

enkele beschouwingen over golfvoortplanting

PLFM Verdonk

wetenschappelijke rapporten WR 86-2

ABSTRACT

This report describes certain aspects of wave propagation. The choice of the subjects has grown out of the author's interest in this field and his curiosity about the meaning of some words of the wave-theorist's jargon.

In Chapter I it is tried among other things to demonstrate the meaning of group velocity, its relation to conserved quantities and to clarify the origin of dispersion in terms of non-localities and relaxation-phenomena.

In Chapter II it is tried to develop some feeling for the character of a wave described by an equation with a general type of nonlinearity and a general dispersion-term. The steepening of a wave-flank and the occurrence of waves of constant form (stationary waves) are discussed. Furthermore it is made plausible that the above-mentioned equation has always stationary-wave-solutions with striking symmetrical properties.

Chapters III and IV advertise a particular way of looking at the wave equation with a general type of nonlinearity and a general dispersion-term. Whenever an evolution-equation is of a so-called Hamiltonian structure or can be derived from a so-called Action-functional we can wrench valuable information from this equation without the need of knowing the exact solution. It is shown that the aforesaid wave equation is of the Hamiltonian type and can also be derived from an Action-functional. In both cases information about the evolution of the wave can be got in the form of conservation-laws.

Voorwoord

Dit verslag is een samenvatting van het werk, dat ik tijdens mijn vervangende dienst heb verricht bij het KNMI, in de hoofdafdeling Wetenschappelijk Onderzoek, afdeling Geofysisch Onderzoek.

De keuze van het onderwerp, de belichting van enkele aspecten uit de theorie van de golfvoortplanting, vindt zijn oorsprong in de vragen waarmee ik aanvankelijk zat en waarop ik niet zo gauw een bevredigend antwoord vond. Zo miste ik een duidelijke voorstelling van het begrip "groepssnelheid" en zo vroeg ik me af wat de achtergrond is van het verschijnsel dispersie en wat voor effect een niet-lineariteit heeft op de evolutie van een golf. Antwoorden op deze en aanverwante vragen zijn gegeven in de hoofdstukken I en II.

Daarnaast is geprobeerd om wat reclame te maken voor een andere manier van kijken naar bewegingsvergelijkingen van een dynamisch systeem, in ons geval golfvergelijkingen. Als we namelijk kunnen laten zien, dat de evolutievergelijkingen een bepaalde (Hamiltonse) structuur hebben of afgeleid kunnen worden uit een bepaalde (actie-)functionaal, dan hoeven we de oplossing van de vergelijkingen niet expliciet te kennen om informatie over het gedrag van het systeem te kunnen inwinnen. Symmetrie-beschouwingen van voor het systeem karakteristieke grootheden, leiden dan tot de constructie van behoudswetten, waaraan de beweging moet voldoen.

In de hoofdstukken III en IV tonen we aan dat de golfvergelijking met algemene dispersie en vrij algemene niet-lineariteit zo'n Hamiltonse structuur heeft, tevens afgeleid kan worden uit een actiefunctieaal en geven we een aantal behoudswetten.

Op deze plaats wil ik de gelegenheid te baat nemen om de mensen, die dit werk mogelijk gemaakt hebben, te bedanken.

Ik dank dr.ir. C. van Duin en drs. H. Kelder van het KNMI, afdeling Geofysisch Onderzoek, voor hun medewerking en collegialiteit. Prof.dr. L.J.F. Broer en dr.ir. H.M.M. ten Eikelder van de THE en drs. W. Verkley van het KNMI dank ik voor de inspirerende gesprekken, evenals prof.dr. F.W. Sluijter van de THE die ik tevens dank voor de gastvrijheid in zijn vakgroep. Mochten er onverhoopt wat foutjes in dit verslag staan, dan zijn deze geheel voor mijn rekening.

Last but not least dank ik de secretaresses van het KNMI, Marleen Kaltoven en Jos van Bodegraven, voor hun werkelijk razendsnelle en zorgvuldige typewerk.

I N H O U D

I. LINEAIRE GOLFVOORTPLANTING

- 1.1 Inleiding
- 1.2 Groepssnelheid en behouden grootheden
- 1.3 Signaalsnelheid en breedte van een golfpakket
- 1.4 De achtergrond van dispersie
- 1.5 Stelsel herleid tot één vergelijking via de dispersierelatie

II. NIET-LINEAIRE GOLFVOORTPLANTING

- 2.1 Inleiding
- 2.2 Het opstellen van een flank van een golf
- 2.3 Stationaire-golfoplossingen voor een niet-lineaire vergelijking met dispersie
- 2.4 Speciale stationaire-golfoplossingen
- 2.5 Een voorwaarde voor de gelijkvormigheid van stationaire golven
- 2.6 Het karakteristieke aantal modes van een periodieke golftrein

III. HAMILTONFORMALISME

- 3.1 Inleiding
- 3.2 Definities en notatie
- 3.3 De golfvergelijking als Hamiltonse bewegingsvergelijking

IV. LAGRANGE-FORMALISME

- 4.1 Inleiding
- 4.2 Herkomst van het variatieprincipe
- 4.3 Theorema van Noether
- 4.4 Een Lagrangiaan voor de golfvergelijking met niet-lineariteit en dispersie
- 4.5 Methode van de gemiddelde Lagrangiaan
- 4.6 Groepssnelheid en het theorema van Noether

Appendix A Signaalsnelheid en breedte van golfpakket

Appendix B Het opstellen van een flank van een golf

Appendix C Speciale stationaire-golfoplossingen

Appendix D Een voorwaarde voor de gelijkvormigheid van stationaire golven

Literatuur

I. LINEAIRE GOLVEN

1.1. Inleiding

De theorie van de golfvoortplanting kent een zeer uitgebreid toepassingsgebied. Licht en geluid zijn golfverschijnselen, een wateroppervlak kan golven, men spreekt over verkeersgolven op de snelweg en men heeft het zelfs over "Love-waves" (in de seismologie).

Als we proberen het karakteristieke van golven te vangen in enkele woorden, komen we tot het volgende:

Golven kan men overal waarnemen daar, waar een terugdrijvende kracht werkt op een uitwijking vanuit een evenwicht. De verandering van de uitwijking met de tijd hangt daarbij samen met de verandering van de uitwijking met de plaats, als gevolg waarvan transport van informatie mogelijk is.

We zullen ons in dit verslag beperken tot ééndimensionale golfvoortplanting in homogene media. In dit hoofdstuk kijken we naar de lineaire theorie, welke geldig is voor kleine uitwijkingen. Als de amplitudes klein zijn, zullen door de aanwezigheid van de golf de relevante voortplantingseigenschappen van het medium niet merkbaar veranderen. Dit zorgt ervoor dat twee golven elkaar niet "zien" en hun effecten gewoon bij elkaar mogen worden opgeteld.

Een interessant verschijnsel dat beschreven kan worden met de lineaire theorie van de golfvoortplanting is de dispersie van een golf. Dispersie is er de oorzaak van dat een golfpakketje continu van vorm verandert en op den duur een sinus-achtige golftrein wordt. Vanuit het Fouriërdomein bekeken kan men dit verschijnsel verklaren door te wijzen op de verschillende voorplantings- (fase-) snelheden van de samenstellende harmonischen, waardoor de onderlinge faseverschillen voortdurend groter worden. Met een vertaling hiervan naar het plaats-tijd-domein, waar de afzonderlijke sinussen en cosinussen niet bestaan, laten we zien dat de oorzaak van dispersie gezocht moet worden in niet-locale afhankelijkheden en/of relaxatieverschijnselen. Karakteristieke tijd- en lengteschalen in het medium geven daarbij aan wanneer benaderingen in de dispersieterm van de golfvergelijking geoorloofd zijn.

We laten in dit hoofdstuk verder zien dat de groepssnelheid pas een te meten grootheid is in de eindfase van de evolutie van een golfpakket, namelijk dan, als de sinus-achtige golftrein ontstaan is, waarin het aantal golftoppen constant blijft. De groepssnelheid is dan de snelheid waarmee dichtheden van behouden grootheden zich voortplanten, zoals de energiedichtheid in het Fourierspectrum en de dichtheid van het aantal golftoppen.

Aan het bovengenoemde eindstadium van de golf gaat een andere fase vooraf, waarin de groepssnelheid geen observabele meer is. De beschrijvende parameters van het golfpakket zijn dan de snelheid van zijn zwaartepunt en zijn breedte. De zwaartepuntssnelheid blijkt gelijk te zijn aan de over de verstoring gemiddelde waarde van de groepssnelheid, terwijl de breedte op den duur lineair toeneemt met de tijd.

Tot slot laten we zien dat het makkelijk is om een stelsel lineaire partiële differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten tot één hogere orde d.v. te herleiden via de dispersierelatie.

1.2. Groepssnelheid en behouden grootheden

Binnen de lineaire theorie van de golfvoortplanting worden de verschijnselen beschreven door lineaire differentiaalvergelijkingen. Deze hebben de essentiële eigenschap dat de som van twee oplossingen weer een oplossing voorstelt van dezelfde differentiaalvergelijking. Zodoende is elke oplossing te schrijven als een lineaire combinatie van basisoplossingen. Heeft het stelsel diff. vgl. constante coëfficiënten, dan wordt zo'n basis gevormd door de zogenaamde harmonische golven. Beperken we ons tot één plaats- en tijdcoördinaat, dan krijgen ze de vorm:

$$\sin(kx - \omega t), \cos(kx - \omega t) \quad \text{ofwel} \quad e^{i(kx - \omega t)} \quad (1)$$

Ingevuld in de diff. vgl. leidt dit tot een algebraïsche vergelijking, die een eis oplegt aan de relatie tussen de grootheden k en ω , de dispersierelatie:

$$D(\omega, k) = 0 \quad (2)$$

of, onder voorwaarden van inverteerbaarheid:

$$\omega = \omega(k) \quad (3)$$

We veronderstellen dat in het vervolg deze laatste uitdrukking van toepassing is.

De grootheid k is het golfgetal:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda = \text{golflengte}$$

terwijl ω de hoekfrequentie voorstelt:

$$\omega = 2\pi\nu, \quad \nu = \text{frequentie}$$

We kunnen $e^{i(kx - \omega t)}$ ook schrijven als:

$$e^{ik(x - ct)}, \quad c = \frac{\omega}{k} = c(k) \quad (4)$$

waarin $c(k)$ de fasesnelheid van de harmonische, gekarakteriseerd door k , representeert. Aan (4) zien we dat we met snelheid c mee moeten lopen, willen we steeds dezelfde fase van de sinus waarnemen.

In het algemeen zal c geen constante zijn. De harmonische golven lopen dan elk met een andere snelheid. Stellen we een golfpakket, een in de ruimte begrensde golf, samen door een lineaire combinatie te nemen van vlakke golven, elk met een eigen amplitude, dan wordt dit pakket beschreven door de Fourierintegraal:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \quad (5)$$

We hebben hierin verondersteld dat er maar één golftak is, vaak zijn er meerdere ω 's van k aanwezig:

$$\omega = \pm \Omega_1(k) , \quad \omega = \pm \Omega_2(k) \dots \dots \dots \quad (6)$$

Met elke tak kunnen we een fysisch proces associëren dat verantwoordelijk is voor het golfmechanisme.

Zo vinden geluidsgolven hun oorsprong in de elasticiteit van het medium waarin zij zich voortplanten, en zo ontstaan watergolven door de teruggedrijvende kracht ten gevolge van de gravitatie en oppervlaktespanning, werkend op een uitwijking vanuit het evenwicht. Electromagnetische golven door materie vertonen dispersie, karakteristiek voor de wisselwerking van de golf met de elektrische ladingen en magnetische momenten in de stof.

Omdat de faseverschillen tussen de samenstellende harmonischen continu verlopen als gevolg van hun verschillende fasesnelheden, verwachten we dat het golfpakket (5) voortdurend van vorm zal veranderen. Indien we beginnen met een klein pakketje kunnen we daaraan aanvankelijk een positie toekennen, bijvoorbeeld het zwaartepunt van het pakket (zie par. 1.3 "Signaalsnelheid en breedte van een golfpakket"). Na verloop van tijd zal echter een langere, sinus-achtige, golftrein ontstaan, waarvan de amplitude en golfgetal geleidelijk veranderen. Dit laatste volgt uit het asymptotische gedrag van de Fourierintegraal (5), dat te berekenen is met de methode van de stationaire

fase, of de zadelpuntmethode (method of steepest descent)*). Voor lange tijden, $t \rightarrow \infty$, wordt het gedrag weergegeven door:

$$u(x,t) = A(x,t)e^{i\theta(x,t)} \quad (7)$$

waarin A de (langzaam variërende) amplitude voorstelt en θ de fasefunctie. De frequentie en het golfgetal zijn nu tijd- en plaatsafhankelijk geworden:

$$k(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \theta(x,t) \quad ; \quad \omega(x,t) = - \frac{\partial}{\partial t} \theta(x,t) \quad (8)$$

In dit stadium geldt op grond van (8) het behoud van golftoppen:

$$k_t + \omega_x = 0 \quad (9)$$

want k is een maat voor het aantal golflengtes per lengte-eenheid (dichtheid) en ω vertelt hoeveel golftoppen er per tijdseenheid voorbij een waarnemingspunt komen (flux). Uitgaande van de dispersierelatie (3), die een eigenschap is van het medium, herschrijven we (9) tot:

$$k_t + \left(\frac{d\omega}{dk}\right) k_x = 0 \quad (10)$$

De factor $\frac{d\omega}{dk}$ heeft als dimensie: snelheid. Dit is de groepssnelheid: het golfgetal k (en elke functie van k) plant zich voort met de bijbehorende groepssnelheid. Om dus, in het stadium waarin (7) geldt, steeds golfjes met dezelfde golflengte te blijven zien, moeten we met snelheid $\frac{d\omega}{dk}$ meereizen. Evenzo geldt:

$$\omega_t + \frac{d\omega}{dk} \omega_x = 0 \quad (11)$$

Als we begonnen zijn met een begrensde verstoring op $t = 0$, vinden we voor $t \rightarrow \infty$ het golfgetal k terug op:

- *) - H.A. Lauwerier, Asymptotic Analysis I, Mathematical Centre Tract., 1977, par. 11 + 20.
- M.J. Lighthill, Waves in Fluids, Cambridge, 1979, par. 3.7.
- P.M. Morse & H. Feshbach, Methods of theoretical physics I, McGraw-Hill 1953, par. 4.6.

$$x = \frac{d\omega}{dk} t \quad (12)$$

waarbij de beginbreedte van het golfgetal verwaarloosd is.

We kunnen met een klasse behouden grootheden van de golfvergelijking ook de groepssnelheid als voortplantingssnelheid associëren. We beschouwen daartoe de volgende uitdrukking:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t) dx = E \quad (13)$$

welke vaak de energie voorstelt van de verstoring. Met (5) hierin gesubstitueerd vinden we:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)F(v)e^{i(k+v)x} e^{-it(\omega(k)+\omega(v))} dkdvdx \quad (14)$$

We nemen aan dat we de integratievolgorde mogen verwisselen en we gebruiken een eigenschap van de δ -functie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k+v)x} dx = 2\pi \delta(k+v) \quad (15)$$

en de eis dat $u(x,t)$ reëel is:

$$F(k) = F^*(-k) \quad \omega(k) = -\omega(-k) \quad (16)$$

Uit (14) volgt dan dat:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)F^*(k)dk \quad (\text{Parseval}) \quad (17)$$

Omdat in (17) geen tijdsafhankelijkheid meer voorkomt is E een behouden grootheid:

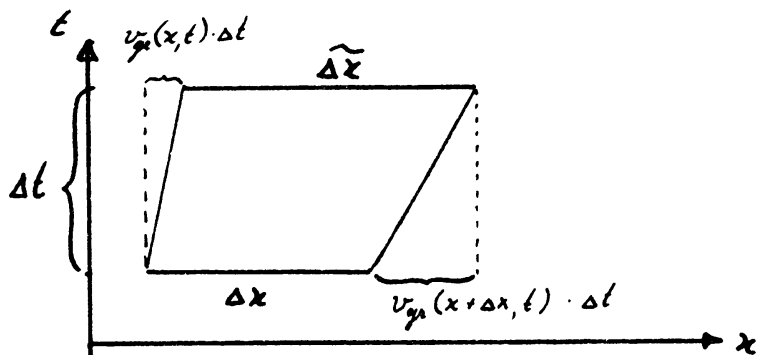
$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t) dx = 0 \quad (18)$$

De energie is in het Fourierdomein zodanig permanent gerangschikt, dat in het intervalletje Δk rond k de bijdrage $F(k)F^*(k)$ zit. In de sinus-achtige golftrein zijn de k -waarden continu verdeeld over de x -ruimte. Als nu het

golfgetal ter plaatse x en op het tijdstip t de grootte k heeft, en een intervalletje Δx golfgetallen uit een intervalletje Δk rond k bevat, dan kunnen we stellen:

$$u^2(x,t)\Delta x = F(k)F^*(k)\Delta k = w(x,t)\Delta x \quad *) \quad (19)$$

Een tijdje later zullen de golfgetallen uit Δk te vinden zijn in een interval $\tilde{\Delta x}$, dat ontstaat uit Δx door de uiteinden daarvan met de bijpassende groepssnelheid $v_{gr}(x,t)$ te verplaatsen:



Volgens (19) blijft de energiejinhoud $F(k)F^*(k)\Delta k$ daarbij constant:

$$\begin{aligned} w(x,t)\Delta x &= w(x+v_{gr}\Delta t, t+\Delta t)\cdot\tilde{\Delta x} = \\ &= \{w(x,t) + w_x(x,t)v_{gr}\Delta t + w_t(x,t)\Delta t\} \cdot \\ &\quad \cdot \{\Delta x + v_{gr}(x+\Delta x, t)\Delta t - v_{gr}(x,t)\Delta t\} \\ &= \{w(x,t) + w_x(x,t)v_{gr}\Delta t + w_t(x,t)\Delta t\} \cdot \\ &\quad \cdot \{\Delta x + v_{gr_x}(x,t)\Delta x\Delta t\} \end{aligned} \quad (20)$$

Hieruit vinden we de volgende behoudswet:

*) - G.B. Whitham, Group velocity and energy propagation for three-dimensional waves. Comm. Pure Appl. Math. 14, 1961, pp. 675-691.

$$\frac{\partial}{\partial t} w(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} \{v_{gr} w(x,t)\} = 0 \quad *) \quad (21)$$

De energiedichtheid reist dus met de groepssnelheid.

Een volkomen analoge beschouwing kunnen we geven voor de dichtheden van andere behouden grootheden mits we gebruik kunnen maken van de volgende relatie:

$$\int f(x,t)g(x,t)dx = \int F(k)G^*(k)dk \quad (22)$$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)e^{-ikx} dx$$

$$G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(x)e^{-ikx} dx$$

welke essentieel is voor het bovenstaande verhaal.

Indien (5) een oplossing van de golfvergelijking is, dan zijn u_x , u_t , u_{xx} , u_{xt} etc. dat ook. Evenzo geldt dan:

$$\frac{d}{dt} \int u_x^2 dx = 0 ; \frac{d}{dt} \int u_t^2 dx = 0 \text{ etc.} \quad (23)$$

met aan (21) analoge behoudswetten.

Het is ook eenvoudig na te gaan dat:

$$\frac{d}{dt} \int u_x u_t dx = 0 ; \frac{d}{dt} \int u_{xx} u_t dx = 0 \text{ etc.} \quad (24)$$

Er gelden hier ook weer soortgelijke behoudswetten als (21).

Samenvattend kunnen we zeggen dat in het stadium, waarin de golf volkomen gedispergeerd is, de dichtheden van behouden grootheden zich meetbaar voortplanten met de groepssnelheid. De modulatie van de lineaire golftrein wordt dan beschreven door (9) en (21):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial (u^2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_{gr} u^2) = 0 \quad (21)$$

*) - V.I. Karpman, Nonlinear waves in dispersive media, Ch. 2., Pergamon 1975.

1.3. Signaalsnelheid en breedte van een golfpakket

Een willekeurige beginverstoring zal in een dispersief medium uiteindelijk de vorm krijgen van een sinus-achtige golftrein. In het stadium hieraan voorafgaand zouden we, om de golfvorm te weten te komen, de uitdrukking:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \quad (1)$$

$$F(-k) = F^*(k) ; \omega(-k) = -\omega(k)$$

moeten berekenen, wat vaak alleen numeriek mogelijk is. Eenvoudig te verkrijgen is echter de informatie over de beweging van het zwaartepunt van de verstoring en over de groei van de breedte van het pakket.

Voor het zwaartepunt van de verstoring, dat we definiëren als:

$$\langle x \rangle = \frac{\int u^2(x,t) x dx}{\int u^2(x,t) dx} \quad (2)$$

leiden we in de appendix A af dat:

$$\langle x \rangle = \left(\frac{\int F(k) F^*(k) \frac{d\omega}{dk} dk}{\int F(k) F^*(k) dk} \right) t + i \frac{\int F'_k(k) F^*(k) dk}{\int F(k) F^*(k) dk} = \langle \omega_k \rangle t + \langle x_0 \rangle \quad (3)$$

We zien dat het zwaartepunt van de verstoring éénparig beweegt met een signaalsnelheid $\langle \omega_k \rangle$, die gelijk is aan de over de verstoring gemiddelde waarde van de groepssnelheid. Deze signaalsnelheid is een aanschouwelijke observabele zolang we aan het golfpakket een positie kunnen toekennen.

Een maat voor de breedte van het golfpakket is de "standaarddeviatie":

$$B = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^{1/2} = \left(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \right)^{1/2} \geq 0 \quad (4)$$

We vinden voor B de volgende uitdrukking:

$$B(t) = \sqrt{\alpha t^2 + \beta t + \gamma} = t \sqrt{\alpha + \frac{\beta}{t} + \frac{\gamma}{t^2}} \quad (5)$$

waarin:

$$\alpha = \langle (\omega_k - \langle \omega_k \rangle)^2 \rangle \quad (6)$$

$$\beta = 2 \langle \omega_k \cdot \frac{d}{dk}(\arg F(k)) \rangle - 2 \langle \omega_k \rangle \langle x_0 \rangle \quad (7)$$

$$\gamma = \langle (x_0 - \langle x_0 \rangle)^2 \rangle \quad (8)$$

Voor $t \rightarrow \infty$ verandert de breedte B evenredig met t . Dit is in overeenstemming met het gedrag van de amplitude van de sinus-achtige golftrain, die gaat als $\frac{1}{\sqrt{t}}$, aangezien $\int u^2 dx$ een behouden grootte is. Het pakket heeft zijn minimum-breedte op $t = \frac{\beta}{2\alpha}$ en bevindt zich dan op

$$\langle x \rangle = \langle x_0 \rangle - \langle \omega_k \rangle \frac{\beta}{2\alpha}.$$

1.4. De achtergronden van dispersie

In de lineaire theorie van de golfvoortplanting in een homogeen medium kan de verstoring geschreven worden als een lineaire combinatie van vlakke golven: de Fourierintegraal:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \quad (1)$$

Elk van de vlakke golven:

$$e^{ik(x - c(k)t)}, \quad \omega = kc(k) \quad (2)$$

wordt gekarakteriseerd door het golfgetal k . In het algemeen zal elke mode een andere fasesnelheid $c(k)$ hebben, als gevolg waarvan een beginverstoring uiteindelijk uit elkaar getrokken wordt tot een sinus-achtige golfrein. Dit verschijnsel heet dispersie. Is de fasesnelheid voor alle modes gelijk, dan verandert het profiel van de golf niet van vorm:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(k) e^{ik(x-ct)} dk = f(x-ct) \quad (3)$$

In het Fourierdomein zien we dus dispersie optreden als geldt:

$$\frac{dc}{dk} \neq 0 \quad (4)$$

We kunnen ons afvragen hoe dit zich vertaalt naar het plaats-tijddomein, m.a.w. hoe we zien of dispersie zal optreden als we in het x - t -domein blijven. In het onderstaande laten we, door een klasse van golfvergelijkingen op een speciale manier te noteren, zien dat dispersie samenhangt met niet-locale afhankelijkheden en/of relaxatieverschijnselen. We zullen laten zien dat in het laatste geval naast dispersie ook dissipatie optreedt.

De niet-locale afhankelijkheid. *)

We beschouwen een klasse van partiële differentiaalvergelijkingen van de volgende vorm:

*) - G.B. Whitham, Linear and nonlinear waves 1974, Wiley, par. 11.1.

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \phi(\zeta, t) d\zeta = 0 \quad (5)$$

waarin K een integreerbare functie is van zijn argument. Aan deze integro-differentiaalvergelijking, waarvan we nog niet hebben laten zien wanneer deze een golfvergelijking voorstelt, merken we het volgende op. De verandering in de tijd van het veld ϕ op één plaats, hangt samen met de over heel de ruimte gewogen bijdrage van de eerste plaatsafgeleide van ϕ op dat moment. Dus niet alleen het punt x , waarin we $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ bekijken, doet mee maar het hele veld, bij de bepaling van het gedrag in datzelfde punt x . Dit bedoelen we met niet-locale afhankelijkheid. De kern K bevat dus informatie over het clustergedrag van het medium.

Vervolgens substitueren we in (5) een vlakke golf:

$$\phi = \hat{\phi} e^{i(kx - \omega t)} \quad (6)$$

Dit geeft:

$$-\omega + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\zeta) k e^{-ik(x-\zeta)} d\zeta = 0 \quad (7)$$

ofwel:

$$\frac{\omega}{k} = c = \int_{-\infty}^{\infty} K(y) e^{-iky} dy \quad (8)$$

Om reële dispersie te krijgen voor alle k eisen we dat K een even functie van zijn argument is:

$$K(y) = K(-y) \quad (9)$$

Met deze voorwaarde zien we aan (8) dat de fasesnelheid $c(k)$ gegeven wordt door de Fouriergetransformeerde van de kern K . Nemen we bijvoorbeeld:

$$K(y) = a \delta(y) \quad (10)$$

dan hoort hierbij de dispersierelatie:

$$\omega = ak \quad (11)$$

Kiezen we:

$$K(y) = b_0 \delta(y) - b_1 \delta''(y) + \dots + (-1)^m b_m \delta^{(2m)}(y) \quad (12)$$

dan krijgen we de dispersierelatie in polynoomvorm:

$$\omega = b_0 k + b_1 k^3 + \dots + b_m k^{2m+1} \quad (13)$$

We kunnen nog op een andere manier tegen (5) aankijken. Hiertoe nemen we aan dat we $\frac{\partial}{\partial \zeta} \phi(\zeta, t)$ kunnen schrijven in de vorm van een Taylorreeks:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\zeta, t)}{\partial \zeta} = f(\zeta, t) &= f(x, t) + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} (\zeta - x) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} (\zeta - x)^2 + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Deze uitdrukking vullen we in (5) in:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \zeta) \cdot \left\{ \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} (\zeta - x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi(x, t)}{\partial x^3} (\zeta - x)^2 + \dots \right\} d\zeta = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

We nemen aan dat we de reeks term voor term mogen integreren. De integralen van de vorm:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x - \zeta) (\zeta - x)^{2p+1} d\zeta, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

zijn nul omdat K een even functie is van zijn argument. Uiteindelijk resulteert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} + A_1 \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} + A_3 \frac{\partial^3 \phi(x, t)}{\partial x^3} + \dots \\ \dots + A_{2n+1} \frac{\partial^{2n+1} \phi(x, t)}{\partial x^{2n+1}} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

waarin:

$$A_{2n+1} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(x - \zeta) (\zeta - x)^{2n}}{2n!} d\zeta \quad (18)$$

Uit (17) volgt na invullen van vlakke golf (6) de dispersierelatie in de vorm van een Taylorreeks in k . Men zou kunnen denken, gezien de vorm van (5), dat er oneindig grote voortplantingssnelheden in het spel zijn, want $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ op een vaste plek is afhankelijk van $\frac{\partial \phi}{\partial \zeta}$ over de gehele ruimte, maar wel op hetzelfde tijdstip. Bekijken we echter de equivalenten vergelijkingen (15) en (17) dan zien we dat het meenemen van $\frac{\partial \phi}{\partial \zeta}$ over de gehele ruimte gelijk staat aan het meenemen van alle Taylorcoëfficiënten $\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}$ in één punt. M.a.w. alle afgeleides in één punt bepalen het gedrag over de gehele ruimte en andersom. En zoals bekend is dit een interpretatie van een Taylorreeks.

Relaxatieverschijnselen *)

Relaxatieprocessen zijn processen die het (thermodynamisch) evenwicht herstellen van een systeem dat uit dit evenwicht is gebracht als gevolg van bijvoorbeeld van buitenaf opgelegde, snelle veranderingen. Processen, die naar het thermodynamische evenwicht toewerken, zijn irreversibel en verhogen de entropie. Dit gaat gepaard met dissipatie van energie. Als relaxatieprocessen de dispersie beïnvloeden, dan moeten we complexe fasesnelheden verwachten. Relaxatie brengen we in rekening door het gedrag van het veld ϕ in het verleden, op de één of andere manier gewogen, de tijdsverandering van ϕ in het heden te laten bepalen:

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} + \int_0^\infty K(\tau) \frac{\partial \phi(x, t-\tau)}{\partial x} d\tau = 0 \quad (19)$$

Deze uitdrukking heeft dezelfde structuur als (5) op de integratiegrenzen na, die bepaald zijn door de causaliteit. We substitueren weer een vlakke-golfoplossing:

$$\phi = \hat{\phi} e^{i(kx - \omega t)}$$

waarmee (19) te herleiden is tot de dispersierelatie:

- *) - V.I. Karpman, *Nonlinear waves in dispersive media*, 1975, Pergamon, par. 9 *Sound waves with dispersion*.
 - L.D. Landau & E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 1966, Pergamon par. 78.
 - J.S. Toll, *Causality and the dispersion relation*, 1956, *Phys. Rev.* 104 (6), pp 1760-1770.

$$\frac{\omega}{k} = \int_0^{\infty} K(y) e^{i\omega y} dy \quad (20)$$

We zullen laten zien dat (20) in het algemeen een complexe uitdrukking levert, de fasesnelheid bevat dus een reëel en een imaginair deel, beide afhankelijk van ω . Dispersie ten gevolge van relaxatieprocessen brengt dissipatie met zich mee.

Te bewijzen valt nu dat (20) een complexe uitdrukking geeft voor reële functies K , tenzij $K(y) = \delta(y)$. Dit bewijs gaat als volgt:

We nemen aan dat $K(y)$ in het oneindige exponentieel naar nul gaat:

$$|K(y)| \leq e^{-My} \quad y \rightarrow \infty, M > 0 \quad (21)$$

Vervolgens bekijken we voor complexe ω :

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2 \quad (22)$$

de uitdrukking:

$$I = \int_0^{\infty} K(y) e^{i\omega y} dy = \int_0^{\infty} K(y) e^{-\omega_2 y} e^{i\omega_1 y} dy \quad (23)$$

Om convergentie van de integraal te waarborgen nemen we:

$$\omega_2 > -M \quad (24)$$

We splitsen I op in reëel en imaginair deel:

$$I = \int_0^{\infty} K(y) e^{-\omega_2 y} \cos(\omega_1 y) dy + i \int_0^{\infty} K(y) e^{-\omega_2 y} \sin(\omega_1 y) dy \quad (25)$$

Om het imaginaire deel te bekijken, definiëren we:

$$\begin{aligned} G(y; \omega_2) &= K(y) e^{-\omega_2 y} & y \geq 0 \\ &= -K(y) e^{\omega_2 y} & y < 0 \end{aligned} \quad (26)$$

zodat:

$$\text{Im}(I) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(y; \omega_2) \sin(\omega_1 y) dy \quad (27)$$

Dit kan alleen maar nul zijn voor alle ω_1 , als G een even functie van y is (ω_2 speelt hier geen rol). Maar dit is in tegenspraak met de definitie van G . Op grond hiervan kunnen we stellen dat $\text{Im}(I)$ in het algemeen een functie van ω_1 is, niet overal nul. Op soortgelijke manier is, na definitie van een even functie i.p.v. (26), aan te tonen dat $\text{Re}(I)$ in het algemeen niet overal nul is.

Dispersie als gevolg van relaxatieverschijnselen is op de volgende wijze aanschouwelijk te maken. Stel dat we een golfpakketje door een medium laten lopen, dat voor een bepaalde mode sterke dissipatie vertoont (fig. 1). Terwijl het pakketje zich voortplant, vermindert de amplitude-bijdrage van die bepaalde mode. Na voldoende lange tijd zal die component verdwenen zijn. Stel nu dat het medium naast deze dissipatie geen dispersie zou vertonen. Dan zou het golfpakketje er op den duur uit gaan zien als het oorspronkelijke pakketje minus de gedissipeerde mode (fig. 2 en fig. 3). Echter, trekken we van de oorspronkelijke golf de gedissipeerde mode af, dan krijgt het pakketje een kop en een staart die zich tot het oneindige uitbreiden. Dit is in strijd met de causaliteit, dus zullen de overgebleven harmonischen hun onderlinge faseverschillen zo moeten gaan afstellen, dat ten alle tijde de kop en de staart gecompenseerd worden.

fig. 1 Golfpakketje



fig. 2 Gedissipeerde mode



Fig. 3. Golfpakketje numerus gedissipeerde mode



We zien dus de dispersie-effecten bepaald worden door de schaal waarop de bewegingen plaatsvinden. Voor zeer lange golven^{*)} (met golflengte veel groter dan de dracht van de kern $K(y)$ en voor zeer langzame golven (met periode veel langer dan de duur van de relevante relaxatieverschijnselen) is de dispersie te verwaarlozen.

Tot slot zou ik willen wijzen op een toegankelijk artikel van J.R. Merrill^{**)}, waarin een BASIC-programma gegeven wordt om de evolutie van een willekeurige golfpuls onder een zelf in te voeren dispersierelatie te kunnen berekenen.

^{*)} - L.A. Ostrovskii, Shock waves and solitons (selected problems), Izv. Vuz. Radiofizika (Radiophysics and Quantumelectronics), 19 (5), 1976, pp 464-486, p 475.

^{**)} - J.R. Merrill, Waves in Dispersive media: another use of computers in introductory physics. Am. J. Physics, 39, 1971, pp 539-544.

1.5. Stelsel herleid tot één vergelijking via dispersierelatie

We laten in deze paragraaf zien hoe uit de dispersierelatie van een stelsel lineaire partiële differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten voor n velden $u_i(\vec{x}, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, één hogere orde partiële differentiaalvergelijking volgt voor elk van de velden u_i afzonderlijk.

Daartoe beschouwen we het stelsel:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + A_{ijp} \frac{\partial u_j}{\partial x_p} + \dots = 0 \quad (1)$$

coëfficiënten A_{ijp} etc. constant
 $i, j = 1, 2, \dots, n$; $p = 1, 2, 3$

Dit stelsel laat vlakke golven toe van de vorm:

$$u_j(\vec{x}, t) = \hat{u}_j e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

waarin ω als functie van \vec{k} gegeven wordt door:

$$\det (\delta_{ij} \omega - A_{ijp} k_p \dots) = 0 \quad (2)$$

Dit leidt in het algemeen tot n modes:

$$\omega = \omega_1(\vec{k}), \dots, \omega = \omega_n(\vec{k})$$

De algemene oplossing van het stelsel wordt gegeven door een som van Fourierintegralen:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \sum_s \int \vec{u}^{(s)}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_s(\vec{k})t)} \frac{dk}{(\sqrt{2\pi})^{3/2}} \quad (3)$$

De $\vec{u}^{(s)}(\vec{k})$, $s = 1, \dots, n$, worden bepaald uit n beginvoorwaarden. Vervolgens construeren we uit (2) de operator:

$$\hat{A} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_p} \right) = \det \left(\delta_{ij} \frac{\partial}{\partial t} + A_{ijp} \frac{\partial}{\partial x_p} + \dots \right) \quad (4)$$

en we laten deze werken op component $u_\alpha(\vec{x}, t)$.

We krijgen:

$$\begin{aligned}
 & \hat{A} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_p} \right) \cdot u_\alpha(\vec{x}, t) = \\
 & = \sum_s \int u_\alpha^{(s)}(\vec{k}) \hat{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_s(\vec{k})t)} \frac{dk}{(\sqrt{2\pi})^{3/2}} \\
 & = \sum_s \int u_\alpha^{(s)} \hat{A}(-i\omega_s, ik_p) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_s(\vec{k})t)} \frac{dk}{(\sqrt{2\pi})^{3/2}} \\
 & = \sum_s \int u_\alpha^{(s)}(\vec{k}) \det(-\delta_{ij}\omega_s \hat{i} + A_{ijp} \hat{i}k_p + \dots) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_s(\vec{k})t)} \frac{dk}{(\sqrt{2\pi})^{3/2}} \\
 & = 0, \tag{5}
 \end{aligned}$$

want $\omega_s(\vec{k})$ voldoet aan dispersierelatie (2).

We zien dus dat elk veld $u_\alpha(\vec{x}, t)$ voldoet aan de vergelijking:

$$\hat{A} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_p} \right) \cdot u_\alpha(\vec{x}, t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, n \tag{6}$$

Op deze manier is het dus mogelijk om een vergelijking voor één enkel veld te krijgen terwijl de bewerkelijke methode van differentiëren en elimineren in het stelsel vermeden wordt. In het algemeen is het echter niet mogelijk om een stelsel differentiaalvergelijkingen terug te brengen tot één enkele differentiaalvergelijking van hogere orde.*)

*) - R. Courant & D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik II, par. 2, Heidelberger Taschenbücher, Springer 1968.

II. NIET-LINEAIRE GOLFVOORTPLANTING

2.1. Inleiding

In het vorige hoofdstuk zijn we ingegaan op een belangrijk verschijnsel dat optreedt bij golfvoortplanting: de dispersie. Dit hoofdstuk zal gaan over enkele aspecten van een bepaalde klasse niet-lineariteiten in de golfvergelijkingen, om zodoende een beetje gevoel te krijgen voor niet-lineaire effecten. Veranderde in de lineaire theorie de golfvorm als gevolg van het doorlopend toenemen van de onderlinge faseverschillen tussen de samenstellende harmonischen, in de niet-lineaire theorie zal een golf ook een continue gedaantewisseling kunnen ondergaan. In dit laatste geval zou men kunnen zeggen dat de locale verandering afhankelijk is van de grootte van de golf ter plaatse. In de lineaire theorie heeft de aanwezigheid van de golf daarentegen geen invloed op de eigenschappen van het medium, die relevant zijn voor de voortplanting. Dit geldt meestal voor kleine amplitudes.

We zullen eerst laten zien dat de klasse van niet-lineariteiten die we bespreken verantwoordelijk is voor het opsteilen van één of meer flanken van een golf. Hierdoor vormt zich dan een schok en er kan zelfs meerduidigheid ontstaan. We zullen dit bespreken aan de hand van een aanschouwelijke constructie. Vervolgens laten we ook dispersie toe. In de literatuur treft men wel eens het argument aan dat het toevoegen van dispersie het opsteilen van een flank verhindert^{*)}. Dit hoeft echter niet altijd het geval te zijn. Seliger^{**)} heeft laten zien dat onder bepaalde voorwaarden, waaronder een voldoende asymmetrische golfvorm op het begintijdstip, in een systeem met niet-lineariteit en dispersie toch een schok kan ontstaan in een eindige tijd.

Een verschijnsel dat kan optreden als zowel dispersie als niet-lineariteit om de macht strijden, is het voorkomen van zogenaamde stationaire golven. Het uit-elkaar-lopen van de verstoring als gevolg van dispersie (want de samenstellende harmonischen hebben verschillende fasesnelheden) is in zo'n stationaire golf in evenwicht met de niet-lineariteit, die ernaar streeft één

^{*)} - B.B. Kadomtsev & V.I. Karpman, Nonlinear waves, Sov. Phys. Usp. 14 (1), 1971, pp. 40-60, par. 3.1.

^{**)} - R.L. Seliger, A note on the breaking of waves, Proc. Roy. Soc. A 303, 1968, pp. 493-496.

of meer flanken van de golf te laten opsteilen. Het resultaat is een golfoplossing, die een functie is van $(x-ct)$, waarin c de voortplantingssnelheid is, en deze golf behoudt zijn vorm.

De aandacht, die gegeven wordt aan deze speciale oplossingen, berust op het volgende. In de eerste plaats transformeren deze stationaire golven de partiële differentiaalvergelijking tot een gewone differentiaalvergelijking. Deze laatste is dan in het algemeen gemakkelijker op te lossen. In de tweede plaats ontwikkelen zich in veel gevallen stationaire golven uit een beginverstoring tijdens een niet-stationair proces^{*)}, zodat er bepaalde informatie gaat zitten in deze speciale oplossingen.

We maken in dit hoofdstuk aannemelijk dat de door ons bekeken klasse van niet-lineaire, dispersieve, golfvergelijkingen altijd stationaire oplossingen hebben in de vorm van periodieke golfreinen, die spiegelsymmetrisch zijn in elk van hun extrema. Een limietgeval hiervan is de golf, die bestaat uit één enkele symmetrische puls. Deze zogenaamde solitaire golf ontstaat als we de golflengte van de periodieke golfrein naar oneindig kunnen laten gaan. Vervolgens laten we zien dat alleen onder bepaalde voorwaarden, opgelegd aan de vorm van de niet-lineaire term en de dispersie-term, we van een stationaire oplossing weer een andere stationaire oplossing kunnen maken door middel van schaaltransformaties. De Korteweg-de-Vries-vergelijking is een voorbeeld van een klasse van golfvergelijkingen waarvoor dit mogelijk is. Tenslotte kijken we naar de herkomst van een handige grootheid bij het rekenen aan de periodieke, stationaire golfreinen: het karakteristieke aantal modes (degree of anharmonicity) dat zo'n trein bevat.

Het is misschien wel leuk om te weten dat men experimenteel kan werken aan de niet-lineaire golfvoortplanting^{**)}. Een breed scala aan mogelijkheden wordt geboden door elektronische transmissielijnen, die bestaan uit een reeks identieke secties. Door in zo'n sectie variabele weerstanden, inducties en capaciteiten op te nemen, kan men dan de gewenste dispersie en niet-lineariteit instellen, In feite wordt er dan een speciale analoge computer

^{*)} - B.B. Kadomtsev & V.I. Karpman, Nonlinear waves, pp. 45-46, Sov. Phys. Usp. 14 (1), 1971, pp. 40-60.

^{**)} - L.A. Ostrovskii, Shock waves and solitons (selected problems), Izv. VUZ. Radiofizika (Radiophysics and Quantumelectronics), 19 (5), 1976, pp. 464-486; p. 482.

geconstrueerd om er de vaak zeer moeilijke differentiaalvergelijkingen mee te lijf te kunnen gaan.

2.2. Het opstellen van een flank van een golf

De golfoplossing van een lineaire vergelijking wordt gegeven d.m.v. een Fourierintegraal:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \quad (1)$$

Voor de helling van zo'n golf geldt dan:

$$f_x(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ikF(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \quad (2)$$

We maken nu de volgende afschatting:

$$\begin{aligned} |f_x(x, t)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} ikF(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |kF(k)| dk = M \end{aligned} \quad (3)$$

Omdat M onafhankelijk is van t blijft de helling van een flank ten alle tijde liggen tussen $-M$ en M . Wordt de evolutie van een golf beschreven door een lineaire vergelijking, dan kan door dispersie alléén geen golfbreking of een schok ontstaan.

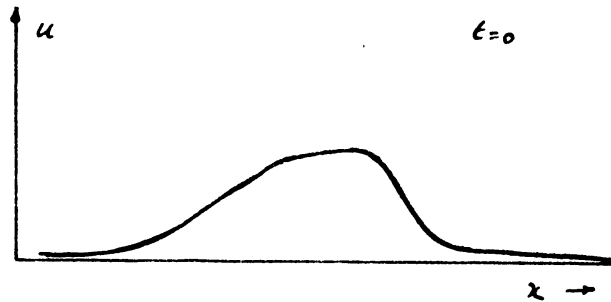
Vervolgens bekijken we een golfvergelijking met alleen een niet-lineariteit:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

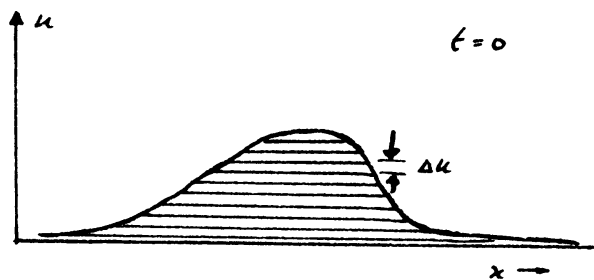
welke te schrijven is als:

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{op} \quad \frac{dx}{dt} = f(u) \quad (5)$$

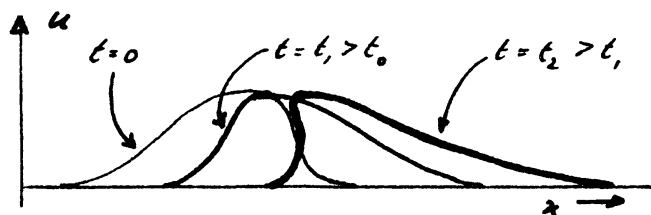
We kunnen dit lezen als volgt: Elke u -waarde heeft een eigen snelheid: $f(u)$. Lopen we met deze snelheid mee, dan blijven we steeds dezelfde u -waarde zien. Met een prentje is dit aanschouwelijk te maken. We tekenen daartoe $u(x, t)$ op het tijdstip $t = 0$: de beginwaarde $u(x, 0)$:



Nu verdelen we het oppervlak van $u(x,0)$ in horizontale reepjes ter breedte Δu :



De grafiek van $u(x,\Delta t)$ construeren we uit $u(x,0)$ door elk reepje, dat één u -waarde representeert, een eindje $f(u)\Delta t$ in horizontale richting te verschuiven. We nemen als voorbeeld een geval met $f(u) > 0$, $f'(u) < 0$, lagere u -waarden gaan sneller naar rechts dan hogere:



We zien aan de figuur dat vroeg of laat de achterste flank een helling krijgt die oneindig wordt: er vormt zich een schok. In het stadium hierop volgend wordt de golf meerwaardig. Als dit fysisch niet acceptabel is kan men een zgn. zwakke oplossing toelaten, die discontinue sprongen kan maken^{*)}.

^{*)} - G.B. Whitham, Linear and nonlinear waves, Wiley 1974, par. 2.7.

De constructie van de verschuivende reepjes toont aan dat de oppervlakte onder de kromme constant blijft:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) dx = 0 \quad (6)$$

Voor golfvergelijking (4) geldt algemeen:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u^m(x,t) dx = 0 \quad (7)$$

Bewijs:

We vermenigvuldigen (4) met u^k : $k \neq -1$

$$u^k u_t + u^k f(u) u_x = 0 \quad (8)$$

Dit resultaat is te herschrijven als:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{k+1} u^{k+1} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^u (u')^k f(u') du' \right) = 0 \quad (9)$$

Integreren over de x-as, waarbij we aannemen dat u naar nul gaat als $|x|$ naar oneindig gaat, levert het gestelde.

Einde bewijs.

Voor oplossingen van golfvergelijking (4) geldt ook dat het zwaartepunt van een golf:

$$\langle x \rangle = \frac{\int x u^2 dx}{\int u^2 dx} \quad (10)$$

net als bij lineaire golven met dispersie, eenparig beweegt met snelheid:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x \rangle &= \frac{2 \int x u u_t dx}{\int u^2 dx} = \frac{2 \int \left(\int_0^u (u')^k f(u') dy \right) y f(y) dy dx}{\int u^2 dx} = \\ &= \frac{\int F(u) dx}{\int u^2 dx} \end{aligned} \quad (11)$$

Het is eenvoudig na te gaan dat geldt:

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle = 0 \quad (12)$$

Het bewijs hiervan laten we achterwege.

Tenslotte kijken we naar een algemene golfvergelijking met niet-lineariteit en dispersie:

$$u_t + f(u)u_x + \int K(x-\zeta) u_\zeta(\zeta, t) d\zeta = 0 \quad (13)$$

De integraalterm, die voor de dispersie zorg draagt, is uitvoerig besproken in par. 1.4. "De achtergronden van dispersie".

In de appendix B bij deze paragraaf leiden we aan de hand van een artikel van R.L. Seliger^{*)} af, dat opsteilen van een flank tot oneindig mogelijk is in een eindige tijd, onder de volgende voorwaarden:

Als f en K in (3) zodanig zijn dat:

$$\cdot \quad \frac{df}{du} \geq B > 0 \text{ voor alle } u$$

$$\cdot \quad K(y) \text{ een even, positieve functie is van zijn argument, monotoon dalend voor positieve } y\text{-waarden}$$

en indien geldt dat

$$M_0 + m_0 < -\frac{2K(0)}{B}$$

waarin M_0 het maximum voorstelt van de beginwaarde $u_x(x,0)$ en m het minimum van $u_x(x,0)$, dan treedt er een oneindig steile flank op binnen een tijdsspanne van:

$$\Delta t = |m_0 B + K(0)|^{-1} \quad (14)$$

De bovenstaande voorwaarden zijn niet de scherpste, zij zijn echter wel voldoende.

We zien dus dat, bij een voldoende asymmetrische golfvorm op het begintijdstip, de niet-lineaire effecten de dispersie overvleugelen, in tegenstelling tot wat er wel eens wordt beweerd^{**)}, dat dispersie wordt ingevoerd in een niet-lineaire golfvergelijking om het opsteilen in toom te houden.

^{*)} - R.L. Seliger, A note on the breaking of waves, Proc. Roy. Soc. A 303, 1968, pp. 493-496.

^{**)} - B.B. Kadomtsev & V.I. Karpman, Nonlinear waves, Sov. Phys. Usp. 14 (1), 1971, pp. 40-60, par. 3.1.

2.3. Stationaire golfoplossingen voor niet-lineaire vergelijking met dispersie

De gelineariseerde golfvergelijking met constante coëfficiënten, zonder dissipatie, hebben altijd oplossingen in de vorm van zgn. stationaire golven. Dit zijn golven die zich met constante snelheid c voortplanten zonder dat het golfprofiel van vorm verandert. Zoals bekend zijn dit de golven gegeven door de uitdrukkingen:

$$u = A \sin k(x-ct) \quad \text{of} \quad u = \operatorname{Re} A e^{ik(x-ct)}$$

Substitutie van de complexe e -machten in de gelineariseerde vergelijking transformeert de partiële differentiaalvergelijking tot een algebraïsche vergelijking.

Aan de hand van de volgende, vrij algemene, niet-lineaire golfvergelijking met dispersie:

$$u_t + f(u)u_x + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\zeta)u_\zeta(\zeta, t)d\zeta = 0 \quad (1)$$

waarin: $K > 0$, $K(y) = K(-y)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(y)dy < \infty$$

laten we zien dat ook hier stationaire oplossingen bestaan in de vorm:

$$u = P(x-ct) \quad (2)$$

met zeer speciale eigenschappen. We merken nog op dat substitutie van (2) in (1) leidt tot een gewone dv.

Een stationaire golf in de vorm van één enkele puls wordt een solitaire golf (éénling) genoemd. Als een solitaire golf de speciale eigenschap heeft zijn oorspronkelijke gedaante weer terug te krijgen, na niet-lineair gewisselwerkt (gebotst) te hebben met een andere solitaire golf, dan wordt deze "soliton" genoemd. De uitgang "-on" duidt dan op het deeltjeskarakter.

We gaan in het onderstaande de volgende aspecten van stationaire golven bekijken, omdat informatie daarover vrij gemakkelijk aan vergelijking (1) te ontzutselen is:

We maken aannemelijk dat (1) stationaire-golfoplossingen heeft in de vorm van periodieke golftreinen, spiegelsymmetrisch om elk extremum. Een solitaire golf kan dan beschouwd worden als een limietgeval hiervan als de golflengte naar oneindig gaat.

Slechts als (1) een bepaalde niet-lineariteit en een bepaalde dispersierelatie heeft, zijn stationaire golven te genereren d.m.v. schaaltransformaties.

Er bestaat een handige grootheid bij het rekenen aan periodieke, stationaire golven: het effectieve aantal modes.

2.4. Speciale stationaire golfoplossingen

We weten dat, om reële dispersie te kunnen krijgen, de kern K van integraal (1) uit par. 2.3. een even functie van zijn argument moet zijn. Hiervan maken we gebruik om aannemelijk te maken dat (1) in zijn algemeenheid stationaire golfoplossingen kan hebben van een bepaalde vorm. Een volledig existentiebewijs hebben we helaas niet kunnen geven.

We substitueren (2) in (1) en krijgen:

$$P'(x-ct) \{f(P)-c\} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\zeta)P'(\zeta-ct)d\zeta = 0 \quad (3)$$

Het is geen beperking als we in (3) $t=0$ stellen. We nemen verder aan dat $P(x)$ ergens een extremum heeft, stel op $x = x_0$:

$$P_x(x = x_0) = 0 \quad (4)$$

In dit punt $x = x_0$ krijgt (3) de vorm:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x_0-\zeta)P_\zeta(\zeta) d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta)P_\zeta(x_0+\zeta)d\zeta = 0 \quad (5)$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van $K(y) = K(-y)$.

Ongeacht de vorm van K , zolang dit maar een even functie is van zijn argument, wordt aan (5) voldaan door een klasse van functies P , waarvoor geldt:

$$P_\zeta(x_0-\zeta) = -P_\zeta(x_0+\zeta) \quad (6)$$

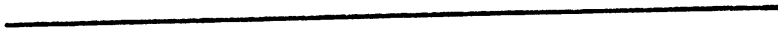
Deze klasse bevat dus functies die even zijn rond hun extrema:

$$P(x_0-\zeta) = P(x_0+\zeta) \quad (7)$$

We merken op dat dit niet de enige functies zijn die aan de orthogonaliteitsrelatie (5) hoeven te voldoen. Maar omdat we op dit punt verder geen informatie hebben over K , behalve dat het een even functie is, kunnen we over andere klassen dan (7) geen uitspraak doen.

Laten we er nu eens van uitgaan dat (3) inderdaad zulke oplossingen heeft, die spiegelsymmetrisch zijn rond elk van hun extrema. Voor deze klasse komen dan alleen de onderstaande vormen in aanmerking:

- de constante, als triviale oplossing:



- de periodieke golftrain met spiegelsymmetrische puls:



- de solitaire golf, die uit de golftrain ontstaat als de golflengte naar oneindig gaat:



Als we het bovenstaande nu aannemen, kunnen we het volgende gaan doen. We kunnen gaan proberen een oplossing $P(x)$ te construeren van de vergelijking:

$$cP_x(x) - \int K(\zeta)P_x(x-\zeta)d\zeta = f(P)P_x(x) \quad (8)$$

met

$$K(y) = K(-y), \quad f(0) = 0$$

door een zgn. Stokes-ontwikkeling^{*)} te gebruiken.

^{*)} - G.B. Whitham, Linear and nonlinear waves, par. 13.13, Wiley 1974.

We stellen dan:

$$P(x) = \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_3 + \varepsilon^4 P_4 + \dots$$

$$c = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \varepsilon^3 c_3 + \dots \quad (9)$$

en stoppen dit vervolgens in (8), waarna we deze vergelijking uit elkaar rafelen in zijn verschillende ε^n -bijdragen. Dit leidt dan tot een hiërarchie van differentiaalvergelijkingen, waarbij de bronterm van een hogere orde bestaat uit combinaties van oplossingen van de lagere ordes. De ε -ontwikkeling van c , de fasesnelheid van de stationaire, niet-lineaire golf, is nodig om speelruimte te hebben ten einde seculiere termen in de oplossing te vermijden.

In de appendix C bij deze paragraaf worden enig rekenwerk en boekhoudkundige manipulaties vermeld, waarvan het resultaat de onderstaande differentiaalvergelijkingen zijn voor P_1 t/m P_5 :

$$o(\varepsilon) : c_0(P_1)_x - \int K(\zeta)(P_1(x-\zeta))_x d\zeta = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} o(\varepsilon^2) : c_0(P_2)_x - \int K(\zeta)(P_2(x-\zeta))_x d\zeta = \\ = -c_1(P_1)_x + f'(0)P_1(P_1)_x \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} o(\varepsilon^3) : c_0(P_3)_x - \int K(\zeta)(P_3(x-\zeta))_x d\zeta = \\ = -c_1(P_2)_x - c_2(P_1)_x + f'(0)P_1(P_2)_x + \frac{1}{2}f''(0)P_1^2(P_1)_x + \\ + f'(0)P_2(P_1)_x \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} o(\varepsilon^4) : c_0(P_4)_x - \int K(\zeta)(P_4(x-\zeta))_x d\zeta = \\ = -c_1(P_3)_x - c_2(P_2)_x - c_3(P_1)_x + f'(0)P_1(P_3)_x + \\ + \frac{1}{2}f''(0)P_1^2(P_2)_x + f'(0)P_2(P_2)_x + \frac{1}{6}f'''(0)P_1^3(P_1)_x + \\ + f''(0)P_1P_2(P_1)_x + f'(0)P_3(P_1)_x \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
o(\epsilon^5) : c_0(P_5)_X - \int K(\zeta)(P_5(x-\zeta))_X d\zeta = \\
= -c_1(P_4)_X - c_2(P_3)_X - c_3(P_2)_X - c_4(P_1)_X + \\
+ f'(0)P_1(P_4)_X + \frac{1}{2}f''(0)P_1^2(P_3)_X + f'(0)P_2(P_3)_X + \\
+ \frac{1}{6}f'''(0)P_1^3(P_2)_X + f''(0)P_1P_2(P_2)_X + f'(0)P_3(P_2)_X + \\
+ \frac{1}{24}f''''(0)P_1^4(P_1)_X + \frac{1}{2}f'''(0)P_1^2P_2(P_1)_X + f''(0)P_1P_3(P_1)_X + \\
+ \frac{1}{2}f''(0)P_2^2(P_1)_X + f'(0)P_4(P_1)_X
\end{aligned} \tag{14}$$

Als we in (10) invullen:

$$P_1 = a_1 \cos kx \tag{15}$$

krijgen we een identiteit, mits we voor c_0 nemen de lineaire fasesnelheid (zie par. 1.4. "achtergronden van dispersie") behorende bij het golfgetal k :

$$c_0 = \int K(\zeta) \cos k\zeta d\zeta = c_0(k). \tag{16}$$

Essentieel hierbij is weer dat K even is, zodat integralen van de vorm:

$$\int K(\zeta) \sin k\zeta d\zeta$$

gelijk aan nul zijn.

De bronterm van (11), de vergelijking voor P_2 , luidt nu met (15):

$$\text{Bronterm} = c_1 a_1 k \sin(kx) - \frac{1}{2} f'(0) a_1^2 k \sin(2kx) \tag{17}$$

De eerste term in het rechterlid van (17) zal voor een bijdrage in P_2 zorgen van de vorm: $x \sin(kx)$, een zogenaamde seculiere bijdrage. Om dit te voorkomen stellen we:

$$c_1 = 0 \tag{18}$$

We vinden nu voor P_2 :

$$P_2 = \frac{1}{4} \frac{f'(0)a_1^2}{c_0(k) - c_0(2k)} \cos 2kx = a_2 \cos 2kx \quad (19)$$

mits voor het (vaste) golfgetal niet geldt:

$$c_0(k) = c_0(2k) \quad (20)$$

omdat anders de coëfficiënt a_2 niet te bepalen is (resonantie).

De bronterm van de vergelijking voor P_3 , (12), is via de bekende goniöformules:

$$\sin 3\theta = \sin 2\theta \cos \theta + \sin \theta \cos 2\theta$$

$$\sin \theta = \sin 2\theta \cos \theta - \sin \theta \cos 2\theta$$

te herleiden tot:

$$\begin{aligned} \text{Bronterm} = & \sin(kx) \left\{ c_2 a_1 - \frac{1}{2} a_1 a_2 f'(0) - \frac{1}{8} f''(0) a_1^3 \right\} k + \\ & - \sin(3kx) \left\{ \frac{3}{2} a_1 a_2 f'(0) + \frac{1}{8} a_1^3 f''(0) \right\} k \end{aligned} \quad (21)$$

Om seculiere bijdragen te vermijden nemen we:

$$c_2 = \frac{1}{2} a_2 f'(0) + \frac{1}{8} f''(0) a_1^2 \quad (22)$$

zodat van de bronterm alleen de $(\sin 3kx)$ -term resteert.

Voor P_3 vinden we zodoende zonder veel moeite:

$$P_3 = \frac{\left\{ \frac{1}{2} a_1 a_2 f'(0) + \frac{1}{24} a_1^3 f''(0) \right\}}{(c_0(k) - c_0(3k))} \cos 3kx = a_3 \cos 3kx \quad (23)$$

Ook hier mag de noemer niet gelijk nul worden voor de gekozen k -waarde.

We gaan door met de bronterm van (13), de vergelijking voor P_4 .

Deze bronterm is, met gebruikmaking van de voorgaande resultaten en soortgelijke goniöformules als hierboven, te transformeren tot:

$$\begin{aligned}
\text{Bronterm} &= \sin(kx) \cdot \{a_1 c_3\} k + \\
&+ \sin(2kx) \left\{ 2c_2 a_2 - a_1 a_3 f'(0) - \frac{1}{2} a_1^2 a_2 f''(0) - \frac{1}{24} a_1^4 f'''(0) \right\} k + \\
&+ \sin(4kx) \left\{ -2a_1 a_3 f'(0) - \frac{1}{2} a_1^2 a_2 f''(0) - a_2^2 f'(0) + \right. \\
&\left. - \frac{1}{48} a_1^4 f'''(0) \right\} k
\end{aligned} \tag{24}$$

De eerste term uit het rechterlid van (24) is verantwoordelijk voor de seculiere bijdrage, zodat we c_3 gelijk aan nul stellen:

$$c_3 = 0 \tag{25}$$

We zien nu dat de bijdrage aan P van de vierde orde in ϵ zowel een $\cos 2kx$ - als een $\cos 4kx$ -term bevat:

$$\begin{aligned}
P_4 &= \frac{\left(2c_2 a_2 - a_1 a_3 f'(0) - \frac{1}{2} a_1^2 a_2 f''(0) - \frac{1}{24} a_1^4 f'''(0) \right)}{2 \left(c_0(2k) - c_0(k) \right)} \cos 2kx + \\
&+ \frac{\left(2a_1 a_3 f'(0) + \frac{1}{2} a_1^2 a_2 f''(0) + a_2^2 f'(0) + \frac{1}{48} a_1^4 f'''(0) \right)}{4 \left(c_0(k) - c_0(4k) \right)} \cos 4kx \\
&= b_2 \cos 2kx + a_4 \cos 4kx
\end{aligned} \tag{26}$$

mits $c_0(k)$ maar ongelijk is aan $c_0(4k)$.

Tenslotte bepalen we P_5 . De bronterm van (14) is met de resultaten (26), (25), (23), (22), (19), (18), (16) en (15) en wat gestoei met gonioformules te herleiden tot:

Bronterm =

$$\begin{aligned}
&= \sin(kx) \left\{ a_1 c_4 - \frac{1}{2} a_1 b_2 f'(0) - \frac{1}{8} a_1^2 a_3 f''(0) - \frac{1}{2} a_2 a_3 f'(0) + \right. \\
&\left. - \frac{1}{12} a_1^3 a_2 f'''(0) - \frac{1}{192} f''''(0) a_1^5 - \frac{1}{4} a_2^2 a_1 f''(0) \right\} k +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin(3kx) \left\{ 3c_2 a_3 - \frac{3}{2} a_1 a_4 f'(0) - \frac{3}{2} a_1 b_2 f'(0) - \frac{3}{4} a_1^2 a_3 f''(0) + \right. \\
& + \frac{3}{16} a_1^3 a_2 f'''(0) - \frac{3}{8} a_1 a_2^2 f''(0) - \frac{3}{384} a_1^5 f''''(0) \left. \right\} k + \\
& + \sin(5kx) \left\{ -\frac{5}{2} a_1 a_4 f'(0) - \frac{5}{8} a_1 a_2^2 f''(0) - \frac{5}{2} a_2 a_3 f'(0) + \right. \\
& - \frac{5}{48} a_1^3 a_2 f'''(0) - \frac{5}{8} a_1^2 a_3 f''(0) - \frac{1}{384} f''''(0) a_1^5 \left. \right\} k \quad (27)
\end{aligned}$$

Noteren we voor het gemak deze bronterm door:

$$\text{Bronterm} = kB_1 \sin kx + kB_3 \sin 3kx + kB_5 \sin 5kx.$$

We moeten, om seculiere oplossingen te voorkomen, stellen dat B_1 gelijk aan nul moet worden. Dit legt c_4 vast:

$$\begin{aligned}
c_4 = & \frac{1}{2} b_2 f'(0) + \frac{1}{8} a_1 a_3 f''(0) + \frac{1}{2} \frac{a_2 a_3}{a_1} f'(0) + \\
& + \frac{1}{12} a_1^2 a_2 f'''(0) + \frac{1}{192} f''''(0) a_1^4 + \frac{1}{4} a_2^2 f''(0) \quad (28)
\end{aligned}$$

Voor P_5 vinden we nu:

$$\begin{aligned}
P_5 = & \frac{B_3}{3(c_0(3k) - c_0(k))} \cos 3kx + \frac{B_5}{5(c_0(5k) - c_0(k))} \cos 5kx \\
= & b_3 \cos 3kx + a_5 \cos 5kx \quad (29)
\end{aligned}$$

mits $c_0(5k)$ ongelijk is aan $c_0(k)$.

We hebben nu het volgende gevonden:

Er bestaan stationaire oplossingen van de vorm:

$$\begin{aligned}
P(y) = & \epsilon a_1 \cos ky + \epsilon^2 a_2 \cos 2ky + \epsilon^3 a_3 \cos 3ky + \\
& + \epsilon^4 (a_4 \cos 4ky + b_2 \cos 2ky) + \epsilon^5 (a_5 \cos 5ky + b_3 \cos 3ky) + \dots \quad (30)
\end{aligned}$$

waarin:

$$y = x - ct$$

en:

$$c = c_0(k) + \epsilon^2 c_2(k) + \epsilon^4 c_4(k) + \dots \quad (31)$$

De dispersierelatie (31) bevat naast het golfgetal k ook de amplitude a_1 ($c_2 \sim a_1^2$, $c_4 \sim a_1^4$ etc.).

Aan de cosinus-reeks zien we dat P een periodieke, om zijn extrema even, functie is (als de reeks convergeert). We merken ook op dat P geen Fourierreeks is van de vorm:

$$\sum \epsilon^n \alpha_n \cos knx$$

zoals Whitham^{*)} suggereert. P kan wel beschouwd worden als een Fourierreeks in $\cos(knx)$ -termen, maar dan wel met coëfficiënten, waarin verschillende machten van ϵ voorkomen. Evenzo kan P gezien worden als een Taylorreeks in ϵ , met coëfficiënten die gevormd worden uit een som van verschillende \cos -termen.

Met het bovenstaande hebben we aannemelijk gemaakt dat in principe de stationaire-golfoplossing in de vorm van een periodieke golftrein, symmetrisch om elk extremum, bestaat. Als we nu naar de solitaire golf toe willen, moeten we bekijken of er een zinvolle limiet bestaat voor P en c , indien we de golflengte naar oneindig laten gaan, ofwel het golfgetal k naar nul. Voor de Korteweg-de-Vries-vergelijking, een bijzonder geval van de door ons bekeken algemene golfvergelijking, bestaat deze limiet^{**)}.

De constructie met de Stokes-ontwikkeling (9) lukt niet als we een golfgetal \bar{k} hebben waarvoor geldt dat $c_0(\bar{k}) = c_0(n\bar{k})$. Dit kan erop wijzen dat periodieke golftreinen met zo'n golfgetal niet bestaan.

*) - G.B. Whitham, Linear and nonlinear waves, par. 13.13, Wiley 1974.

***) - V.I. Karpman, Nonlinear waves in dispersive media, 1975, Pergamon, par. 10, p 42.

2.5. Een voorwaarde voor de gelijkvormigheid van stationaire golven

We zullen in het volgende laten zien dat als

$$u = P(x-ct) \quad (14)$$

een oplossing is van (1) uit par. 2.3., in het algemeen niet hoeft te gelden dat:

$$u = \mu P\left(\frac{x - \gamma ct}{\Delta}\right) \quad \mu \neq 0, \gamma \neq 0, \Delta \neq 0 \quad (15)$$

weer een oplossing is. Dit houdt in dat stationaire golven in het algemene geval niet te genereren zijn d.m.v. schaaltransformaties.

We substitueren (15) in (1) met als resultaat:

$$-\frac{\gamma c}{\Delta} P'\left(\frac{x - \gamma ct}{\Delta}\right) + f\left(\mu P\left(\frac{x - \gamma ct}{\Delta}\right)\right) \frac{\mu}{\Delta} P'\left(\frac{x - \gamma ct}{\Delta}\right) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\zeta) \frac{\mu}{\Delta} P'\left(\frac{\zeta - \gamma ct}{\Delta}\right) d\zeta = 0 \quad (16)$$

Noteren we:

$$\frac{\zeta}{\Delta} = \xi \quad ; \quad \frac{x}{\Delta} = y \quad ; \quad \frac{\gamma t}{\Delta} = \tau \quad (17)$$

dan kunnen we (16) herschrijven als:

$$-\gamma c P'(y - c\tau) + f(\mu P(y - c\tau)) P'(y - c\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} \Delta K(\Delta(y - \xi)) P'(\xi - c\tau) d\xi = 0 \quad (18)$$

We beperken ons niet als we $\tau = 0$ stellen:

$$-\gamma c P'(y) + f(\mu P(y)) P'(y) + \int_{-\infty}^{\infty} \Delta K(\Delta(y - \xi)) P'(\xi) d\xi = 0 \quad (19)$$

Vervolgens zetten we (19) en (3) (met $t = 0$) onder elkaar om voorwaarden te kunnen bepalen waaronder gelijkvormigheid optreedt:

$$f(\mu P) P'(x) - \gamma c P'(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \Delta K(\Delta(x - \zeta)) P'(\zeta) d\zeta = 0 \quad (20)$$

$$f(P) P'(x) - c P'(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \zeta) P'(\zeta) d\zeta = 0 \quad (21)$$

We weten dat P een oplossing van (21) is en we vragen ons af wanneer P ook een

oplossing is van (20). Een voorwaarde daarvoor is bijvoorbeeld:

$$\begin{cases} f(\mu P) - \gamma c = A(f(P) - c) & \text{voor alle } P & (22) \\ \Delta K(\Delta z) = A K(z) & \text{voor alle } z & (23) \end{cases}$$

waarin A een constante is.

Herschreven:

$$\begin{cases} f(\mu P) = A f(P) + c(\gamma - A) & \text{voor alle } P & (24) \\ K(\Delta z) = \frac{A}{\Delta} K(z) & \text{voor alle } z & (25) \end{cases}$$

In de appendix D wordt aangetoond dat voor f dan geldt:

$$f(P) = BP^\alpha + \frac{c(\gamma - \mu^\alpha)}{1 - \mu^\alpha} \quad ; \quad A = \mu^\alpha \quad (26)$$

en dat voor K de volgende oplossing acceptabel is vanwege de integreerbaarheid:

$$K(z) = D_2 \delta''(z) \quad ; \quad A = \Delta |\Delta| \quad ; \quad D_2 \text{ willekeurige constante} \quad (27)$$

$$K(z) = D_4 \delta'''(z) \quad ; \quad A = |\Delta| \Delta^3 \quad ; \quad D_4 \text{ willekeurige constante}$$

etc.

We merken op dat $K(x) = \delta(x)$ niet in aanmerking komt, omdat deze kern geen dispersie vertoont. De stationaire golven die in dit hoofdstuk worden beschouwd, bestaan dankzij het evenwicht tussen niet-lineariteit en dispersie. Voor de gegeven f- en K-classes (26) resp. (27) geldt dat de stationaire golven in elkaar kunnen worden getransformeerd d.m.v. schaaltransformaties. De Korteweg-De Vries-vergelijking:

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (28)$$

is een bijzonder geval van het bovenstaande met:

$$f(P) = P \quad , \quad K(z) = \beta \delta''(z) \quad (29)$$

2.6. Het karakteristieke aantal modes van een periodieke golfrein

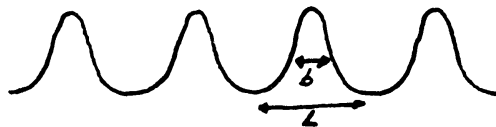
Een grootheid, die in de literatuur^{*)} ten tonele wordt gevoerd bij de beschrijving van niet-lineaire, periodieke golfreinen, is het zogenaamde karakteristieke aantal modes (degree of anharmonicity). De periodieke golf kan ontwikkeld worden in een Fourierreeks

$$P(x-ct) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ink_0(x-ct)} \quad (1)$$

waarin

$$k_0 = \frac{2\pi}{L}, \quad L = \text{golflengte} \quad (2)$$

De rij a_n wordt het spectrum genoemd. De breedte van het spectrum is een maat voor het aantal modes dat effectief meedoet. In het geval dicht bij het lineaire zullen de a_n snel afnemen bij groeiende $|n|$. Een sterk niet-lineaire, periodieke golf zal een breder spectrum hebben: de a_n zullen te verwaarlozen zijn als $|n| > N \gg 1$ voor zekere N . Een solitaire golf ($L \rightarrow \infty$) zal onaftelbaar oneindig veel modes nodig hebben om beschreven te worden: $N \rightarrow \infty$. De grootheid N kan handig zijn bij stabiliteitsanalyses en bij het werken met benaderingen. In het onderstaande zullen we laten zien dat een maat voor N is: de golflengte L gedeeld door de breedte b van een puls:



We gaan als volgt te werk. Het spectrum a_n wordt gevonden uit

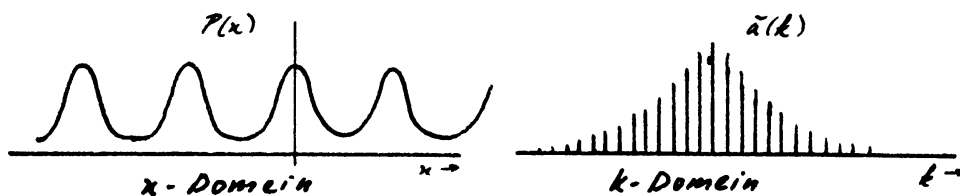
$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L} P(x) e^{ik_0 nx} dx = \tilde{a}(nk_0) = \tilde{a}(k), \quad k := nk_0 \quad (3)$$

*) - G.M. Zaslavskii, Nonlinear waves and their interaction, Sov. Phys. Usp. 16 (6), 1974, pp 761-776.
 - G.M. Zaslavskii & N.N. Filonenko, Kinetics of nonlinear waves in dispersive media, Sov. Phys. JETP 30 (4), 1970, pp 666-681.

We beperken ons niet als we op $t = 0$ de top van de puls in $x = 0$ leggen, zodat de golf trein symmetrisch rond $x = 0$ ligt. Hierdoor worden de a_n reëel (we kijken voor het gemak naar een symmetrische golf trein):

$$a_n = a_{-n} \quad , \quad a_n \text{ reëel} \quad (4)$$

De periodieke golf trein heeft een discreet spectrum (3), waarin de voorkomende k -waarden equidistant gelegen zijn op de k -as met onderlinge afstand k_0 :



Als we de golflengte L laten toenemen, wordt het discrete spectrum dichter: er bevinden zich dan meer k -waarden, welke een bijdrage leveren, op een k -eenheid. Indien we nu één periode uit de golf trein isoleren en daarvan de continue Fouriergetransformeerde berekenen, vinden we

$$a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L} P(x) e^{ikx} dx \quad (5)$$

We merken op dat de continue transform (5), op een schaalfactor na, de omhullende is van de discrete transform (3).

Een maat voor de breedte van een puls in het x -domein kan zijn

$$\Delta x: \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (6)$$

waarin

$$\langle f \rangle = \frac{\int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L} P^2(x) f(x) dx}{\int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L} P^2(x) dx} \quad (7)$$

De breedte van het spectrum heeft een soortgelijke vorm:

$$\Delta k: = \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2} \quad (8)$$

met

$$\langle h \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h(k) a(k) a^*(k) dk}{\int_{-\infty}^{\infty} a(k) a^*(k) dk} \quad (9)$$

Tussen Δx en Δk bestaat de relatie^{*)}:

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2} \quad (10)$$

Binnen Δk bevinden zich M modes:

$$M = \frac{\Delta k}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)} = \frac{L}{2\pi} \Delta k \quad (11)$$

Met (10) vinden we voor M een onderste grens

$$M \geq \frac{L}{4\pi\Delta x} \quad (12)$$

Kiezen we nu in (1) $|n| \leq N$, met N:

$$N = \frac{L}{\Delta x} \quad (13)$$

dan voldoen we zeker aan (12) en hebben we een anschouwelijke maat voor het aantal modes dat effectief meedoet.

^{*)} - A. Messiah, Quantummechanics volume 1, 1965, Ch IV, par.8, North-Holland.

III. HET HAMILTONFORMALISME

3.1. Inleiding

Het gedrag van golven wordt vaak beschreven door partiële differentiaalvergelijkingen, die men slechts zeer moeizaam of helemaal niet kan oplossen. Men neemt daarom vaak zijn toevlucht tot benaderingen, zoals het lineariseren of de meerschalenmethode, om toch iets te weten te komen over het golfgedrag. Een andere aanpak bij het zoeken naar informatie over het dynamische systeem (de golf) is mogelijk als men weet dat het beschouwde systeem Hamiltons is. Een systeem is Hamiltons als zijn bewegingsvergelijkingen een bepaalde structuur vertonen en afgeleid kunnen worden uit een functionaal (de Hamiltoniaan). Door van deze structuur gebruik te maken, kunnen soms eigenschappen gevonden worden, zoals behoudswetten en stabiliteitscriteria, zonder de oplossingen van de bewegingsvergelijkingen expliciet te kennen. In dit hoofdstuk zullen we enkele punten van dit Hamiltonformalisme naar voren halen, meer om de gedachte te kunnen bepalen dan om rigoreus te zijn. We zullen dan ook laten zien dat de door ons al eerder besproken, vrij algemene, golfvergelijking de bewegingsvergelijking is van een Hamiltons systeem en er een paar behouden grootheden voor afleiden.

3.2. Definities en notatie voor het Hamiltonformalisme

We komen er niet onderuit om heel formeel een aantal zaken op te schrijven:

We beschouwen een vectorruimte V , waarop een inproduct is gedefinieerd:

$$u \in V, v \in V \quad : \quad (u, v) = (v, u) \quad (1)$$

Ook hebben we een lineaire operator A , die V in zichzelf afbeeldt:

$$A : V \rightarrow V \quad (2)$$

en die bovendien antisymmetrisch is:

$$(u, Av) = - (v, Au) \quad (3)$$

We kunnen bij de bovenstaande definities denken aan bijvoorbeeld de ruimte V van alle reële, oneindig vaak differentieerbare functies $f(x)$, die integreerbaar zijn over de reële as. Als inproduct nemen we:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) v(x) dx \quad (4)$$

en voor A kiezen we:

$$A = - \frac{d}{dx} \quad (5)$$

Deze operator is antisymmetrisch:

$$(u, Av) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot - \frac{dv}{dx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} v(x) \frac{du}{dx} dx = - (v, Au) \quad (6)$$

Verder voeren we een functionaal H in, die V afbeeldt op de reële getallen:

$$H : V \rightarrow \mathbb{R} \quad (7)$$

Aansluitend bij het bovengenoemde voorbeeld kan men denken aan:

$$H[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{6} u^3(x) - \frac{1}{2} \beta u^2(x) \right) dx \quad (8)$$

Een functionaal H heet continu in u als geldt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H[u + \varepsilon f] = H[u] \quad (9)$$

waarbij aan f bepaalde eisen kunnen zijn opgelegd, bijvoorbeeld: f gaat naar nul in het oneindige en is kwadratisch integreerbaar.

H heet differentieerbaar in u als we kunnen schrijven:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H[u + \varepsilon f] - H[u]}{\varepsilon} = (f, \left(\frac{\delta H}{\delta u}\right)) \quad (10)$$

We zien dat het rechterlid lineair is in f .

De grootheid $\left(\frac{\delta H}{\delta u}\right)$ wordt de functionaalafgeleide van H in u genoemd, en heeft het karakter van een gradiënt, terwijl het rechterlid van (10) de vorm heeft van een richtingsafgeleide.

De functionaalafgeleide van (8) volgt als we definitie (10) uitschrijven:

$$\begin{aligned} H[u + \varepsilon f] - H[u] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{6}(u + \varepsilon f)^3 - \frac{1}{2}\beta(u_x + \varepsilon f_x)^2 - \left(-\frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{2}\beta u_x^2\right) \right) dx = \\ &= \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}u^2 f - \beta u_x f_x \right) dx + o(\varepsilon^2) = \\ &= \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}u^2 + \beta u_{xx} \right) f dx + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (11)$$

waarbij we aan f de eis opgelegd hebben dat deze in het oneindige naar nul gaat. De functionaalafgeleide is nu:

$$\left(\frac{\delta H}{\delta u}\right) = \frac{1}{2}u^2 + \beta u_{xx} \quad (12)$$

Met de definitie (10) is eenvoudig na te gaan hoe de produkt- en kettingregel eruit moeten zien.

Met de bovenstaande definities en notatie kunnen we aan de slag. Een dynamisch systeem wordt een Hamiltons systeem genoemd als de bewegingsvergelijking daarvan in de volgende structuur te vangen is:

$$u_t = A \cdot \left(\frac{\delta H}{\delta u} \right) \quad (13)$$

waarin H de Hamiltoniaan van het systeem wordt genoemd.

Als we het bovengenoemde voorbeeld, gegeven in de uitdrukkingen (8) en (5), uitwerken, krijgen we de Korteweg-de-Vries-vergelijking:

$$u_t = -uu_x - \beta u_{xxx} \quad (14)$$

Een functionaal F, expliciet onafhankelijk van de tijd:

$$F : V \rightarrow \mathbb{R} \quad (15)$$

is een behouden grootte voor oplossingen van (13) die in het oneindige snel genoeg naar nul gaan, als geldt:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[u + \epsilon u_t] - F[u]}{\epsilon} = \\ &= \left(u_t, \frac{\delta F}{\delta u} \right) = \left(A \frac{\delta H}{\delta u}, \frac{\delta F}{\delta u} \right) = - \left(\frac{\delta H}{\delta u}, A \frac{\delta F}{\delta u} \right) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

De uitdrukking:

$$\left(\frac{\delta H}{\delta u}, A \frac{\delta F}{\delta u} \right)$$

wordt de Poissonhaak van H en F genoemd en bondig genoteerd als:

$$\left(\frac{\delta H}{\delta u}, A \frac{\delta F}{\delta u} \right) = [H, F] = - [F, H] \quad (17)$$

We zien dat als een expliciet tijdonafhankelijk functionaal een behouden grootte is, dat dan zijn Poissonhaak met de Hamiltoniaan gelijk is aan nul. Als de Hamiltoniaan H zelf de tijd niet expliciet bevat, is deze ook behouden, zoals meteen blijkt uit (17).

Omdat de Poissonhaak de volgende eigenschap heeft:

$$[[A,B],C] + [[C,A],B] + [[B,C],A] = 0 \quad , \quad (18)$$

(de Jacobi-regel), kan men in principe uit twee behouden grootheden een derde construeren:

Als F en G behouden zijn:

$$[F,H] = 0 \quad \text{en} \quad [G,H] = 0$$

volgt uit (18) dat de Poissonhaak van F en G ook behouden blijft:

$$[[F,G],H] = 0 \quad (19)$$

Dit levert de mogelijkheid om een hele ladder van bewegingsconstanten te vinden. In de praktijk moet men echter met niet al te veel optimisme aan de ladder beginnen omdat deze toch vroeg of laat afbreekt.

3.3. De golfvergelijking als Hamiltonse bewegingsvergelijking

In de vorige hoofdstukken hebben we de volgende golfvergelijking al besproken:

$$u_t + f(u) u_x + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\zeta) u_{\zeta}(\zeta, t) d\zeta = 0 \quad (1)$$

We nemen aan dat weer geldt:

$$K(y) = K(-y) \quad , \quad \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(y) dy \right| < \infty \quad (2)$$

$$f(0) = 0$$

Als we nu definiëren:

$$F(u) = \int_0^u f(y) dy \quad (3)$$

dan kunnen we (1) schrijven als:

$$u_t = - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ F(u) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\zeta) u(\zeta, t) d\zeta \right\} \quad (4)$$

Met de in de vorige paragraaf gegeven definities kan men nagaan dat de uitdrukking tussen accolades in (4) de functionaalafgeleide is van de functionaal:

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^{u(x)} F(y) dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\zeta) u(\zeta, t) u(x, t) d\zeta \right\} dx \quad (5)$$

zodat:

$$u_t = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta H}{\delta u} \right) \quad (6)$$

De operator $-\frac{\partial}{\partial x}$ is een antisymmetrische operator:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot - \frac{d}{dx} g(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot - \frac{d}{dx} h(x) dx \quad (7)$$

mits h en g naar nul gaan in het oneindige.

We hebben nu bewezen dat (1) een Hamiltons systeem beschrijft.

Omdat de functionaal H , de Hamiltoniaan, expliciet tijdonafhankelijk is,

hebben we de behoudswet (zie par. 3.2.):

$$\frac{d}{dt} H = 0 \quad (8)$$

Nemen we vervolgens de functionaal:

$$G[u] = \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx \quad (9)$$

waarvoor geldt:

$$\frac{\delta G}{\delta u} = 1 \quad (10)$$

dan volgt meteen via de Poissonhaak met H:

$$\frac{d}{dt} G = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx = 0 \quad (11)$$

Nemen we de functionaal:

$$J[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 \, dx \quad (12)$$

met de afgeleide:

$$\left(\frac{\delta J}{\delta u} \right) = u \quad (13)$$

De Poissonhaak van J met H luidt nu:

$$\begin{aligned} [J, H] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\delta J}{\delta u} \right) \cdot - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta H}{\delta u} \right) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_x \left(\frac{\delta H}{\delta u} \right) \, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_x F(u) \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, t) K(x-\zeta) u(\zeta, t) \, dx d\zeta = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) K_x(x-\zeta) u(\zeta, t) \, dx d\zeta = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

waarin de laatste uitdrukking gelijk aan nul is dankzij het oneven zijn van $K_x(x)$. We hebben dus:

$$\frac{d}{dt} J = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 \, dx = 0 \quad (15)$$

Een andere bewegingsconstante vinden we als volgt:

We schrijven de golfvergelijking als:

$$u_t + F(u)_x + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\zeta) u(\zeta, t) d\zeta = 0 \quad (16)$$

Differentiëren naar t geeft:

$$u_{tt} + F(u)_{xt} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\zeta) u_t(\zeta, t) d\zeta = 0 \quad (17)$$

Dit resultaat integreren we een keer over x:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{-\infty}^{\infty} u dx + \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} F(u)_x dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\zeta) u_t(\zeta, t) d\zeta dx = 0 \quad (18)$$

De eerste term is gelijk aan nul, zie (11). De tweede term kan ook gelijk aan nul gesteld worden als we eisen dat het veld u in het oneindige constant (gelijk nul) wordt.

We hebben dus nu de bewegingsconstante Q:

$$\frac{d}{dt} Q = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\zeta) u_\zeta(\zeta, t) d\zeta dx = 0 \quad (19)$$

Met de in de vorige paragraaf vermelde Jacobi-regel volgt dan met (15) de volgende behoudswet:

$$\frac{d}{dt} [Q, J] = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(x-\zeta) u(\zeta, t) d\zeta dx = 0 \quad (20)$$

Met (20) en (15) is dan de ladder te construeren van de onderstaande behouden grootheden:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{nx}(x-\zeta) u(\zeta, t) d\zeta dx = 0 \quad (21)$$

De bovenstaande behoudswetten gelden voor algemene F en algemene K. Bij een bepaalde keuze voor de niet-lineariteit en de dispersierelatie kan met gebruikmaking van hun specifieke eigenschappen gezocht worden naar meer bewegingsconstanten.

IV. HET LAGRANGE-FORMALISME

4.1. Inleiding

Het principe van Hamilton uit de klassieke mechanica mag beschouwd worden als een belangrijk stuk gereedschap om er voor dynamische systemen bewegingsvergelijkingen en behoudswetten mee te construeren. Uitgangspunt is de actiefunctionaal (voor het begrip functionaal zie par. 3.2), d.i. de integraal over een tijdsinterval en een plaatsruimte van een bepaalde, voor het systeem karakteristieke grootte: de Lagrangiaan L . Het extremum van de actiefunctionaal geeft direct de bewegingsvergelijkingen in termen van allerlei afgeleides van L , symmetriebeschouwingen van L geven aanleiding tot behoudswetten, ook weer algemeen te formuleren in afgeleides van L .

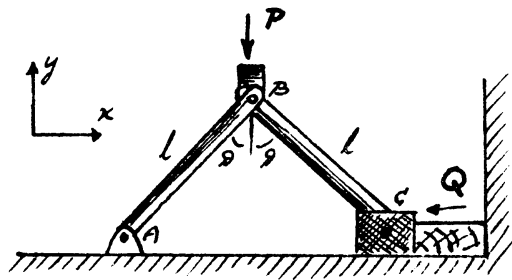
In dit hoofdstuk zullen we een schets van de herkomst en het gebruik van het principe van Hamilton geven. We vermelden het theorema van Noether, waarmee d.m.v. symmetrie-eigenschappen van de Lagrangiaan behoudswetten kunnen worden gevonden. Dit alles gaan we vervolgens toepassen op een vrij algemene golfvergelijking met niet-lineariteit en dispersie-term. We construeren hiervoor een Lagrangiaan en leiden er een paar, dan voor de hand liggende, behoudswetten voor af. Hierna bespreken we aan de hand van een concreet voorbeeld de door G.B. Whitham opgezette methode van de gemiddelde Lagrangiaan. Dit is een geschikte werkwijze als we te maken krijgen met sinus-achtige golftreinen, waarlangs de amplitude, het golfgetal en de frequentie slechts geleidelijk veranderen. De Lagrangiaan wordt dan gemiddeld over de snelle oscillaties, zodat we een nieuwe Lagrangiaan krijgen, waarin alleen de amplitudes, de golfgetallen en de frequenties voorkomen. Met deze nieuwe Lagrangiaan wordt dan weer gespeeld volgens de regels van het spel.

In het voorbeeld komt een zwakke niet-lineariteit voor, welke in het geval van met elkaar wisselwerkende, sinus-achtige golftreinen, onder bepaalde condities aanleiding geeft tot resonante interactie. De fasefuncties van de sinus-achtige golftreinen kunnen dan zo bij elkaar worden opgeteld en/of afgetrokken dat de niet-lineaire term in de Lagrangiaan een vrijwel constante fase heeft en dus niet uitgemiddeld wordt. Op het eind van dit hoofdstuk komen we via het theorema van Noether nog even terug op de relatie tussen groepssnelheid en behouden grootheden in golftreinen.

4.2. Herkomst van variatieprincipe

In de statica kent men het zogenaamde principe van de virtuele arbeid (Jean Bernoulli)*). Dit principe zegt, dat als een systeem (deeltje, machine) in mechanisch evenwicht verkeert met zijn omgeving, d.w.z. als de resulterende krachten en momenten nul zijn, dat dan de arbeid van de op het systeem werkende krachten gelijk is aan nul voor elke virtuele verplaatsing die in overeenstemming is met de vrijheidsgraden. Onder virtuele verplaatsingen verstaan we het volgende. Stel dat wij, als deus ex machina, het systeem kleine veranderingen laten ondergaan in de vorm van kleine verplaatsingen in zijn configuratieruimte. De op deze wijze geïntroduceerde verplaatsingen worden virtueel genoemd, omdat het systeem in evenwicht geen veranderingen ondergaat als gevolg van de al aanwezige, externe krachten als we de deus buiten beschouwing laten. Omdat het systeem in evenwicht verkeert, zal de resultante van alle reële krachten nul zijn en zal de arbeid van al deze krachten over de virtuele verplaatsingen ook nul zijn. Dit levert een nodige en voldoende voorwaarde voor het evenwicht, en wordt vaak gebruikt om krachten in constructies, die onder belasting in evenwicht verkeren, te bepalen.

Als voorbeeld nemen we het volgende apparaat, dat gebruikt wordt om een houten blok samen te persen*):



Als we een kracht \vec{P} uitoefenen, verticaal naar beneden op het scharnierpunt B, zullen er reactiekrachten optreden bij scharnierpunten A en C om het evenwicht te behouden. Als we aannemen dat A op dezelfde plaats blijft en dat we wrijvingseffecten mogen verwaarlozen, kunnen we de methode van de virtuele

*) - F.P. Beer & E.R. Johnston, Vector mechanics for engineers: statics 1962, McGraw-Hill.

arbeid gebruiken om de kracht \vec{Q} in C te bepalen als \vec{P} gegeven is.

We noteren de verticale component van de virtuele verplaatsing van B als:

$$\delta y_B = -l \sin \theta \delta \theta \quad (1)$$

en de bijbehorende horizontale virtuele verplaatsing van C met:

$$\delta x_G = 2l \cos \theta \delta \theta \quad (2)$$

De kracht \vec{P} verricht dan de virtuele arbeid:

$$\delta W_P = -P \delta y_B = P l \sin \theta \delta \theta \quad (3)$$

en \vec{Q} :

$$\delta W_Q = -Q \delta x_G = -2lQ \cos \theta \delta \theta \quad (4)$$

De totale virtuele arbeid verricht door \vec{P} en \vec{Q} moet gelijk nul zijn:

$$P l \sin \theta \delta \theta - Q 2l \cos \theta \delta \theta = 0 \quad (5)$$

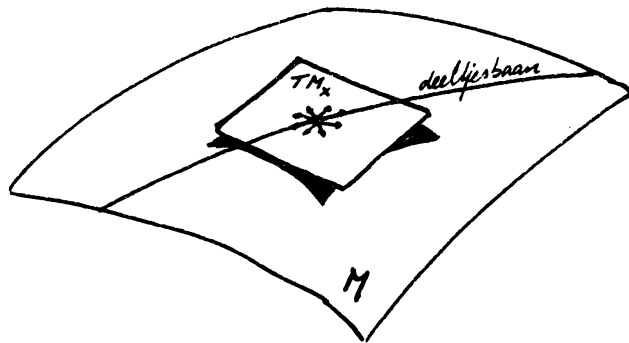
ofwel:

$$Q = \frac{1}{2} P \tan \theta \quad (6)$$

We zien dat het voordeel van de methode van de virtuele arbeid gelegen is in het volgende: als de virtuele verplaatsingen in overeenstemming zijn met de onderlinge bindingen in het systeem, kunnen de interne krachten en de reactiekrachten op onbeweegbare punten buiten beschouwing blijven, terwijl alleen de arbeid van de externe krachten en van de wrijving de relevante grootte is bij het bepalen van evenwicht.

De bovenstaande aanpak kan gegeneraliseerd worden naar dynamische systemen. Deze staat dan bekend onder de naam "principe van d'Alembert"*) . De uitbreiding bestaat dan hieruit dat de inertiaalkracht, $m\ddot{\mathbf{r}}$, meegenomen wordt. Eigenlijk wordt het begrip "evenwicht" uit de statica algemener gemaakt door de bewegingsvergelijking te beschouwen als een evenwicht tussen de krachten op het deeltje als gevolg van externe velden enerzijds en de inertiaalkracht anderzijds.

Als voorbeeld bekijken we een deeltje met massa m dat beweegt over een tweedimensionaal oppervlak $M \in \mathbb{R}^3$, in een potentiaalveld U . De beweging heeft twee vrijheidsgraden, er is geen beweging mogelijk loodrecht op TM_x , het raakvlak M in het punt \vec{x} .



De bewegingsvergelijking luidt:

$$m\ddot{\vec{x}} + m\vec{\nabla}U = \vec{R} \quad (7)$$

waarin \vec{R} de reactiekracht is, loodrecht op TM_x , die ervoor zorgt dat het deeltje op M blijft. In elk punt \vec{x} van de baan van het deeltje verricht \vec{R} geen arbeid als we virtuele verplaatsingen $\vec{\xi}, \vec{\xi} \in TM_x$, beschouwen:

$$(m\ddot{\vec{x}} + m\vec{\nabla}U, \vec{\xi}) = 0 \quad \text{alle } \vec{\xi} \in TM_x \quad (8)$$

De baan van het deeltje, $\vec{x}(t)$, bestaat zodoende uit een continue verzameling evenwichtspunten van het systeem onder werking van de kracht $m\ddot{\vec{x}} + m\vec{\nabla}U$. Resultaat (8) kunnen we omwerken tot een meer bruikbare vorm. Daartoe integreren we uitdrukking (8) over de tijd:

*) - V.I. Arnold, Les méthodes mathématiques de la mécanique classique, par. 21, Editions Mir, Moscou, 1976.

$$\int_{t_1}^{t_2} (m\ddot{\vec{x}} + m\vec{\nabla}U \cdot \vec{\xi}) dt = 0 \quad ; \quad \vec{\xi}(t) \in TM_{\vec{x}(t)} \quad (9)$$

We integreren een keer partieel:

$$-\int_{t_1}^{t_2} (m\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{\xi}} - m\vec{\nabla}U \cdot \vec{\xi}) dt + m\dot{\vec{x}} \cdot \vec{\xi} \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (10)$$

Als we nu eisen dat de virtuele verplaatsingen in de eindpunten nul zijn, valt de stokterm weg:

$$\int_{t_1}^{t_2} (m\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{\xi}} - m\vec{\nabla}U \cdot \vec{\xi}) dt = 0 \quad (11)$$

Maar (11) is de voorwaarde, waaronder de functionaal ϕ :

$$\phi = \int_{t_1}^{t_2} (\frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - mU(\vec{x})) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (12)$$

extreem is, voor banen die allemaal door $\vec{x}(t_1)$ en $\vec{x}(t_2)$ als vaste punten gaan. Uitdrukking (12) is het bekende principe van Hamilton:

$$\delta\phi = \delta\left(\int_{t_1}^{t_2} L dt\right) = 0 \quad (13)$$

dat zegt dat de beweging van het systeem zodanig is, dat deze de actiefunctie (12) extremaliseert. De grootte L wordt de Lagrangiaan van het systeem genoemd en is voor het bovenstaande voorbeeld het verschil tussen de kinetische en de potentiële energie.

We hebben nu laten zien dat het principe van Hamilton zijn oorsprong heeft in de methode van de virtuele arbeid en de generalisatie van het begrip evenwicht.

Hebben we nu een algemeen systeem met een bijbehorende Lagrangiaan L , dan kunnen de bewegingsvergelijkingen gevonden worden door het extremum van de actiefunctie te vinden. Stel dat we bijv. hebben:

$$L = L(q, \dot{q}) \quad ; \quad \dot{q} = \frac{dq}{dt} \quad (14)$$

met de actiefunctie:

$$\phi = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt \quad (15)$$

dan gaan we ϕ variëren:

$$q \rightarrow q + \epsilon f \quad (16)$$

en dus:

$$\left. \frac{d\phi}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left. \frac{\partial L}{\partial q} \right|_{\epsilon=0} f + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right|_{\epsilon=0} \dot{f} \right\} dt = 0 \quad (17)$$

Als we de stokterm nul stellen bij partiële integratie vinden we (variaties in de eindpunten zijn nul):

$$\left. \frac{d\phi}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left. \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right|_{\epsilon=0} f \right\} dt = 0 \quad (18)$$

Omdat f willekeurig is, krijgen we de bewegingsvergelijking:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (19)$$

Met de aanpak in (16), (17) en (18) is dit uit te breiden naar Lagrangianen voor meerdere velden q_r , $r = 1, 2 \dots M$ en voor meerdere systemen, dit laatste bijvoorbeeld op de volgende wijze:

$$L = \sum_i L_i + \sum_{i < j} \tilde{L}_{ij} \quad (20)$$

waarin de L_i de Lagrangiaan is van het systeem, geïdentificeerd met i , en \tilde{L}_{ij} de onderlinge wisselwerkingsbijdrage van twee systemen. In de limiet naar een continuum kunnen de sommaties in (20) vervangen gedacht worden door integraties^{*}), en differenties door afgeleides. Het principe van Hamilton voor een continu systeem met als beschrijvend veld $q(x,t)$, gaat dan uit van de actiefunctionaal (bijvoorbeeld):

$$\phi = \iint L(q, q_x, q_t) dx dt \quad (21)$$

*) - H. Goldstein, Classical Mechanics, par. 12-1, Addison-Wesley, sec. ed. 1980.

en levert de bewegingsvergelijking analoog aan (16), (17) en (18):

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial q_x} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial q_x} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (22)$$

waarin

$$\frac{\partial}{\partial x} = q_x \frac{\partial}{\partial q} \Big|_{q_x, q_t, x} + q_{xx} \frac{\partial}{\partial q_x} \Big|_{q, q_t, x} + q_{tx} \frac{\partial}{\partial q_t} \Big|_{q, q_x, x} + \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{q, q_t, q_x}$$

etc.

Het bovenstaande verhaal is bedoeld om in een paar trekken de oorsprong van het principe van Hamilton aan te geven. Voor een exacte formulering van de theorie verwijzen we naar de genoemde literatuur van V. Arnold en H. Goldstein.

De kracht van het principe van Hamilton is gelegen in het feit dat alle informatie in één grootte, de Lagrangiaan, zit. Uitgaande van die Lagrangiaan L , die voor mechanische systemen vaak geschreven kan worden als het verschil tussen een kinetische en een potentiële energie(-dichtheid), is het makkelijk om de bewegingsvergelijkingen te construeren. Verder bieden symmetriebeschouwingen van de Lagrangiaan de mogelijkheid om behoudswetten te vinden zonder expliciet de oplossing van de bewegingsvergelijkingen te hoeven kennen.

4.3. Theorema van Noether^{*)}

Als het gedrag van een dynamisch systeem afgeleid kan worden uit een actiefunctionaal (principe van Hamilton), bijvoorbeeld:

$$\phi = \iint L(q, q_x, q_t) dx dt \quad (1)$$

dan kunnen we gericht gaan zoeken naar behoudswetten dankzij het theorema van Noether.

We bekijken een continue transformatie voor het veld q :

$$T^\epsilon: q \rightarrow q + f(\epsilon; x, t); f(0; x, t) = 0 \quad (2)$$

Hieronder transformeert de Lagrange-dichtheid als:

$$L \rightarrow L + \epsilon \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial q_t} \frac{\partial f_t}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial q_x} \frac{\partial f_x}{\partial \epsilon} \right\} \Big|_{\epsilon=0} + o(\epsilon^2) \quad (3)$$

Als we nu als voorkennis hebben, dat T^ϵ zodanig is, dat L tot in eerste orde invariant is voor alle velden q , dan hebben we de volgende uitdrukking:

$$\frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \frac{\partial L}{\partial q_t} \frac{\partial f_t}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \frac{\partial L}{\partial q_x} \frac{\partial f_x}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0, \quad \text{voor alle } q \quad (4)$$

Voor velden q , die oplossing zijn van de bewegingsvergelijking:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial q_t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial q_x} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (5)$$

is vergelijking (4) om te werken tot:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial q_t} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial q_x} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right) = 0 \quad (6)$$

Resultaat (6) heeft de vorm van een behoudswet. De verandering in de tijd van de dichtheid:

*) Voor een discreet systeem afgeleid zie: V.I. Arnold. Les méthodes mathématiques de la mécanique classique, Editions MIR Moscou 1976, par. 20.

$$\frac{\partial L}{\partial q_t} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0}$$

is in evenwicht met de divergentie van de flux:

$$\frac{\partial L}{\partial q_x} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0}$$

Het vinden van informatie in de vorm van behoudswetten is nu teruggebracht tot het vinden van continue ϵ -transformaties, die L tot in eerst orde invariant laten. Het bovenstaande staat in de literatuur bekend onder de naam "het theorema van Noether". Uitbreiding is mogelijk als we continue transformaties beschouwen, waaronder de $\sigma(\epsilon)$ -term van L te schrijven is als:

$$[\sigma(\epsilon)\text{-term van L}] = \frac{\partial}{\partial t} \psi + \frac{\partial}{\partial x} \chi \quad , \quad \text{voor alle } q \quad (7)$$

Via de bewegingsvergelijking (5) is dan de volgende behoudswet te construeren:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial q_t} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} - \psi \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial q_x} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} - \chi \right) = 0 \quad (8)$$

4.4. Een Lagrangiaan voor de golfvergelijking met dispersie en niet-lineariteit

Voor de in dit verslag al meer besproken golfvergelijking:

$$u_t + f(u)u_x + \int_{-\infty}^{\infty} K_x(x-\zeta) u(\zeta, t) d\zeta = 0 \quad (1)$$

kunnen we als volgt een Lagrangiaan bepalen. We voeren een potentiaal v in:

$$u = v_x \quad (2)$$

waarmee de golfvergelijking (1) de gedaante krijgt:

$$v_{xt} + f(v_x)v_{xx} + \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(x-\zeta) v(\zeta, t) d\zeta = 0 \quad (3)$$

Met de in hoofdstuk III gegeven definities van het differentiëren van functionalen is het eenvoudig na te gaan dat (3) de Eulerse vergelijking is bij de volgende actiefunctie I:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} v_x v_t + \tilde{F}(v_x) - \frac{1}{2} v(x, t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(x-\zeta) v(\zeta, t) d\zeta \right\} \right) dx dt \quad (4)$$

waarin:

$$\tilde{F}(v_x) = \int_0^{v_x} \int_0^y f(s) ds dy \quad (5)$$

Uitgaande van het theorema van Noether bekijken we vervolgens de verandering in de Lagrangiaan L:

$$L = \frac{1}{2} v_x v_t + \tilde{F}(v_x) - \frac{1}{2} v(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(x-\zeta) v(\zeta, t) d\zeta \quad (6)$$

onder transformaties van het type:

$$v \rightarrow v + \epsilon g \quad (7)$$

waarin we g zo proberen te kiezen dat we een behoudswet kunnen construeren. Invullen van (7) in de Lagrangiaan (6) leidt uiteindelijk tot de uitdrukking voor $\frac{dL}{d\epsilon}$ ($\epsilon=0$):

$$\frac{dL}{d\varepsilon}\Big|_0 = \frac{\partial L}{\partial v} g + \frac{\partial L}{\partial v_t} g_t + \frac{\partial L}{\partial v_x} g_x = \quad (8a)$$

$$= \frac{1}{2}(v_x g_t + v_t g_x) + \bar{F}'(v_x) g_x - \frac{1}{2}v(x,t) \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(x-\zeta) g(\zeta,t) d\zeta +$$

$$- \frac{1}{2}g(x,t) \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(x-\zeta) v(\zeta,t) d\zeta \quad (8b)$$

Kiezen we voor g :

$$g = v_t \quad (9)$$

dan vinden we voor $\frac{dL}{d\varepsilon}\Big|_0$:

$$\frac{dL}{d\varepsilon}\Big|_0 = \frac{d}{dt} L \quad (10)$$

Voor oplossingen van de bewegingsvergelijking (3) krijgen we dan de behoudswet:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_t} v_t - L \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial v_x} v_t \right) = 0 \quad (11)$$

Nemen we:

$$g = v_x \quad (12)$$

dan vinden we:

$$\frac{dL}{d\varepsilon}\Big|_0 = \frac{d}{dx} L \quad (13)$$

met de behoudswet:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_t} v_x \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial v_x} v_x - L \right) = 0 \quad (14)$$

Bovenstaande behoudswetten gelden algemeen. In concrete gevallen, waarin de niet-lineariteit en de dispersie-term bekend zijn, kunnen behoudswetten worden gevonden, die de aard van die termen weerspiegelen.

4.5 De methode van de gemiddelde Lagrangiaan

De methode van de gemiddelde Lagrangiaan is een vruchtbare aanpak voor golfsystemen, die lineair zijn of een zwak-niet-lineaire wisselwerking vertonen. Voor dit soort systemen zijn oplossingen in de vorm van geleidelijk veranderende, sinus-achtige golftreinen goede benaderingen^{*}). We kunnen dit als Ansatz gebruiken en deze vormen invullen in de Lagrangiaan. Vervolgens wordt de Lagrangiaan gemiddeld over de snelle oscillaties^{**}). Deze gemiddelde Lagrangiaan bevat nu alleen informatie over de geleidelijk langs de golftrein variërende grootheden, zoals de amplitudes, de golfgetallen en de frequenties. De bewegingsvergelijkingen voor dit systeem volgen nu door de variaties te bepalen naar de amplitudes en de fasefuncties afzonderlijk^{*) **)}.

Bij het niet-lineaire geval, vertegenwoordigd door een Lagrangiaan met derde en hogere machtstermen naast de kwadratische, moeten we oppassen. Deze niet-lineaire bijdragen hoeven geen snel oscillerende termen te zijn als er voldaan wordt aan bepaalde voorwaarden: de resonantie-condities. We zullen een voorbeeld uitwerken om het bovenstaande toe te lichten.

Tot slot merken we nog op dat de voordelen van het middelen in de Lagrangiaan i.p.v. in de bewegingsvergelijkingen de volgende zijn:

- De Lagrangiaan bevat altijd afgeleides van lagere orde dan de bewegingsvergelijkingen, wat in het algemeen tot eenvoudigere uitdrukkingen leidt.
- De gemiddelde Lagrangiaan is weer geschikt om er via het theorema van Noether behoudswetten uit te halen.

We nemen de volgende zwak niet-lineaire golfvergelijking bij wijze van illustratie:

$$u_t + \beta u_{xxx} + \epsilon u^2 u_x = 0, \quad |\epsilon| \ll 1 \quad (1)$$

In de vorige paragraaf is afgeleid dat na invoering van de potentiaal v :

$$u = v_x \quad (2)$$

^{*}) - J.P. Dougherty, Langrangian Methods in plasma dynamics 1, J. Plasma Physics 4(4), 1970, pp. 761-785.
^{**}) - G.B. Whitham, Linear and nonlinear waves, Wiley 1974, par. 14.4.

een Lagrangiaan voor (1) geconstrueerd kan worden:

$$L = \frac{1}{2} v_x v_t - \frac{1}{2} \beta v v_{xxxx} + \frac{1}{12} \epsilon v_x^4 \quad (3)$$

Omdat L voorkomt als integrand in de actiefunctie kan de tweede term in het rechterlid van (3) partiëel worden geïntegreerd, wat leidt tot:

$$L = \frac{1}{2} v_x v_t - \frac{1}{2} \beta v_{xx}^2 + \frac{1}{12} \epsilon v_x^4 \quad (4)$$

We proberen benaderende oplossingen te vinden in de vorm van geleidelijk veranderende sinus-achtige golfreizen, die we in het oneindige naar nul laten gaan:

$$v(x,t) = \sum_{m=1}^N \{ a_m(X,T) \exp(i\theta_m(X,T)) + c.c. \} \quad (5)$$

waarin:

$$X = \epsilon x, \quad T = \epsilon t, \quad \theta_m(X,T) = \frac{1}{\epsilon} \theta_m(\epsilon x, \epsilon t) \quad (6)$$

Het locale golfgetal en de locale frequentie van de mode m worden gegeven door:

$$k_m = \frac{\partial}{\partial X} \theta_m = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} \theta_m(X,T) = \frac{\partial}{\partial x} \theta_m(X,T) \quad (7)$$

$$\omega_m = - \frac{\partial}{\partial t} \theta_m = - \frac{\partial}{\partial T} \theta_m(X,T) \quad (8)$$

We merken op dat de tijd- en plaatsafgeleides van de amplitudes en van de golfgetallen en frequenties weer van de orde ϵ zijn.

Voor de afgeleides van v krijgen we de volgende uitdrukkingen:

$$v_x = \sum_{m=1}^N \{ (\epsilon a_{mX} e^{i\theta_m} + i k_m a_m e^{i\theta_m}) + c.c. \} \quad (9)$$

$$v_t = \sum_{m=1}^N \{ (\epsilon a_{mT} e^{i\theta_m} - i \omega_m a_m e^{i\theta_m}) + c.c. \} \quad (10)$$

$$v_{xx} = \sum_{m=1}^N \{ (\epsilon^2 a_{mXX} e^{i\theta_m} + 2\epsilon i k_m a_{mX} e^{i\theta_m} + \dots) + c.c. \}$$

$$+ \epsilon i k_{mX} a_m e^{i\theta_m} - k_m^2 a_m e^{i\theta_m} + \text{c.c.}] \quad (11)$$

We beschouwen vervolgens de produkten $v_x v_t$ en v_{xx}^2 uit L, die verkregen worden na substitutie van (9), (10) en (11).

De term $v_x v_t$:

De bijdragen aan deze term van de orde 1 zijn:

$$\begin{aligned} \sigma(1) = & \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \{ k_{mX} \omega_n a_m a_n e^{i(\theta_m + \theta_n)} - k_{mX} \omega_n a_m^* a_n^* e^{i(\theta_m - \theta_n)} + \\ & - k_{mX} \omega_n a_m^* a_n e^{i(\theta_n - \theta_m)} + k_{mX} \omega_n a_m^* a_n^* e^{-i(\theta_m + \theta_n)} \} \end{aligned} \quad (12)$$

Als we nu gaan middelen over de snelle oscillaties kunnen alleen de tweede en derde term in het rechterlid van (12) iets opleveren, namelijk dan, als daarin m gelijk wordt aan n :

$$\text{gemiddelde van } \sigma(1) \text{ van } v_x v_t = \sum_{m=1}^N -2k_{mX} \omega_m |a_m|^2 \quad (13)$$

De bijdragen van de orde ϵ aan $v_x v_t$, die resteren na middeling, zijn:

$$\text{gemiddelde van } \sigma(\epsilon) \text{ van } v_x v_t = \sum_{m=1}^N \{ i\omega_m (a_{mX} a_m^* - a_{mX}^* a_m) + ik_m (a_m a_{mT}^* - a_m^* a_{mT}) \} \quad (14)$$

Nemen we nu de amplitudes reëel of geven we ze een constante fasefactor mee, dan wordt deze $\sigma(\epsilon)$ -bijdrage gelijk aan nul.

De term v_{xx}^2 :

De bijdragen van de orde 1 aan v_{xx}^2 worden na middeling:

$$\text{gemiddelde van } \sigma(1) \text{ van } v_{xx}^2 = \sum_{m=1}^N 2k_m^4 |a_m|^2 \quad (15)$$

Het orde- ϵ -gedeelte ziet er na middeling uit als:

$$\text{gemiddelde van } \sigma(\epsilon) \text{ van } v_{xx}^2 = \sum_{m=1}^N 2ik_m^3 (a_m a_{m_X}^* - a_m^* a_{m_X}) \quad (16)$$

maar wordt gelijk aan nul als we de amplitudes reëel nemen of met een constante fasefactor de wereld insturen.

Op dit punt aangekomen kunnen we de Lagrangiaan opschrijven voor de lineaire vergelijkingen:

$$L = \sum_{m=1}^N \{-k_m \omega_m |a_m|^2 - \beta k_m^4 |a_m|^2\} \quad (17)$$

Variëren van de actiefunctiaal naar de amplitude a_p levert de dispersierelatie:

$$a_p (k_p \omega_p + \beta k_p^4) = 0 \quad \text{ofwel: } \omega_p = -\beta k_p^3 \quad (18)$$

Nemen we de fasefunctie θ_p dan levert de functionaalafgeleide hiernaar, met gebruikmaking van (7) en (8):

$$\frac{\partial}{\partial t} (k_p a_p^2) + \frac{\partial}{\partial x} (-4\beta k_p^3 a_p^2 - \omega_p a_p^2) = 0 \quad (19)$$

Met de dispersierelatie (18) kan dit vereenvoudigd worden tot:

$$\frac{\partial}{\partial t} (k_p a_p^2) + \frac{\partial}{\partial x} (-3\beta k_p^2 k_p a_p^2) = 0 \quad (20)$$

ofwel:

$$\frac{\partial}{\partial t} (k_p a_p^2) + \frac{\partial}{\partial x} (v_{gr_p} k_p a_p^2) = 0 \quad (21)$$

We zien ook hier weer de groepssnelheid tevoorschijn komen in deze behoudswet (vergelijk met uitdrukking (21) uit de paragraaf 1.2. "Groepssnelheid en behouden grootheden" van hoofdstuk I).

Tot slot betrekken we de zwakke niet-lineariteit, die in Langrangiaan (3) voorkomt in de gedaante $\frac{1}{12} \epsilon v_x^4$, in onze beschouwing. Omdat we de bewegingsvergelijkingen uit het lineaire geval tot op orde ϵ hiermee willen

modificeren, kunnen we ons beperken tot de bijdragen aan v_x^* van de orde 1. Om bovendien de zaak overzichtelijk te houden, kijken we naar de situatie waarin er vier modes met elkaar wisselwerken ($N = 4$ in (6)).

We noteren dus:

$$\sigma(1) \text{ van } v_x^* = \left(\sum_{m=1}^4 ik_m a_m (e^{i\theta_m} - e^{-i\theta_m}) \right)^4 \quad (22)$$

Indien we nu het rechterlid van (22) uit zouden schrijven, zouden we een som van uitdrukkingen vinden van de gedaante:

$$\text{uitdrukking} = (\pm i)(\pm i)(\pm i)(\pm i) a_\lambda a_\mu a_\nu a_\xi k_\lambda k_\mu k_\nu k_\xi e^{i(\pm\theta_\lambda \pm \theta_\mu \pm \theta_\nu \pm \theta_\xi)} \quad (23)$$

$$\lambda, \mu, \nu, \xi \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Dit zijn oscillerende grootheden, die we kunnen uitmiddelen, tenzij we de modes zo hebben gekozen dat de fasefactor van één zo'n term:

$$\text{fasefactor} = e^{i(\pm\theta_\lambda \pm \theta_\mu \pm \theta_\nu \pm \theta_\xi)} \quad (24)$$

constant is óf zeer langzaam variëert op de tijdschaal van de afzonderlijke oscillaties. We kunnen bijvoorbeeld het volgende geval hebben:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 = \gamma \approx \text{constant} \quad (25)$$

(en dientengevolge:

$$-\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 = -\gamma \approx \text{constant}) \quad (26)$$

Differentiëren we nu deze relaties (25) en (26) naar de plaats en de tijd, dan krijgen we de zogenaamde resonantie-condities:

$$k_1 + k_2 + k_3 - k_4 \approx 0 \quad (27)$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 \approx 0 \quad (28)$$

Voldoen dus de samenstellende modes 1, 2, 3 en 4 aan deze voorwaarden, dan kunnen deze op een niet-lineaire manier met elkaar wisselwerken. Deze

wisselwerking staat bekend onder de naam "resonante interactie".

Of er een kwartet van golfreinen bestaat, waarvan de golfgetallen en frequenties voldoen aan de resonantie-condities, hangt af van de dispersierelatie, die in ons geval luidt:

$$\omega = -\beta k^3 \quad (29)$$

We moeten nu de vraag beantwoorden of er vier reële getallen bestaan, x , y , z en u , ongelijk aan nul, zodanig dat geldt:

$$x + y + z = u \quad (30)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3 \quad (31)$$

Een oplossing van dit stelsel is bijvoorbeeld:

$$x = \alpha, \quad y = -\alpha, \quad z = \beta, \quad u = -\beta,$$

Omdat in de resonantie-condities het "ongeveer"-teken van toepassing is, vinden we resonante kwartetten in een bolletje met straal δ rond zo'n punt x, y, z, u mits δ veel kleiner is dan elk van deze vier getallen.

In de gemiddelde Lagrangiaan vinden we de resonantie-interactie-term voor de bovenstaande keuze (27) en (28) terug in de volgende uitdrukking:

resonantie bijdrage aan L is

$$\sigma(\varepsilon) \text{ van } \frac{1}{12} \varepsilon v_x^4 = -4\varepsilon a_1 a_2 a_3 a_4 k_1 k_2 k_3 k_4 \cos \gamma \quad (32)$$

zodat voor dit geval de Lagrangiaan eruit gaat zien als:

$$L = \sum_{m=1}^4 -a_m^2 \{k_m \omega_m + \beta k_m^4\} - 4\varepsilon a_1 a_2 a_3 a_4 k_1 k_2 k_3 k_4 \cos \gamma \quad (33)$$

De Euler-Lagrange-vergelijkingen volgen als we gaan variëren naar de amplitudes a_i en de fasefuncties θ_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. De variatie-afgeleide naar θ_1 geeft:

$$\frac{\partial}{\partial t} (k_1 a_1^2) - \frac{\partial}{\partial x} (\omega_1 a_1^2 + 4\beta k_1^3 a_1^2 + \frac{4\epsilon a_1 a_2 a_3 a_4 k_2 k_3 k_4 \cos\gamma}{\text{-----}}) +$$

$$- 4\epsilon a_1 a_2 a_3 a_4 k_1 k_2 k_3 k_4 \sin\gamma = 0 \quad (34)$$

De met een stippellijn aangegeven term in (34) kan verwaarloosd worden: differentiëren van één van de amplitudes of van één van de golfgetallen levert een extra ϵ op, terwijl differentiëren van de samengestelde fase γ ((25) en (26)) de resonantie-conditie (27) geeft.

Wat resteert is dan

$$\frac{\partial}{\partial t} (k_1 a_1^2) - \frac{\partial}{\partial x} ((\omega_1 + 4\beta k_1^3) a_1^2) = 4\epsilon a_1 a_2 a_3 a_4 k_1 k_2 k_3 k_4 \sin\gamma \quad (35)$$

Soortgelijke uitdrukkingen vinden we als we gaan variëren naar θ_2 en θ_3 . (Vervang in het linkerlid van (35) de "1" door resp. "2" en "3"). Voor de vierde mode vinden we een extra minteken in het rechterlid van (35) vanwege uitdrukking (25):

$$\frac{\partial}{\partial t} (k_4 a_4^2) - \frac{\partial}{\partial x} ((\omega_4 + 4\beta k_4^3) a_4^2) = - 4\epsilon a_1 a_2 a_3 a_4 k_1 k_2 k_3 k_4 \sin\gamma \quad (36)$$

Als we de groepssnelheid van de j-de mode als volgt introduceren:

$$k_j v_{gr}(j) = -\omega_j - 4\beta k_j^3 \quad (37)$$

dan kunnen we met (35), (36) en de analoge vergelijkingen voor θ_2 en θ_3 de volgende relaties (de Manley-Rowe-relaties *) opstellen:

$$\frac{\partial}{\partial t} (k_1 a_1^2) + \frac{\partial}{\partial x} (v_{gr}(1) k_1 a_1^2) = \frac{\partial}{\partial t} (k_2 a_2^2) + \frac{\partial}{\partial x} (v_{gr}(2) k_2 a_2^2) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (k_3 a_3^2) + \frac{\partial}{\partial t} (v_{gr}(3) k_3 a_3^2) = - \frac{\partial}{\partial t} (k_4 a_4^2) - \frac{\partial}{\partial x} (v_{gr}(4) k_4 a_4^2) =$$

$$= 4\epsilon a_1 a_2 a_3 a_4 k_1 k_2 k_3 k_4 \sin\gamma \quad (38)$$

*) - J.P. Dougherty, Langrangian methods in plasma dynamics 1, J. Plasma Physics, 4 (4), 1970, pp. 761-785, p.783.

Variëren naar de amplitude a_1 geeft de dispersierelatie voor golfrein 1, gemodificeerd door de aanwezigheid van de andere golven:

$$\omega_1 = -\beta k_1^3 - 2\varepsilon \frac{a_2 a_3 a_4}{a_1} k_2 k_3 k_4 \cos\gamma \quad (39)$$

Voor de treinen 2, 3 en 4 gelden soortgelijke relaties.

4.6. De groepssnelheid en het theorema van Noether

Het theorema van Noether levert voor lineaire golfvelden behoudswetten af van de vorm (zie par. 4.4.):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_t} g \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_x} g \right) = 0 \quad (1)$$

De grootheid $\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_t} g \right)$ is hierin de dichtheid van een behouden veld, $\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_x} g \right)$ is de flux.

Stel nu dat $\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_t}$ nergens gelijk wordt aan nul.

We kunnen (1) dan herschrijven tot:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_t} g \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_x}}{\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_t} \right)} \cdot \frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_t} g \right) = 0 \quad (2)$$

Met gebruikmaking van een stelling uit de theorie van de impliciete functies^{*)}, welke zegt dat we onder voorwaarden mogen schrijven:

$$\frac{\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_x}}{\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_t} \right)} = - \frac{\partial(\theta_t)}{\partial(\theta_x)} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = v_{gr} \quad (3)$$

kunnen we (2) korter noteren als:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_t} g \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v_{gr} \cdot \frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_t} g \right) = 0 \quad (4)$$

Ook hier zien we weer (vergelijk de paragraaf over groepssnelheid in H. I) dat dichtheden van behouden grootheden zich met de groepssnelheid voortplanten.

Vergelijking (4) is met één van de bewegingsvergelijkingen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_x} \right) = 0 \quad (5)$$

*) - R. Courant, Differential and Integral Calculus I, Blackie & Son, 1962; pp. 482-483.

nog te reduceren tot:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{g} + v_{gr} \frac{\partial}{\partial x} \bar{g} = 0 \quad (6)$$

Dit resultaat heeft de volgende interpretatie:

de grootheid \bar{g} blijft constant als we op een baan in het x - t vlak zitten waarvoor geldt:

$$\frac{dx}{dt} = v_{gr} \quad (7)$$

We kunnen de bewegingsvergelijking (5) zelf, analoog aan (2), de vorm geven:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_x}}{\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_t} \right)} \cdot \frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_t} \right) = 0 \quad (8)$$

ofwel:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v_{gr} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_t} \right) = 0 \quad (9)$$

De golfactie $\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta_t}$ blijft constant op een intervalletje waarvan de eindpunten met de groepssnelheid bewegen.

A. Appendix bij Signaalsnelheid en breedte van een golfpakket

Bepaling van $\langle x \rangle$

Per definitie geldt:

$$\langle x \rangle = \frac{\int u^2(x,t) x dx}{\int u^2(x,t) dx} \quad (1)$$

De noemer herschrijven we via de gelijkheid van Parseval:

$$\int u^2(x,t) dx = \int F(k)F^*(k) dk \quad (2)$$

De teller werken we uit door voor $u(x,t)$ te substitueren:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$$

$$F(-k) = F^*(k) ; \omega(-k) = -\omega(k) \quad (3)$$

Dus:

$$\begin{aligned} \int u^2(x,t) x dx &= \frac{1}{2\pi} \iiint F(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} F(v) e^{i(vx - \omega(v)t)} x dk dv dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iiint F(k) F(v) e^{-it(\omega(k) + \omega(v))} \left. -i \frac{\partial}{\partial k} e^{i(k+v)x} \right| dk dv dx = \\ &= \frac{i}{2\pi} \iiint \{ F_k(k) e^{-i\omega(k)t} \left. -it\omega_k(k) F(k) e^{-i\omega(k)t} \right\} F(v) e^{-i\omega(v)t} e^{i(k+v)x} dk dv dx = \\ &= i \iint \{ F_k(k) e^{-i\omega(k)t} \left. -it\omega_k(k) F(k) e^{-i\omega(k)t} \right\} F(v) e^{-i\omega(v)t} \delta(k+v) dk dv = \\ &= i \int \{ F_k(k) e^{-i\omega(k)t} \left. -it\omega_k(k) F(k) e^{-i\omega(k)t} \right\} F^*(k) e^{i\omega(k)t} dk = \\ &= t \int F(k) F^*(k) \omega_k(k) dk + i \int F_k(k) F^*(k) dk \end{aligned} \quad (4)$$

Als we (4) en (2) substitueren in (1) resulteert:

$$\langle x \rangle = t \frac{\int F(k) F^*(k) \omega_k(k) dk}{\int F(k) F^*(k) dk} + i \frac{\int F_k(k) F^*(k) dk}{\int F(k) F(k) dk} \quad (5)$$

Bepaling van B

Per definitie geldt:

$$B = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^{1/2} = (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)^{1/2} \quad (6)$$

We gaan $\langle x^2 \rangle$ berekenen:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int u^2(x, t) x^2 dx}{\int u(x, t) dx} \quad (7)$$

Voor de noemer hebben we uitdrukking (2), de teller bewerken we als volgt:

$$\begin{aligned} \int u^2(x, t) x^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \iiint F(k)F(v) e^{-it(\omega(k)+\omega(v))} e^{i(k+v)x} x^2 dk dv dx = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \iiint F(k)F(v) e^{-it(\omega(k)+\omega(v))} \frac{\partial^2}{\partial k \partial v} e^{i(k+v)x} dk dv dx = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\partial}{\partial k} \{F(k) e^{-it\omega(k)}\} \frac{\partial}{\partial v} \{F(v) e^{-it\omega(v)}\} e^{i(k+v)x} dk dv dx = \\ &= -\iint \{F'_k(k) e^{-it\omega(k)} - it\omega'_k(k) F(k) e^{-it\omega(k)}\} \{F'_v(v) e^{-it\omega(v)} + \\ &\quad -it\omega'_v(v) F(v) e^{-it\omega(v)}\} \delta(k+v) dk dv \end{aligned} \quad (8)$$

Op dit punt aangekomen gebruiken we:

$$\frac{d}{d(-k)} F(-k) = -\frac{d}{dk} F(-k) = -\frac{d}{dk} F^*(k) \quad (9a)$$

$$\frac{d}{d(-k)} \omega(-k) = -\frac{d}{dk} \omega(-k) = \frac{d}{dk} \omega(k) \quad (9b)$$

Na substitutie van (9) in (8) vinden we:

$$\begin{aligned} \int u^2(x, t) x^2 dx &= -\int \{F'_k(k) e^{-i\omega(k)t} - it\omega'_k(k) F(k) e^{-i\omega(k)t}\} \\ &\quad \cdot \{-F'_k(k) e^{i\omega(k)t} - itF^*(k) \omega'_k(k) e^{i\omega(k)t}\} dk = \\ &= -\int \{-F'_k(k) F^*_k(k) - itF'_k(k) F^*(k) \omega'_k(k) + itF(k) F^*_k(k) \omega'_k(k) + \\ &\quad -t F(k) F^*(k) \omega_k^2(k)\} dk = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int F_k(k)F_k^*(k) dk - it \int \omega_k(k) [F(k)F_k^*(k) - F_k(k)F^*(k)] dk + \\
&+ t^2 \int F(k)F^*(k)\omega_k^2(k)dk
\end{aligned} \tag{10}$$

We kunnen nu m.b.v. (10), (5) en (2) de uitdrukking opschrijven voor $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$:

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 &= \\
&= t^2 \left\{ \frac{\int F(k)F^*(k)\omega_k(k)dk}{\int F(k)F^*(k)dk} - \left(\frac{\int F(k)F^*(k)\omega_k(k)dk}{\int F(k)F^*(k)dk} \right)^2 \right\} + \\
&-t \left\{ 2 \frac{\int F(k)F^*(k)\omega_k(k)dk}{\int F(k)F^*(k)dk} \cdot i \frac{\int F_k(k)F^*(k)dk}{\int F(k)F^*(k)dk} + \right. \\
&+ i \frac{\int \omega_k(k) [F(k)F_k^*(k) - F_k(k)F^*(k)] dk}{\int F(k)F^*(k)dk} \left. \right\} + \\
&+ \left\{ \frac{\int F_k(k)F_k^*(k)dk}{\int F(k)F(k)dk} + \left(\frac{\int F_k(k)F^*(k)dk}{\int F(k)F^*(k)dk} \right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{11}$$

De factor bij t^2 is compact te schrijven als:

$$\{ \langle \omega_k^2 \rangle - \langle \omega_k \rangle^2 \}$$

De laatste term in (11) noteren we met:

$$\{ \langle x^2(t=0) \rangle - \langle x(t=0) \rangle^2 \} = \{ \langle x_0^2 \rangle - \langle x_0 \rangle^2 \}$$

De factor bij t verlangt wat meer rekenwerk. We hebben alvast:

$$2 \frac{\int F(k)F^*(k)\omega_k(k)dk}{\int F(k)F^*(k)dk} \cdot i \frac{\int F_k(k)F^*(k)dk}{\int F(k)F^*(k)dk} = 2\langle \omega_k \rangle \cdot \langle x_0 \rangle \tag{12}$$

De resterende term bewerken we als volgt:

$$\frac{i \int [F(k)F_k^*(k) - F_k(k)F^*(k)] \omega_k(k) dk}{\int F(k)F^*(k) dk} =$$

$$= \frac{i \int \omega_k(k) \frac{d}{dk} \left(\frac{F^*(k)}{F(k)} \right) \cdot F^2(k) dk}{\int F(k)F^*(k) dk} \quad (13)$$

Als we nu F noteren als:

$$F(k) = |F(k)| e^{i \arg(F(k))} \quad (14)$$

dan is:

$$\frac{F^*(k)}{F(k)} = e^{-2i \arg(F(k))} \quad (15)$$

en:

$$\frac{d}{dk} \left(\frac{F^*(k)}{F(k)} \right) = \frac{F^*(k)}{F(k)} \cdot -2i \frac{d}{dk} (\arg(F(k))) \quad (16)$$

Hiermee wordt (13):

$$i \frac{\int \omega_k(k) \frac{d}{dk} \left(\frac{F^*(k)}{F(k)} \right) F^2(k) dk}{\int F(k)F^*(k) dk} = 2 \langle \omega_k \cdot \frac{d}{dk} (\arg F(k)) \rangle \quad (17)$$

De factor bij t in (11) is nu te schrijven als:

$$\left\{ 2 \langle \omega_k \rangle \cdot \langle x_0 \rangle + 2 \langle \omega_k \frac{d}{dk} (\arg F(k)) \rangle \right\} \quad (18)$$

B. Appendix bij "Het opsteilen van een flank van een golf"

In deze appendix geven we het rekenwerk^{*)} om te bewijzen dat een golf, beschreven door een vergelijking met zowel dispersie als niet-lineariteit, onder voorwaarden een schok kan genereren.

Het onderwerp van gesprek zal zijn de vergelijking:

$$u_t + f(u)u_x + \int K(x-\zeta) u_\zeta(\zeta, t) d\zeta = 0 \quad (1)$$

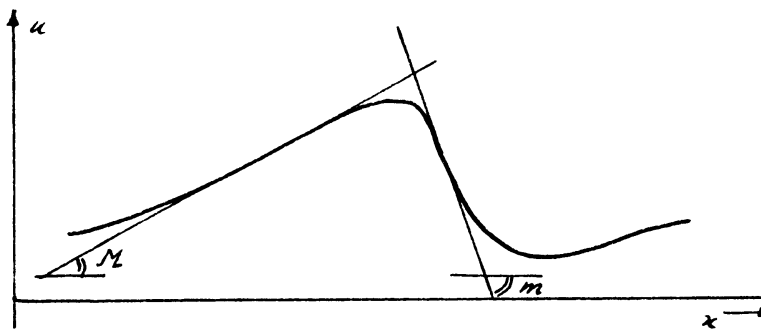
Als we de helling van de golf noteren als:

$$h(x, t) = u_x(x, t) \quad (2)$$

dan wordt de evolutie van h gegeven door de volgende uitdrukking, verkregen uit (1) door deze een keer naar x te differentiëren:

$$h_t + f(u)h_x + f'(u)h^2 + \int K(x-\zeta)h_\zeta(\zeta, t)d\zeta = 0 \quad (3)$$

We nemen aan dat de golf ten alle tijde ergens een maximale helling M , en een minimale helling m bezit:



^{*)} - R.L. Seliger, A note on the breaking of waves, Proc. Roy. Soc., A 303, 1968, pp. 493-496.

De golf verandert voortdurend van vorm. Als gevolg daarvan zullen M en m elk een eigen baan in het x - t -vlak beschrijven. We noteren de baan van m als:

$$X = X_m(t) \quad (4)$$

en die van M als:

$$X = X_M(t) \quad (5)$$

Met (1) vinden we dan voor m :

$$\begin{aligned} m_t(X_m, t) + f(u(X_m, t)) m_x(X_m, t) + \\ + f'(u(X_m, t)) m^2(X_m, t) + \int K(X_m - \zeta) h_\zeta(\zeta, t) d\zeta = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

In een voor-de-hand-liggende notatie geven we (6) kort weer als:

$$\frac{dm}{dt} + f'(u_m) m^2 + \int K(X_m - \zeta) h_\zeta(\zeta, t) d\zeta = 0 \quad (7)$$

Op een soortgelijke wijze vinden we voor M

$$\frac{dM}{dt} + f'(u_M) M^2 + \int K(X_M - \zeta) h_\zeta(\zeta, t) d\zeta = 0 \quad (8)$$

Om vervolgens $\frac{dM}{dt}$ en $\frac{dm}{dt}$ te kunnen afschatten, maken we een aanname over K : we nemen aan dat:

$$K(x) > 0, \text{ alle } x \in \mathbb{R}$$

$$K'(x) < 0, x > 0 \quad ; \quad K'(x) > 0, x < 0$$

(K is een even, integreerbare functie in dit hele verslag.)

Deze aanname houdt in, dat we in de niet-locale afhankelijkheid (zie par. 1.4. "achtergronden van dispersie") de invloed van nabij gelegen punten zwaarder laten wegen dan de punten in het verre veld. Deze veronderstelling maakt het mogelijk om de integraaltermen in (7) en (8) te kunnen afschatten. Omdat K

integreerbaar is, monotoon stijgend op $(-\infty, 0)$ en monotoon dalend op $(0, \infty)$ kunnen we de zgn. tweede middelwaarde-stelling*) toepassen in beide intervallen. We herschrijven daartoe de integraalterm van (7):

$$\begin{aligned} -\int_{-\infty}^{\infty} K(X_m - \zeta) h_{\zeta}(\zeta, t) d\zeta &= -\int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) h_{\zeta}(\zeta - X_m, t) d\zeta = \\ &= -\int_{-\infty}^0 K(\zeta) h_{\zeta}(\zeta - X_m, t) d\zeta + \int_0^{\infty} K(\zeta) h_{\zeta}(\zeta - X_m, t) d\zeta \end{aligned} \quad (9)$$

Volgens bovengenoemde stelling bestaan er nu getallen α , $-\infty < \alpha < 0$ en β , $0 < \beta < \infty$, zodanig dat geldt:

$$-\int_{-\infty}^0 K(\zeta) h_{\zeta}(\zeta - X_m, t) d\zeta = K(0) \int_{\alpha}^0 h_{\zeta}(\zeta - X_m, t) d\zeta \quad (10)$$

en:

$$\int_0^{\infty} K(\zeta) h_{\zeta}(\zeta - X_m, t) d\zeta = K(0) \int_0^{\beta} h_{\zeta}(\zeta - X_m, t) d\zeta \quad (11)$$

Met (10) en (11) wordt (9):

$$\begin{aligned} -\int_{-\infty}^{\infty} K(X_m - \zeta) h_{\zeta}(\zeta, t) d\zeta &= K(0) \{h(\beta - X_m, t) - h(\alpha - X_m, t)\} \\ &\leq K(0) \{M - m\} \end{aligned} \quad (12)$$

Evenzo geldt voor M:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} K(X_M - \zeta) h_{\zeta}(\zeta, t) d\zeta \leq K(0) \{M - m\} \quad (13)$$

De laatste aanname die we maken betreft de functie f in de niet-lineariteit: we veronderstellen f zodanig dat:

$$\frac{df(u)}{du} \geq B > 0 \quad \text{voor alle } u$$

Met afschattingen (12) en (13), met de aanname voor f kunnen we de volgende ongelijkheid construeren uit (7) en (8):

*) - L. Kuipers & R. Timman, Handboek der Wiskunde, Scheltema & Holkema, 1966, p. 748.

$$\frac{d}{dt} (M+m) \leq -B \{m^2 + M^2\} + 2K(0) \{M-m\} \quad (14)$$

Met het rechterlid hiervan herschreven wordt dit:

$$\frac{d}{dt} (M+m) \leq (M-m) (2K(0) + B(M+m)) - 2BM^2 \quad (15)$$

We weten dat $(M-m)$ altijd positief is en $(-2BM^2)$ altijd negatief. Indien we nu een begintoestand hebben waarvoor geldt:

$$(M+m)_{t=0} < \left(-\frac{2K(0)}{B}\right) \quad (16)$$

dan zal $(M+m)$ blijven afnemen:

$$(M+m) < \left(-\frac{2K(0)}{B}\right) \quad t > 0 \quad (17)$$

Met dit resultaat kunnen we M afschatten:

$$0 \leq M < \left(-\frac{2K(0)}{B} - m\right) \quad t > 0 \quad (18)$$

dat we op zijn beurt weer gaan gebruiken om (7) te benaderen. We weten $(M-m)$ altijd positief):

$$\frac{dm}{dt} \leq -Bm^2 + K(0) (M-m) \quad (19)$$

Met (18) wordt dit:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &\leq -Bm^2 + K(0) \left(-\frac{2K(0)}{B} - 2m\right) \\ &= -Bm^2 - \frac{2K^2(0)}{B} - 2mK(0) \end{aligned} \quad (20)$$

Om de structuur in deze differentiaalvergelijking naar voren te halen, schrijven we:

$$q(t) = -\left(m + \frac{K(0)}{B}\right) \quad (21)$$

We kunnen dan (20) weergeven als:

$$\frac{dq}{dt} \geq Bq^2 + \frac{K^2(0)}{B} \geq Bq^2 \quad (22)$$

Hier staat dat q sneller stijgt dan een positief getal maal q^2 .

We nemen aan dat het gelijktteken geldt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{q} \right) = -B \quad (23)$$

De oplossing hiervan luidt:

$$\frac{1}{q} = -Bt + \frac{1}{q_0} \quad (24)$$

ofwel:

$$q(t) = \frac{q_0}{1 - q_0 B t} \quad (25)$$

Als t nadert tot $(q_0 B)^{-1}$ dan gaat q naar oneindig.

Samenvattend kunnen we nu het volgende stellen:

Als we een niet-lineaire golfvergelijking met dispersie hebben van het type (1), waarvoor geldt dat $f'(u)$ een onderste grens $B > 0$ heeft, en waarvoor de kern K een integreerbare, positieve, even functie van zijn argument is, die monotoon stijgt op $(-\infty, 0)$ en dus monotoon daalt op $(0, \infty)$, als we bovendien een begintoestand hebben met

$$(M+m)_{t=0} < -\frac{2K(0)}{B} \quad (26)$$

dan treedt er schokvorming op in een tijdsinterval korter dan

$$t = \left| m_{t=0} B + K(0) \right|^{-1} \quad (27)$$

C. Appendix bij "Speciale stationaire oplossingen"

In de vergelijking:

$$cP_x(x) - \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta)P_x(x-\zeta)d\zeta = f(P)P_x(x) \quad (1)$$

worden de volgende uitdrukkingen gesubstitueerd:

$$c = c_0 + \epsilon c_1 + \epsilon^2 c_2 + \epsilon^3 c_3 + \dots \quad (2)$$

$$P = \epsilon P_1 + \epsilon^2 P_2 + \epsilon^3 P_3 + \dots \quad (3)$$

Vervolgens dienen de verschillende ordes van ϵ gerangschikt te worden. Om het rekenwerk wat overzichtelijk te maken schrijven we het rechterlid van (1) uit in een aantal ϵ -ordes.

We beginnen bij de functie $f(P)$, waarvan we aannemen dat:

$$f(0) = 0 \quad (4)$$

Als we de reeks (3) in $f(P)$ invullen resulteert:

$$f(P) \equiv g(\epsilon) = \epsilon \left. \frac{dg}{d\epsilon} \right|_0 + \frac{1}{2}\epsilon^2 \left. \frac{d^2g}{d\epsilon^2} \right|_0 + \frac{1}{6}\epsilon^3 \left. \frac{d^3g}{d\epsilon^3} \right|_0 + \dots \quad (5)$$

De Taylorcoëfficiënten van (5) zijn:

$$g_1 = \frac{dg}{d\epsilon} = f'(P)P_\epsilon \quad (6)$$

$$g_2 = \frac{d^2g}{d\epsilon^2} = f''(P) (P_\epsilon)^2 + f'(P) P_{\epsilon\epsilon} \quad (7)$$

$$g_3 = \frac{d^3g}{d\epsilon^3} = f'''(P) (P_\epsilon)^3 + 3f''(P) P_{\epsilon\epsilon} P_\epsilon + f'(P) P_{\epsilon\epsilon\epsilon} \quad (8)$$

$$g_4 = \frac{d^4g}{d\epsilon^4} = f''''(P) (P_\epsilon)^4 + 6f'''(P) (P_\epsilon)^2 P_{\epsilon\epsilon} + 4f''(P) P_\epsilon P_{\epsilon\epsilon\epsilon} + 3f''(P) (P_{\epsilon\epsilon})^2 + f'(P) P_{\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon} \quad (9)$$

$$g_5 = \frac{d^5g}{d\epsilon^5} = f''''''(P) (P_\epsilon)^5 + 10f''''(P) (P_\epsilon)^3 P_{\epsilon\epsilon} +$$

$$\begin{aligned}
& + 15f''''(P) P_\epsilon (P_{\epsilon\epsilon})^2 + 10f''''(P) (P_\epsilon)^2 P_{\epsilon\epsilon\epsilon} + \\
& + 10f'''(P) P_{\epsilon\epsilon} P_{\epsilon\epsilon\epsilon} + 5f'''(P) P_\epsilon P_{\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon} + f'(P) P_{\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon} \quad (10)
\end{aligned}$$

In de bovenstaande Taylorcoëfficiënten wordt ϵ op nul gezet. We vinden dan:

$$g_1(0) = f'(0) P_1 \quad (11)$$

$$g_2(0) = f''(0) P_1^2 + 2f'(0) P_2 \quad (12)$$

$$g_3(0) = f'''(0) P_1^3 + 6f''(0) P_1 P_2 + 6f'(0) P_3 \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
g_4(0) = & f''''(0) P_1^4 + 12f''''(0) P_1^2 P_2 + 24f''(0) P_1 P_3 + \\
& + 12f''(0) P_2^2 + 24f'(0) P_4 \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_5(0) = & f''''''(0) P_1^5 + 20f''''(0) P_1^3 P_2 + 60f''''(0) P_1 P_2^2 + \\
& + 60f''''(0) P_1^2 P_3 + 120f''(0) P_2 P_3 + 120f''(0) P_1 P_4 + \\
& + 120f'(0) P_5 \quad (15)
\end{aligned}$$

De bronterm $f(P) P_x$ kan nu worden bepaald:

$$\begin{aligned}
f(P) P_x &= \left\{ \epsilon g_1(0) + \frac{1}{2} \epsilon^2 g_2(0) + \frac{1}{6} \epsilon^3 g_3(0) + \frac{1}{24} \epsilon^4 g_4(0) + \dots \right\} \cdot \\
& \cdot \left\{ \epsilon P_{1x} + \epsilon^2 P_{2x} + \epsilon^3 P_{3x} + \epsilon^4 P_{4x} + \dots \right\} = \\
& = \epsilon^2 \left\{ g_1(0) P_{1x} \right\} + \epsilon^3 \left\{ g_1(0) P_{2x} + \frac{1}{2} g_2(0) P_{1x} \right\} + \\
& + \epsilon^4 \left\{ g_1(0) P_{3x} + \frac{1}{2} g_2(0) P_{2x} + \frac{1}{6} g_3(0) P_{1x} \right\} + \\
& + \epsilon^5 \left\{ g_1(0) P_{4x} + \frac{1}{2} g_2(0) P_{3x} + \frac{1}{6} g_3(0) P_{2x} + \frac{1}{24} g_4(0) P_{1x} \right\} + \dots \quad (16)
\end{aligned}$$

D. Appendix bij Gelijkvormigheid stationaire golven

In par. 2.5 leidden we een voorwaarde af, waaronder stationaire golven d.m.v. schaaltransformaties gegenereerd zouden kunnen worden. Deze voorwaarde laat zich samenvatten tot de volgende:

We zoeken functies $g(x)$, waarvoor geldt:

$$g(x) = \lambda g(\mu x) + \beta \quad (1)$$

met zekere λ , μ en β , $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$

We bekijken eerst het geval waarin $\beta = 0$:

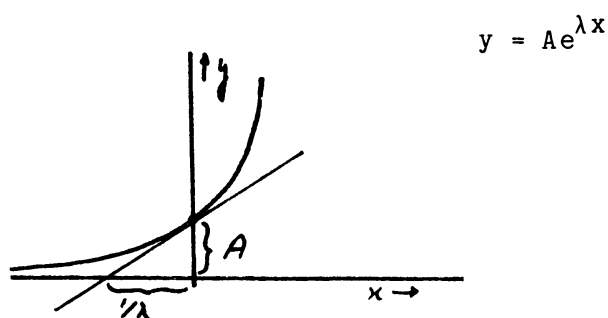
$$g(x) = \lambda g(\mu x) \quad (2)$$

Voorwaarde (2) kan als volgt worden geïnterpreteerd:

We zoeken grafieken $y = g(x)$ die, nadat we de x- en de y-as met een factor μ resp. $\frac{1}{\lambda}$ opgerekt hebben, weer samenvallen met de oorspronkelijke grafiek.

Grafieken die aan (2) voldoen bevatten, zonder schaalverdeling langs de assen, geen enkele informatie over een of andere karakteristieke maat. We lichten dit toe aan de hand van wat voorbeelden.

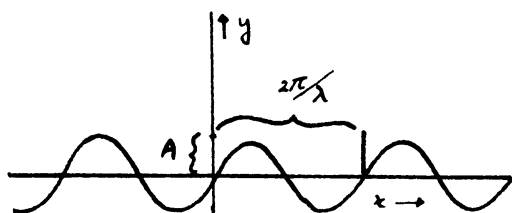
Vb 1



Onafhankelijk van de schaalverdeling zijn hier de afstanden A en λ uit de grafiek te halen.

Vb 2

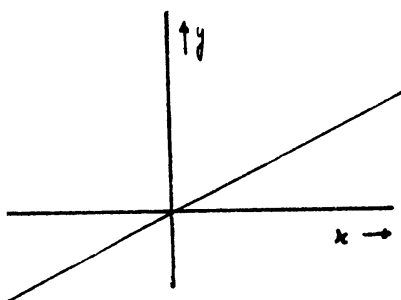
$$y = A \sin(\lambda x)$$



Evenzo zijn hier twee karakteristieke maten te geven.

Vb 3

$$y = Ax$$



In dit geval is geen enkele karakteristieke maat te vinden.

Uit (2) leiden we af:

$$g(x) = \lambda g(\mu x) = \lambda^n g(\mu^n x) \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

$$g(x) = \frac{1}{\lambda} g\left(\frac{x}{\mu}\right) \quad (4)$$

Als we $x = 0$ nemen, vinden we:

$$g(0) = \lambda^n g(0) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \quad \vee \quad g(0) = 0 \quad (5)$$

In het geval dat $\lambda = 1$ geldt:

$$g(x) = g(\mu^n x) \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \quad (6)$$

Voor $\mu = 1$ hebben we een trivialiteit.

Als $\mu \neq 1$ kan aan (6) alleen maar voldaan worden indien g een constante is.

We beschouwen vervolgens de klasse $\lambda \neq 1$.

Stel dat er een z_0 is, $z_0 \neq 0$, waarvoor geldt:

$$g(z_0) = 0 \quad (7)$$

Dan moet volgens (3):

$$g(\mu^n z_0) = 0 \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \quad (8)$$

Als $\mu = 1$, $\lambda \neq 1$ is $g(x) = 0$ voor alle x

Als $\mu \neq 1$, $\mu \neq 1$ en $g(z_0) = 0$, $z_0 \neq 0$, dan is $x = 0$ een verdichtingspunt van nulpunten. Bijgevolg is $g(x)$ dan geen analytische functie en niet acceptabel.

In dit geval: $\mu \neq 1$, $\lambda \neq 1$ heeft g dus maar één nulpunt en wel $z_0 = 0$.

Nu resteert dan nog:

$$\begin{aligned} g(x) &= \lambda g(\mu x) \\ \lambda &\neq 1, \mu \neq 1 \\ \text{enige nulpunt } x &= 0: g(0) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

We veronderstellen:

$$\lambda = \lambda(\mu) \quad (10)$$

en we differentiëren (9) naar μ :

$$0 = \frac{d\lambda}{d\mu} g(\mu x) + \lambda g'(\mu x)x \quad (11)$$

Vermenigvuldigen met μ en $\mu x = y$ stellen leidt tot:

$$\frac{\mu}{\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu} g(y) + g'(y)y = 0 \quad (12)$$

ofwel:

$$g'(y)y = \alpha(\mu)g(y) \quad (13)$$

met:

$$\alpha(\mu) = -\frac{\mu}{\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu} \quad (14)$$

De oplossing van (13) heeft de vorm:

$$g(y) = A \cdot y^{\alpha(\mu)} \quad ; \text{ A willekeurige constante} \quad (15)$$

Een andere klasse van oplossingen van (2) zijn de δ -functies en hun afgeleides:

$$\delta(ay) = \frac{1}{|a|} \delta(y) \quad (16)$$

$$\frac{d^k}{dy^k} (\delta(ay)) = \frac{1}{|a|^k} \frac{d^k}{dy^k} \delta(y)$$

Omdat de vorm (2) uit (1) ontstaat door een keer naar x te differentiëren, kunnen we samenvatten:

Aan $g(x) = \lambda g(\mu x)$ voldoen:

$$g(x) = Ax^\gamma, \lambda \cdot \mu^\gamma = 1; A, \gamma \in \mathbb{R} \quad (17)$$

$$g(x) = A\delta^{(k)}(x), \lambda = |\mu| \mu^k, A \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \quad (18)$$

Aan $g(x) = \lambda g(\mu x) + \beta$ voldoen:

$$g(x) = Ax^\gamma + B, B \cdot (1-\lambda) = \beta; A, B, \gamma \in \mathbb{R} \quad (19)$$

Literatuurverwijzingen

Bij een verkenningstocht door de literatuur over de theorie van de golfvoortplanting zal het de lezer opvallen dat er sprake mag zijn van twee literatuurverzamelingen: een Russische en een Engels-Amerikaanse. Het lijkt erop alsof beide partijen slechts dan naar elkaar verwijzen indien men echt niet meer om elkaar heen kan. Heeft de lezer in de bibliotheek slechts de beschikking over de Westerse tijdschriften, bijvoorbeeld J.F.M. en Proc. Roy. Soc., dan is de kans groot om een paar prachtige overzichtsartikelen uit het Russische kamp mis te lopen. Hierom en ook om meerdere en diepergaande ingangen te hebben tot het vakgebied bevat de onderstaande literatuurlijst wat meer artikelen dan er in dit verslag vermeld worden in de voetnoten.

Boeken:

V.I. Arnold, Les méthodes mathématiques de la mécanique classique, Editions Mir, Moscou, 1976.

F.P. Beer & E.R. Johnston, Vector mechanics for engineers: Statics, McGraw-Hill, 1962.

R. Courant, Differential and integral calculus I, Blackie & Son, 1962.

R. Courant & D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik II, Heidelberger Taschenbücher, Springer, 1968.

H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley, sec. ed., 1980.

V.I. Karpman, Nonlinear waves in dispersive media, Pergamon, 1975.

L. Kuipers & R. Timman, Handboek der Wiskunde, Scheltema & Holkema, 1966.

L.D. Landau & E.M. Lifshitz, Fluid mechanics, Pergamon, 1966.

H.A. Lauwerier, Asymptotic analysis I, Mathematical Centre Tract, 1977.

M.J. Lighthill, Waves in fluids, Cambridge, 1979.

A. Messiah. Quantummechanics vol. 1, North-Holland, 1965.

P.M. Morse & H. Feshbach, Methods of theoretical physics I, McGraw-Hill, 1953.

G.B. Whitham, Linear and nonlinear waves, Wiley, 1974.

Artikelen:

J.P. Dougherty, Lagrangian methods in plasma dynamics I. General theory of the method of the averaged Lagrangian. J. Plasma Physics, 4 (4), 1970, pp 761-785.

C. Eckart, The approximate solution of one-dimensional wave equations, Rev. Mod. Phys., 20 (2), 1948, pp 399-417.

A.V. Gaponov-Grekhov & M.I. Rabinovich, L.I.Mandel'shtam and the modern theory of nonlinear oscillations and waves, Sov. Phys. Usp., 22 (8), 1979, pp 590-614.

A.V. Gaponov, L.A. Ostrovskii & M.I. Rabinovich, One-dimensional waves in dispersive nonlinear systems, Izv. VUZ. Radiofizika (Radiophysics and Quantumelectronics), 13 (2), 1970, pp 121-161.

B.B. Kadomtsev & V.I. Karpman, Nonlinear waves, Sov. Phys. Usp., 14 (1), 1971, pp 40-60.

M.I. Lighthill, Group velocity, J. Inst. Math. Applics., 1, 1965, pp 1-28.

J.R. Merrill, Waves in dispersive media: another use of computers in introductory physics, Am. J. Physics, 39, 1971, pp 539-544.

L.A. Ostrovskii, Shock waves and solitons (selected problems), Izv. VUZ. Radiofizika (Radiophysics and Quantumelectronics), 19 (5), 1976, pp 464-486.

- E.N. Pelinovskii, Certain exact methods in the theory of nonlinear waves, *Izv. VUZ. Radiofizika (Radiophysics and Quantumelectronics)*, 19 (6), 1976, pp 629-641.
- M.I. Rabinovich & A.L. Fabrikant, Nonlinear waves in nonequilibrium media, *Izv. VUZ. Radiofizika (Radiophysics and Quantumelectronics)*, 19 (5), 1976, pp 508-543.
- R.L. Seliger, A note on the breaking of waves, *Proc. Roy. Soc., A* 303, 1968, pp 493-496.
- J.S. Toll, Causality and the dispersion relation, *Phys. Rev.*, 104 (6), 1956, pp 1760-1770.
- G.B. Whitham, Group velocity and energy propagation for three-dimensional waves, *Comm. Pure Appl. Math.*, 14, 1961, pp 675-691.
- G.M. Zaslavskii, Nonlinear waves and their interaction, *Sov. Phys. Usp.*, 16 (6), 1974, pp 761-776.
- G.M. Zaslavskii & N.N. Filonenko, Kinetics of nonlinear waves in dispersive media, *Sov. Phys. JETP*, 30 (4), 1970, pp 666-681.