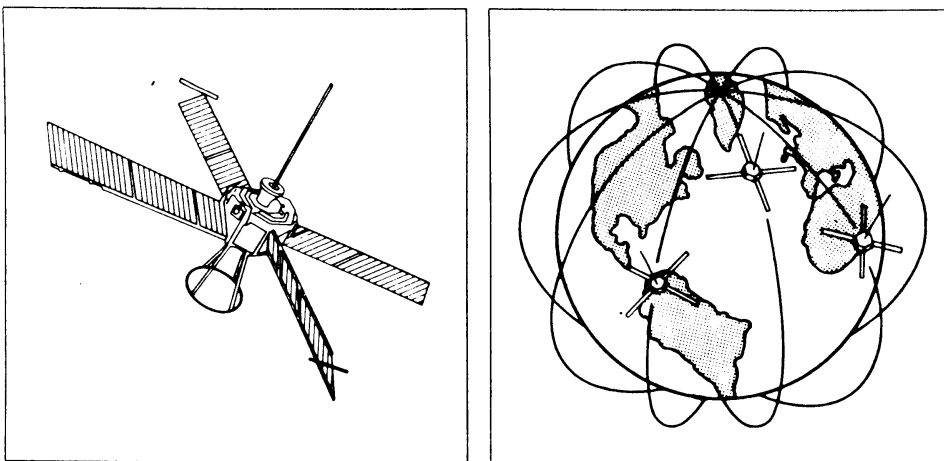
Uitgaande van een stelsel van vlakke zwaartegolven zullen de gemeten fase variaties langs een profiellijn een sinus achtig karakter hebben. De golflengte  $l$  hiervan is echter langer dan de echte golflengte  $\lambda$  omdat de profiellijn een onbekende hoek  $\beta$  met de golfvektor zal maken. Met twee ontvangers op een oost-west lijn worden er twee parallelle profielen verkregen.



Door nu overeenkomstige golftoppen bij elkaar te zoeken kan de richting van het betrokken fasevlak bepaald. Er is gedurende een week gemeten met een tweede ontvanger in Delft. De oost west afstand tussen Delft en De Bilt is  $\pm 55$  Km maar omdat de ionosfeer op 300 Km hoogte bepalend is voor de profiellijnen is de effectieve afstand maar 35 Km.

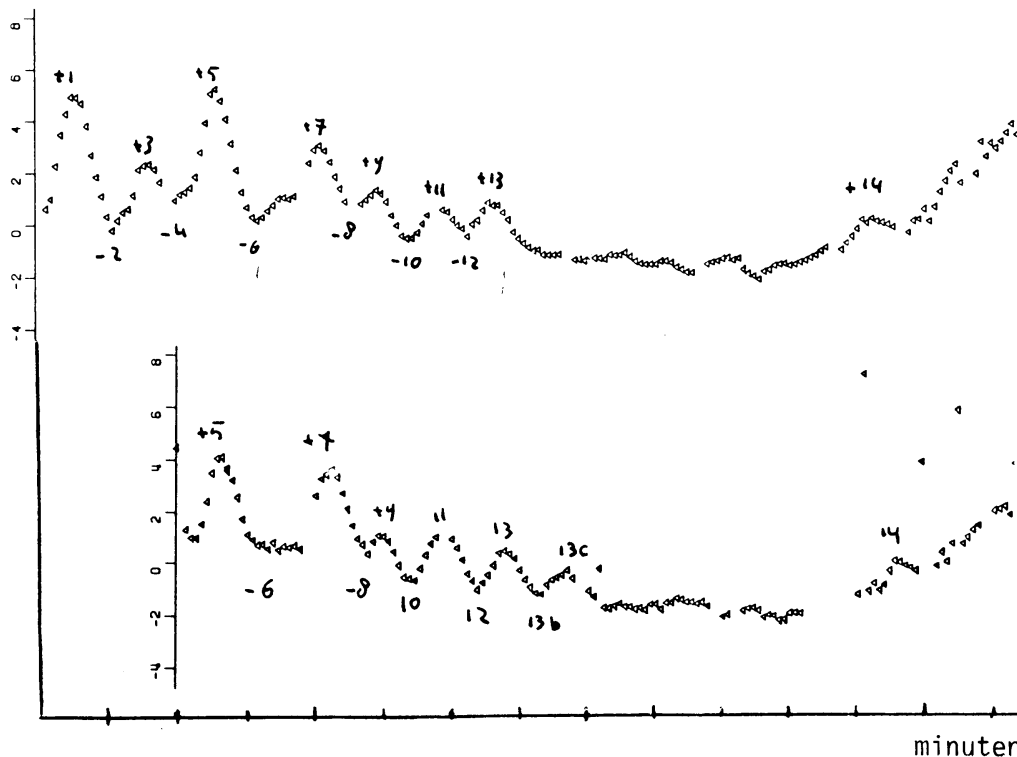


Uit deze metingen bleek dat de profielen uit Delft en De Bilt een grote mate van correlatie vertoonden. De horizontale golflengten lagen tussen de 40 en de 200 Km. en de golven bevonden zich doorgaans ten zuiden van Nederland. Het bepalen van de golfrichting met deze methode gaat echter vrij moeizaam. De meetpunten liggen op een afstand van 4.6 sec van elkaar, dit komt overeen met een ruimtelijke afstand van  $\pm 9$  Km in noord-zuid richting. Bij het correleren van twee profiellijnen worden bijgevolg ook fouten van deze orde gemaakt. Bij een oost-west afstand tussen de profielen van 35 Km zijn de meetfouten in de golfrichting dan in de orde van  $15^\circ$ . Een tweede probleem is dat het begrip vlakke golven pas mogelijk is als de structuren in richtingen parallel aan de fasevlakken over enkele golflengten blijven bestaan. Bij golflengten in de orde van 100 Km liggen Delft en De Bilt dus te dicht bij elkaar. Stationsafstanden van 200 Km zullen beter voldoen hoewel de correlatie tussen de waarnemingen dan waarschijnlijk wel kleiner is. De profiellijnen liggen oost of west van de ontvanger al naar gelang de baan van de satelliet. Voor laag aan de horizon passerende satellieten kunnen deze lijnen tot  $\pm 700$  Km ver weg liggen. De profielen van opeenvolgende satellieten zullen dus ook ver uit elkaar liggen. Alleen als er een rij ontvangers op grote oost-west afstanden van elkaar liggen komen de opeenvolgende profiellijnen in het zelfde gebied te liggen. Dan kan ook de tijdsontwikkeling van de golf gevolgd worden.



Het NNSS satellietsysteem

STATION DELFT  
DATUM 19840203  
STARTTIJD 1450 UT  
SATNR 48  
MAX ELEVATIE 28.88  
TIJDSTIP 14.55.50 UT  
RICHTING NE



Registratie van zwaarte golven in Delft en De Bilt.  
Overeenkomstige golftoppen zijn genummerd.

APPENDIX A  
DISPERSIERELATIE EN GROEPSSNELHEID

Lineaire golfvergelijkingen met konstante coëfficiënten hebben oplossingen van de vorm:

$$A(r, t) = A \cdot \exp i(\Omega t - \vec{k} \cdot r)$$

De frequentie  $\Omega$  en het golfgetal  $\vec{k}$  voldoen aan een dispersierelatie :

$$D(\Omega, \vec{k}) = 0$$

Bij dissipatieve of versterkende media moeten de frequentie of het golfgetal complex gekozen worden om aan de dispersierelatie te voldoen. De imaginaire termen geven de demping van de golf weer. In het navolgende zal worden uitgegaan van een reeel golfgetal  $k$  en een complexe frequentie  $\Omega = \omega + i\gamma$

Een eindig golfpakket wordt samengesteld uit een continue som van vlakke golven met verschillende golflengtes. Voor de veldsterkte op positie  $r, t$  volgt dan:

$$A(\vec{r}, t) = \int A(\vec{k}, \Omega) \cdot \exp i(\Omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r}) d(\vec{k}, \Omega) \quad A1$$

De golfsterkte  $A(k, \Omega)$  zal doorgaans gepiekt zijn rond een draaggolf met  $k_c$  en  $\Omega_c$ . Definieer nu de 4 komponentige vektoren  $\vec{l} = (\vec{k}, -\omega)$ ;  $\vec{x} = (\vec{r}, t)$  en  $\delta \vec{l} = \vec{l} - \vec{l}_c$ . De draaggolf kan nu uitgedeeld worden zodat de veldsterkte geschreven wordt als

$$A(\vec{r}, t) = A(\vec{x}) = G(x) \cdot \exp(-i \vec{l}_c \cdot \vec{x} + \gamma_c \cdot t)$$

$$\text{met } G(x) = \int A(\vec{l}_c + \delta \vec{l}) \cdot \exp(-i \delta \vec{l} \cdot \vec{x} + \delta \gamma t) d\delta \vec{l} \quad A2$$

De functie  $A(\vec{l}_c + \delta \vec{l})$  is continu met een maximum rond  $\delta \vec{l} = 0$  maar de  $\exp(-)$  term is snel oscillerend. Er zal dus alleen een merkbare bijdrage aan de amplitude zijn als  $\delta \vec{l} \cdot \vec{x} = \text{constant}$ . Dus:

$$\delta k \cdot \vec{r} - \delta \omega \cdot t = \text{constant}$$

$$\delta k \cdot \dot{\vec{r}} - \delta \omega = 0 \quad A3$$

$\dot{\vec{r}}$  is nu de verplaatsingssnelheid van het punt met de maximale amplitude . dit is dus de groepssnelheid van het signaal.  $\delta k$  en  $\delta \omega$  zijn via de dispersie relatie met elkaar verbonden.

$$D(\Omega, \vec{k}) = D(\vec{l}, \gamma) = D(\vec{l}_c + \delta \vec{l}, \gamma_c + \delta \gamma) = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \vec{k}} \delta k + \frac{\partial D}{\partial \omega} \delta \omega + \frac{\partial D}{\partial \gamma} \delta \gamma = 0 \quad A4$$

De dispersie relatie kan nu gesplitst worden in een reëel en een imaginair deel  $D = H + iA$ .  $H$  en  $A$  moeten nu ieder afzonderlijk aan A4 voldoen. Anderzijds is  $D$  een analytische functie van  $\Omega = w + i\gamma$  en moeten de afgeleiden aan de Cauchy-Rieman voorwaarden voldoen, dus:

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma} = \frac{\partial H}{\partial w} \quad \text{en} \quad \frac{\partial H}{\partial \gamma} = -\frac{\partial A}{\partial w}$$

Samen met relatie A3 kan dit in A4 ingevuld worden:

$$\delta \bar{k} \left\{ \frac{\partial H}{\partial k} + \dot{\bar{r}} \frac{\partial H}{\partial w} \right\} - \frac{\partial A}{\partial w} \cdot \delta \gamma = 0$$

$$\delta \bar{k} \left\{ \frac{\partial A}{\partial k} + \dot{\bar{r}} \frac{\partial A}{\partial w} \right\} + \frac{\partial H}{\partial w} \cdot \delta \gamma = 0$$

$$\dot{\bar{r}} = - \frac{\frac{\partial H}{\partial k} \cdot \frac{\partial H}{\partial w} + \frac{\partial A}{\partial k} \cdot \frac{\partial A}{\partial w}}{\left( \frac{\partial H}{\partial w} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial w} \right)^2} \quad \text{A5}$$

De noemer in A5 is herkenbaar als  $\left| \frac{\partial D}{\partial \Omega} \right|^2$

Het voorgaande kan ook toegepast worden als de eigenschappen van het medium plaats of tijds afhankelijk zijn. De dispersie relatie krijgt nu de vorm  $D(\bar{l}, \gamma, \bar{x}) = 0$  waarbij  $\bar{x} = (\bar{r}, t)$  zowel plaats als tijdsafhankelijk gedrag tot uiting brengt. De golf moet ongeacht het tijdsverloop aan de dispersie relatie blijven voldoen dus:

$$\dot{D} = \frac{\partial D}{\partial t} \cdot \dot{t} + \frac{\partial D}{\partial \gamma} \cdot \dot{\gamma} + \frac{\partial D}{\partial \bar{x}} \cdot \dot{\bar{x}} = 0$$

Het splitsen van  $D = H + iA$  en de Cauchy Rieman voorwaarden geven nu :

$$\frac{\partial H}{\partial t} \cdot \dot{t} + \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \cdot \dot{\bar{x}} + \frac{\partial A}{\partial w} \cdot \dot{\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} \cdot \dot{t} + \frac{\partial A}{\partial \bar{x}} \cdot \dot{\bar{x}} + \frac{\partial H}{\partial w} \cdot \dot{\gamma} = 0 \quad \text{A6}$$

$$\left( \frac{\partial H}{\partial w} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial w} \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \right) \cdot \dot{t} + \left( \frac{\partial H}{\partial w} \cdot \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial A}{\partial w} \cdot \frac{\partial A}{\partial \bar{x}} \right) \cdot \dot{\bar{x}} = 0 \quad \text{A7}$$

De vierde component van de eerste term van A7 is met  $l_4 = -w$  te schrijven als:

$$\left[ \left( \frac{\partial H}{\partial w} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial w} \right)^2 \right] \cdot \dot{w} = \left| \frac{\partial D}{\partial \Omega} \right|^2 \cdot \dot{w}$$

Met A5 voor de eerste drie componenten kan de hele eerste term geschreven worden als:

$$- \left| \frac{\partial D}{\partial \Omega} \right|^2 \dot{\bar{x}} \cdot \dot{\bar{l}}$$

Invullen in A7 geeft nu de waarde voor  $\dot{\bar{l}}$ .

$$\dot{\bar{l}} = \left( \frac{\partial H}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial A}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial A}{\partial \bar{x}} \right) / \left| \frac{\partial D}{\partial \bar{\Omega}} \right|^2 \quad A8$$

A5 en A8 vormen nu de bewegings vergelijkingen voor een golfpakketje. Uit A8 blijkt direkt dat bij een tijds-onafhankelijke dispersie relatie de frequentie  $w = -l_4$  constant is.

Bij een reële dispersie relatie met  $w = w$  volgt:

$$H = \Omega - w(k)$$

$$A = 0$$

$$\dot{\bar{r}} = - \frac{\partial H / \partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{k} / \partial \bar{\Omega}} = \frac{\partial w}{\partial \bar{k}} \quad A9$$

$$\dot{\bar{k}} = \frac{\partial H / \partial \bar{x}}{\partial \bar{\Omega} / \partial \bar{x}} = - \frac{\partial w}{\partial \bar{x}}$$

Dit zijn de klassieke bewegingsvergelijkingen voor een golf pakket. Bij zwak gedempte golven zal de beweging volgens A9 niet veel van die volgens A5 en A8 afwijken. Essentieel is echter dat de demping de looprichting van de golven verandert wat op lange tijdschalen natuurlijk van groot belang is. Ook op punten waar (komponenten van) de klassieke groepssnelheid nul worden geeft de demping wezenlijk andere resultaten.

In sommige gevallen ligt het meer voor de hand de frequentie reeel te kiezen en de demping van de golf in het complexe golfgetal onder te brengen. Kies  $\bar{l}$  en  $\bar{x}$  als voorgaand en  $\bar{k} = (k.l + ib)$ . De analyse kan nu met kleine wijzigingen herhaald worden.

$$G(\bar{x}) = \int A(l_c + \delta l) \cdot \exp(-i\delta l \cdot x - \delta b \cdot z) \cdot d\delta l \quad A2'$$

$$\frac{\partial D}{\partial \bar{k}} \cdot \delta k + \frac{\partial D}{\partial \bar{w}} \cdot \delta w + \frac{\partial D}{\partial \bar{b}} \cdot \delta b = 0 \quad A4'$$

De Cauchy Riemann voorwaarden

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{b}} = - \frac{\partial A}{\partial \bar{m}}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \bar{b}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{m}}$$

$$\dot{\bar{r}} = - \frac{\frac{\partial H}{\partial \bar{m}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \bar{k}} + \frac{\partial A}{\partial \bar{m}} \cdot \frac{\partial A}{\partial \bar{k}}}{\frac{\partial H}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \bar{m}} + \frac{\partial A}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial A}{\partial \bar{m}}} \quad A5'$$



Bij een ééndimensionale golf in de z-richting is de teller van A5' te schrijven als  $\left| \frac{\partial D}{\partial M} \right|^2$  met  $M=m+ib$ .

Het lijkt aantrekkelijk deze analyse voort te zetten met zowel een demping in de ruimte als in de tijd. Er zijn dan echter vier variabelen,  $\delta k$ ,  $\delta w$ ,  $\delta b$ ,  $\delta \gamma$  en er is geen voor de hand liggende extra vergelijking om het stelsel op te lossen. In het belangrijke geval waarin  $ib$  de groei van de golf met de hoogte als gevolg van de verdunning van de atmosfeer weergeeft is de extra vergelijking  $\delta b=0$  omdat de groei niet van de golflengte of frequentie afhankelijk is. De imaginaire term in  $k$  wordt nu met de draaggolf uitgedeeld en A5 geeft de juiste groepssnelheid.

VOORBEELD

Viskeuze golven  $D(\bar{k}, \Omega) = i.\Omega + \beta.\bar{k}^2$

A: complexe frequentie, eendimensionaal.

$$\begin{aligned} \Omega &= w + i.\gamma \\ \bar{k} &= m \\ H &= -\gamma + \beta.m^2 \\ A &= i.w \\ \frac{\partial D}{\partial \Omega} &= i \\ \frac{\partial H}{\partial w} &= 0 & \frac{\partial H}{\partial m} &= 2.\beta.m \\ \frac{\partial A}{\partial w} &= i & \frac{\partial A}{\partial m} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \bar{r}} &= 0 \end{aligned}$$

De demping is blijkbaar zo sterk dat de groepssnelheid nul wordt. Wanneer de demping in het golfgetal wordt verwerkt blijkt er echter wel degelijk energie transport plaats te vinden.

B: reele frequentie, complex golfgetal

$$\begin{aligned} \Omega &= w \\ \bar{k} &= m + i.b \\ H &= \beta.(m^2 - b^2) \\ A &= w + 2.\beta.m.b \\ \frac{\partial D}{\partial M} &= 2.\beta.M = 2.\beta.(m+ib) \\ \frac{\partial H}{\partial w} &= 0 & \frac{\partial H}{\partial m} &= 2.\beta.m \\ \frac{\partial A}{\partial w} &= 1 & \frac{\partial A}{\partial m} &= 2.\beta.b \\ \frac{\partial}{\partial \bar{r}} &= \frac{-4.\beta^2.(m^2 + b^2)}{2.\beta.b} = 2.\sqrt{2.\beta.w} \end{aligned}$$

Uit dit resultaat blijkt dat het begrip groepssnelheid en energie transport ook voor viskeuze golven van toepassing is. Het resultaat komt overeen met hetgeen gevonden wordt als de krachten die opeenvolgende vloeistoflagen op elkaar uitoefenen berekend worden.

De veldsterkte van de golf wordt gegeven door A2:

$$A(r, t) = G(x) \cdot \exp(i(\omega_0 t - \vec{k} \cdot \vec{r}) - \gamma_0 t)$$

De tijd en de door de golf afgelegde afstand ds zijn gereslateerd door:

$$|\dot{\vec{r}}| \cdot dt = ds$$

De verzwakking van de golf tussen bron en waarnemer is nu:

$$\exp\left(-\int \gamma / |\dot{\vec{r}}| \cdot ds\right) \quad A10$$

APPENDIX B  
BEHOUD VAN GOLFAKTIE

In een stilstaand, dissipatievrij medium zijn de golven energie behoudend. Dit wordt weergegeven met:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \bar{I} \quad B1$$

E is de energiedichtheid en  $\bar{I}$  de energiestroom met  $\bar{I} = E \cdot \bar{U}$  waarbij  $\bar{U}$  de groepssnelheid is. De verandering van de energiedichtheid in een controle volume is gelijk aan de uitstroming door de wanden. In een medium met een snelheidsgradient in de achtergrondstroming is dit niet meer zo. Een deeltje dat onder invloed van de golf heen en weer beweegt ondervindt extra krachten als gevolg van de snelheidsverschillen in de achtergrond. Door middel van deze extra krachten vindt er energie uitwisseling plaats zodat de golf als geïsoleerd systeem niet langer energie behoudend is.

In deze paragraaf wordt nu verder uitgegaan van een horizontale windsnelheid met een verticale gradient. De golf heeft de vorm  $\bar{u}(r, t) = \bar{u} \exp i(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{r})$  en er is weinig of geen demping.

De golf frequentie ondergaat t.o.v. het medium een Doppler verschuiving  $\bar{V} \cdot \bar{k}$  zodat de dispersierelatie is:

$$\omega = \omega_r(\bar{k}) + \bar{V} \cdot \bar{k}$$

waarbij  $\omega_r(\bar{k})$  de lokale dispersierelatie is en V de achtergrondwind. Uit appendix A volgen nu de bewegingsvergelijkingen voor een golfpakket.

$$\dot{\bar{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \bar{r}} = -\frac{\partial \omega_r}{\partial \bar{r}} - \bar{k} \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{r}}$$

$$\dot{\bar{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \bar{k}} = \frac{\partial \omega_r}{\partial \bar{k}} + \bar{V} = \bar{U} + \bar{V}$$

waarbij U de lokale groepssnelheid is.

Voor de verandering van  $\omega_r$  langs de golfbaan volgt:

$$\dot{\omega}_r = \frac{\partial \omega_r}{\partial \bar{k}} \cdot \dot{\bar{k}} + \frac{\partial \omega_r}{\partial \bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}} \quad B2$$

$$= -U \cdot \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial \bar{r}} + \bar{k} \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\partial \omega_r}{\partial \bar{r}} \cdot (\bar{U} + \bar{V})$$

$$= -U_i \cdot k_j \cdot \frac{\partial V_j}{\partial \bar{r}_i} + V_i \cdot \frac{\partial \omega_r}{\partial \bar{r}_i} \quad (\text{sommatie conventie})$$

$$= -U_i \cdot k_j \cdot \frac{\partial V_j}{\partial \bar{r}_i} \quad \text{in een assenstelsel met } V=0$$

Beschouw nu alle bewegingen t.o.v. de lokale achtergrondstroming. Een in de golf bewegend deeltje ondervindt nu een

schijnkracht  $F_s = -m \cdot a$  met  $a_i = \frac{dV_i}{dt} = u_j \cdot \frac{\partial V_i}{\partial r_j}$  B4  
 Deze kracht levert een vermogen:

$$P = u \cdot F_s = -u_i \cdot u_j \cdot \frac{\partial V_i}{\partial r_j} \quad B5$$

De energie behoudswet krijgt nu de vorm

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \cdot \bar{I} - \rho u_i \cdot u_j \cdot \frac{\partial V_i}{\partial r_j} \quad B6$$

Voor de horizontale componenten van de zware golf volgt uit de impulsvergelijking.

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla p'$$

$\rho w \cdot u_i = k_i \cdot p'$   $i=x$  of  $y$  bij een vlakke golf.

In een horizontaal gelaagd systeem is de verticale achtergrondsnelheid overal nul zodat de term  $u_z \cdot u_j \cdot \frac{\partial V_i}{\partial r_j}$  zonder bezwaar door  $k_z/w \cdot p' \cdot u_j \cdot \frac{\partial V_i}{\partial r_j}$  vervangen kan worden.

De wisselwerkings term uit B6 wordt nu.

$$- (k_i/w) \cdot p' \cdot u_j \cdot \frac{\partial V_i}{\partial r_j} = - (k_i/w) \cdot \bar{I}_j \cdot \frac{\partial V_i}{\partial r_j} \quad B7$$

Met  $\bar{I} = E \cdot \bar{U}$  volgt nu voor B6

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \cdot (E \cdot \bar{U}) - k_i \cdot U_j \cdot \frac{\partial V_i}{\partial r_j} (E/w) \quad B8$$

Voor een waarnemer die met snelheid  $U$  beweegt:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + \bar{U} \cdot \nabla E = \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{U} \cdot E) - E \cdot \nabla \cdot \bar{U}$$

Samen met B2 voor  $w$  volgt nu:

$$\frac{dE}{dt} = -E \nabla \cdot \bar{U} + (E/w) \cdot \frac{dw}{dt} \quad B9$$

$$\frac{d(E/w)}{dt} = - (E/w) \cdot \nabla \cdot \bar{U}$$

$$\frac{\partial (E/w)}{\partial t} = -\nabla \cdot (E/w \cdot \bar{U}) \quad B10$$

Vergelijking met B1 leert dat nu de golfactie  $E/w$  een behouden grootte is die met de groepssnelheid  $U$  van de golven door het medium loopt. Als door de Doppler verschuiving de frequentie daalt staat de golf energie af aan de achtergrondstroming en omgekeerd wint de golf energie bij stijgende frequentie.

VIKOSITEIT

Uit de impuls wet volgt dat de viskositeit een kracht op de deeltjes uitoefent met:

$$F_v = \mu \nabla^2 u \tag{B11}$$

Analoog aan B5 verbruikt deze kracht een vermogen

$$P = \mu \cdot u_i \nabla^2 u_i = -\mu \cdot \bar{k}^2 (u_i \cdot u_i)$$

Volgens het equipartitie theorema zijn de gemiddelde potentiële en kinetische energie van de golf gelijk. Hiermee is de gemiddelde waarde van  $(u_i \cdot u_i) = E/\rho$  bekend. Het energie verlies is:

$$P = -(\mu/\rho) \cdot \bar{k}^2 \cdot E \tag{B12}$$

Deze term moet nu in B6 B8, B9 en b10 toegevoegd worden.

De behoudswet voor golfaktie wordt nu

$$\frac{d(E/w)}{dt} = -(E/w) \cdot \nabla \cdot \tilde{U} - \eta \bar{k}^2 \cdot (E/w) \tag{B13}$$

$$\frac{\partial (E/w)}{\partial t} = -\nabla \cdot (E/w \cdot U) - \eta k^2 \cdot (E/w)$$

Als  $\nabla \cdot U = 0$  gaat de golfaktie verloren volgens

$$(E/w)_t = \exp(-\eta \cdot k^2 \cdot t) \cdot (E/w)_{t=0}$$

De dempingsterm houdt dus zijn normale vorm maar heeft nu niet langer betrekking op de golfenergie maar op de golfaktie.

APPENDIX C  
DE WKB METHODE.

De WKB methode dient om benaderde oplossingen van diff. vergelijkingen te vinden. Stel  $u(z)$  voldoet aan:

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \cdot u'' + Q(z) \cdot u &= 0 & \text{C1} \\ \text{en } u &= \exp(1/\delta \sum \delta^n S_n(z)) \end{aligned}$$

De  $S_n$  zijn benaderingstermen voor een complexe fase functie  $S$  en  $\delta$  is een parameter om de verschillende ordes in de benadering uit elkaar te kunnen houden.

Uit C1 volgt

$$\begin{aligned} u' &= 1/\delta \sum \delta^n \cdot S_n' \cdot \exp(1/\delta \sum \delta^n S_n) \\ u'' &= (\sum \delta^n S_n')^2 / \delta^2 + (\sum \delta^n \cdot S_n'') / \delta \cdot \exp(1/\delta \sum \delta^n S_n) \end{aligned}$$

Invullen in C1 geeft

$$\epsilon^2 / \delta^2 \left[ (\sum \delta^n S_n')^2 + \delta \sum \delta^n \cdot S_n'' \right] + Q(z) = 0 \quad \text{C2}$$

Door nu  $\epsilon = \delta$  te kiezen en te eisen dat iedere orde van  $\delta$  apart aan C2 voldoet volgt een stelsel vergelijkingen in  $S_n$ .

$$\begin{aligned} 0^e &: S_0'^2 = -Q(z) \\ 1^e &: 2 \cdot S_0' \cdot S_1' = 0 \\ 2^e &: S_0'^2 + 2 \cdot S_0' \cdot S_2' + S_1'' = 0 \\ 3^e &: 2 \cdot S_0' \cdot S_3' + 2 \cdot S_1' \cdot S_2' + S_2'' = 0 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Met deze relaties kunnen steeds betere benaderingen van de fase functie  $S(z)$  gemaakt worden. In het eindresultaat wordt  $\epsilon = \delta = 1$  gesteld. Tot in  $2^e$  orde volgt:

$$\begin{aligned} S_0' &= \pm \sqrt{-Q} \\ S_1' &= -1/4 \cdot Q'/Q & S_1 &= -1/4 \log(Q/Q_0) \\ S_2' &= \frac{4 \cdot Q \cdot Q'' - 5 \cdot Q'^2}{32 \cdot Q^2 \cdot \sqrt{-Q}} \end{aligned}$$

Bij golf problemen is  $Q(z) > 0$ ,  $S_0'$  en  $S_2'$  zijn dan zuiver imaginair en vormen het eerste orde golfgetal en de tweede orde correctie daarop.  $S_1$  is reeel en is dus een amplitude term.

De oplossing wordt nu in eerste orde benadering:

$$u = \sqrt[4]{Q_0/Q(z)} \cdot \exp \pm i \sqrt{Q} \cdot dz \quad C3$$

$\sqrt{Q}$  is precies het golfgetal dat wordt verkregen bij  $Q=\text{constant}$ . Vooropgesteld dat de  $S_n$  voldoende snel convergeren wordt zo een goede benadering verkregen van de doorgaande golf. De methode levert echter geen waarden op voor eventuele partiele reflecties. Hiervoor zal een tweede methode besproken worden.

#### PARTIELE REFLEKTIE

Als oplossing wordt nu een som van links en rechts lopende golven gekozen met plaatsafhankelijke amplitudes  $X_1(z)$  en  $X_2(z)$ .

$$u = X_1 \cdot \bar{Q}^{\frac{1}{4}} \cdot \exp i \cdot S(z) + X_2 \cdot \bar{Q}^{\frac{1}{4}} \cdot \exp -iS(z) \quad C4$$

$$S(z) = \int \sqrt{Q} \cdot dz$$

Definieer nu

$$v(z) = i \cdot X_1 \cdot \bar{Q}^{\frac{1}{4}} \cdot \exp i \cdot S - i \cdot X_2 \cdot \bar{Q}^{\frac{1}{4}} \cdot \exp -i \cdot S \quad C5$$

Bij constante  $Q$  wordt de vergelijking C1 nu omgezet in:

$$u' = v \quad C6$$

$$v' = -Q \cdot u$$

Vul nu C4 en C5 in in C6 waarbij  $Q$  dit maal als functie van  $z$  wordt beschouwd. Volgens de standaard storingsmethoden volgen er nu diff.verg. voor de amplituden  $X_1$  en  $X_2$ .

$$\begin{aligned} (X_1' \cdot \exp iS + X_2' \cdot \exp -iS) - \frac{1}{4} \cdot \frac{Q'}{Q} \cdot (X_1 \cdot \exp iS + X_2 \cdot \exp -iS) &= 0 \\ (X_1' \cdot \exp iS - X_2' \cdot \exp -iS) + \frac{1}{4} \cdot \frac{Q'}{Q} \cdot (X_1 \cdot \exp iS - X_2 \cdot \exp -iS) &= 0 \end{aligned}$$

$$X_1' = \frac{1}{4} \cdot \frac{Q'}{Q} \cdot X_2 \cdot \exp -2 \cdot i \cdot S$$

$$X_2' = \frac{1}{4} \cdot \frac{Q'}{Q} \cdot X_1 \cdot \exp 2 \cdot i \cdot S \quad C7$$

Hieruit blijkt dat de groei van de gereflekteerde golf  $X_2$  wordt bepaald door de sterkte van de heengaande golf  $X_1$  en andersom. Met  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{Q'}{Q} \cdot \exp \pm 2 \cdot i \cdot S$  is C7 te schrijven als,

$$X_1' = \epsilon \lambda_1 \cdot X_2$$

$$X_2' = \epsilon \lambda_2 \cdot X_1$$

Kies nu als storingsreeks  $X_1 = X_1^0 + \epsilon X_1^1 + \epsilon^2 \cdot X_1^2 + \text{etc}$  en  $X_2$  analoog. Dan volgt:

$$\frac{d}{dz} X_1^m = \epsilon \lambda_1 \cdot X_2^{m-1}$$

De  $m-1^e$  orde golf naar rechts treedt dus als bron op voor de  $m^e$  orde golf naar links.





R.Whitten C.Riegel Internal gravity waves in an atmosphere with windshear  
1973 J.of atmospheric science 30 p 313-316