

numerieke randvoorwaarden
met minimale reflectie
voor modellen
op een eindig domein

J.I. van den Berg

wetenschappelijke rapporten WR 86-3

Voorwoord

Dit rapport vormt het verslag van zes maanden stage op het KNMI als afronding van mijn studie numerieke wiskunde aan de Vrije Universiteit te Amsterdam met als afstudeerdocent Prof.Dr. M. van Veldhuizen.

Het idee voor het onderwerp van deze stage kwam van Dr. A.G.M. Driedonks die ook op het KNMI de stage begeleid heeft. Ook Ir. P.G. Duynkerke en Dr.Ir. Th.L. van Stijn hebben veel aan het resultaat bijgedragen.

De Bilt, juni 1986

Nettie van den Berg

Inhoudsopgave

1.	Inleiding	
1.1.	Algemeen	1
1.2	Een voorbeeld van gravitatiegolven	4
2.	De één-dimensionale advectionvergelijking	
2.1	Inleiding	8
2.2	Analytische beschouwing van de advectionvergelijking	8
2.3	(Semi-)discrete beschouwing van de advectionvergelijkingen	11
2.3.1	De semi-discrete vergelijking	11
2.3.2	Randvoorwaarden in het semi-discrete geval	16
2.3.3	De volledig gediscretiseerde vergelijking	20
2.3.4	Randvoorwaarden in het volledig gediscretiseerde geval	22
2.4	De sponszone	28
2.5	Numerieke testvoorbeelden	33
2.6	Conclusie	35
3.	De tweedimensionale vergelijking	
3.1	Inleiding	42
3.2	De basisvergelijkingen	43
3.3	Randvoorwaarden	45
3.3.1	Algemene opmerkingen	45
3.3.2	Horizontale randvoorwaarden	48
3.3.3	Analytische bovenrandvoorwaarde	48
3.3.4	Numerieke bovenrandvoorwaarde	50
3.4	De numerieke implementatie	53
3.4.1	Het rekenrooster	53
3.4.2	Tijdsfiltering	55
3.5	Testvoorbeelden	57
3.5.1	The mountain wave	58
3.5.2	Het Sint Andreas kruis	60
3.6	Testresultaten	62
3.6.1	Tests met bovenrandvoorwaarden	62
3.6.2	Tests met zijrandvoorwaarden	66
3.7	Conclusies	75
4.	Conclusies	76
5.	Literatuurlijst	78
	Appendix	81

Samenvatting

Doel van dit rapport is om te onderzoeken welke mogelijke randvoorwaarden opgelegd kunnen worden om een stelsel differentiaal vergelijkingen numeriek oplosbaar te maken. De beschrijvende vergelijking voor de grenslaag vormen een stelsel differentiaalvergelijkingen. Dit stelsel is onderbepaald indien het discreet opgelost wordt. Ten gevolge van het discretiseren hebben we meer onbekenden dan vergelijkingen.

Allereerst is onderzocht wat de consequenties zijn voor de mogelijke oplossingen bij het discreet benaderen van een differentiaalvergelijking. Aan de hand van de lineaire ééndimensionale advectionvergelijking zijn begrippen als dispersierelatie, fasesnelheid en groepssnelheid ingevoerd. Met behulp van de dispersierelatie, die de afhankelijkheid tussen de frequentie ω en het golfgetal k aangeeft, is aan te tonen dat er bij het discreet benaderen van een advectionvergelijking met centrale differentieteknieken, twee mogelijke golfoplossingen optreden. Een ervan benadert de analytische oplossing, de ander wordt ook wel "computational mode" genoemd. Deze laatste zijn de golven met een hoge frequentie en een groepssnelheid (die de energievoortplanting bepaalt) tegengesteld gericht aan de fasesnelheid (die de golfvoortplanting bepaalt). Bij het opleggen van randvoorwaarden kunnen deze computational modes aangeslagen worden. Door nu de randvoorwaarden aan te passen kunnen reflecties, ofwel het aanslaan van de computational modes, tegengegaan worden. Voor de ééndimensionale advectionvergelijking zijn verschillende randcondities getest. Hiervoor zijn reflectiecoëfficiënten bepaald zodat een optimale keuze gemaakt kan worden. De randconditie van Sundström & Elvius (Sundström & Elvius, 1979), die afgeleid is van de gedachte dat de stroming langs een karakteristiek loopt en de randvoorwaarde opgesteld door Orlanski (Orlanski, 1976) die voor ieder punt aan de zijrand een fasesnelheid bepaalt waarmee de stro-

ming het domein uit loopt, blijken het best te voldoen. De eenvoud van de conditie van Sundström & Elvius zorgt ervoor dat deze veel gebruikt wordt ondanks de kleine verstoringen die nog optreden.

Daarna zijn de randcondities die opgelegd moeten worden bij het van een gelineariseerd tweedimensionaal hydrostatisch Boussinesq stelsel vergelijkingen op een begreind domein. Aan de in- en uitstroomranden (de zijranden) en aan de bovenrand moeten randvoorwaarden opgelegd worden. Op de onderrand, het aardoppervlak, wordt de oplossing voorgeschreven. Als natuurlijke oplossing van dit stelsel ontstaan gravitatiegolven die in de verticaal een tegengesteld gerichte fase- en groepssnelheid hebben. Dit betekent dat golven die omhoog lopen energie naar beneden transporteren, golven die naar beneden lopen transporteren energie omhoog. Een eis die aan de bovenrand opgelegd wordt is dat er alleen energie het domein uit getransporteerd mag worden. Alleen golven met een omhoog gerichte groepsnelheid en dus neerwaarts gerichte fasesnelheid worden in de verticaal aan de bovenrand toegelaten. Met behulp van Fourieranalyse is een stralingsrandvoorwaarde opgesteld die aan de bovenrand een relatie tussen de druk en de verticale snelheid geeft, zodanig dat aan de voorgaande eis is voldaan. Deze randconditie is getest aan de hand van twee testvoorbeelden, een Sint Andreas kruis en een "mountain wave". Omdat deze stralingsconditie een beperking in de keuze van de tijdstapgrootte levert is een vorm afgeleid waarin een impliciete waarde voor de druk aan de bovenrand gebruikt werd. Bij vergroting van de tijdstap werd het stelsel niet instabiel maar de onnauwkeurigheid werd zeer groot. Tevens is de conditie welke tot nu toe meestal gebruikt wordt, het aanleggen van een sponszone waarin de energie geabsorbeerd wordt, vergeleken met de stralingsrandvoorwaarde. Voor de zijranden wordt in het twee-dimensionale geval verwezen naar de resultaten verkregen bij de analyse van de één-dimensionale advectionvergelijking.

Summary

Purpose of this report is to test several possible boundary conditions for minimal disturbances necessary to solve a set of equations with numerical methods. The equations that describe the boundary layer form a set of differential equations. This set is underdetermined when solved discrete. As a result of the discretisation we have more unknown than equations.

First of all, the consequences for the possible solutions of the discrete approximations of a differential equation are tested. With the help of the linear one-dimensional advection equation are new terms as dispersion relationship, phase velocity, group velocity introduced. With the aid of the dispersion relationship, that gives the dependence between the frequency ω and the wavenumber k , it is possible to show that the discrete approximation of the advection equation with central differences gives rise to two possible wave solutions. One approximates the analytic solution, the other the so called "computational mode". These are the waves with the highest frequency and a group velocity (which determines the energy propagation) with an opposite direction to the phase velocity (which determines the wave propagation). By introducing boundary conditions the existing of these computational modes can become possible. By fitting the boundary conditions, reflections or the introduction of computational modes can be suppressed. For the one-dimensional linear advection equation several boundary conditions are tested. The reflection coefficients are determined so an optimal choice can be made. The condition of Sundström and Elvius (Sundström and Elvius, 1979) derived from the thought that the flow follows the characteristic, and the boundary condition derived by Orlanski (Orlanski, 1976) which defines for every boundary point the phase velocity with which the flow leaves the

domain. The simplicity of the condition of Sundström and Elvius makes that it is used the most, despite the little disturbances that appear. The boundary conditions necessary for the numerical solution of a linearized two-dimensional hydrostatic Boussinesq set of equations on a limited domain are examined. At the inflow and outflow boundaries (the lateral boundaries) and at the upper boundary it is necessary to introduce boundary conditions. At the under boundary (the surface of the earth) the solution is prescribed. As natural solution of this set of equations appear gravity waves which have in the vertical a group and phase velocity in opposite direction. This means that waves which transport energy upward travel downward, waves that transport energy downward travel upward. A demand for the upper boundary is that only energy may leave the domain and no energy may be transported into the domain. So only waves with an upward group velocity and downward phase velocity are allowed in the vertical at the upper boundary. With the aid of Fourieranalysis a radiation condition is derived that gives a relation between the pressure and the vertical velocity so that the above mentioned aim is sufficed. This boundary condition is tested for two examples, the Sint-Andrews cross and a mountain wave. Because this radiation condition limits the choice of the maximum allowable timestep, a form is derived in which the implicit pressure at the upper boundary is used. By widening the timestep the set didn't become unstable but the inaccuracy became unacceptable. Also the commonly used condition of using a sponge-zone in which energy is absorbed so there is no wave travelling at the boundaries, is tested and compared with the radiation condition. For the lateral boundary conditions in the two-dimensional case is referred to the analysis of the one-dimensional advection equation.

1. Inleiding

1.1 Algemeen

De stroming in de atmosfeer wordt beschreven door een stelsel hyperbolische differentiaalvergelijkingen. Als dit stelsel wordt opgelost op een domein dat de gehele atmosfeer omvat, dan levert de formulering van de randvoorwaarden meestal geen specifieke problemen.

In veel gevallen echter, moeten de vergelijkingen op een beperkt deel van de atmosfeer worden opgelost, bijvoorbeeld omdat we in dat domein in meer details van de stroming geïnteresseerd zijn dan bij een model voor de hele aardbol. In dat geval heeft het beperkte domein nog wel een vaste onderrand (het aardoppervlak) maar de zijranden en de bovenrand zijn geen natuurlijke grenzen meer maar kunstmatige randen. De randvoorwaarden die op deze denkbeeldige randen geformuleerd worden moeten dan liefst zo zijn dat ze "doorzichtig" zijn en geen of zo weinig mogelijk ongewenste effecten hebben. Bij het numeriek oplossen van de stromingsvergelijkingen, op een beperkt domein is een van de problemen om de randvoorwaarden numeriek zo te kiezen dat golven die het domein uit willen lopen dat zo ongestoord mogelijk en met zo weinig mogelijk kunstmatige reflectie kunnen doen ("open randvoorwaarden"). Voor de formulering van goede randvoorwaarden bij de zijwanden is veel onderzoek gedaan (zie bijv. Sundström & Elvius, 1979). Voor de formulering van bovenrandvoorwaarden gelden ander specifieke problemen en recent zijn hiervoor enkele suggesties gedaan (Bougeault, 1982; Klemp en Durran, 1982) die in dit rapport nader onderzocht worden.

In dit onderzoek is vooral gekeken naar de formulering van randvoorwaarden op een twee-dimensionaal domein (x - z vlak) met een vaste onderrand. Het domein is 1 à 2 km hoog en enkele tientallen kilometers lang. De vergelijkingen die bekeken worden zijn een vereenvoudigde vorm van het

stelsel vergelijkingen voor de stroming in de atmosferische grenslaag. We willen vooral de gevolgen van golfvoortplanting bestuderen. Daarom zijn diffusie-termen weggelaten om er een gelaagde grenslaag te simuleren. Verder is ook het effect van draaiing van de aarde uit de vergelijkingen verwijderd. Geluidsgolven worden ook weggefilterd. De vergelijkingen zijn zo opgezet dat ze alleen nog zwaartekrachtsgolven (gravitatiegolven) toelaten. Dit is juist het fenomeen dat we willen bestuderen. Voorts worden de vergelijkingen in gelineariseerde vorm bekeken omdat er dan in bepaalde gevallen een analytische oplossing bekend is waarmee de numerieke oplossing vergeleken kan worden.

Voor het oplossen van een hyperbolische vergelijking op een eindig domein is het voldoende als de randvoorwaarden aan de instroomranden (beginvoorwaarden) gespecificeerd zijn. De oplossing is dan volledig bepaald. Het is analytisch niet toegestaan om ook nog eens extra randvoorwaarden aan de zgn. uitstroomranden op te leggen: in principe is de oplossing daar al bepaald. Bij het numeriek oplossen van de vergelijking zal het echter nodig blijken om ook aan de uitstroomranden het gedrag voor te schrijven en het is zaak dit zo te doen dat de werkelijke oplossing zo goed mogelijk benaderd wordt, dus de uitstroomranden moeten doorzichtig zijn. Dit gebeurt door er zoveel mogelijk voor te zorgen dat aan de uitstroomranden alleen energie het gebied uit kan gaan en dat er daar geen energie het gebied in kan stromen. Voor wat betreft gravitatiegolven is er een verschil tussen het voldoen aan deze conditie aan de uitstroomrand aan de zijkant van het domein en die aan de bovenkant. Dit probleem hangt samen met het bepalen van de fasesnelheid en de groepssnelheid van gravitatiegolven (zie voor een discussie over de begrippen fasesnelheid en groepssnelheid de Appendix). De energie wordt getransporteerd met en in de richting van de groepssnelheid en het is dus zaak om er bij de uitstroomranden voor te zorgen dat er geen golven zijn met een groepssnelheid die

het domein inlopen.

Gravitatiegolven hebben de eigenschap dat de horizontale component van de groepssnelheid dezelfde richting heeft als de horizontale fasesnelheid. De verticale component van de groepssnelheid heeft echter een tegengestelde richting aan de verticale fasesnelheid (althans als de achtergrondstroming nul is).

Aan de zijkant van het domein kunnen we dus zo te werk gaan dat we vlak voor de uitstroomrand de fasesnelheid van de oplossing bepalen en de waarde op de rand zelf zo specificeren dat de golf keurig het domein uitgeleid wordt zonder te reflecteren (Orlanski, 1976). Om van dit probleem een goed begrip te krijgen wordt in hoofdstuk 2 uitgebreid ingegaan op de één-dimensionale (gelineariseerde) advectionvergelijking op een eindig gebied.

Aan de bovenrand van het domein werkt deze methode niet. Om te zorgen dat er alleen energie de bovenrand uit kan en er geen energie naar binnen komt, moeten we zorgen dat aan de bovenrand alleen golven met een opwaartse groepssnelheid voorkomen. Deze golven hebben echter een neerwaartse fasesnelheid (als karakteristiek van gravitatiegolven) en informatie hierover is op de roosterpunten niet aanwezig. In dit rapport zal een andere methode besproken worden om er voor te zorgen dat aan de bovenrand alleen golven met opwaartse groepssnelheid voorkomen. Deze methode is gebaseerd op een eis die aan het verband tussen de Fourier-componenten van de druk en de verticale wind over de bovenrand gesteld moet worden voor de opwaartse groepssnelheid (Bougeault 1982, Klemp en Durran, 1982). In hoofdstuk 3 wordt deze randconditie besproken en toegepast in een twee-dimensionaal domein (x-z) en de numerieke oplossing wordt vergeleken met een aantal bekende analytische oplosbare gevallen. Tevens worden in dit hoofdstuk de numerieke aspecten van het oplossen van het stelsel vergelijkingen onderzocht, zoals stabiliteit, demping,

numerieke diffusie. Ook wordt ingegaan op "computational modes" ten gevolge van het gebruikte numerieke schema.

Een geheel andere, minder elegante, aanpak om er voor te zorgen dat er aan de randen geen reflecties optreden is het gebruik van een zgn. "sponszone" (zie bijv. Davies, 1976). Het domein wordt met ongeveer eenderde deel uitgebreid (horizontaal en vertikaal) en in dit extra gebied wordt een numerieke dempingscoëfficiënt ingevoerd die zo groot is dat aan de randen geen golfvormige oplossingen meer aanwezig zijn. De numerieke randvoorwaarden doen dan niet veel meer ter zake. Deze methode wordt ook nog vrij veel gebruikt maar heeft als duidelijke nadelen dat het domein onnodig groot wordt (en er dus meer rekentijd en geheugen nodig is) en dat het domein kunstmatig van de rest van de atmosfeer geïsoleerd wordt (geen open randen). Een voordeel echter is dat de spons ook bij niet-lineaire vergelijkingen toegepast kan worden.

1.2 Een voorbeeld van gravitatiegolven

Een gravitatiegolf is een oscillerende beweging die geïnduceerd wordt door de zwaartekracht zoals de naam al impliceert. De frequentie die specifiek is voor deze golfbeweging heet de Brunt-Väisälä frequentie. In een eenvoudig geval kan men denken aan een stabiel gelaagd medium waarin een pakketje lucht uit zijn evenwichtstoestand verplaatst wordt. Ten gevolge van de zwaartekracht en de inertiaalkracht zal dit pakketje een oscillerende beweging rond zijn evenwichtstoestand uit gaan voeren.

Gravitatiegolven kunnen op verschillende wijzen ontstaan. Een voorbeeld zal gegeven worden van een in Europa vaak voorkomende manier, nl. gravitatiegolven als gevolg van orografie. In stabiele omstandigheden ontstaan deze als lucht over bergen getransporteerd wordt, de op- en neergaande luchtbeweging forceert een golfpatroon. Op bijgaande satellietfoto (figuur 1.1 en 1.2) zijn deze zichtbaar boven Ierland en Engeland. Door

de stijgende beweging en de daarmee gepaard gaande afkoeling treedt condensatie, dus wolkenvorming, op in de golftoppen, dit maakt het golfpatroon zichtbaar.

Vanwege de eigenschap van gravitatiegolven dat in de verticale richting de fasesnelheid en groepssnelheid van richting verschillen, liggen de golffronten niet in de richting van de overheersende windrichting, maar onder een hoek die o.a. afhankelijk is van de grootte van de gemiddelde wind. Dit maakt gravitatiegolven herkenbaar op satellietfoto's en te onderscheiden van de gewone convectiebanen, die wel in de richting van de overheersende achtergrondwind liggen. Op bijgaande foto's is de windrichting en -snelheid bij de figuren aangegeven. De golffronten liggen duidelijk onder een hoek ten opzichte van de windrichting en niet in de richting van de overheersende achtergrondwind.

Figuur 1.

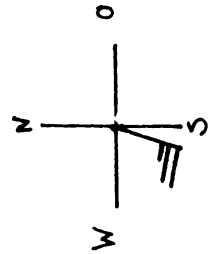


Figure 1.2



2. De ééndimensionale advectionvergelijking

2.1 Inleiding

Om een goed inzicht te kunnen krijgen in de complexe meerdimensionale vergelijkingen en in het bijzonder de randwaarden nodig in numerieke modellen zal eerst uitgebreid ingegaan worden op de (lineaire) ééndimensionale advectionvergelijking. Door het numeriek oplossen van de vergelijking op een eindig domein ontstaat in het algemeen het probleem dat er meer onbekenden dan vergelijkingen zijn. Dit wordt opgelost door het gedwongen opleggen van een randvoorwaarde aan de uitstroomrand. Hierdoor kunnen oscillaties in de oplossing ten gevolge van reflecties tegen deze zijrand ontstaan. Aan de hand van de ééndimensionale advectionvergelijking kan het ontstaan van deze oscillaties duidelijk gemaakt worden en kunnen deze zelfs expliciet berekend worden. Door deze analyse kan dan een beeld gevormd worden van het gedrag van de numerieke oplossing aan een zijrand van het domein voor verschillende keuzen van numerieke randvoorwaarden. De meeste van deze 'niet natuurlijke' uitstroomrandvoorwaarden leveren oscillaties. We gaan na of er een is die niet dan wel zwak reflecteert.

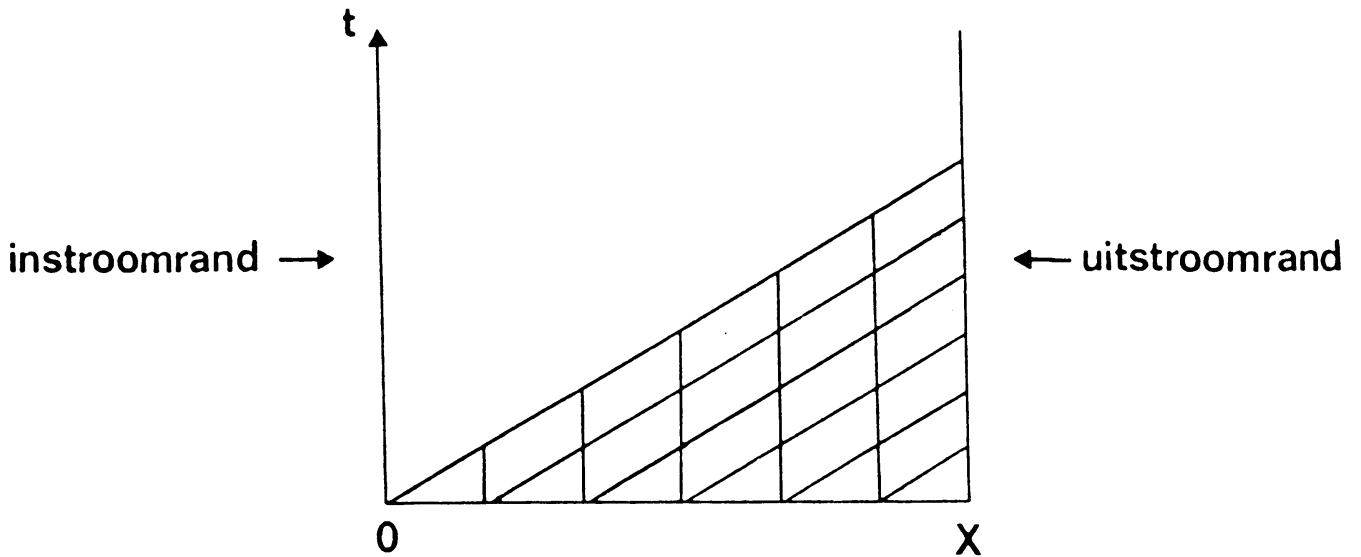
2.2 Analytische beschouwing van de advectionvergelijking

De ééndimensionale lineaire advectionvergelijking heeft de gedaante:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + C \cdot \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \text{stel } C > 0 \quad (2.1)$$

Deze vergelijking geeft weer hoe een bepaalde grootte $q(x,t)$ (bijvoorbeeld een concentratie of windsnelheid) geadvecteerd (verplaatst) wordt met een snelheid C in de ruimte (x) en de tijd (t). De advectionssnelheid C is hier onafhankelijk van x en t gekozen.

Het is eenvoudig in te zien dat $q(x,t) = Q(x-C.t)$ een oplossing van de vergelijking is. De oplossing neemt dus constante waarden aan langs de lijn $x-C.t = \text{constant}$. Deze lijnen vormen de karakteristieken in het (x,t) vlak. Stel nu dat we de vergelijking op willen lossen voor een beperkt ruimtedomein $0 < x < X$ vanaf $t=0$, met als beginvoorwaarde gegeven $q(x,0)$.



Figuur 2.1

Doordat er op $t=0$ een beginvoorwaarde $q(x,0)$ is opgelegd is in het gearceerde gebied van figuur 2.1 de oplossing bepaald. Om de oplossing ook in het erboven liggende gebied te bepalen moeten voor $x=0, t>0$ randcondities (zg. instroomwaarden) opgelegd worden. Met de beginvoorwaarde op $t=0$ en de randvoorwaarden voor $x=0, t>0$ is de oplossing eenduidig vastgelegd. Op de lijn $x=X$ (de zg. uitstroomrand) kan dus niet nog een extra randconditie opgelegd worden omdat de oplossing daar afhankelijk is van de beginconditie op $t=0$ en/of van de randconditie aan het instroompunt en het gedrag van de grootheid binnen het domein.

Voordat we overgaan tot de numerieke oplosmethoden van (2.1) zullen we eerst enkele algemene eigenschappen van harmonische oplossingen van (2.1) bespreken voor het analytische geval zoals de dispersierelatie, fasesnel-

heid, groepssnelheid en demping. Daarna zullen we deze eigenschappen weer voor de gediscretiseerde vergelijking bekijken. De inhoud en fysische betekenis van deze eigenschappen staan in de Appendix.

Stel dat de oplossing van vergelijking (2.1) de vorm

$$q(x,t) = \operatorname{Re}(q \cdot e^{i(kx - \omega t)}) \quad (2.2)$$

heeft, met k het golfgetal (het aantal golflengten per lengte-eenheid) in de x -richting en ω de tijdsfrequentie. Deze gedaante (2.2) van de oplossing is verantwoord indien we lineaire grootheden beschouwen. Voor dit analytische geval gelden dan de volgende relaties:

$$\begin{aligned} \cdot \text{ dispersierelatie} & \quad \omega = C \cdot k \\ \cdot \text{ fasesnelheid} & \quad u_{f,a} = \frac{\omega}{k} = C \\ \cdot \text{ groepssnelheid} & \quad u_{g,a} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = C \end{aligned} \quad (2.3)$$

Als laatste wordt de dempingsfactor geïntroduceerd. Deze is gedefinieerd als:

$$\xi = \frac{q(x, t + \Delta t)}{q(x, t)} \quad (2.4)$$

en geeft aan hoe de grootheid $q(x, t)$ zich na een kleine tijdstoename verhoudt tot zijn oorspronkelijke waarde. De dempingsfactor is dus een maat voor de demping of versterking van het verloop van de grootheid $q(x, t)$ in de tijd. In het geval van oplossing (2.2) geldt:

$$\cdot \text{ dempingsfactor } \xi = e^{-i\omega \cdot \Delta t} \quad (2.5)$$

waarbij ω wordt beschreven door de dispersierelatie (2.3). Als ω complex

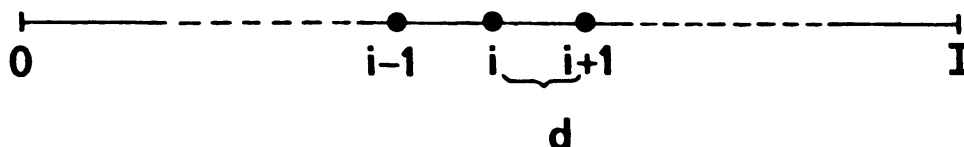
is treedt er echter demping of versterking op (afhankelijk van het teken van het imaginaire deel van ω), in het geval dat ω reëel is blijft de amplitude van $q(x,t)$ gelijk in de tijd.

2.3 (Semi-)discrete beschouwing van de advectionvergelijking

2.3.1 De semi-discrete vergelijking

We zullen nu bekijken hoe de numerieke oplossing van (2.1) zich gedraagt als we voor de oplosmethode centrale differenties in de plaats gebruiken.

Kies een ééndimensionaal equidistant grid met roosterafstand d en i de index die het gridpunt aangeeft. De instroomrand wordt aangegeven door $i=0$ en $i=I$ geeft de uitstroomrand aan. Het grid ziet er als volgt uit:



Figuur 2.2

Discretiseer de advectionvergelijking nu alleen in de plaats met een centrale discretisatie. Dan wordt het volgende stelsel semidiscrete vergelijkingen verkregen:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + c \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{2d} = 0 \quad i=1 \dots I-1 \quad (2.6)$$

Dit stelsel vergelijkingen (2.6) is onderbepaald op een eindig domein, er zijn meer onbekenden dan vergelijkingen. Om dit op te lossen kunnen we de waarden van q_I voorschrijven. Dit vormt dus juist het probleem van het opleggen van randwaarden. Hoe de waarde van q_I

bepaald kan worden zal verderop besproken worden. Allereerst zullen enkele algemene eigenschappen van (2.6) net zoals in het voorgaande besproken worden.

Beschouw hiervoor op analoge wijze als in het analytische geval een normal-mode oplossing van de vorm:

$$q_j(t) = \text{Re}(q \cdot e^{i(k \cdot j \cdot d - \omega \cdot t)}) \quad (2.7)$$

voor de semidiscrete vergelijkingen (2.6).

Door nu (2.7) als oplossing in (2.6) in te vullen wordt de volgende dispersierelatie verkregen:

$$\omega = C \cdot k \cdot \frac{\sin(kd)}{kd} \quad (2.8)$$

Hieruit blijkt dat de centrale discretisatie in de plaats de frequentie ω filtert met de filterfunctie $\frac{\sin(kd)}{kd}$.

De fasesnelheid en de groepssnelheid voor de semidiscrete vergelijking s_d zijn nu eenvoudig te bepalen aan de hand van de dispersierelatie (2.8).

$$\begin{aligned} \bullet \quad \omega &= C \cdot k \cdot \frac{\sin(kd)}{kd} \\ \bullet \quad \text{fasesnelheid} \quad u_{f, sd} &= \frac{\omega}{k} = C \cdot \frac{\sin(kd)}{kd} \\ \bullet \quad \text{groepssnelheid} \quad u_{g, sd} &= \frac{d\omega}{dk} = C \cdot \cos(kd) \\ \bullet \quad \text{dempingsfactor} &= \xi_{sd} = \frac{q(x, t + \Delta t)}{q(x, t)} = e^{-i\omega \cdot \Delta t}, \quad \|\xi_{sd}\| = 1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Een alternatief voor de centrale discretisatie in de plaats zou zijn om een upstream schema te gebruiken. Een voordeel hiervan is dat het niet nodig is om randvoorwaarden voor te schrijven. Dit schema is echter sterk diffusief en heeft een sterke demping. Dit kan als volgt ingezien worden:

De semidiscrete vergelijkingen waarbij voor de plaatsafgeleide een upstream-schema is gebruikt hebben de volgende vorm:

$$\frac{dq_i}{dt} + C \frac{q_i - q_{i-1}}{d} = 0 \quad i=1, \dots, I \quad (2.10)$$

Met behulp van Taylorreeksanalyse kunnen we eenvoudig een uitdrukking voor de afbreekfout bepalen. Ontwikkel hiervoor $q_{i+1} = q(x_i + d, t)$ in een Taylorreeks rond $q_i = q(x_i, t)$. Invullen in (2.10) leidt dan tot:

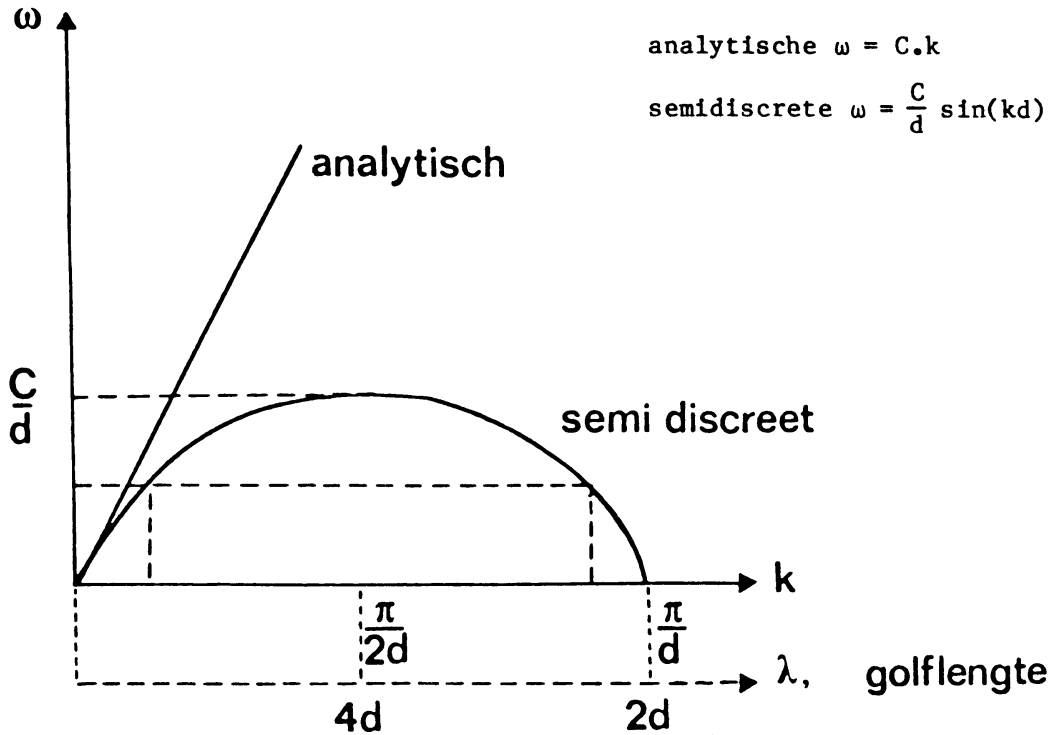
$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + C \frac{\partial q_i}{\partial x} = \frac{1}{2} d \frac{\partial^2 q_i}{\partial x^2} + O(d^2).$$

Bij de foutafschatting komt een 2e orde afgeleide term van de grootheid q voor, hetgeen juist overeenkomt met een diffusie-term. Het gebruiken van een upstream schema leidt dus tot het kunstmatig introduceren van diffusie in het stelsel vergelijkingen. Door nu weer (2.7) als normal-mode oplossing in (2.10) in te vullen krijgen we de volgende dispersierelatie:

$$\omega = C \cdot k \cdot \frac{\sin(kd) - i \cdot (1 - \cos(kd))}{kd} \quad (2.11)$$

Merk nu op dat ω complex is en dat met de versterkingsfactor (2.4), toegepast op het punt x_i direct volgt dat er demping optreedt bij het oplossen van de vergelijkingen.

In de volgende figuur zijn de dispersierelaties (2.2) voor het analytische geval en (2.8) voor het semi discrete geval met een centraal gediscrètiseerde tijdsafgeleide weergegeven:



Figuur 2.3

Voor het semidiscrete geval geldt in de limiet voor $kd \rightarrow 0$ dat $\omega = Ck \frac{\sin(kd)}{kd} \rightarrow Ck$, ofwel de semidiscrete en analytische oplossing zijn in de limiet gelijk aan elkaar.

Uit figuur 2.3 is direct af te lezen dat er bij het numeriek discretiseren volgens (2.6) er voor iedere ω twee golfoplossingen mogelijk zijn met golfgetallen k_1 en k_2 zodanig dat $k_1 + k_2 = \frac{\pi}{d}$. Noem nu een golf met golfgetal k_1 , $0 < k_1 < \frac{\pi}{2d}$ een "echte" oplossing (deze benadert de analytische oplossing) dan wordt de oplossing met golfgetal k_2 , $\frac{\pi}{2d} < k_2 < \frac{\pi}{d}$ ook wel omschreven als de "computational mode". Deze computational mode ontstaat dus ten gevolge van het numeriek discretiseren van de advectionvergelijking.

Voor de semi-discretisatie wordt de dempingsfactor ξ gedefinieerd door:

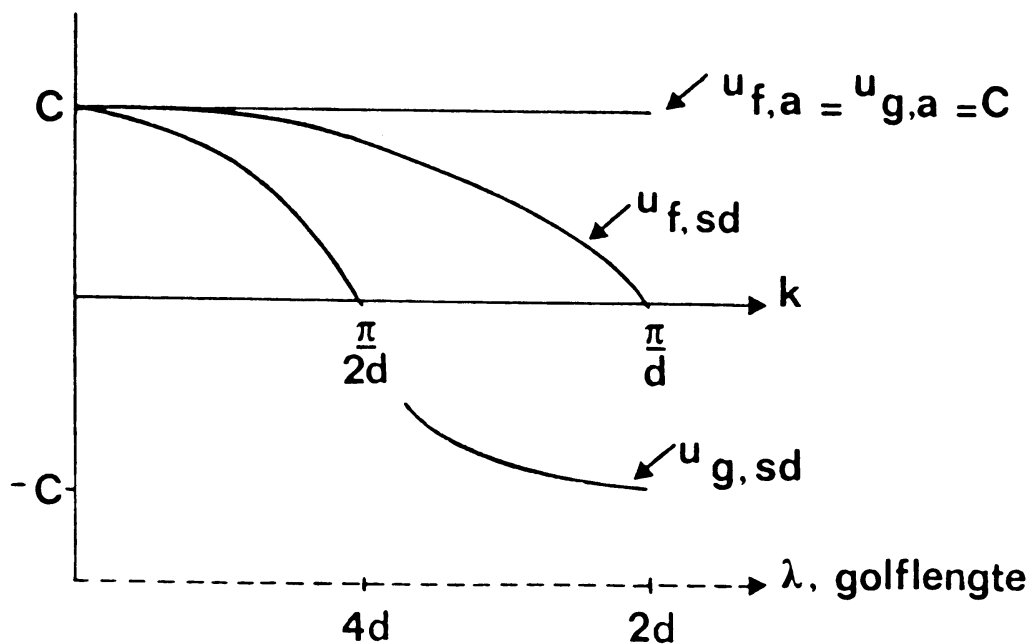
$$\xi = \frac{q_j(t+\Delta t)}{q_j(t)}$$

Invullen van de normal-mode oplossing (2.7) en gebruik makend van de dispersierelatie (2.8) vinden we voor de dempingsterm de volgende uitdrukking:

$$\xi = e^{-iC \cdot \frac{\sin kd}{kd} \cdot \Delta t} \quad (2.12)$$

dus $\|\xi\| = 1$.

In een grafiek kunnen we ook de fasesnelheden en groepssnelheden van zowel de analytische (2.3) als semi-discrete (2.9) oplossing uitzetten:



Figuur 2.4

2.3.2 Randvoorwaarden in het semi-discrete geval

Uit figuur 2.4 blijkt dat voor $k > \frac{\pi}{2d}$ de groepssnelheid en fasesnelheid tegengesteld zijn voor het semi-discrete geval. De groepssnel-

heid is dan negatief, dit in tegenstelling tot de analytische oplossing. Voor $k > \frac{\pi}{2d}$ ontstaan dus naar rechts lopende golfoplossingen ($u_{f,sd} > 0$) maar de energie wordt naar links getransporteerd ($u_{g,sd} < 0$). Nu zijn de golven met golfgetal $\frac{\pi}{2d}$ de "computational modes" die mogelijk worden ten gevolge van het numeriek discretiseren. Als we dus om een of andere reden golven met golfgetal $k > \frac{\pi}{2d}$ aanslaan, zullen deze energie naar links, het domein in, transporteren. Een van de manieren waarop die golven kunnen ontstaan is door formulering van randcondities aan de uitstroomrand, om het numerieke stelsel sluitend te maken. Daarom noemen we deze "computational modes" ook wel reflecties.

In het volgende zal het effect van de verschillende uitstroomrandvoorwaarden worden geanalyseerd, d.w.z. in hoeverre ze golven genereren die het domein uitlopen bij de uitstroomrand. Voor het semidiscrete geval hadden we als oplossing:

$$q_j(t) = \operatorname{Re}(\hat{q} e^{i(k_1 j d - \omega t)})$$

We stellen $0 < k_1 < \frac{\pi}{2d}$. Als er reflecties optreden dan zal dit, zoals uit het voorgaande verondersteld is, gebeuren door golven met golfgetal $k_2 = \frac{\pi}{d} - k_1$. Bij gegeven ω zijn er dus 2 golfgetallen die aan (2.8) voldoen. In het semi-discrete geval hebben we te maken met een oplossing van de volgende vorm:

$$q_j(t) = \operatorname{Re}(\hat{q} (e^{ik_1 j d} + r(-1)^j e^{-ik_1 j d}) e^{-i\omega t}) \quad (2.13)$$

waarbij r de reflectiecoëfficiënt aangeeft, $(-1)^j e^{-ik_1 j d}$ afkomstig van de uitdrukking $e^{i(k_1 - \frac{\pi}{d})j d}$. De golfoplossing is dus geschreven als de som van twee golven, één met golfgetal k_1 die de exacte oplos-

sing benadert en één met golfgetal $k_2 = \frac{\pi}{d} - k_1$ die mogelijk wordt ten gevolge van het discretiseren.

Voor het bepalen van de reflectiecoëfficiënt r wordt de golfoplossing (2.13) gesubstitueerd in de mogelijke randcondities aan de uitstroomband. We zullen nu voor enkele uitstroombandvoorwaarden de reflectiecoëfficiënten bepalen (zie ook Arakawa).

- 1) Als eerste randvoorwaarde is een vaste zijrand gekozen. Dit betekent dat het probleem dan overgespecificeerd is. De oplossing is eenduidig bepaald als de beginconditie $q(x,0)$ gegeven is tezamen met de waarden op de instroomrand. In formule:

$$q_I = 0 \quad (2.14)$$

Voor het bepalen van de reflectiecoëfficiënt volgt uit (2.14):

$$\text{Re}(q \hat{=} (e^{ik_1 Id} + r(-1)^I e^{-ik_1 Id}) e^{-i\omega t}) = 0$$

ofwel:

$$(\cos(k_1 Id) \cdot \cos(\omega t) - \sin(k_1 Id) \cdot \sin(\omega t)) +$$

$$r(-1)^I (\cos(k_1 Id) \cos(\omega t) - \sin(k_1 Id) \cdot \sin(\omega t)) = 0$$

$$r \cdot (-1)^I = -1$$

$$\|r\| = 1 \quad (2.15)$$

Merk op dat de reflectiecoëfficiënt onafhankelijk van het golfgetal k_1 is. Deze randvoorwaarde heeft tot gevolg dat er dus volledige

reflectie optreedt van alle in het domein aanwezige golven.

- 2) Bij deze randconditie wordt verondersteld dat $\frac{dq}{dx} = 0$. Dit betekent dat:

$$q_I = q_{I-1} \quad (2.16)$$

Bij de bepaling van de reflectiecoëfficiënt geldt dan:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\hat{q} (e^{ik_1 Id} + r(-1)^I e^{-ik_1 Id}) e^{-i\omega t}) = \\ \operatorname{Re}(\hat{q} (e^{ik_1 (I-1)d} + r(-1)^{I-1} e^{-ik_1 (I-1)d}) e^{-i\omega t}) \end{aligned}$$

dan moet gelden (deel aan beide zijden door $e^{ik_1 Id}$ en merk op dat we alleen het reële deel beschouwen zodat $e^{-ik_1 Id}$ gedeeld door $e^{ik_1 Id}$ dan juist 1 is want beide reële delen zijn gelijk):

$$r(-1)^{I-1} = \tan\left(\frac{k_1 d}{2}\right)$$

ofwel:

$$\|r\| = \tan\left(\frac{k_1 d}{2}\right)$$

Nu geldt wel dat de reflectiecoëfficiënt afhankelijk is van het golfgetal k_1 . Hier geldt dat de reflectiecoëfficiënt het grootst is voor golven met de hoogste frequenties.

- 3) Bovenstaande randconditie zou uitgebreid kunnen worden tot een 2e afgeleide gelijk aan nul op de rand te stellen. Dan geldt dus $\frac{d^2q}{dx^2} = 0$ op de rand. Dit is juist gelijk aan:

$$q_I = 2q_{I-1} - q_{I-2} \quad (2.17)$$

Voor het bepalen van de reflectiecoëfficiënt moet dus gelden dat:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(q \{ (e^{iIkd} + r(-1)^I e^{-iIkd}) - 2(e^{i(I-1)d} + r(-1)^{I-1} e^{-i(I-1)d}) \\ + (e^{i(I-2)d} + r(-1)^{I-2} e^{-i(I-2)d}) \} e^{-i\omega t}) = 0 \end{aligned}$$

deel door $q e^{i(I-1)d} e^{i\omega t}$, maak gebruik van het feit dat alleen het reële deel = 0 moet zijn; vervang -1 door i^2 dan:

$$e^{ikd} - 2 + e^{-ikd} + r(i^{2I} e^{ikd} - 2i^{2I-2} + i^{2I-4} e^{-ikd}) = 0$$

$$\text{dit is } 2\cos(kd) - 2 + r(-2\cos(kd) - 2) = 0$$

dus

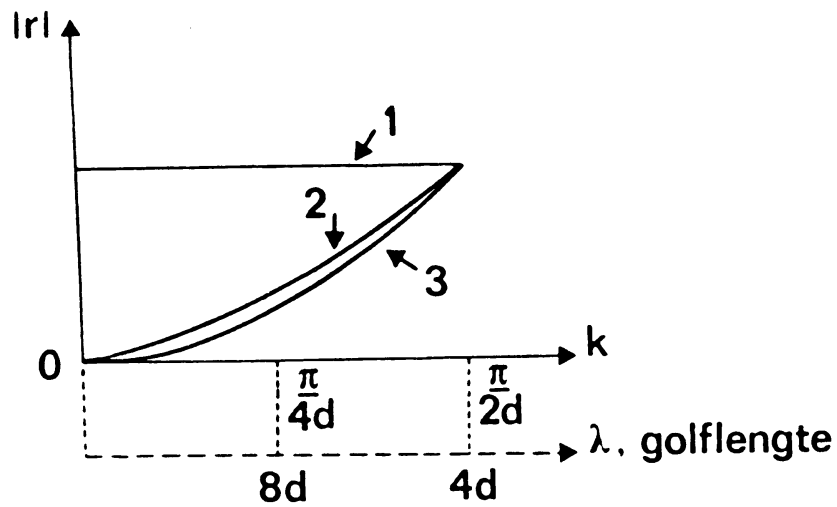
$$r = \frac{2\cos(kd) - 2}{2\cos(kd) + 2} = \frac{\cos(kd) - 1}{\cos(kd) + 1} = \frac{2\sin^2(\frac{kd}{2})}{2\cos^2(\frac{kd}{2})} = \tan^2(\frac{kd}{2})$$

dus

$$|r| = \tan^2(\frac{kd}{2}). \quad (2.18)$$

Ook voor deze randvoorwaarde geldt voor golven met golfgetal $k = \frac{\pi}{2d}$, golflengte $4d$ dat de reflectiecoëfficiënt juist 1 is.

De reflectiecoëfficiënten van bovenstaande uitstroomrandvoorwaarden kunnen als volgt in een grafiek weergegeven worden:



Figuur 2.5

Hieruit volgt direct dat de randvoorwaarde van de laatste methode het beste voldoet. Golven met een laag golfgetal worden sterk gedempt, golven met een hoog golfgetal daarentegen worden nauwelijks gedempt door de opgelegde uitstroomrandvoorwaarde.

2.3.3 De volledig gediscrètiseerde vergelijking

Er wordt weer uitgegaan van de lineair ééndimensionale advectionvergelijking (2.1). Nu zullen we nagaan hoe de oplossing zich gedraagt als we voor de plaatsdiscrètisatie een centrale differentie toepassen en voor de tijdsdiscrètisatie het Leap-Frog schema. Het stelsel gediscrètiseerde vergelijkingen ziet er dan als volgt uit:

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^{n-1}}{2\Delta t} + C \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2d} = 0 \quad (2.19)$$

$i = 1 \dots I-1$
 $n = 1, 2, \dots$
 $C > 0$

Hierbij is i weer de plaatsindex, n de tijdsindex. Beschouw op analoge wijze als in het semidiscrete geval een normal-mode oplossing van de vorm:

$$q_{j,n} = \operatorname{Re}(\hat{q} e^{i(k_1 j d - \omega n \Delta t)}) \quad (2.20)$$

Door nu (2.20) als oplossing in (2.19) in te vullen wordt de volgende dispersierelatie verkregen:

$$\omega = \frac{1}{\Delta t} \arcsin\left(\frac{C\Delta t}{d} \sin(kd)\right) \quad (2.21)$$

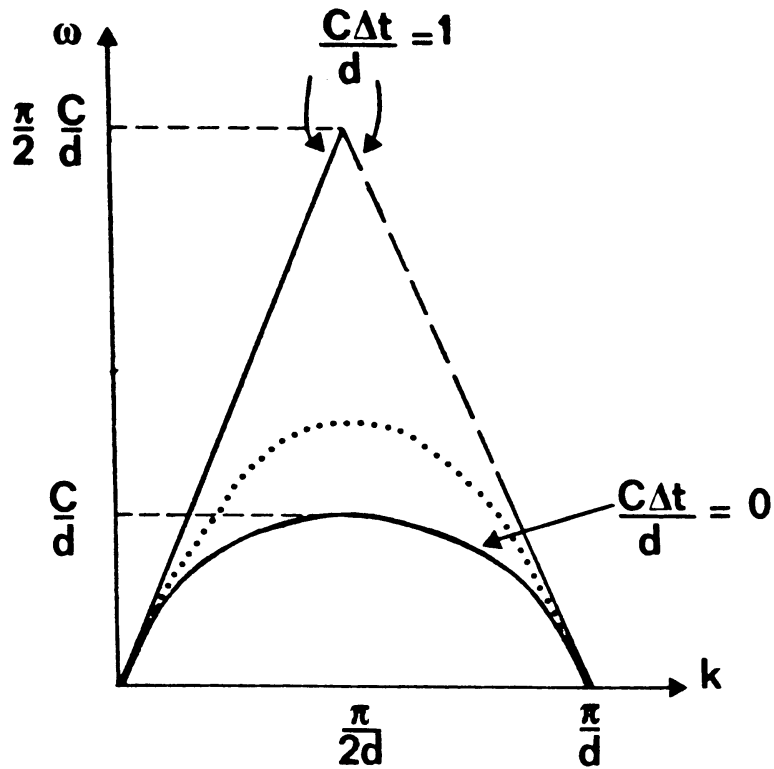
Hierbij moet direct als eis opgelegd worden dat

$$0 < \frac{C\Delta t}{d} < 1, \quad (2.22)$$

om de uitdrukking voor ω goed gedefinieerd te stellen.

Dit criterium is een stabiliteitseis voor het Leap-Frog schema, en staat ook bekend onder de naam CFL-criterium (Peyret and Taylor, 1983). Als nu $\frac{C\Delta t}{d} \ll 1$ dan geldt dat $\omega \rightarrow Ck \frac{\sin(kd)}{kd}$ en nadert naar de dispersierelatie van de semidiscrete benadering.

Als $\frac{C\Delta t}{d} = 1$, dan $\omega = Ck$ het geen betekent dat de dispersierelatie gelijk is aan die van de analytische benadering. In een grafiek waarin ω als functie van k is uitgezet krijgen we dan het volgende:



Figuur 2.6

Een belangrijk resultaat is dat de analytische oplossing beter benaderd wordt dus als er ook in de tijd gediscretiseerd wordt. De frequentie ω neemt waarden aan op krommen in het gearceerde gebied afhankelijk van de keuze van d en Δt . Hier geldt dus ook dat er bij iedere ω twee golfgetallen k_1 en k_2 zijn zodat $k_1 + k_2 = \frac{\pi}{d}$.

2.3.4 Randvoorwaarden in het volledig gediscretiseerde geval

Evenals in het semidiscrete geval hebben we dan te maken met een golfoplossing van de vorm:

$$q_{j,n} = \text{Re}(q(e^{ik_1 jd} + r(-1)^j e^{-ik_1 jd}) e^{-i\omega n \Delta t}) \quad (2.23)$$

waarbij $|r|$ de reflectiecoëfficiënt is.

Het bepalen van de reflectiecoëfficiënt gebeurt weer door de golfoplossing (2.23) te substitueren in de mogelijke randcondities aan de uitstroomrand. Voor deze volledig gediscrètiseerde vergelijking kunnen we weer dezelfde randvoorwaarden als in het semidiscrete geval analyseren. Echter, we kunnen nu ook rekening houden met verschillende tijdsindices, er zijn dus meer mogelijkheden:

- 1) De vaste randconditie $q_I^n = 0$.

Voor de volledig gediscrètiseerde vergelijking worden weer dezelfde resultaten gevonden.

- 2) Hetzelfde geldt voor de randconditie $q_I^n = q_{I-1}^n$. Omdat deze op een tijdstip bepaald wordt, verandert er niets met de analyse ten opzichte van het semidiscrete geval.

- 2a) Een nieuwe randvoorwaarde is een uitbreiding ten opzichte van de voorgaande nl. dat:

$$q_I^n = q_{I-1}^{n-1} \cdot \quad (2.24)$$

Deze randvoorwaarde benadert de helling van de karakteristiek met $d/\Delta t$ en speelt op deze wijze beter in op het hyperbolische gedrag van de differentiaalvergelijking. De randconditie wordt geïnspireerd door de gedachte dat de oplossing langs de karakteristiek met helling $\frac{dx}{dt}$ constant blijft.

Bij de bepaling van de reflectiecoëfficiënt geldt dan:

$$\operatorname{Re}(\hat{q}(e^{ik_1 Id} + r(-1)^I e^{-ik_1 Id})e^{-i\omega n \Delta t}) =$$

$$\operatorname{Re}(\hat{q}(e^{ik_1 (I-1)d} + r(-1)^{I-1} e^{-ik_1 (I-1)d})e^{-i\omega(n-1)\Delta t})$$

Deel beide zijden door $e^{ik_1 Id} e^{-i\omega n \Delta t}$ en bedenk dat we alleen de reële delen met elkaar vergelijken. Dan moet gelden:

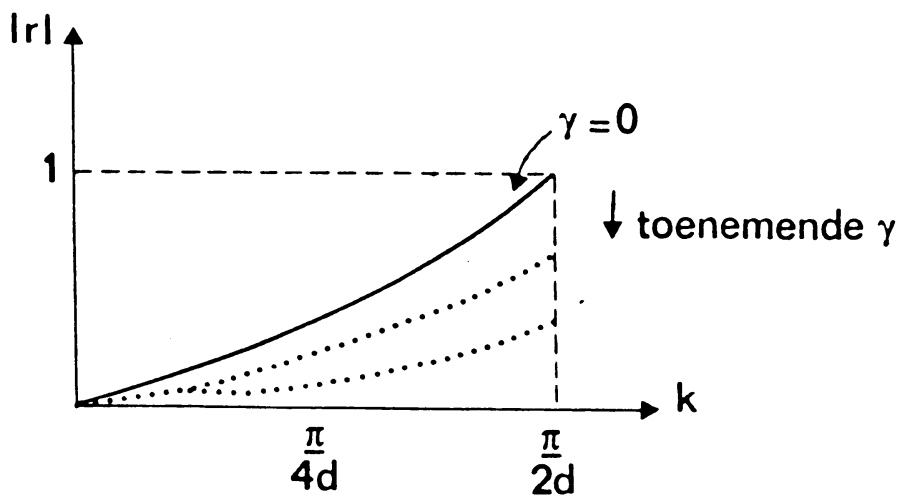
$$1 + r(-1)^I = (e^{ik_1 d} + r(-1)^{I-1} e^{-ik_1 d})e^{+i\omega \Delta t}$$

Na enig rekenwerk leidt dit tot de uitdrukking:

$$\|r\| = \tan\left(\frac{k_1 d}{2} \left(1 - \frac{\omega \Delta t}{k_1 d}\right)\right). \quad (2.25)$$

Hierbij vormt de term $\frac{\omega \Delta t}{k_1 d}$ juist het Courantgetal γ gebaseerd op de golfsnelheid $C = \frac{\omega}{k_1}$.

Zetten we in een grafiek $\|r\|$ uit tegen k_1 voor verschillende waarden van γ dan ziet dat er als volgt uit:



Figuur 2.7

In het algemeen zal deze dus beter voldoen dan in het semidiscrete geval waar $\gamma = 0$.

- 3) Deze randconditie komt overeen met het 3e geval voor de semidiscrete vergelijking:

$$q_I^n = 2 q_{I-1}^n - q_{I-2}^n. \quad (2.26)$$

Substitutie van (2.26) in de gediscretiseerde vergelijking (2.19) leidt tot:

$$\frac{q_{I-1}^{n+1} - q_{I-1}^{n-1}}{2\Delta t} = -C \frac{q_{I-1}^n - q_{I-2}^n}{d}$$

De term $-\frac{C}{d} q_{I-1}^n$ vormt een dempingsterm in het stelsel omdat de tijdsafgeleide ook ten opzichte van het punt q_{I-1}^n bepaald wordt en hiervoor geldt:

$$\frac{\partial q_{I-1}^n}{\partial t} = -\frac{C}{d} q_{I-1}^n.$$

Nu is het Leap-Frog schema zo opgesteld dat het de amplitude van Fouriermodes behoudt (deze hebben dempingsfactor 1) en het schema wordt instabiel als er een dempingsterm in voorkomt.

Kiezen we voor q_{I-1}^n de volgende benadering:

$$q_{I-1}^n = q_{I-1}^{n-1} + \frac{1}{2}(q_{I-2}^n - q_{I-2}^{n-2})$$

dan gaat de randvoorwaarde (2.26) over in:

$$q_I^n = 2 q_{I-1}^{n-1} - q_{I-2}^{n-2}. \quad (2.27)$$

Deze randvoorwaarde is ontworpen door Sundström & Elvius (zie Sundström & Elvius, 1979). De uitstroomrandconditie volgt nu precies een lijn met helling $d/\Delta t$ door het rooster zodat er uiteindelijk ook weer gebruik is gemaakt van de hyperboliciteit van de differentiaalvergelijking. Op dezelfde manier als bij 3) van het semidiscrete geval en het gediscretiseerde geval is eenvoudig uit te rekenen dat de reflectiecoëfficiënt juist gelijk is aan:

$$|r| = \tan^2\left(\frac{k_1 d}{2}\left(1 - \frac{\omega \Delta t}{k_1 d}\right)\right) \quad (2.28)$$

- 4) De randconditie van Orlanski (zie Orlanski, 1976). De constructie van de randvoorwaarde gaat uit van het hyperbolische karakter van de vergelijking evenals bij 2a) en 3). Het idee is om uitgaande van het discretisatieschema op tijdstip $n\Delta t$ de fasesnelheid C_{I-1}^n in het één na laatste roosterpunt te bepalen. Deze fasesnelheid wordt als karakteristieke maat gebruikt in het discretisatieschema op tijdstip $(n+1)\Delta t$. Dit past in het beeld van de voortbeweging van de grootheden langs een karakteristiek zoals bij randvoorwaarden 3) en 4). De afleiding gaat als volgt: op tijdstip $n\Delta t$:

$$\frac{q_{I-1}^n - q_{I-1}^{n-2}}{2\Delta t} = -\frac{C}{d} \{q_{I-1}^{(n-1)} - q_{I-2}^{n-1}\} \quad (2.29)$$

waarbij $q_{I-1}^{(n-1)}$ benaderd wordt door:

$$q_{I-1}^{(n-1)} = \frac{1}{2} [q_{I-1}^n + q_{I-1}^{n-2}]$$

om weer instabiliteiten in het Leap-Frog schema tegen te gaan zoals bij randvoorwaarde 3) is gedaan.

Na invullen in het discretisatie-schema (2.19) wordt de volgende benadering \tilde{C} voor C verkregen:

$$\tilde{C} = - \frac{(q_{I-1}^n - q_{I-1}^{n-2})}{(q_{I-1}^n + q_{I-1}^{n-2} - 2q_{I-2}^{n-1})} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.30)$$

Deze uitdrukking is goed gedefinieerd vanwege de eis dat $0 < \frac{\tilde{C}\Delta t}{\Delta x} < 1$ moet zijn (vgl. (2.22)) volgens het CFL stabiliteitscriterium.

Vul nu \tilde{C} in, in bovenstaand discretisatieschema (2.29) op tijdstip $(n+1)\Delta t$ en plaats I , dan volgt:

$$q_I^{n+1} = \frac{(1 - \Delta t/\Delta x \tilde{C})}{(1 + \Delta t/\Delta x \tilde{C})} q_I^{n-1} + \frac{2 \Delta t/\Delta x \tilde{C}}{(1 + \Delta t/\Delta x \tilde{C})} q_{I-1}^n \quad (2.31)$$

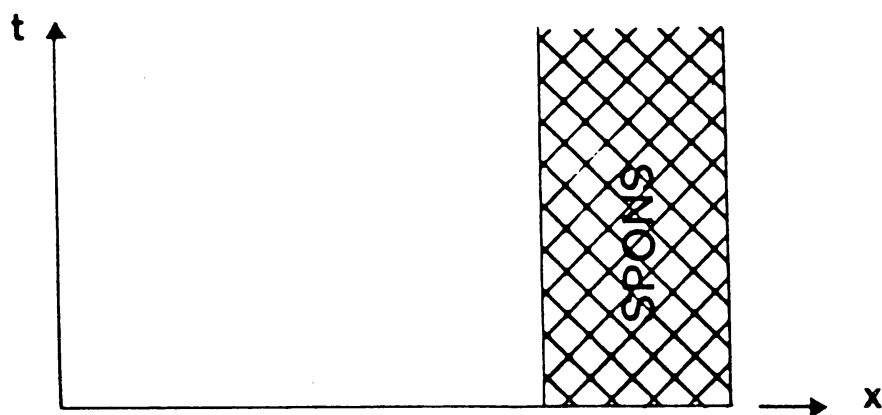
Is: $\tilde{C} > \Delta x/\Delta t$ dan $q_I^{n+1} = q_{I-1}^n$, d.w.z. de waarde voor $\tilde{C} = \Delta x/\Delta t$
 $\tilde{C} < 0$ dan $q_I^{n+1} = q_I^{n-1}$, of q-randconditie, d.w.z. de
 waarde voor $\tilde{C} = 0$ ($\tilde{C} < 0$ dan terugstroming aan de rand)

Golven met snelheid groter dan $\Delta x/\Delta t$, die door het rooster heenlopen maar niet door het rooster beschreven kunnen worden, worden uitgefilterd. Evenals golven met een negatieve fasesnelheid, deze worden ook uitgesloten. Voor alle andere golven wordt de fasesnelheid op de uitstroomrand zo dicht mogelijk benaderd, er zullen dus weinig reflecties optreden. Vanwege de complexiteit is het niet mogelijk om zoals in alle voorgaande gevallen een uitdrukking voor de reflectiecoëfficiënt te geven.

Een nadeel van deze methode is dat hij veel rekenwerk vereist en de waarde van de grootte q op tijdstip $(n-2)\Delta t$ apart opgeslagen moet worden (voor de betreffende rand). Dit bezwaar komt vooral naar boven bij meerdimensionale problemen. Bij gebruik van het Leap-Frog schema zijn alleen de waarden op $(n+1)\Delta t$, $n\Delta t$, $(n-1)\Delta t$ bekend.

2.4 De sponszone

Een randconditie die veel wordt gebruikt in de rekenpraktijk is het aanleggen van een zgn. "sponszone". Dit houdt in dat het domein aan de uitstroomrand wordt uitgebreid, met een zgn. "sponszone" (zie ook Davies, 1976). In dit gebied wordt nu een dempingsterm ingevoerd zodanig dat alle mogelijke golfbewegingen van de grootte uitgedempt worden. Wat er eigenlijk gebeurt is dat in de aangebrachte "spons" de energie afneemt tot ongeveer nul aan de uitstroomrand van de spons. Hiermee neemt dan ook alle beweging af en kan er ook niets meer reflecteren. Het domein ziet er dan als volgt uit:



Figuur 2.8

De één-dimensionale lineaire advectionvergelijking heeft met invoering van het dempingsgebied de volgende vorm:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial x} = -Kq \quad (2.32)$$

Hierbij is K een relaxatiecoëfficiënt die zo gekozen is dat $K=0$ in het eigenlijk domein. Binnen de sponslaag wordt K zo gekozen dat aan de uitstroomrand de grootte q geen variatie meer vertoont. De breedte van de sponslaag is vrij te kiezen. Bij een sterke golfbeweging (grote amplitude) zal hij wat breder genomen moeten worden omdat anders de relaxatiecoëfficiënt K over een klein aantal gridpunten sterk toe zal moeten nemen. De gradiënt van K kan dan zo steil lopen, dat we dan bijna in het geval van een vaste randconditie komen waardoor binnen de sponslaag nog reflecties op kunnen treden.

Om iets over de relaxatiecoëfficiënt K te zeggen zal eerst de analytische oplossing van (2.32) beschouwd worden.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial x} = -Kq \quad \text{ofwel} \quad \frac{dq}{dt} = -Kq$$

Langs een karakteristiek $x - Ct$ geldt:

$$\frac{dx}{dt} = c \quad (2.33)$$

$$\frac{dq}{dt} = -Kq \quad (2.34)$$

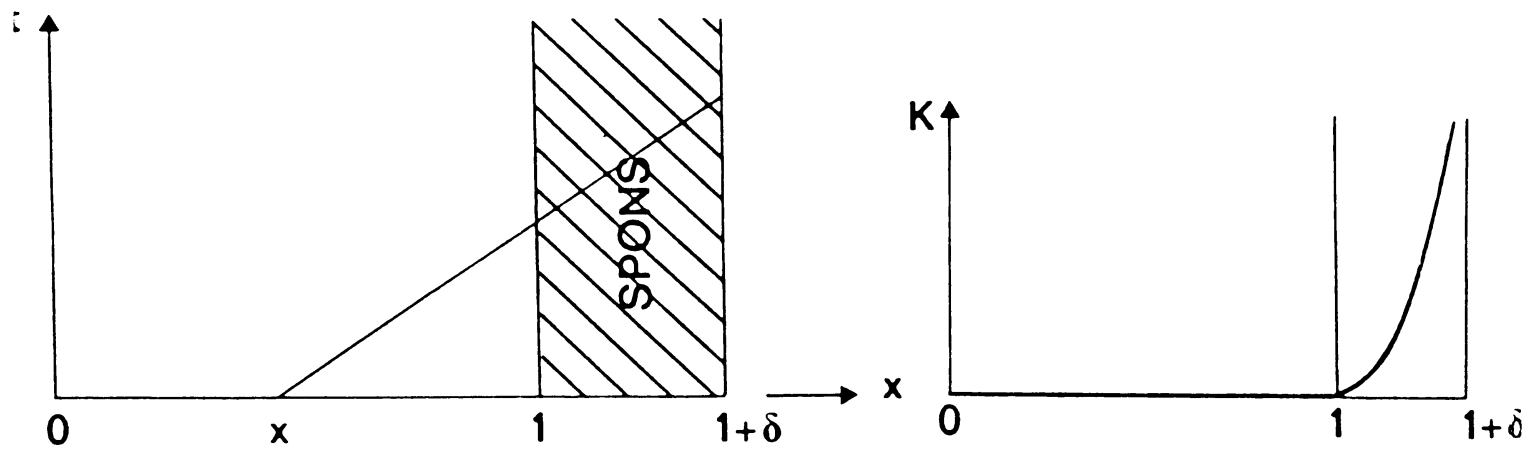
Hieruit volgt:

$$\frac{dq}{dx} = -\frac{Kq}{c} \quad (2.35)$$

Deze vergelijking heeft als oplossing:

$$q = q_0 \cdot \exp\left[-\int_x^1 \frac{K}{C} dx'\right] \quad (2.36)$$

Schaal het domein $0 < x < X$ zo dat geldt $0 < x < 1$. De spons loopt dan over het gebied $1 < x < 1 + \delta$, dit ziet er dan als volgt uit:



Figuur 2.9

Introduceer nu bijvoorbeeld:

$$K(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ A(x-1)^\alpha & 1 < x < 1 + \delta \end{cases}$$

Als nu $C = \text{constant}$ gekozen wordt, dan:

$$\int_x^1 -\frac{K}{C} dx' = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ -\frac{A}{(\alpha+1)C}(x-1)^{\alpha+1} & 1 < x < 1 + \delta \end{cases}$$

Analytisch hebben we dan langs een karakteristiek de volgende oplossing gekregen:

$$q(x) = q_0 \quad 0 < x < 1$$

$$q_0 \cdot \exp\left(-\frac{A}{(\alpha+1)C}(x-1)^{\alpha+1}\right) \quad 1 < x < 1 + \delta \quad (2.37)$$

In de sponslaag willen we demping hebben. Nu kan een relatie tussen de dempingscoëfficiënt ξ de sponsbreedte δ en relaxatiecoëfficiënt K bepaald worden.

Stel $\frac{q(x)}{q} < p$, demping minder dan factor p , aan de uitstroomrand van de spons. Dan:

$$\exp\left(-\frac{A}{(\alpha+1)C} \delta^{\alpha+1}\right) < p$$

$$\delta^{\alpha+1} > \frac{C(\alpha+1)}{A} \log 1/p \quad (2.38)$$

$$\delta > \left(\frac{C(\alpha+1)}{A} \log 1/p \frac{1}{\alpha+1}\right)$$

Uit de relatie (2.38) zien we dat de sponsbreedte evenredig is met C , $1/\alpha+1$, voor een kleinere sponsbreedte hebben we een grotere A nodig. De keus van de coëfficiënt A wordt m.b.v. (2.38) bepaald door:

$$A > \frac{C(\alpha+1)}{\delta^{\alpha+1}} \log 1/p \quad (2.39)$$

Het bepalen van de grootte van de reflectiecoëfficiënt in de sponslaag gaat in principe op dezelfde manier als in voorgaande gevallen is gedaan.

Discretiseer de differentiaalvergelijking (2.34). Dit leidt tot:

$$\frac{q_{i+1} - q_i}{d} = -\frac{K}{C} q_i \quad i=1, \dots, I, \dots, I+n \quad (2.40)$$

hierbij wordt aangenomen dat de spons een breedte $n \cdot d$ heeft. De gridpunten $I+1, \dots, I+n$ vormen de sponslaag. Stel nu de reflectiecoëfficiënt r , beschouw weer een normal mode oplossing van de vorm:

$$q_i(x) = q_0 \left\{ \exp \left(\frac{-A}{(\alpha+1)C} (x-1)^{\alpha+1} + r(-1)^i \exp \left(\frac{A}{(\alpha+1)C} (x-1)^{\alpha+1} \right) \right) \right\} \quad (2.41)$$

Neem als gridpunt $i = (I+j) \cdot d$ met $1 < j < n$. Vul dan (2.41) in in (2.40) om zo r te bepalen. Op dezelfde manier als eerder is gedaan volgt na enig rekenwerk dat geldt dat:

$$\|r\| = \|e^{-2(I+j)d} \frac{\left\{ \frac{Kd}{C} - 2e^{\frac{1}{2}d^{\alpha+1}} \sin\left(\frac{1}{2}d^{\alpha+1}\right) \right\}}{\left\{ 2e^{\frac{1}{2}d^{\alpha+1}} \cos\left(\frac{1}{2}d^{\alpha+1}\right) - \frac{Kd}{C} \right\}}\| \quad (2.42)$$

Hieruit blijkt direct dat de keuze van de gridpuntsafstand d tezamen met K sterk bepalend is voor de grootte van r . Wordt d kleiner, dan wordt r exponentieel groter en omgekeerd.

De waarde van K wordt i.h.a. experimenteel bepaald door vast te stellen dat reflecties vermeden worden en de energie aan de uitstroomrand van de spons juist gelijk aan 0 is.

Duidelijk is dat het sponsmodel zoals dat hier beschreven is enige nadelen heeft zoals:

- . meer rekentijd nodig vanwege de spons
- . meer geheugenruimte nodig

In de praktijk wordt echter nog veel gebruik gemaakt van deze methode. Het is de bedoeling om de effectiviteit hiervan af te wegen ten opzichte van de andere mogelijke uitstroomrandvoorwaarden. Een voordeel is echter dat deze ook eenvoudig te implementeren is in het geval van niet-lineaire situaties.

2.5 Numerieke testvoorbeelden

Vergelijking (2.1) is in een programma geïmplementeerd waarbij op de tijdsafgeleide het Leap-Frog schema werd toegepast en de plaatsafgeleide werd centraal gediscretiseerd zoals in het voorgaande (vergelijk 2.3.3) werd gebruikt. Het gridrooster (equidistant in de plaats) is zo gekozen dat:

$$d = 1/40$$

$$\Delta t = 1/320$$

$$C = 0,0192$$

Het Courantgetal $\frac{C \cdot \Delta t}{d}$ is nu 0.024 zodat aan de stabiliteitseis van het CFL criterium is voldaan. Als begincondities zijn de golven:

$$a) \quad u(x,t) = 0.1 \cdot \sin(2\pi(x-C \cdot t))$$

$$b) \quad u(x,t) = 0.1 \cdot \sin(8\pi(x-C \cdot t))$$

gekozen. Het schema is voor 320 tijdsstappen doorgerekend, om de 80 tijdsstappen is een tekening gemaakt.

In de tekeningen wordt de exacte oplossing door de dunne lijn beschreven, de numerieke oplossing door de dikke lijn. Er is duidelijk een faseverschil te zien tussen deze beide oplossingen. Dit is ook direkt uit de dispersierelaties voor het analytische geval en het gediscretiseerde geval te bepalen.

$$- \text{ analytisch } \quad \omega = C \cdot k \quad (\text{vgl. (2.3)})$$

$$- \text{ semidiscreet } \quad \omega = C \cdot k \frac{\sin(kd)}{kd} \quad (\text{vgl. (2.8)})$$

per tijdsstap ontstaat dus een faseverschil van:

$$\Delta\omega = Ck \left(1 - \frac{\sin(kd)}{kd} \right)$$

over een tijdsperiode $t = n \cdot \Delta t$ zal dus gelden:

$$\Delta \omega = n \cdot Ck \left(1 - \frac{\sin(kd)}{kd} \right) \quad (2.43)$$

Achtereenvolgens zijn de volgende randvoorwaarden getest:

1) $q_I^n = 0$

Hierbij is duidelijk te zien dat de reflecterende golf een hogere frequentie heeft maar dezelfde amplitude. Deze golf met de hoogste frequentie heeft de grootste tegengestelde groepssnelheid en zal dus de grootste invloed hebben (figuur 2.10).

2) $q_I^n = q_{I-1}^n$

De reflecterende golven hebben een amplitude kleiner dan in het voorgaande voorbeeld, hetgeen uit de berekende r volgt. De amplitude van de reflecterende golven zijn bij een hoger golfgetal (voorbeeld b) ook duidelijk groter (figuur 2.11)

2a) $q_I^n = q_{I-1}^{n-1}$

Doordat de tijdsstapgrootte Δt erg klein is, is de reflectiecoëfficiënt vrijwel gelijk aan die in het voorgaande voorbeeld, bijbehorende plaatjes zijn dan ook vrijwel identiek (figuur 2.12)

3) $q_I^n = 2 q_{I-1}^{n-1} - q_{I-2}^{n-2}$

Dit is de randvoorwaarde van Sundström en Elvius. Deze eenvoudig te implementeren randvoorwaarde heeft maar een kleine verstoring tot gevolg, anders gezegd: de amplitude van de 'computational mode' is klein ofwel heeft een hoge dempingsfactor. Dit wordt bevestigd door de testresultaten in bijbehorende figuren (figuur 2.13)

4) De randconditie van Orlandi

Deze heeft de beste resultaten, aan de uitstroomrand treedt geen verstoring op (figuur 2.14)

5) De "spons"

Over de laatste 5 gridpunten is een spons aangelegd. De dempingsfactor K is lineair genomen, zodat de advection-vergelijking de volgende vorm krijgt:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + C \frac{\partial q}{\partial x} = -Kq$$

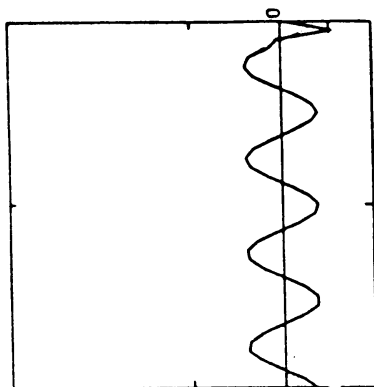
$$\text{met } \begin{cases} K = 0 & 0 < x < (I-5)d \\ K = 10 + (I - \frac{x}{d})1000 & (I-5)d < x < Id \end{cases}$$

Duidelijk blijkt dat de oplossing in de spons gedempt wordt en dat er geen reflecties tegen de uitstroomrand optreden (figuur 2.15).

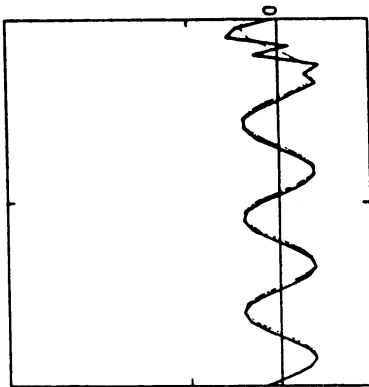
2.6 Conclusie

Het schema van Orlanski vertoont de beste resultaten maar heeft als nadeel dat het ingewikkelder is, meer rekentijd vergt en extra geheugenruimte voor de opslag van de waarden op tijdstip $n-2$ aan de randen. Vooral in meer-dimensionale gevallen gaat dit meespelen.

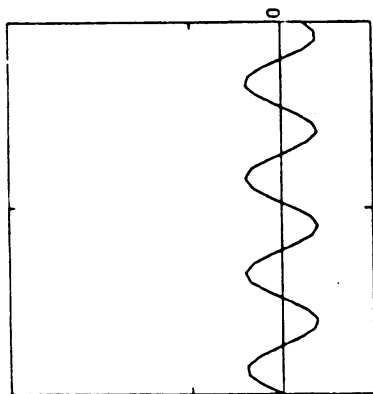
Dit geldt in het bijzonder als het vergeleken wordt met de resultaten van het schema van Sundström en Elvius. Dit is een zeer eenvoudig te implementeren schema en levert bevredigende resultaten.



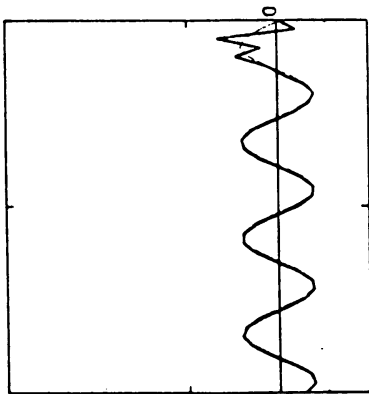
T = 0.25



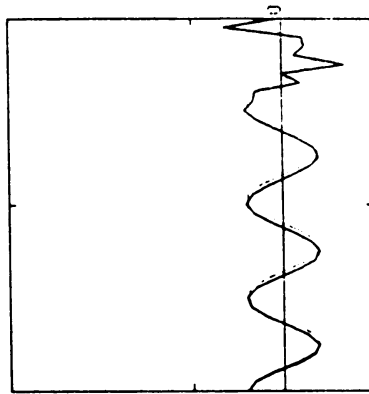
T = 0.75



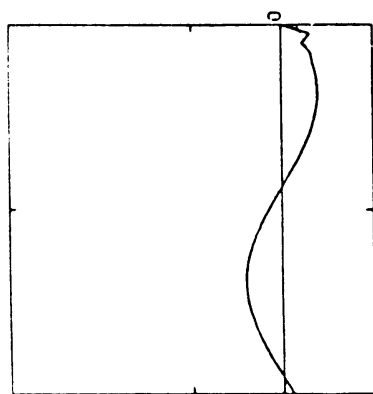
T = 0.00



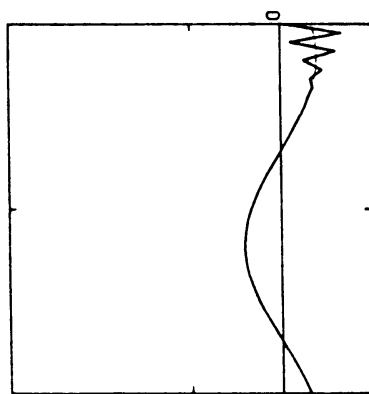
T = 0.50



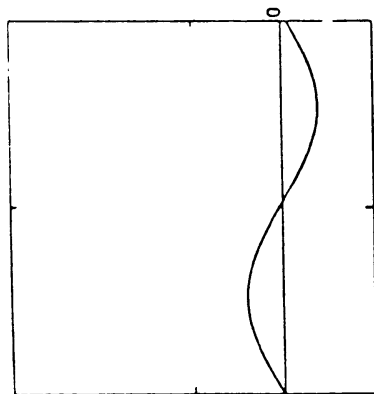
T = 1.00



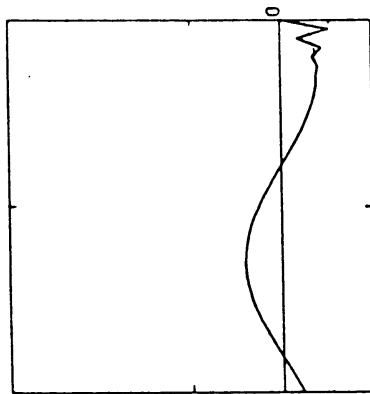
T = 0.25



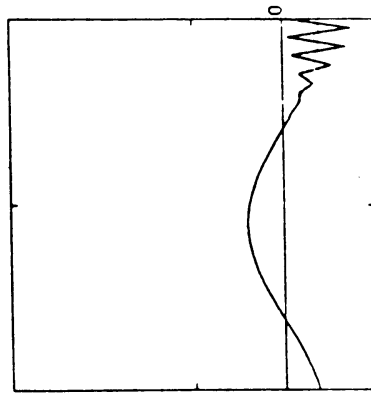
T = 0.75



T = 0.00



T = 0.50

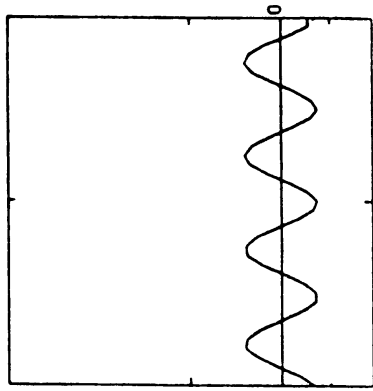


T = 1.00

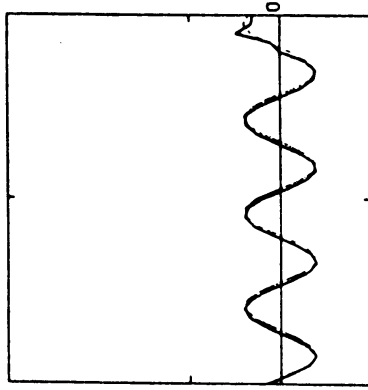
Figuur 2.10
(Randvoorwaarde 1)

afbeelding 2.10

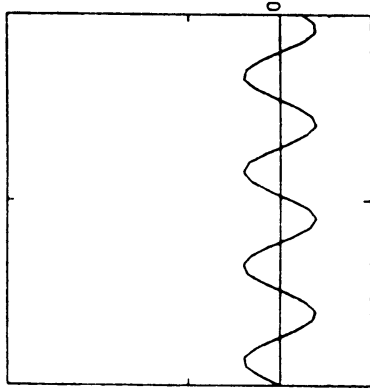
afbeelding 2.10



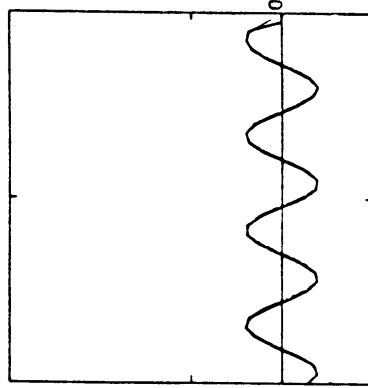
$T = 0.25$



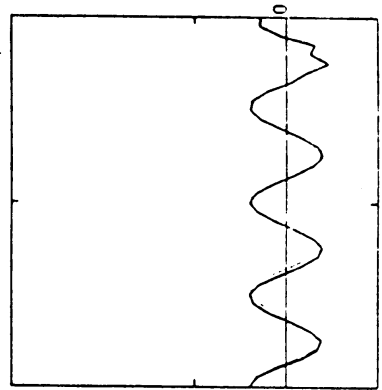
$T = 0.75$



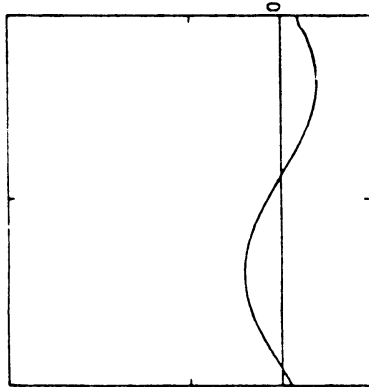
$T = 0.00$



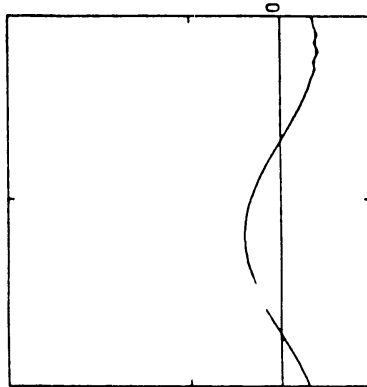
$T = 0.50$



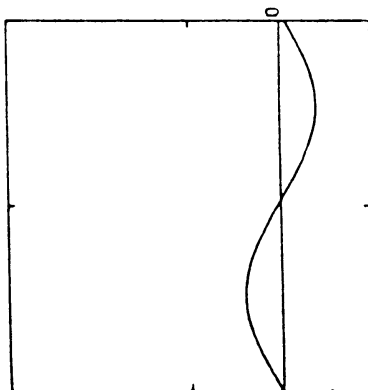
$T = 1.00$



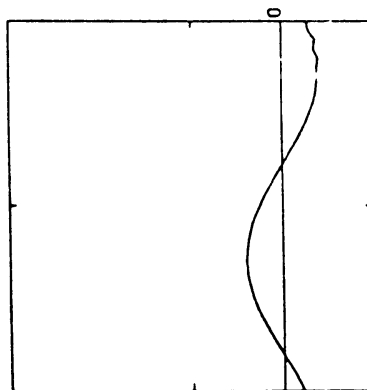
$T = 0.25$



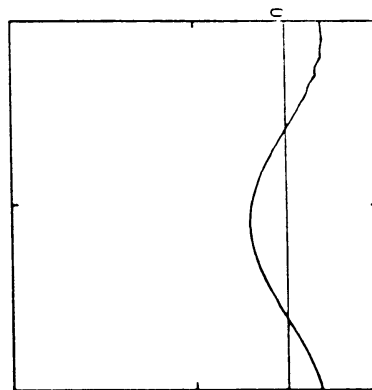
$T = 0.75$



$T = 0.00$

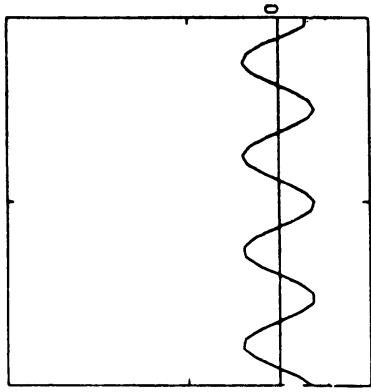


$T = 0.50$

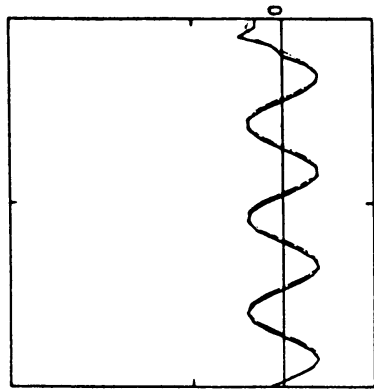


$T = 1.00$

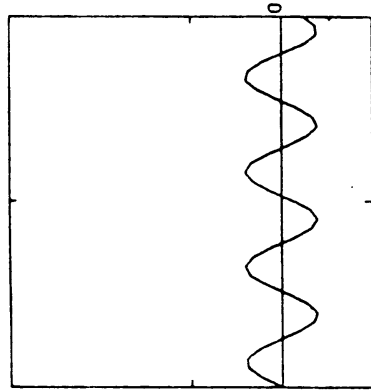
Figuur 2.11
(Randvoorwaarde 2)



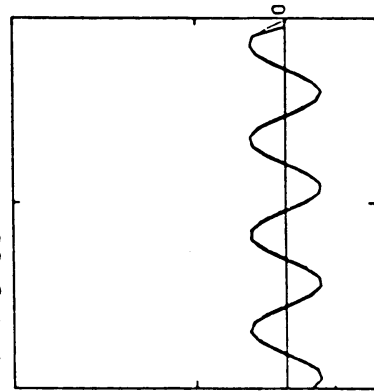
$T = 0.25$



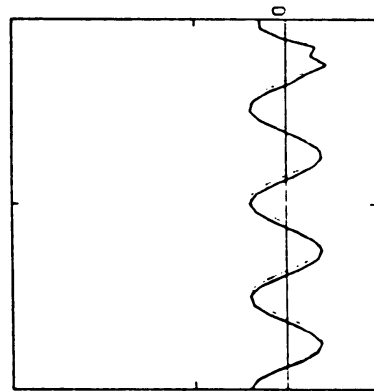
$T = 0.75$



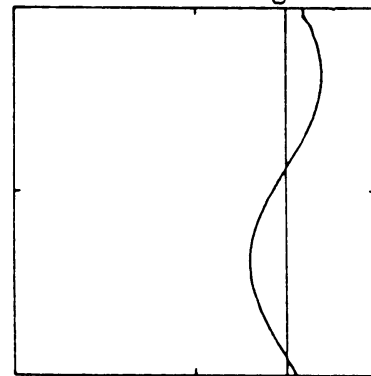
$T = 0.00$



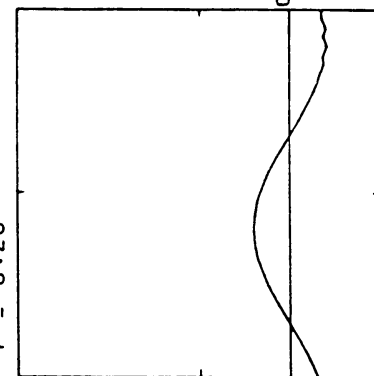
$T = 0.50$



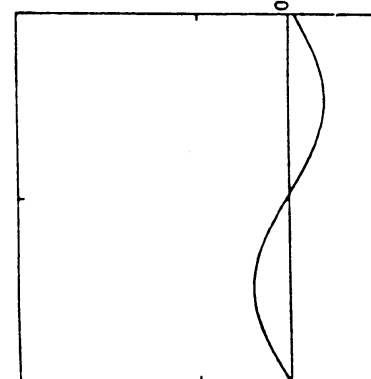
$T = 1.00$



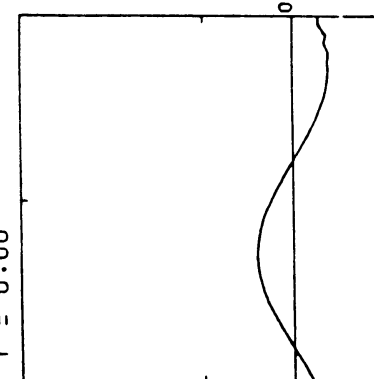
$T = 0.25$



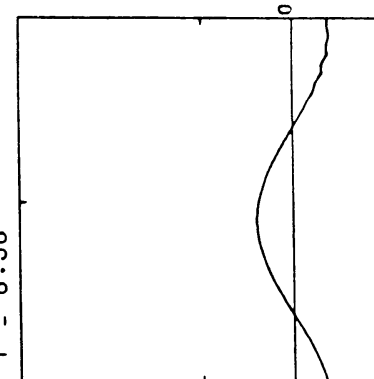
$T = 0.75$



$T = 0.00$



$T = 0.50$

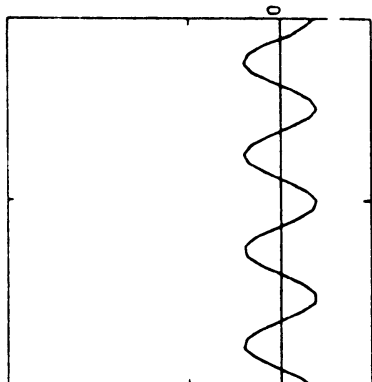


$T = 1.00$

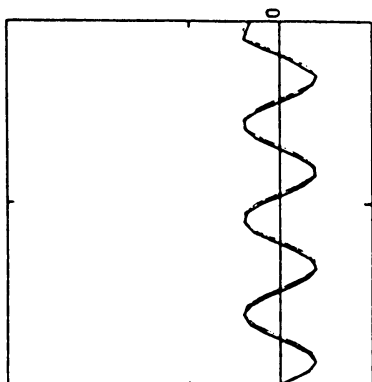
Figuur 2.12
(Randvoorwaarde 2^a)

00000 00000 00000

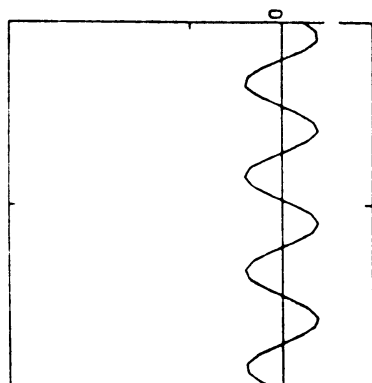
00000 00000 00000



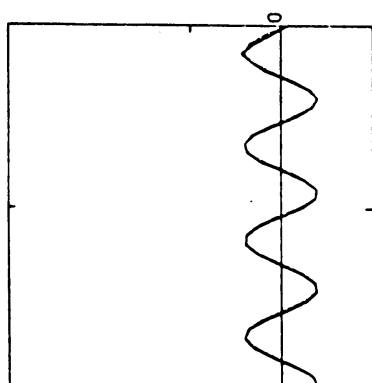
T = 0.25



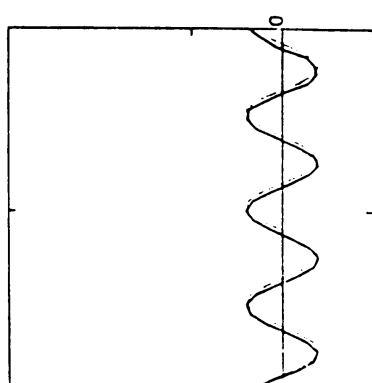
T = 0.75



T = 0.00



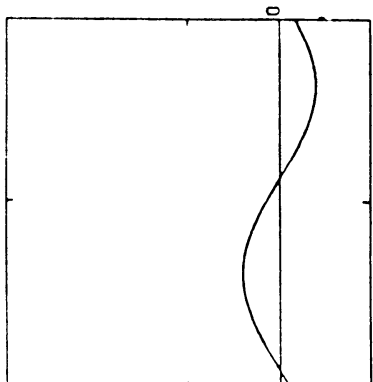
T = 0.50



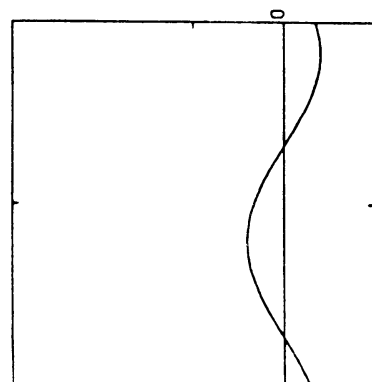
T = 1.00

Figuur 2.13
(Randvoorwaarde 3)

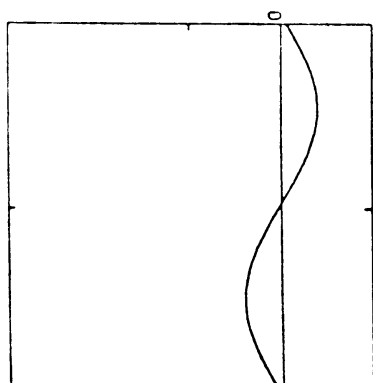
DIFFER 0.25 AMP 1.000



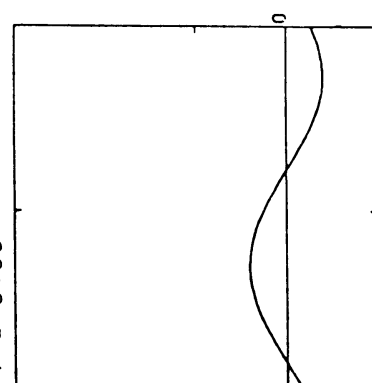
T = 0.25



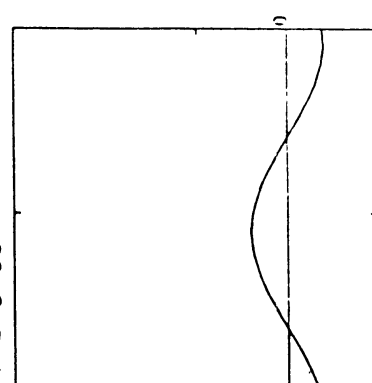
T = 0.75



T = 0.00

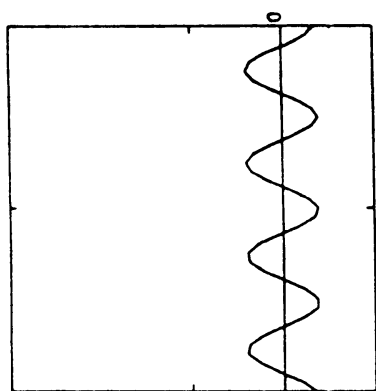


T = 0.50

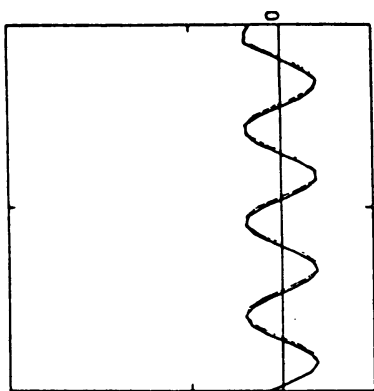


T = 1.00

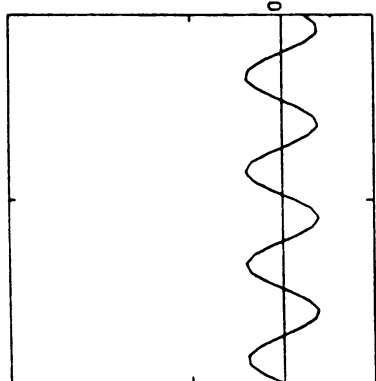
DIFFER 0.25 AMP 1.000



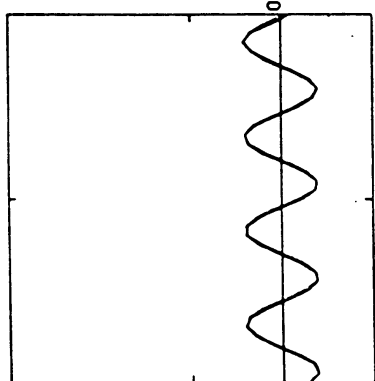
$T = 0.25$



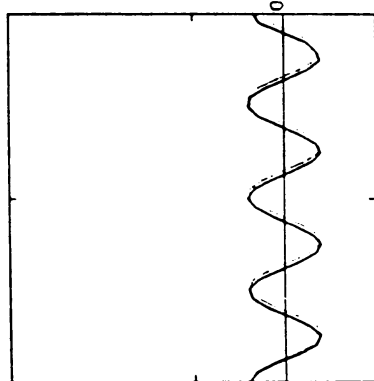
$T = 0.75$



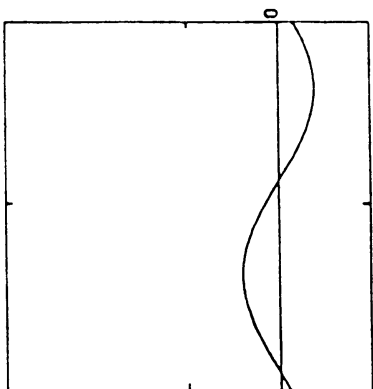
$T = 0.00$



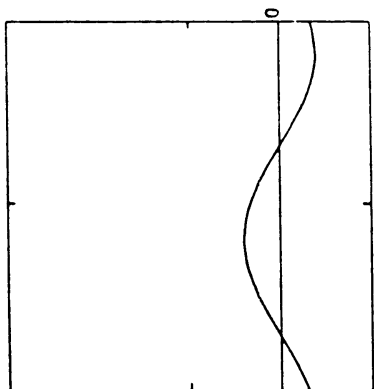
$T = 0.50$



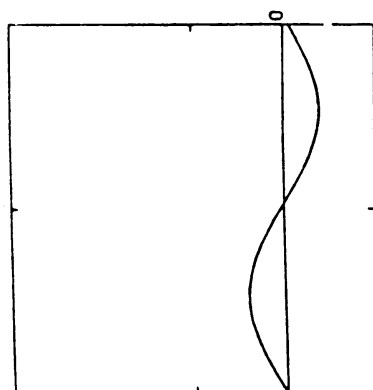
$T = 1.00$



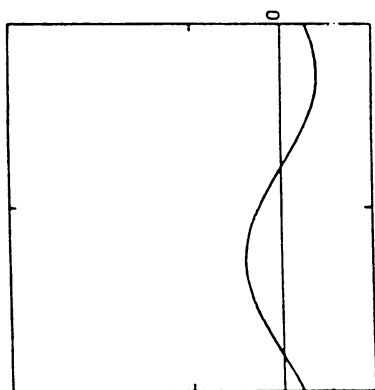
$T = 0.25$



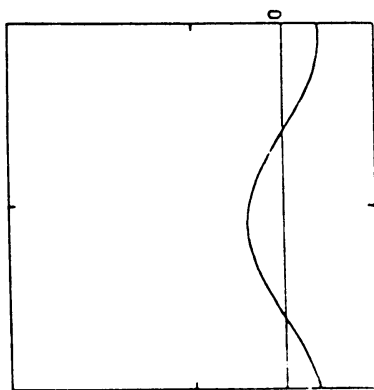
$T = 0.75$



$T = 0.00$



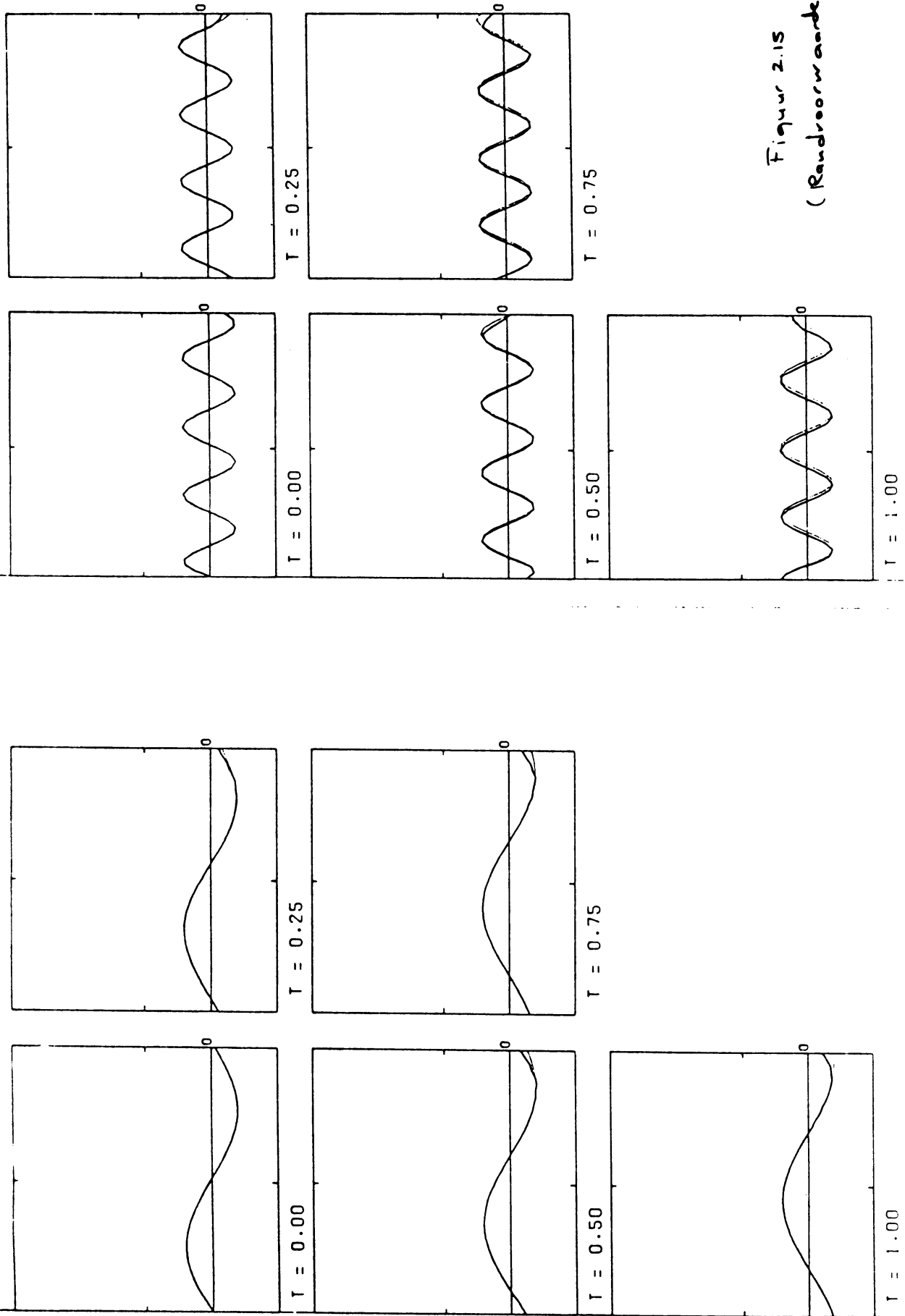
$T = 0.50$



$T = 1.00$

Figur 2.14
(Randvoorwaarde 4)

Figur 2.15
(Randvoorwande 5)



3. De tweedimensionale vergelijkingen

3.1 Inleiding

In dit hoofdstuk zal ingegaan worden op het oplossen van het stelsel basisvergelijkingen dat het gedrag van de stromingen in de grenslaag beschrijft. Dit stelsel wordt bepaald door de behoudswetten van energie, massa, impuls en een vergelijking die het hydrostatisch evenwicht aangeeft. Hier zal uitgegaan worden van een gelineariseerd, tweedimensionaal (x,z) stelsel waarop de Boussinesq benadering is toegepast.

Centraal staan in dit hoofdstuk de randwaarden die opgelegd moeten worden bij het numeriek oplossen van het stelsel. Bij het discretiseren van de vergelijkingen ontstaat het probleem dat er meer onbekenden dan vergelijkingen zijn zodat het stelsel onoplosbaar is. Het gedwongen opleggen van randwaarden kan nu zowel in de horizontaal (x -richting) als in de verticaal (z -richting) leiden tot ongewenste oscillaties in de oplossing ten gevolge van reflecties van golfvormige oplossingen tegen de randen van het domein. Voor de horizontale richting blijkt de keuze voor het opleggen van randwaarden analoog aan hetgeen in het vorige hoofdstuk behandeld is. In de verticaal daarentegen is de keuze voor de op te leggen randvoorwaarde niet zo voor de hand liggend. Hier krijgen we direct te maken met de speciale eigenschap van gravitatiegolven, die als natuurlijke oplossing van het stelsel ontstaan. Voor deze golven geldt dat in de verticaal de fasesnelheid en groepssnelheid tegengesteld aan elkaar zijn, golven die een neerwaartse fasesnelheid (deze komt overeen met de voortplantingsrichting en snelheid van de golf) hebben, hebben een opwaartse groepssnelheid (energievoortplantingssnelheid). Een eis die aan de randvoorwaarde aan de bovenrand van het domein opgelegd wordt is dat energie het domein uit mag lopen maar dat er geen energie aan het gebied toegevoegd wordt. Hierdoor willen we aan de bovenrand dus alleen golven

met een opwaarts gerichte groepssnelheid toelaten, die een neerwaarts gerichte fasesnelheid hebben. Dit laatste heeft tot gevolg dat voor het opleggen van een randvoorwaarde bekendheid met het gedrag van de golf buiten het domein moet zijn. Het is duidelijk dat nu niet volstaan kan worden met de eenvoudige condities zoals die in het voorgaande hoofdstuk besproken zijn. Het blijkt echter niet onmogelijk te zijn om een eenduidige relatie af te leiden die aan deze eisen voldoet. Door middel van Fourieranalyse is voor de bovenrand een zodanige relatie tussen de druk en de verticale snelheid af te leiden dat aan de eis dat alleen energie het domein uitgestraald mag worden voldaan is en die tevens geen reflecties tot gevolg heeft. Deze zal dan ook uitgebreid besproken worden. Aan de hand van een aantal voorbeelden zal deze getest worden en vergeleken met de "sponsmethode" die ook in het voorgaande hoofdstuk ter sprake is gebracht en die tot nu toe veel gebruikt wordt.

3.2 De basisvergelijkingen

Het volledige stelsel niet-lineaire vergelijkingen voor de stroming in de atmosfeer, gegeven door de behoudswetten van impuls, energie en massa, is voor ons doel veel te gecompliceerd en onbruikbaar. We bekijken hier een sterk vereenvoudigd stelsel vergelijkingen waarin toch ons probleem, nl. het gedrag van golven bij de modelranden nog goed bestudeerd kan worden. We gaan uit van een stelsel Boussinesq-vergelijkingen in gelineariseerde vorm, waaruit diffusie termen en de draaiing van de aarde verwijderd zijn. Ook bekijken we een 2-dimensionaal domein, maar dat is niet essentieel. Van dit sterk vereenvoudigde stelsel kunnen we analytisch nagaan hoe golfoplossingen zich gedragen aan de randen en wat voor eisen moeten worden opgelegd om zo weinig mogelijk reflectie te krijgen. We nemen dan aan dat deze eisen ook bij het oplossen van het complete stelsel vergelijkingen het gewenste effect hebben.

Het vereenvoudigd stelsel vergelijkingen dat we bekijken is (zie ook Holton, 1979):

1. Horizontale impulsvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u_0 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.1)$$

2. Continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

3. Thermodynamische vergelijking

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -u_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} - w \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \quad (3.3)$$

4. Hydrostatische vergelijking

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g \rho_0 \frac{\theta}{\theta_0} \quad (3.4)$$

Hierbij zijn:	$u(x, z, t)$	horizontale (x-richting) windsnelheid	$[\text{m}\cdot\text{s}^{-1}]$
	$u_0(z)$	gemiddeld horizontale windsnelheid	$[\text{m}\cdot\text{s}^{-1}]$
	$w(x, z, t)$	verticale (z-richting) windsnelheid	$[\text{m}\cdot\text{s}^{-1}]$
	$p(x, z, t)$	druk	$[\text{Pa}]$
	$\rho_0(z)$	gemiddelde dichtheid	$[\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}]$
	$\theta(x, z, t)$	potentiële temperatuur	$[\text{K}]$
	$\theta_0(z)$	gemiddelde potentiële temperatuur	$[\text{K}]$

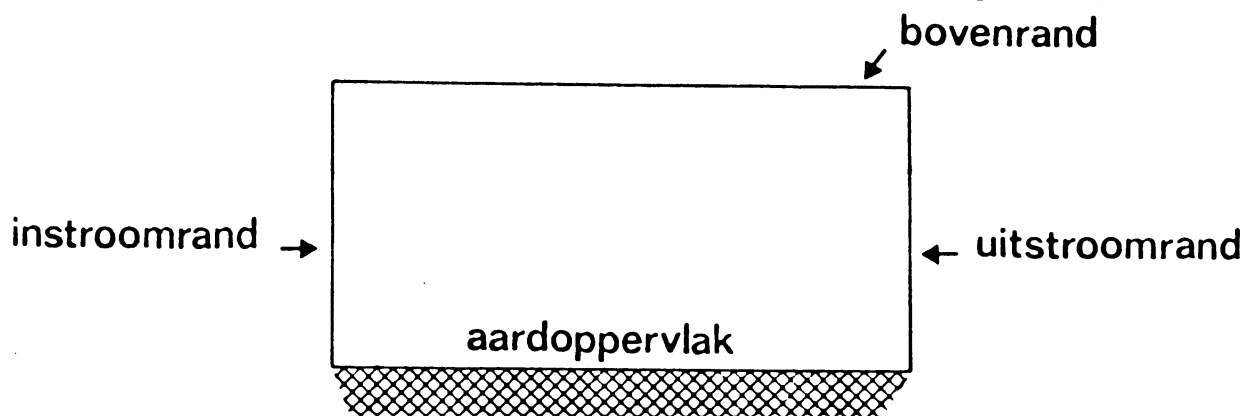
De dimensie van de grootheden is weergegeven tussen vierkante haken. De potentiële temperatuur is gedefinieerd als de temperatuur die een pakket-

je lucht zou hebben als dit adiabatisch, dus zonder warmteuitwisseling met zijn omgeving, op een druk van 1 Pascal wordt gebracht. Om tot dit stelsel te komen zijn voor de stroming een aantal aannamen gedaan. Allereerst is verondersteld dat effecten ten gevolge van de draaiing van de aarde verwaarloosbaar zijn evenals de moleculaire viscositeit. Bovendien is de stroming hydrostatisch verondersteld d.w.z. $\frac{dw}{dt} = 0$. Verder is de Boussinesq benadering toegepast. (zie Gray and Giorgini, 1976). Na linearisatie wordt dan het stelsel zoals hierboven beschreven is verkregen. Voor een uitgebreide bespreking van de basisvergelijkingen en vereenvoudigingen wordt verwezen naar bv. Batchelor (1981).

3.3 Randvoorwaarden

3.3.1 Algemene opmerkingen

Door het numeriek oplossen van het stelsel vergelijkingen (3.1)-(3.4) op een eindig roosterdomein waarbij de plaatsafgeleide centraal ge-discretiseerd wordt, wordt een stelsel vergelijkingen verkregen dat onderbepaald is. Dit probleem waarbij er meer onbekenden dan vergelijkingen zijn kan opgelost worden door op de randen van het numerieke domein randvoorwaarden voor te schrijven. Het numerieke domein is gedefinieerd vanaf het aardoppervlak tot een gegeven hoogte en over een bepaalde breedte in het horizontale vlak (zie figuur 3.1).



Figuur 3.1

Aan de instroomrand en het aardoppervlak zijn de waarden van de grootheden bepaald door een gegeven randconditie. Aan de bovenrand en uitstroomrand van het numerieke domein moeten gedwongen randvoorwaarden opgelegd worden om het stelsel oplosbaar te maken. Hierdoor kunnen ongewenste oscillaties in de oplossing ontstaan ten gevolge van reflecties. Deze worden mogelijk door de "computational modes" die ontstaan door het discretiseren.

Voordat overgegaan wordt tot het onderzoeken van mogelijke randvoorwaarden zullen eerst enige algemene eigenschappen van de oplossing afgeleid worden. Doordat het stelsel (3.1)-(3.4) lineair is en de hoofdstroming constant, laat dit het bestaan van een "normal-mode" oplossing toe. Deze heeft de volgende vorm:

$$q(x, z, t) = \hat{q} e^{i(kx + lz - \omega t)} \quad (3.5)$$

waarbij q een grootheid is bv. u , p , θ of w en \hat{q} de Fouriergetransformeerde is met frequentie ω en golfgetal k in de x -richting, l in de z -richting. Invullen van deze oplossing in het stelsel basisvergelijkingen leidt tot de volgende dispersierelatie (zie voor de betekenis hiervan de Appendix):

$$(u_0 \cdot k - \omega)^2 \cdot l^2 = N^2 \cdot k^2 \quad (3.6)$$

Hierbij is N de Brunt-Väisälä frequentie die gedefinieerd is door:

$$N^2 = g \cdot \frac{d \ln \theta}{dz}$$

Aan de hand van (3.6) kunnen de fasesnelheid en groepssnelheid (zie ook Appendix) in de verschillende richtingen bepaald worden:

- frequentie ω
$$\omega = u_o \cdot k \pm \frac{N \cdot k}{1}$$
- fasesnelheid horizontaal
$$u_{f,h} = \frac{\omega}{k} = u_o \pm \frac{N}{1}$$
- verticaal
$$u_{f,v} = \frac{\omega}{1} = \frac{u_o \cdot k}{1} \pm \frac{N \cdot k}{1^2} \quad (3.7)$$
- groepssnelheid horizontaal
$$u_{g,h} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = u_o \pm \frac{N}{1}$$
- verticaal
$$u_{g,v} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \mp \frac{N \cdot k}{1^2}$$

Behorend bij elk paar golfgetallen (k, l) ontstaan twee oplossingen met verschillende frequenties. Deze oplossingen hebben in de horizontaal een groepssnelheid en fasesnelheid die samenvallen. In de verticale richting is dit niet het geval. Als de achtergrondstroming nul is dan zijn de fasesnelheid en groepssnelheid tegengesteld aan elkaar. Dit betekent dat (zie Appendix) er een omhoog lopende golf is die energie naar beneden transporteert en een neerwaarts lopende golf die energie omhoog transporteert. Dit laatste vormt het probleem van het opstellen van een randconditie voor de bovenrand, zoals hierna besproken zal worden.

3.3.2 Horizontale randvoorwaarden

Omdat in de horizontale (x) richting een "gewone" golfoplossing ontstaat, d.w.z. een fasesnelheid en groepssnelheid die samenvallen, kunnen we ons bij het opleggen van mogelijke uitstroomrandvoorwaarden beperken tot die gevallen zoals in hoofdstuk 2 behandeld zijn. Dit betekent dat we gebruik moeten maken van het schema van Orlandi of van Sundström en Elvius. Aan de uitstroomrand moeten condities voor de horizontale windsnelheid u en de potentiële temperatuur θ opgelegd

worden om de vergelijkingen (3.1) - (3.3) numeriek oplosbaar te maken.

3.3.3 Analytische bovenrandvoorwaarde

Zoals uit (3.7) volgt, blijkt dat in de verticale (z) richting de groepssnelheid en fasesnelheid tegengesteld zijn (mits de achtergrondstroming nul is). Door deze eigenschap is het niet mogelijk om een randconditie zoals in hoofdstuk 2 af te leiden. Dit is als volgt in te zien. Beschouw op de bovenrand van het domein een golf die energie omhoog transporteert. Het verloop van de golf wordt dan bepaald door de fasesnelheid die naar beneden gericht is. Om iets over het gedrag van de golf op de bovenrand te zeggen moet er bekendheid zijn met het gedrag van deze golf buiten het domein. Het is duidelijk dat dit laatste niet mogelijk is. De voorwaarden zoals die aan de bovenrand moeten gelden, kunnen als volgt worden samengevat:

- . golven die energie omhoog transporteren moeten het domein uitlopen zonder dat er reflecties optreden.
- . golven die energie omlaag transporteren mogen aan de bovenrand het domein niet in kunnen lopen.

Deze randconditie wordt ook wel stralingsconditie genoemd.

Het stelsel basisvergelijkingen wordt opgelost door eerst u uit (3.1) en θ uit (3.3) horizontaal te integreren bij gegeven beginvoorwaarden. Daarna wordt w uit (3.2) opgelost door vanaf het aardoppervlak naar de bovenrand te integreren. De druk p wordt dan met (3.4) bepaald door van de bovenrand naar het aardoppervlak te integreren. Omdat alleen de druk p en de verticale snelheid w verticaal geïntegreerd worden zou een mogelijke bovenrandconditie dan ook alleen een relatie tussen deze grootheden vast hoeven te leggen.

Invullen van (3.5) in het stelsel vergelijkingen leidt niet slechts tot de dispersierelatie (3.6) maar geeft ook de volgende uitdrukking:

$$\hat{p}(k, l, \omega) = \frac{\rho_0 \cdot N^2}{1 \cdot (\omega - u_0 k)} \hat{w}(k, l, \omega)$$

of, als we hier direct de dispersierelatie (3.6) in invullen:

$$\hat{p} = \pm \rho_0 \frac{N}{\|k\|} \hat{w} \quad (3.8)$$

Door nu $\omega = u_0 k - \frac{N \cdot \|k\|}{\|l\|}$

te kiezen dan volgt uit (3.7) dat alleen golfoplossingen met een omhoog gerichte groepssnelheid en een neerwaarts gerichte fasesnelheid mogelijk zijn. Met deze keuze van ω leidt (3.8) tot de volgende stralingsconditie die inderdaad aan de gestelde eisen voldoet (zie Bougeault (1982); Klemp en Durran (1982))

$$\hat{p} = + \rho_0 \cdot \frac{N}{\|k\|} \hat{w} \quad (3.9)$$

Opmerkelijk is dat deze stralingsrandvoorwaarde alleen afhankelijk is van het golfgetal in de horizontaal maar niet van het golfgetal in de verticaal noch van de frequentie. Relatie (3.9) geeft een analytische uitdrukking van de randconditie.

3.3.4 Numerieke bovenrandvoorwaarde

In 3.3.3. is een analytische bovenrandvoorwaarde afgeleid. Deze stralingsconditie zal uitgebreid worden als randvoorwaarde voor het stelsel basisvergelijkingen in volledig gediscretiseerde vorm. Door discretisatie van de vergelijkingen wordt ook het spectrum

gediscretiseerd. Voor een goede benadering is het daarom noodzakelijk een juiste uitdrukking voor het golfgetal k te vinden. Dit gaat als volgt (zie ook Bougeault (1982)). Er wordt uitgegaan van een discretisatie in de horizontaal over M roosterpunten. De waarde van $q(x, z, t)$ in roosterpunt j , $j = 0, 1, \dots, M-1$ wordt aangegeven met $q_j(z, t)$ en is in een Fourierruimte te schrijven als:

$$q_j(z, t) = \sum_{n=0}^{M-1} \hat{q}_n(z, t) \exp\left(\frac{2\pi \cdot i \cdot j \cdot n}{M}\right) \quad (3.10)$$

Gebruikmakend van (3.10) wordt de operator $\frac{\partial}{\partial x}$ benaderd door:

$$\frac{\partial q_j}{\partial x} = \frac{q_{j+1} - q_{j-1}}{2 \cdot d} = \sum_{n=0}^{M-1} \hat{q}_n(z, t) \exp\left(\frac{2\pi \cdot i \cdot j \cdot n}{M}\right) \cdot \frac{i}{d} \sin\left(\frac{2n\pi}{M}\right).$$

Differentiëren naar x komt in een Fourierruimte overeen met vermenigvuldiging met $i \cdot k$. Voor het gediscretiseerde geval wordt het golfgetal k in het j^e roosterpunt, $j = 0 \dots M-1$, benaderd door:

$$k = \frac{i}{d} \sin\left(\frac{2j \cdot \pi}{M}\right) \quad (3.11)$$

Als nu de analytische bovenrandconditie (3.9) uitgebreid wordt tot een gediscretiseerde bovenrandconditie dan volgt met (3.11) dat in het j^e roosterpunt moet gelden dat:

$$\hat{p} = P_0 \cdot N \cdot d \cdot \left(\sin\left(\frac{2j \cdot \pi}{M}\right)\right)^{-1} \hat{w} \quad (3.12)$$

Om na te gaan wat de consequenties zijn van het invoeren van deze stralingsconditie kan een stabiliteitsanalyse uitgevoerd worden. Hiervoor wordt aangenomen dat het verticale snelheidsprofiel lineair met de hoogte verloopt en nul aan het aardoppervlak, als volgt:

$$w(x, z, t) = w(x, z_{top}, w) \frac{z}{z_{top}} \quad (3.13)$$

Het afleiden van een stabiliteitscriterium wordt gedaan aan de hand van de vergelijkingen (3.1) - (3.4) en de analytische bovenrandvoorwaarde (3.9). Door nu (3.1) naar x te differentiëren en een integratie naar z uit te voeren, vergelijking (3.2) naar t te differentiëren en eveneens naar z te integreren, vergelijking (3.3) tweemaal naar x te differentiëren kan na invullen van (3.13) en gebruikmakend van een Fourierrepresentatie waarbij de bovenrandvoorwaarde toegepast wordt, de volgende vergelijking afgeleid worden (zie Bougeault, 1982)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{w}_{k,top} = -\|k\| \cdot N \cdot z_{top} \frac{\partial}{\partial t} \hat{w}_{k,top} - \frac{1}{3} + N^2 \cdot k^2 \cdot z_{top}^2 \cdot \hat{w}_{k,top} \quad (3.14)$$

Vergelijking (3.14) heeft de vorm van een gedempte harmonische oscillator. De demping wordt veroorzaakt door de eerste term in het rechterlid, bepaald door de bovenrandconditie (dit volgt direct tijdens de afleiding van (3.14)). Deze geeft aan hoeveel energie er door de bovenrand uitstroomt. Het stabiliteitscriterium wordt gegeven door:

$$\Delta t < \frac{1}{\|k\| \cdot N \cdot z_{top}} \quad (3.15)$$

met de noemer aan de rechterkant gevormd door de dempingscoëfficiënt van (3.14). Hetgeen een strenge eis is. Als we opmerken dat het golfgetal k in het n^e gridpunt gedefinieerd is door

$$\frac{1}{d} \sin \left(\frac{2n \cdot \pi}{M} \right)$$

en als $M = 40$, $z_{\text{top}} = 2500$ m, $d = 1000$ m, $N = 0.04$ (s^{-1}) dan geldt $\Delta t < 5$ sec. De gebruikte methoden (centrale plaatsdiscretisatie en Leap-Frog tijdsafgeleide) leveren een stabiliteitseis

$$\Delta t < \frac{d}{\|u_0 + \frac{N \cdot z_{\text{top}}}{\sqrt{3}}\|} \sim 17 \text{ sec. als } u_0 = 0 \text{ gesteld}$$

(zie Bougeault, 1982). De strenge eis (3.15) kan vermeden worden door de druk aan de bovenrand van het domein impliciet te definiëren. Bij een impliciet discretisatieschema is het in het algemeen zo dat er geen beperking aan de tijdsstapgrootte opgelegd hoeft te worden. Dit geldt alleen voor de stabiliteit van het schema. De nauwkeurigheid van de numeriek berekende oplossing wordt nu de bepalende factor voor de keuze van de tijdsstapgrootte. Deze impliciete bovenrandvoorwaarde is afgeleid door Bougeault (1982).

Een geheel andere bovenrandvoorwaarde wordt gevormd door het aanleggen van een zgn. "sponszone" zoals in hoofdstuk 2 beschreven is. De keuze voor de tijdsstapgrootte wordt nu alleen bepaald door de keuze van de gebruikte discretisatie-methode.

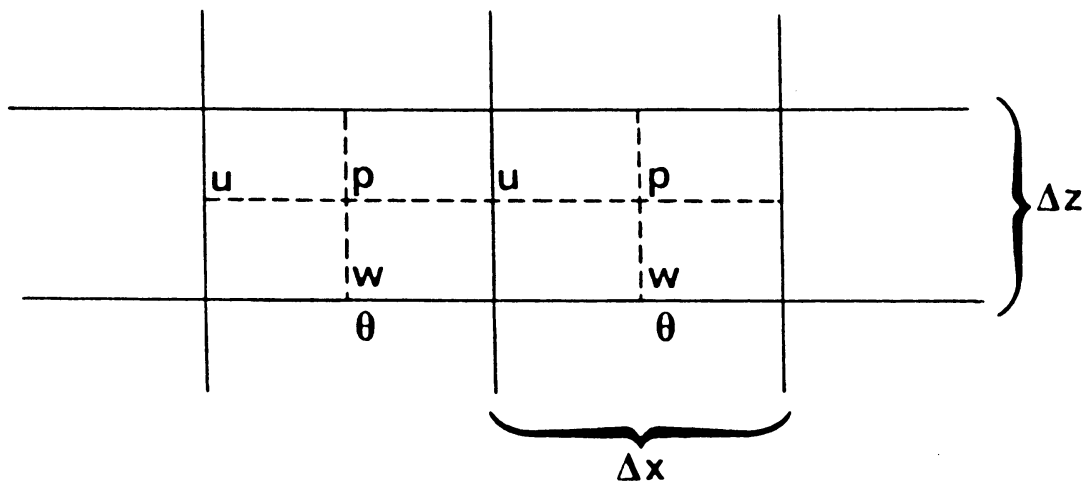
Wordt in het 2-dimensionale geval gebruik gemaakt van deze sponslaag, dan wordt de demping alleen direct toegepast op de horizontale snelheid. Hiermee wordt de verticale snelheid evenredig gedempt vanwege de relatie via de continuïteitsvergelijking. Omdat in het 2-dimensionale geval het principe van de spons identiek is aan het 1-dimensionale geval wordt voor een uitgebreidere bespreking verwezen naar het voorgaande hoofdstuk.

3.4 De numerieke implementatie

In deze paragraaf zal het numerieke model besproken worden waarmee de vergelijkingen (3.1)-(3.4) zijn opgelost. Het model is een sterk vereenvoudigde versie van een op het KNMI aanwezig model. We zullen ook duidelijk maken dat er nog meer praktische numerieke problemen opgelost moeten worden naast het bepalen van de randvoorwaarden.

3.4.1 Het rekenrooster

In het numerieke model wordt gebruik gemaakt van een zgn. "staggered grid" (vershoven rooster) met een equidistante roosterafstand in de horizontaal (x-richting) en een logaritmisch bepaalde roosterafstand in de verticaal (z-richting). Het kenmerk van een staggered grid is dat de verschillende grootheden op verschillende plaatsen in een roostercel berekend worden. Hier wordt het rooster gehanteerd zoals in figuur 3.2 is weergegeven.

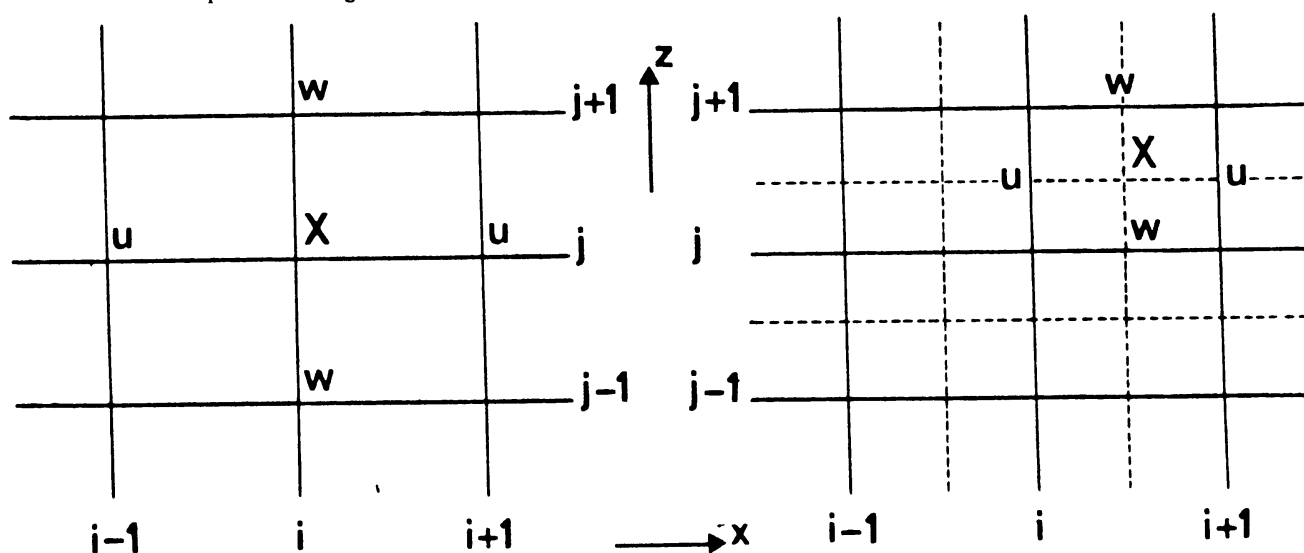


Figuur 3.2

Er zijn verschillende redenen aan te geven (zie bv. Peyret/Taylor) waarom gebruik gemaakt wordt van een staggered grid en die tevens aangeven dat dit essentieel anders is dan een rooster waarbij alle

grootheden in hetzelfde roosterpunt berekend worden ("non-staggered grid").

Bij het oplossen van een continuïteitsvergelijking in een non-staggered grid en waar centrale discretisaties gebruikt worden treedt het verschijnsel op dat er onafhankelijk van elkaar twee verschillende oplossingen kunnen ontstaan. Dit kunnen we zien doordat bij het bepalen van de term $\frac{\partial w}{\partial z}$ alleen van even of oneven hoogteniveau's gebruik gemaakt worden. Bepalen van $\frac{\partial u}{\partial x}$ op een lengteniveau gebeurt alleen met snelheden op oneven niveau's, en omgekeerd. In figuur 3.3 is aangegeven welke punten in een staggered en non-staggered grid gebruikt worden bij het oplossen van de continuïteitsvergelijking in het punt X bij centrale differenties.



Non-staggered grid

Staggered grid

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2 \cdot \Delta x} = - \frac{w_i^{j+1} - w_i^{j-1}}{2 \cdot \Delta z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{\Delta x} = - \frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\Delta z}$$

Figuur 3.3

Bij een staggered grid wordt dus zowel van oneven als even plaats-niveau's gebruik gemaakt, terwijl bij een non-staggered grid alleen de even of alleen de oneven niveau's gebruikt worden.

Het rooster is equidistant in de x-richting, met roosterafstand van 1000 meter gekozen. Dichtbij de grond zijn de verticale gradiënten groot en om deze goed te kunnen beschrijven is het nodig om bij het oppervlak meer roosterpunten aan te leggen. In de verticaal wordt dan op het volgende getransformeerde rooster, uitgedrukt in h , overgegaan dat in de h -coördinaten wel equidistant is. Dit gestrekte coördinatenstelsel wordt dan bepaald door:

$$h = \frac{z}{A} + \log\left(\frac{z+B}{B}\right)$$

$$\Delta h = \frac{h_{top}}{Nz}$$

met A , B constantes en Nz aantal roosterpunten in de verticaal.

3.4.2 Tijdfiltering

In het numerieke model is gebruik gemaakt van het Leap-Frog schema om de tijdsafgeleide te bepalen. Uit de definitie van het Leap-Frog schema blijkt dat alleen met een even of oneven tijdniveau gerekend wordt. Hierdoor kan het effect van zgn. "timesplitting" ontstaan. Dit betekent dat er voor de even en oneven tijdniveau's twee individuele oplossingen kunnen ontstaan die onafhankelijk van elkaar bestaan. Door dit effect kunnen instabiliteiten in de uiteindelijke oplossing ontstaan (zie Robert (1966)) nl. golven met golflengte $2.\Delta x$. Een tijdfilter dient er voor om de verschillende tijdniveau's aan elkaar te relateren zodat timesplitting tegengegaan wordt. Het tijdsfilter

wordt beschreven door de volgende algorithmen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{q}^{n+1} = \bar{q}^{n-1} + 2 \cdot \Delta t \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^n \\ \bar{q}^n = q^n + \alpha (q^{n+1} - 2q^n + \bar{q}^{n-1}) \end{array} \right. \quad (3.16)$$

De bovenste vergelijking geeft het Leap-Frog schema waarin q^{n-1} gemodificeerd is. De onderste vergelijking definieert het filter op tijdstip n , aangegeven door een streep.

Het blijkt (zie Asselin, 1972) dat alleen de computational mode van de discrete oplossing sterk gedempt wordt. Het tijdsfilter heeft vrijwel geen invloed op de fysische oplossing zodat er geen verstoring geïntroduceerd wordt. Dat deze uitspraak ook inderdaad geldig is kan als volgt aangetoond worden:

$$\bar{q}^n = q^n + \alpha (q^{n+1} - 2 \cdot q^n + q^{n-1})$$

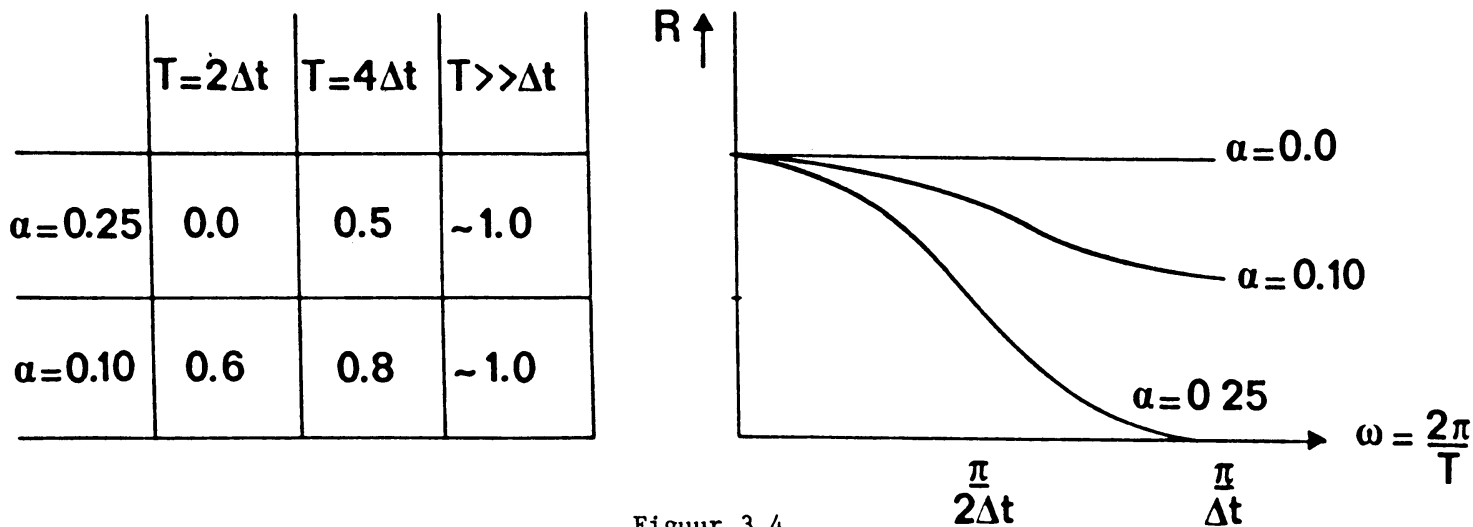
Stel q^n heeft als oplossing $q^n = \hat{q} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot n \cdot \Delta t}$. De verhouding tussen de gefilterde waarde en de eigenlijke waarde, ook wel "response functie" R genoemd wordt gegeven door:

$$R = \frac{\bar{q}^n}{q^n} = (1 - 2\alpha) + 2\alpha \cdot \cos(\omega \cdot \Delta t) \quad (3.17)$$

Nu is

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

met T de periode van de golf. Voor verschillende waarden van α kan nu voor verschillende perioden de response-functie R bepaald worden. In figuur 3.4 zijn enkele waarden van R voor een gegeven waarde van α en T weergegeven.



Figuur 3.4

Uit de tabel blijkt dat voor $\alpha = 0.25$ golven met periode $2\Delta t$ geheel weggefilterd worden. Ook is in te zien dat het filter ervoor zorgt dat golven met een hoge frequentie gedempt worden. Deze hoogfrequente golven, mogelijk als computational mode ten gevolge van het discretiseren, kunnen ook aangeslagen worden door reflecties zoals in het voorgaande hoofdstuk uitgebreid behandeld is.

3.5 Testvoorbeelden

In deze paragraaf zullen de voorbeelden die gebruikt zijn om de gestelde randcondities te verifiëren beschreven worden. Zoals al aangegeven in 3.2 worden alle grootheden ten opzichte van een referentietoestand bepaald. Het achtergrond-temperatuur profiel is zo gekozen dat het overeenkomt met een stabiel opgebouwde grenslaag. In de verticaal is een lineair temperatuurprofiel vastgelegd door:

$$T_0(z) = T^* - \gamma \cdot z$$

T^* referentietemperatuur = 293 K.

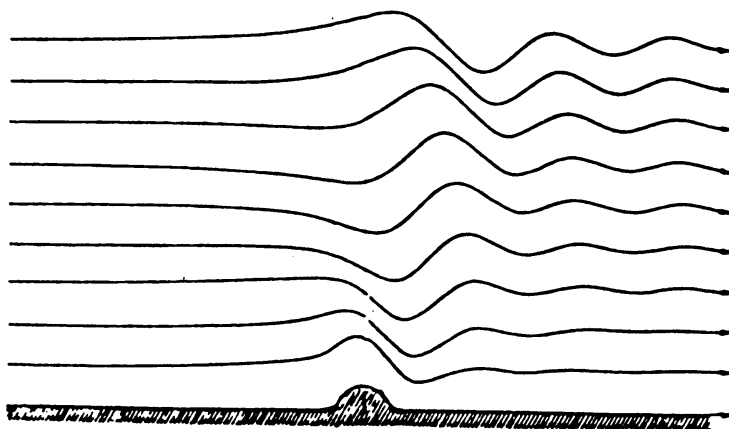
γ $5 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$ ("lapse-rate")

z de hoogte

Met behulp van de ideale gaswet en de impulsvergelijking zijn dan direct relaties af te leiden die de ander grootheden (p_0 , θ_0 , ρ_0 en N^2) eenduidig vastleggen.

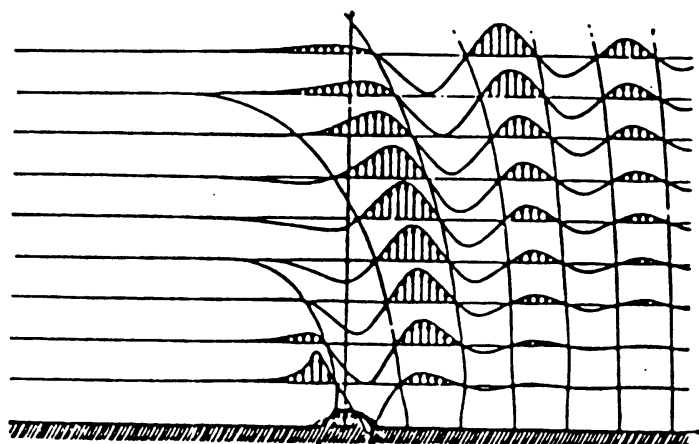
3.5.1 The Mountain wave

Een "mountain wave" ontstaat als lucht in een stabiel gelaagde atmosfeer tegen een heuvelrug opgestuwd wordt (zie Alaka, 1960). De na het passeren van de top dalende luchtbeweging induceert een gedempte oscillerende beweging rond de oorspronkelijke evenwichtstoestand. De golflengte van de opgewekte golf is direct afhankelijk van de orografie van het landschap. De figuren 3.5 en 3.6 geven achtereenvolgens aan hoe de stroomlijnen rond een heuvel verlopen en hoe de verticale snelheid zich in de golfbeweging gedraagt (beide figuren zijn afkomstig uit Alaka, 1960).



Figuur 3.5 Stroomlijnen rond een heuvel

(Alaka, 1960)



Figuur 3.6 Verticaal snelheidsprofiel rond een heuvel
(Alaka, 1960)

Dat deze golf een zwaartekrachtsgolf is, is een direct gevolg van het feit dat deze beweging alleen onder invloed van de zwaartekracht kan ontstaan.

In dit voorbeeld wordt uitgegaan van de referentietoestand zoals hiervoor beschreven, waarbij de wind (van links naar rechts) over een bergvormig oppervlak beweegt. Aan het aardoppervlak wordt de stroomfunctie ξ_0 voorgeschreven, als volgt:

$$\xi_0(x) = \frac{H}{1+(x/b)^2} \quad (3.18)$$

met H de hoogte van de heuvel $H = 200$ m.

b de breedte van de heuvel $b = 4000$ m.

De analytische oplossing $\xi(x,z)$ wordt gegeven door (zie ook Bougeault, 1982)

$$\xi(x, z) = \frac{H}{1+(x/b)^2} \left(\cos \left(\frac{N}{u_0} z \right) - \frac{x}{b} \sin \left(\frac{N}{u_0} z \right) \right) \quad (3.19)$$

met N de Brunt-Väisälä frequentie

u_0 de gemiddelde snelheid van de achtergrondwind, $u_0 = 10 \text{ ms}^{-1}$.

Uit (3.19) kan nu direct de verticale windsnelheid berekend worden.

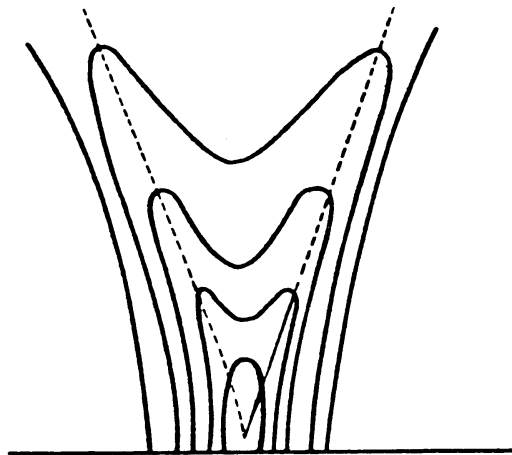
Deze is gegeven door:

$$w(x, z) = u_0 \frac{\partial \xi(x, z)}{\partial x} \quad (3.20)$$

Uit de oplossing volgt direct dat deze zgn. "mountain waves" stationair zijn.

3.5.2 Het Sint Andreas kruis

Bij dit voorbeeld wordt het aardoppervlak als een trillend membraam gedacht. Het golfpatroon dat hiermee opgewekt wordt in de gelaagde stroming heeft de vorm van een half Sint Andreas kruis (Lighthill, 1978) zoals in figuur 3.7 getoond wordt, waarin het verticale snelheidsprofiel geschetst is.



Figuur 3.7

Dit patroon ontstaat omdat alle energie slechts langs twee lijnen die een hoek ϕ , resp. $\pi - \phi$ ten opzichte van de horizontaal maken getransporteerd wordt.

De opbouw van de atmosfeer wordt gegeven door de referentietoestand zoals beschreven aan het begin van de paragraaf terwijl de gemiddelde achtergrondwind op nul gesteld wordt.

Aan het oppervlak wordt het volgende verticale snelheidsprofiel gekozen:

$$w(x, 0, t) = \frac{w_0}{1+(x/a)^2} \cos(2\pi t/T) \quad (3.21)$$

met $w_0 = 0.17 \text{ ms}^{-1}$, maximale amplitude verticale snelheid,

$a = 3000 \text{ m}$, breedte van het membraam,

$T = 1440 \text{ s}$, periode van de geïnduceerde trilling.

De analytische oplossing $w(x, z, t)$ wordt bepaald door (zie ook Bougeault, 1982)

$$w(x, z, t) = \frac{1}{2} w_0 a \left\{ \frac{\cos(\omega t + \phi)}{\left\{ a^2 + \left(x + \frac{Nz}{\omega} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{\cos(\omega t - \phi^1)}{\left\{ a^2 + \left(x - \frac{Nz}{\omega} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

met

$$\phi = \arccos \left\{ \frac{a}{\left\{ a^2 + \left(x + \frac{Nz}{\omega} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

$$\phi^1 = \arccos \left\{ \frac{a}{\left\{ a^2 + \left(x - \frac{Nz}{\omega} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

ω de tijdsfrequentie

N de Brunt-Väisälä frequentie.

3.6 Testresultaten

In deze paragraaf zullen de resultaten voor de verschillende randcondities besproken worden aan de hand van de testvoorbeelden uit 3.5. Voordat hiertoe overgegaan wordt volgen eerst een paar algemene opmerkingen. Alle figuren geven het verticale snelheidsprofiel weer na 900 tijdstappen van 4 seconden. De horizontale snelheid is via de continuïteitsvergelijkingen direkt aan de verticale snelheid gekoppeld zodat verstoringen door de zijrandcondities ook direkt in het verticale snelheidsprofiel zichtbaar zijn. De gestippelde lijn geeft altijd de exacte (analytische) oplossing weer, de getrokken lijn de numeriek berekende. Ten gevolge van het discretiseren treedt er altijd een faseverschuiving op. Er zal dus vrijwel nooit gelden dat de exacte en de analytische oplossing samenvallen.

3.6.1 Tests met bovenrandvoorwaarden

Achtereenvolgens zijn voor beide voorbeelden, de "mountain wave" en het "Sint Andreas kruis" de volgende bovenrandcondities getest:

- a. de expliciete randvoorwaarde (Klemp and Durran), zie 3.3.4
- b. de impliciete versie van a. (Bougeault), zie 3.3.4
- c. Dirichlet randvoorwaarde $p_{top} = 0$
- d. de sponszone, zie 2.4

Bij de bespreking van deze resultaten is in eerste instantie niet op de randvoorwaarden aan de in- en uitstroomrand gelet.

a. De expliciete stralingsrandvoorwaarde

In de figuren 3.8 en 3.9 staan de resultaten voor respectievelijk de "mountain wave" en het "Sint Andreas kruis" weergegeven met de expliciete stralingsrandvoorwaarde gegeven door $\hat{p} = \frac{N}{|k|} \cdot \hat{w}$ (zie ook Klemp en Durran, 1982).

Aan de bovenrand is voor beide figuren duidelijk te zien dat er geen directe reflecties optreden omdat er geen golfvormige afwijking van de exacte oplossing ontstaat. Echter, er is wel een grotere afwijking van de berekende oplossing ten opzichte van de analytische te zien bij toenemende hoogte (op het aardoppervlak is de analytische oplossing voorgeschreven zodat daar geen afwijkingen te zien zijn). Bij het Sint Andreas kruis zijn de isolijnen voor waarden die 0,01 van elkaar verschillen geplot. De fout bij de bovenrand heeft ook deze orde van grootte. Voor de "mountain wave" zijn de isolijnen geplot met een tussenwaarde van 0.1. De foutgrootte is dan ongeveer 0.05 aan de bovenrand van het domein.

Dit betekent dat er toch nog wat energie teruggekaatst wordt. Dat dit niet te wijten is aan een fout ten gevolge van het discretiseren volgt uit het feit dat bij de aanleg van een sponszone (zie figuur 3.12) de exacte en numeriek berekende oplossing weinig verschillen.

Verhoging van de tijdsstapgrootte Δt tot meer dan 4 seconden leidt inderdaad tot een instabiele oplossing. Om Δt te vergroten is een impliciete versie van deze randconditie opgesteld.

b. De impliciete stralingsrandvoorwaarde

Hierbij is het expliciete schema voor de drukafgeleide aan de top van het domein door een impliciet schema vervangen (zie Bougeault, 1982). Dit levert echter geen voordeel op voor de te kiezen grootte van de tijdstap Δt . Vergroting van de tijdstap leidt tot een onacceptabel grote afwijking van de exacte oplossing. Bij eenzelfde tijdsstapgrootte als voor het expliciete schema leidt deze bovenrandconditie (zie figuur 3.10) tot een grotere afwijking van de analytische oplossing dan de expliciete bovenrandconditie. Dit zou betekenen dat er

meer reflecties optreden. Uit figuur 3.10 is af te lezen dat de berekende snelheid hoger ligt dan de exacte snelheid.

Deze afwijkingen zouden te wijten kunnen zijn aan het te implementeren schema. In het schema moet ook een integraal benaderd worden die bepaald wordt door eerdere berekeningen zodat discretisatiefouten dubbel voor verstoringen kunnen zorgen. Bij het implementeren is het niet eenvoudig om de hoekpunten aan de bovenrand juist te benaderen. Hier moeten weer benaderingen toegepast worden die ook voor onnauwkeurigheden verantwoordelijk zijn.

c. Dirichlet randvoorwaarde

In figuur 3.11 is het voorbeeld van het Sint Andreas kruis tezamen met de randvoorwaarde $p_{\text{top}} = 0$ (druk aan de bovenrand van het domein zo gesteld) weergegeven. Zoals in het voorgaande hoofdstuk (zie 2.3.2 en 2.3.4) al is aangetoond leidt deze randconditie tot volledige reflectie zoals in de figuur duidelijk te zien is. Deze randconditie is dus niet toepasbaar.

d. Sponszone

Deze is aangelegd over een hoogte van 5 roosterpunten die boven het eigenlijke domein geplaatst zijn. In de spons wordt de horizontale snelheid gedempt met de relaxatiecoëfficiënt:

$$K = 10 + 1000 \left(\frac{z_{\text{top}} - z}{\Delta z} \right)$$

en de gedempte horizontale snelheid $u_{\text{demp}}(x, z, t)$ wordt bepaald door:

$$u_{\text{demp}}(x, z, t) = u(x, z, t) - \frac{u(x, z, t) - u_g(x, z, t)}{K}$$

$$u_g(x, z, t) = u_g = 10 \text{ ms}^{-1}, \text{ de geostrofische windsnelheid.}$$

In figuur 3.12 is de mountain wave doorgerekend met de aangelegde sponszone. Met de aanleg van dit sponsgebied wordt de exacte oplossing zeer goed benaderd. Bij een juiste demping in het sponsgebied, hiermee wordt bedoeld dat ook inderdaad alle golfbeweging gedempt wordt, is deze randconditie goed toepasbaar. In de sponszone wordt dus alleen de golfbeweging gedempt, dit houdt niet in dat er helemaal geen beweging in de sponszone mogelijk is. Dit laatste blijkt ook wel uit de figuur. Voor dit voorbeeld hadden we misschien kunnen volstaan met een kleiner sponsgebied. Hierbij moet wel opgelet worden dat de gradiënten dan niet zo groot worden dat tegen de verschillende hoogteniveau's reflecties optreden.

In de volgende tabel zijn voor beide testvoorbeelden de hoeveelheid CPU tijd weergegeven bij de verschillende randcondities tezamen met de percentages t.o.v. de Dirichlet randvoorwaarde

	Mountain wave		Sint Andreas kruis	
	CPU	%	CPU	%
a. expl. stralingsrvw.	4.5925	118	31.4267	103
b. impl. stralingsrvw.	4.7094	121	31.9730	105
c. Dirichlet	3.8868	100	30.3707	100
d. Sponszone	5.6812	146	38.4107	126

Tabel 3.1

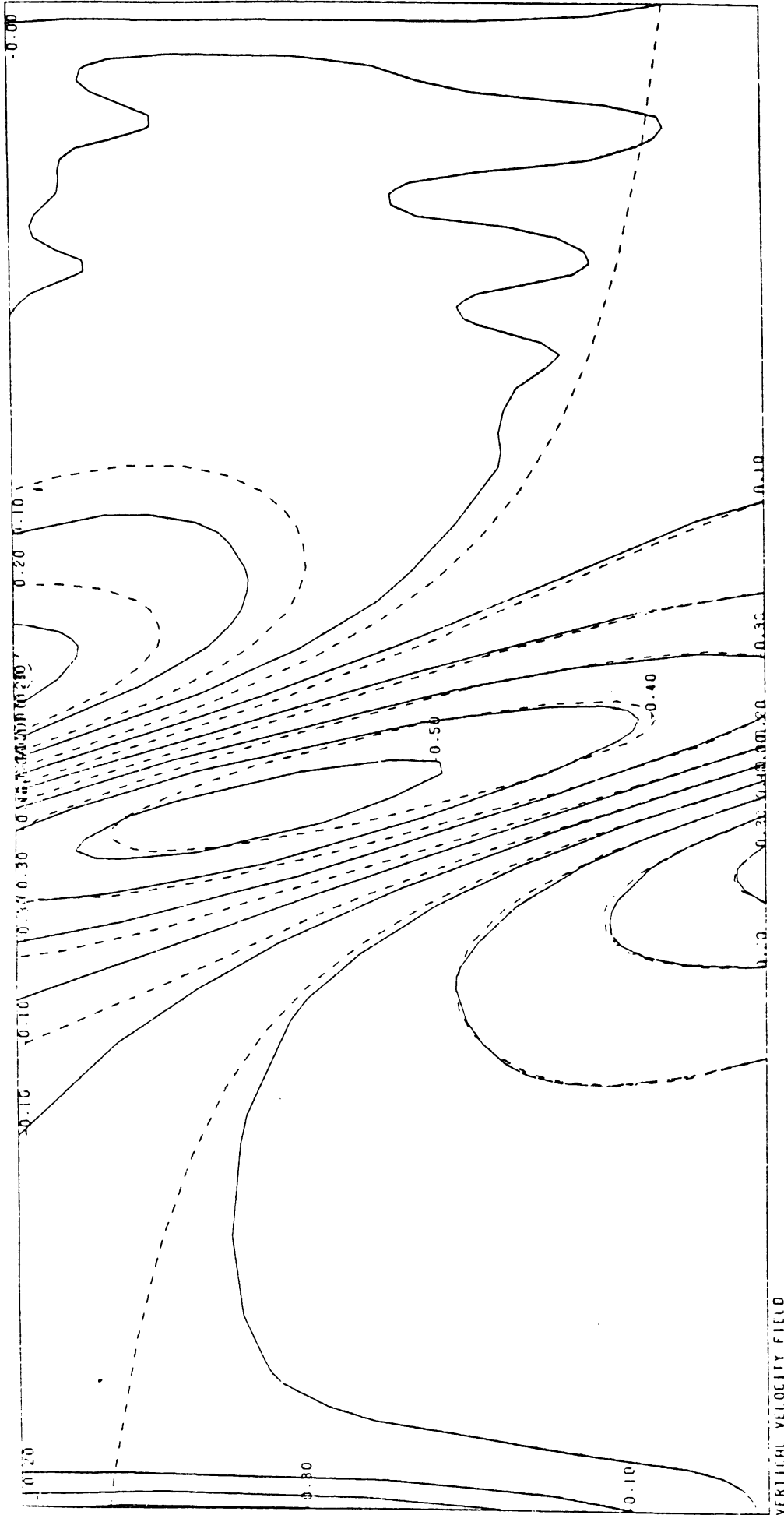
Er volgt dat de Dirichletrandvoorwaarde de minste rekentijd vraagt. Dit is te begrijpen als men bedenkt dat er geen extra berekeningen uitgevoerd hoeven te worden.

3.6.2 Tests met zijrandvoorwaarden

Voor de zijrandvoorwaarden zijn, uitgaande van de resultaten uit hoofdstuk 2, de randvoorwaarden opgesteld door Sundström en Elvius en de randconditie van Orlanski getest. Bij gebruikmaking van de randconditie $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (vgl. 2.3.4, de randconditie 2) aan de uitstroomrand zoals vaak toegepast wordt, is in de figuur 3.8 duidelijk de gereflecteerde golf zichtbaar.

De randconditie van Sundström en Elvius geeft, zoals in figuur 3.13 aangegeven is bij de "mountain wave", slechts een kleine verstoring aan de uitstroomrand. Dit is juist hetgeen te verwachten was, als we de resultaten uit hoofdstuk 2 bekijken.

In de figuren 3.14 en 3.15 staan de resultaten van het voorbeeld met het Sint Andreas kruis met Orlanski aan de uit- en instroomrand resp. alleen aan de uitstroomrand. De numerieke oplossing vertoont in beide gevallen een afwijking naar links, dit zou betekenen dat er toch een reflecterende golf aan de uitstroomrand ontstaat.



Figur 3.8

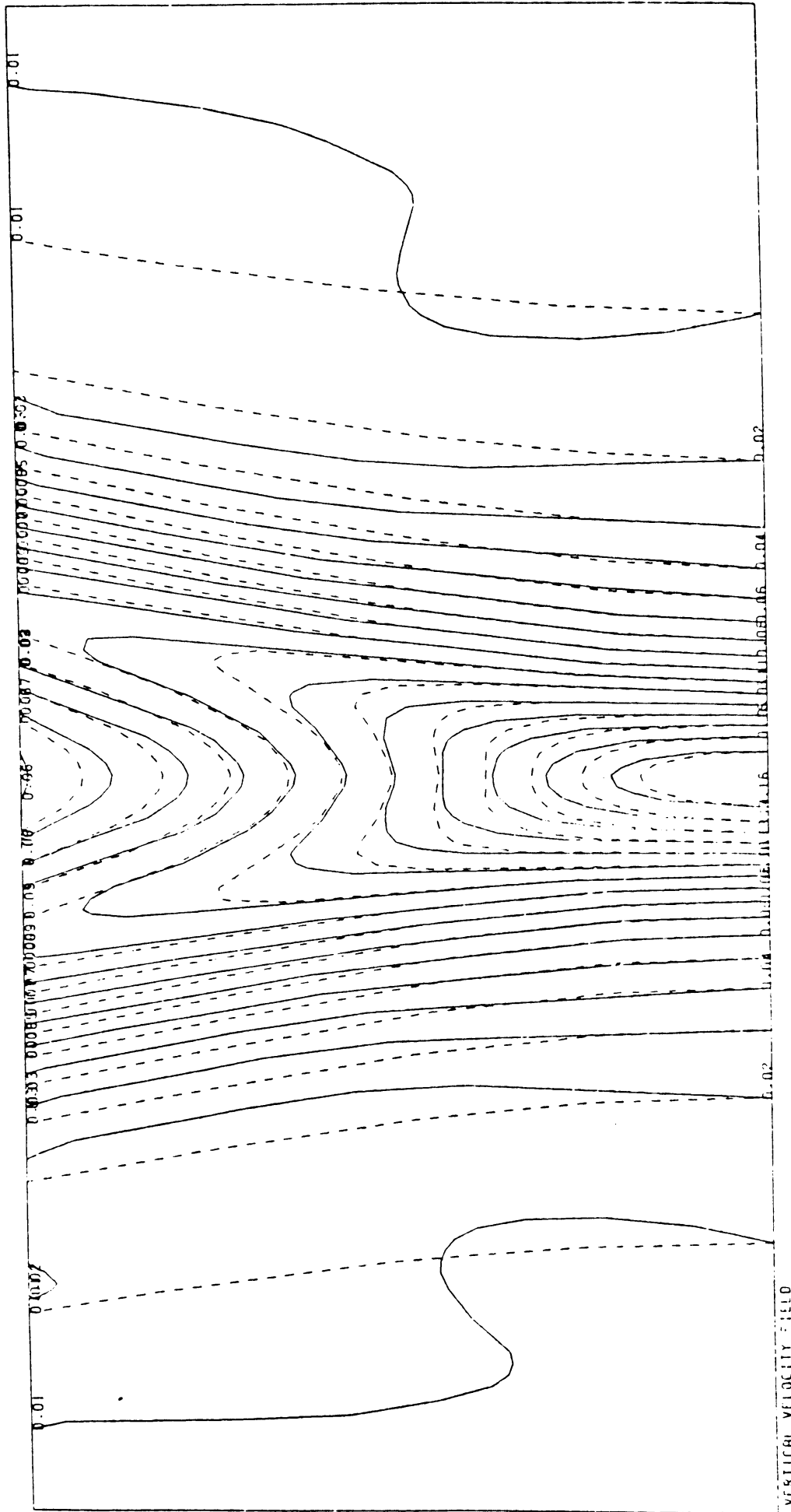


Figure 3.9

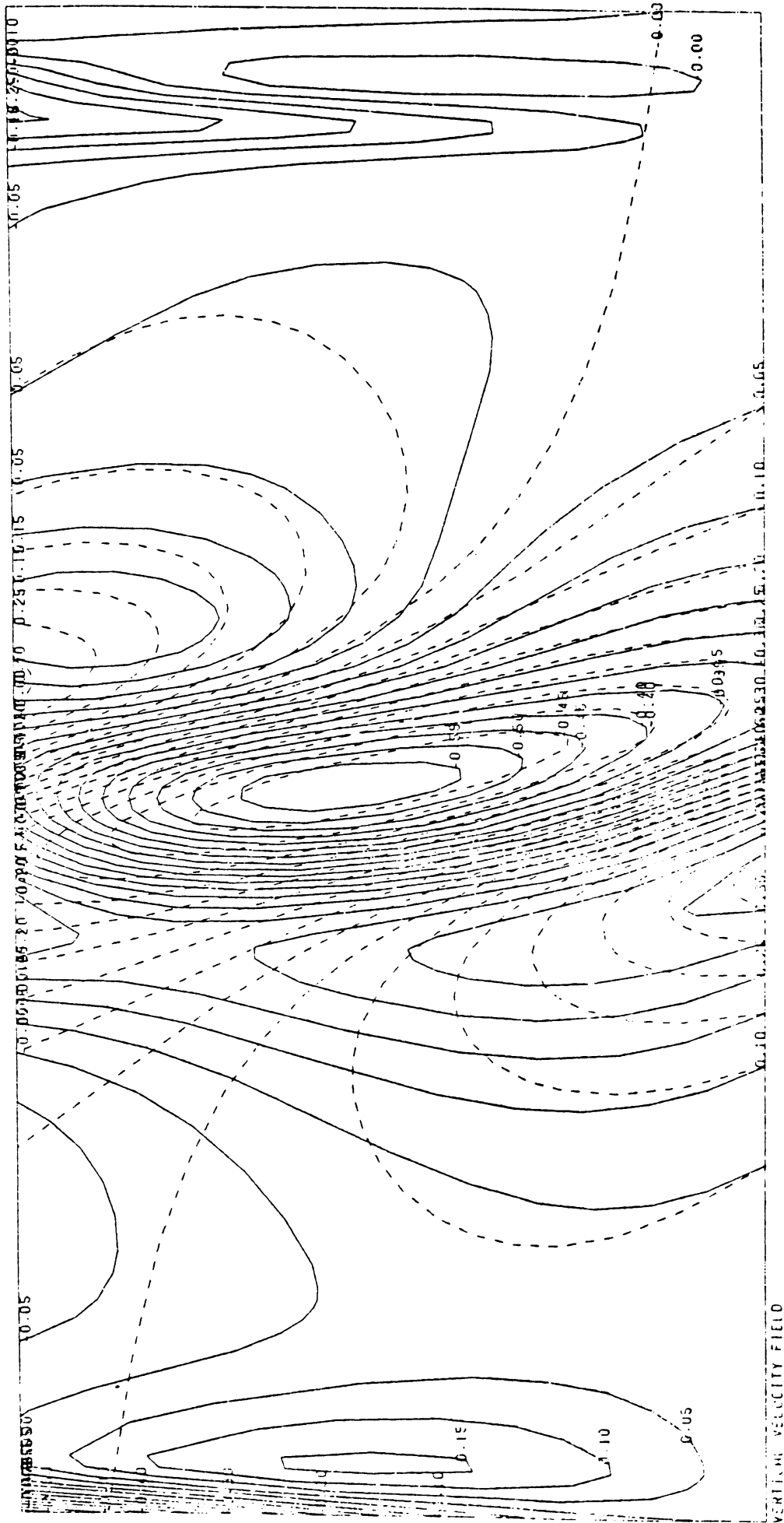


Figure 3.10

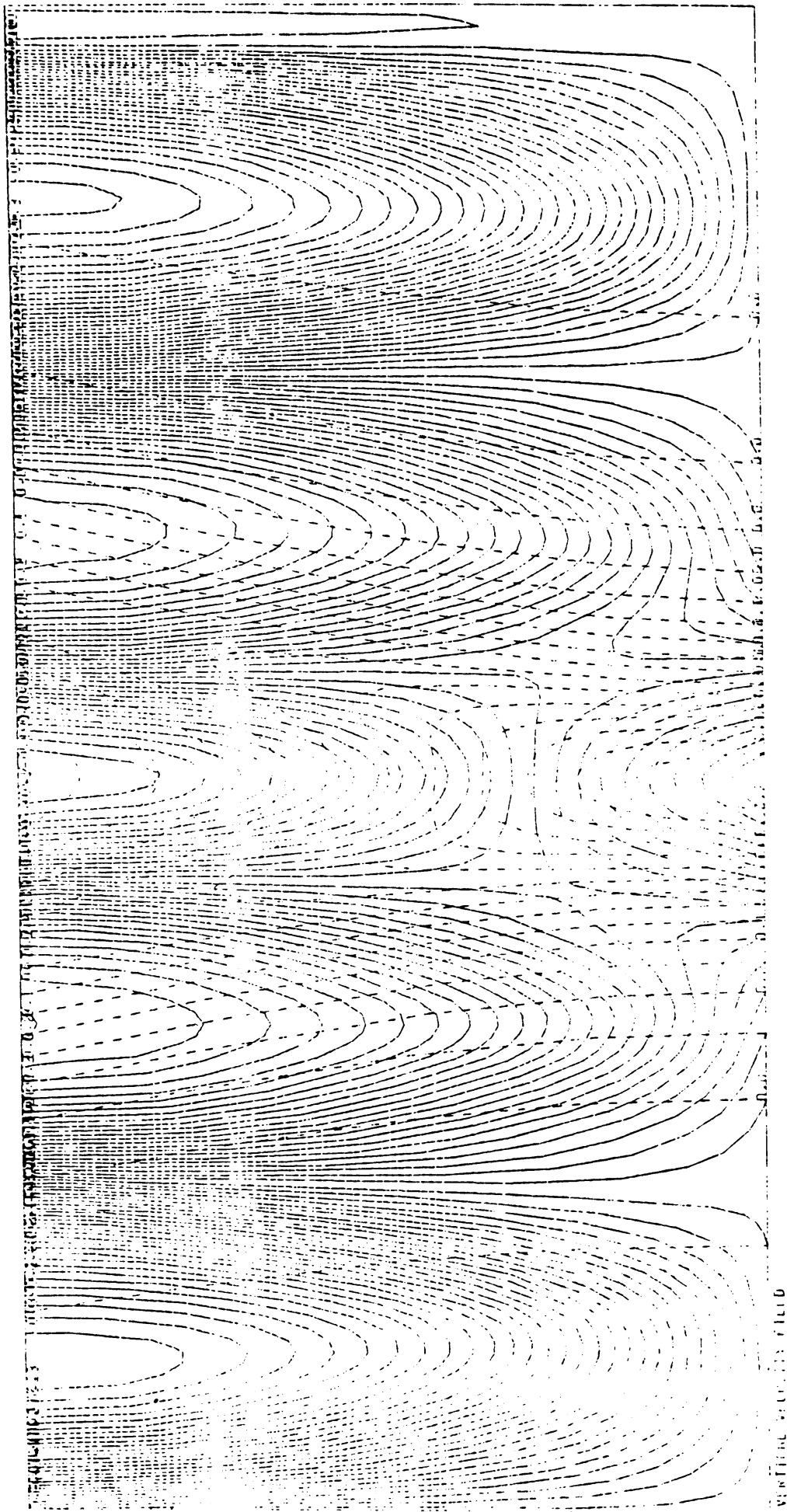


Figure 3.11

VERTICAL SCALAR FIELD

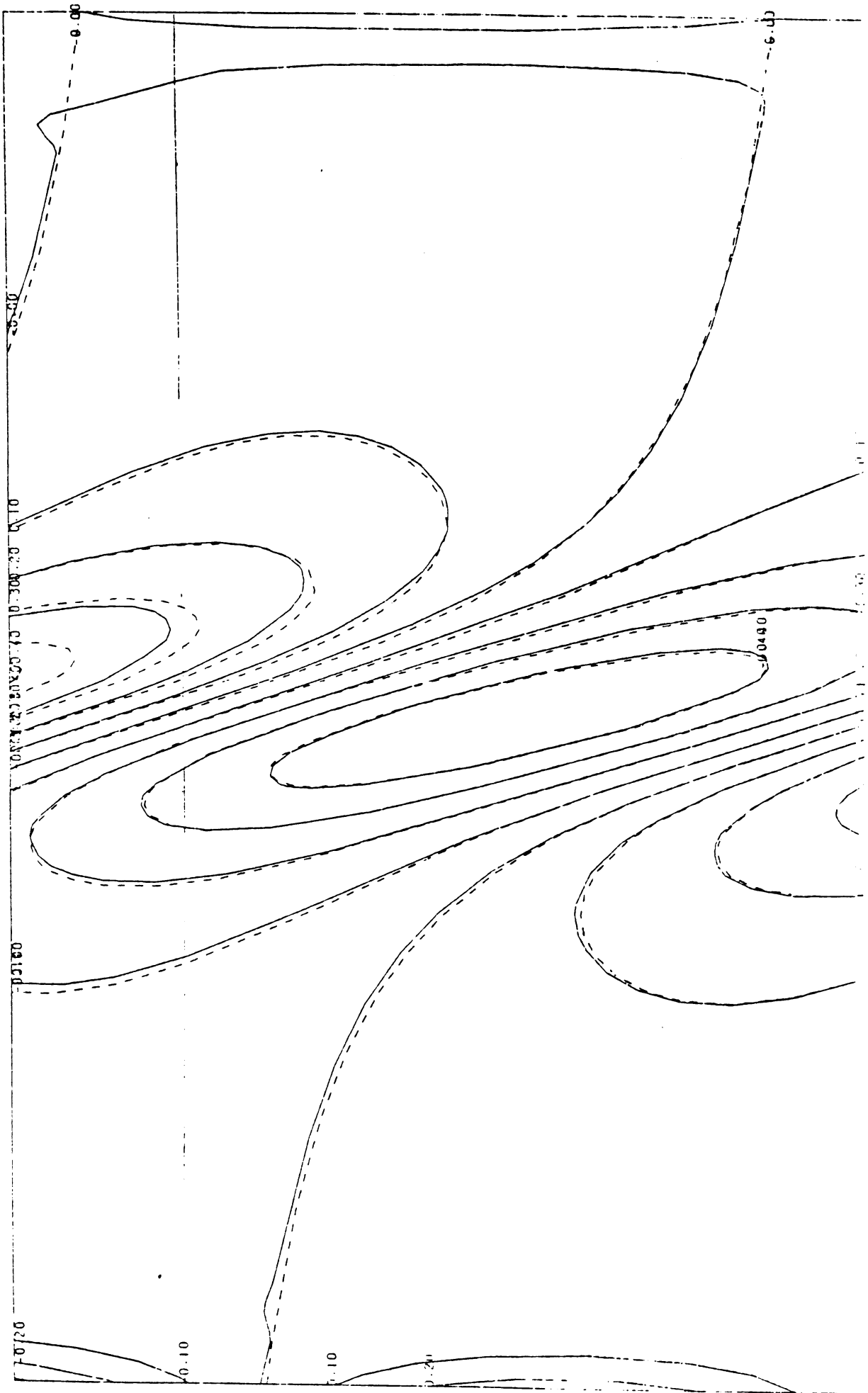


Figure 3.12

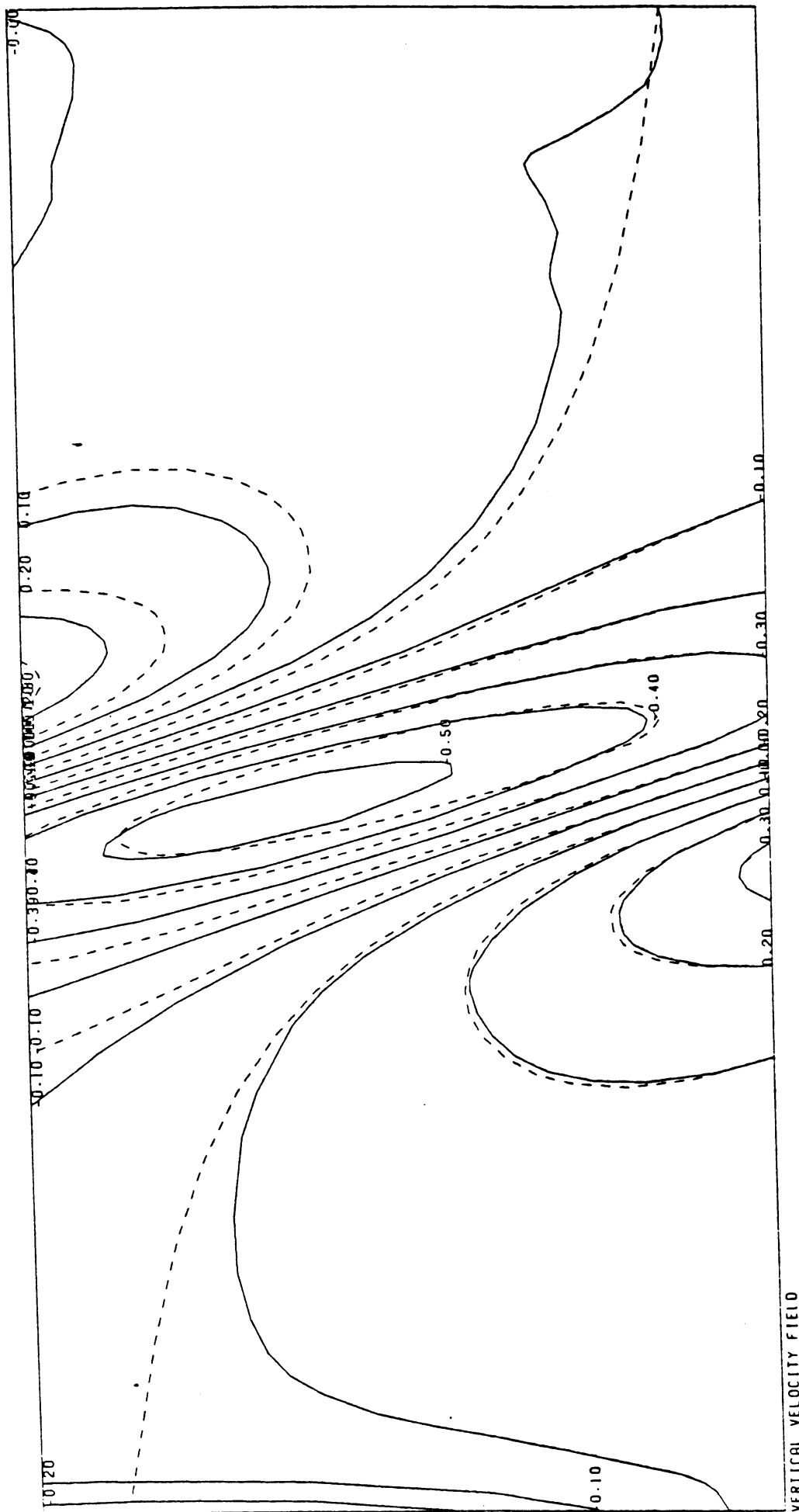


Figure 3.13

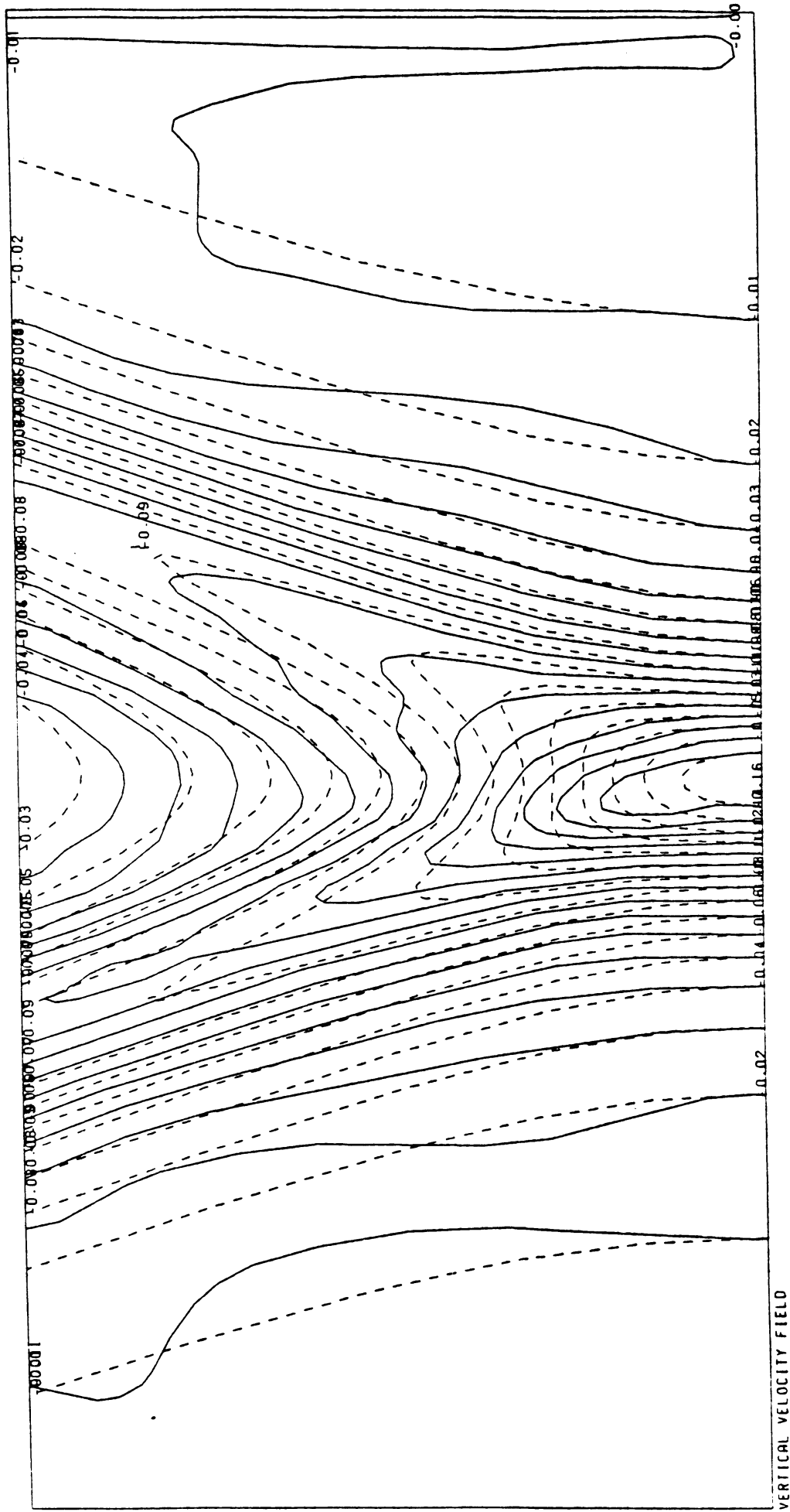


Figure 3.14

VERTICAL VELOCITY FIELD

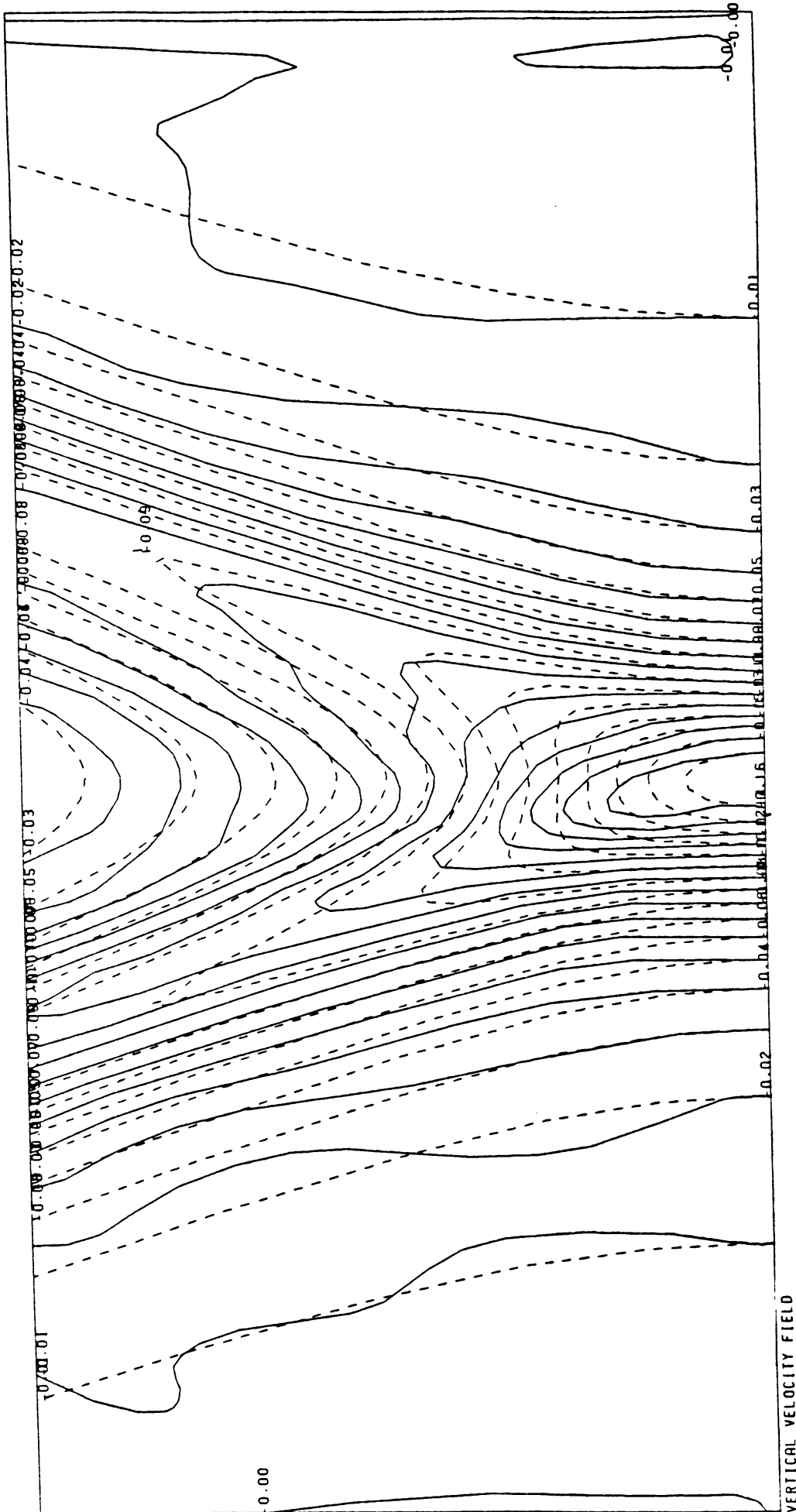


Figure 3.15

3.7 Conclusies

In het tweedimensionale gelineariseerde hydrostatische Boussinesq stelsel vergelijkingen zijn verschillende zijrandvoorwaarden en bovenrandvoorwaarden getest, nodig om het stelsel numeriek oplosbaar te maken.

Uit de tabel 3.1 blijkt dat de Dirichletrandvoorwaarde de minste rekentijd vraagt, maar niet toepasbaar is gezien de volledige reflectie die optreedt.

De keuze voor de meest geschikte bovenrandconditie zou dan vallen op de expliciete stralingsrandvoorwaarde (Klemp en Durran, 1982) die voor de bovenrand een relatie tussen de druk en de verticale snelheid voorschrijft die zo is opgesteld dat alleen energie het domein uit kan lopen maar er niet in kan komen. Voor dit stelsel vergelijkingen voldoen de resultaten zeer goed en heeft deze randconditie een lage rekentijd.

Hierbij moet wel opgemerkt worden dat voor minder vereenvoudigde stelsels vergelijkingen de afleiding minder eenvoudig is evenals de implementatie. De maximale tijdstapgrootte Δt is 4 seconden. Het impliciet maken van de stralingsrandvoorwaarde leidt er wel toe dat de Δt verhoogd kan worden, zonder dat er instabiliteiten optreden. De benodigde rekentijd neemt toe (zie tabel 3.1) evenals de onnauwkeurigheid, zodat we op dezelfde keuze van Δt aangewezen zijn.

De aanleg van een sponszone levert zeer goede resultaten. Gelet op de benodigde rekentijd, is voor dit stelsel vergelijkingen de expliciete stralingsrandvoorwaarde als mogelijke bovenrandconditie te prefereren. Als conditie voor de uitstroomranden levert het schema van Sundström en Elvius de beste resultaten en heeft als voordeel dat het eenvoudig te implementeren is en weinig extra berekeningen vraagt, dit in tegenstelling tot het schema van Orlanski.

In geval van het oplossen van een stelsel niet-lineaire vergelijkingen is het gebruikmaken van een stralingsrandvoorwaarde echter zeer gecomplic-

ceerd. Het berekenen van de randvoorwaarde leidt dan tot grote problemen. In deze gevallen is de sponszone veel eenvoudiger. Helaas is dit in de stageperiode verder niet meer onderzocht wegens tijdgebrek.

4. Conclusies

Om een stelsel vergelijkingen numeriek op te lossen is het noodzakelijk om randvoorwaarden voor te schrijven om het stelsel oplosbaar te maken. Ten gevolge van het numeriek discretiseren ontstaan computational modes, deze kunnen aangeslagen worden door het opleggen van randvoorwaarden en zorgen voor verstoringen van de eigenlijke oplossing.

In een tweedimensionaal domein moeten in de horizontale richting randvoorwaarden aan de zgn. in- en uitstroomrand opgelegd worden en in de verticale richting alleen aan de bovenrand.

De horizontale randwaarden blijken het best benaderd te worden door het schema van Orlandi. Dit schema benadert de fasesnelheid van de golfoplossing in het voorlaatste gridpunt en past deze benadering toe bij bepaling van de randwaarden. Nadeel van deze methode is zijn complexiteit, de benodigde extra geheugenruimte omdat meer waarden op een vorig tijdstip nodig zijn bij bepaling van de fasesnelheid. Dit leidt ook tot een toename in de rekentijd. Voorkeur wordt dan ook gegeven aan het schema van Sundström en Elvius. Dit is ontstaan vanuit de gedachte dat aan de rand van het domein geldt dat:

$$\frac{d^2 q}{dx^2} = 0.$$

Dit schema, dat zeer eenvoudig te implementeren is blijkt slechts zwak reflexief te zijn en zeer bevredigende resultaten te geven.

Voor de bovenrand voldoet de expliciete stralingsrandvoorwaarde (Klemp en Durran, 1982) die een relatie tussen de druk en de verticale snelheid geeft. Deze heeft weinig reflecties tot gevolg en vereist minder rekentijd dan de gebruikelijke sponszone. Hierbij moet wel de kanttekening gemaakt worden dat deze stralingsrandvoorwaarde voor een niet-gelineariseerd stelsel vergelijkingen niet zo eenvoudig af te leiden is en de keus voor het aanbrengen van een sponsgebied dan erg voor de hand liggend is. De beperking door de stralingsrandvoorwaarde op de tijdstapgrootte kan niet opgelost worden door een impliciete drukwaarde aan de top van het domein te gebruiken (Bougeault, 1982). De vergroting van de tijdsstap geeft dan een onaanvaardbare onnauwkeurigheid van de oplossing. De Dirichletrandvoorwaarde door $p_{\text{top}} = 0$ te stellen, leidt tot volledige reflectie en is daardoor ook niet toepasbaar.

Als discretisatieschema kan het best een Leap-Frog tijdsdiscretisatie en een centrale differentie voor de plaatsafgeleide genomen worden. Deze schema's leiden niet tot het introduceren van numerieke diffusie en laten Fouriercomponenten ongestoord door, deze worden niet gedempt. In vergelijking tot andere discretisatiemethoden laat dit schema golven met hogere frequenties die bij reflecties voor de grootste verstoring zorgen door met een snelheid die nooit groter zal zijn dan de fasesnelheid van de exacte oplossing.

5. Literatuur

Alaka, M.A., 1960: The airflow over mountains. WMO Technical Note 34.

Arakawa, A., : Boundary conditions in limited area models. In: Lectures presented at the workshop on limited-area numerical weather prediction models for computers of limited power (Erice, Italy, 1-14 October 1984), pt. 3 (Short- and medium-range Weather prediction research publication series; 13); pp. 403-433. - Geneva, World Meteorological Organization.

Asselin, R., 1972: Frequency filter for time integrations. Monthly Weather Review, 100, pp. 487-490.

Baas, A.F. de, 1984: Interne gravitatiegolven in een stabiel gelaagde atmosfeer. KNMI Wetenschappelijk rapport, WR 84-1.

Batchelor, G.K., 1981: An introduction to fluid mechanics. Cambridge University Press.

Bougeault, P., 1982: A non-reflective upper boundary condition for limited height hydrostatic models. Monthly Weather Review, 111, pp. 420-429.

Dahlquist, G. and A. Björck, 1974: Numerical methods, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York.

Davies, H.C., 1976: A lateral boundary formulation for multi-level prediction models. Quart. J. R. Met. Soc., 102, pp. 405-418.

Dutton, P.D., 1976: The ceaseless wind, an introduction to the theory of atmospheric motion. McGraw-Hill.

Dutton, J.A. and G.H. Fichtl, 1969: Approximate equations of motion for gasses and liquids. Journal of the Atm. Sc., 26, pp. 241-254.

- Enquist, B. and A. Majda, 1977: Absorbing conditions for the numerical simulations of waves. *Mathematics of Computation*, 31, No. 139, pp. 629-650.
- Gray, D. and A. Giorgini, 1976: The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gasses. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 19, pp. 545-551.
- Haltiner, G.J. and R.T. Williams, 1980: Numerical prediction and dynamic meteorology. John Wiley and Sons.
- Holton, J.R., 1979: An Introduction to dynamic meteorology (second ed.). Academic Press.
- Klemp, J. and D.R. Durran, 1982: An upper boundary condition permitting internal gravity waves in numerical mesoscale models. *Monthly Weather Review*, 111, pp. 430-444.
- Klemp, J. and D.K. Lilly, 1978: Numerical simulation of hydrostatic mountain waves. *Journ. of the Atm. Sc.*, 35, pp. 78-107.
- Lighthill, J. 1978: Waves in fluids. Cambridge University Press.
- Lilly, D.K. and T. Gal-Chen, 1982: Mesoscale meteorology-theories, observations and models. Reidel Publishing Company.
- Miller, M.J. and A.J. Thorpe, 1981: Radiation conditions for the lateral boundaries of limited area modelling. *Quart. J. R. Met. Soc.*, 107, pp. 615-628.
- Nieuwstadt, F.T.M. and H. van Dop, 1982: Atmospheric turbulence and air pollution modelling. Reidel Publishing Company.
- Orlanski, I., 1976: A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flow. *Journ. of Computational Physics*, 21, pp. 251-269.
- Peyret, R. and R.D. Taylor, 1983: Computational methods for fluid flow. Springer Verlag.

- Pielke, R.A., 1984: Mesoscale meteorological modelling. Academic Press.
- Richtmeyer, R.D. and K.W. Morton, 1967: Difference Methods for Initial Boundary Problems (second edition). Interscience Publishers.
- Roache, P.J., 1976: Computational fluid dynamics. Hermosa publishers.
- Robert, A.J., 1966: The integration of a low order spectral form of the primitive meteorological equations. Journ. of the Met. Soc. of Japan, 44, pp. 237-244.
- Sundström, A. and T. Elvius, 1979: Computational problems related to limited area modeling. In: Numerical Methods Used in Atmospheric Models, pt. 2 (GARP Publ. series, No. 17) ISCU-WMO; p. 381-416.
- Vitchnevsky, R. and J.B. Bowles, 1982: Fourier analysis of numerical approximation of hyperbolic equations. SIAM, Philadelphia.
- Wagatha, L., 1983: Approximation of pseudodifferential operators in absorbing boundary conditions for hyperbolic equations. Numerische Mathematik, 42, pp. 51-64.

Appendix

In deze appendix zullen enkele eigenschappen van harmonische golfoplossingen, bijvoorbeeld oplossingen van de lineaire advectionvergelijking, besproken worden, zoals: dispersierelatie, fasesnelheid, groepssnelheid (zie ook Lighthill, 1978).

Een dispersierelatie is een relatie die een afhankelijkheid aangeeft tussen de frequentie ω en het golfgetal k of de componenten van de golfvector k als we in meer ruimte-dimensies werken. Er is sprake van dispersie als de golfsnelheid afhankelijk van het golfgetal is. Dit is voor te stellen als het uiteenlopen van golven met verschillend golfgetal, ieder met een andere snelheid.

Bij golfvoortplanting zijn verder twee snelheden belangrijk: de fasesnelheid en de groepssnelheid. De fasesnelheid in een gegeven richting is gedefinieerd als de frequentie ω gedeeld door het golfgetal in die richting. Dit is juist de snelheid waarmee punten met gelijke fase zich voortplanten. De groepssnelheid in een gegeven richting wordt gedefinieerd als de afgeleide van de frequentie naar het golfgetal in die richting. Het blijkt nu dat de groepssnelheid juist de snelheid is waarmee energie door een golf getransporteerd wordt. De groepssnelheid is duidelijk zichtbaar in een zgn. "golfpakket", welke een samenstelling is van meerdere golven. Het meest eenvoudige golfpakket is voor te stellen door de samenstelling van twee golven waarbij het golfgetal Δk en de frequentie $\Delta \omega$ verschilt. Dit ziet er dan als volgt uit:

$$\begin{aligned} g_p &= e^{i(kx - \omega t)} + e^{i((k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t)} \\ &= -2 \cos\left(\frac{\Delta kx - \Delta \omega t}{2}\right) e^{i((2k + \Delta k)x - (2\omega + \Delta \omega)t)} \end{aligned}$$

Het golfpakket (gp) vormt dus een golf met golfgetal $2k+\Delta k$, frequentie $2\omega+\Delta\omega$ en een amplitude van

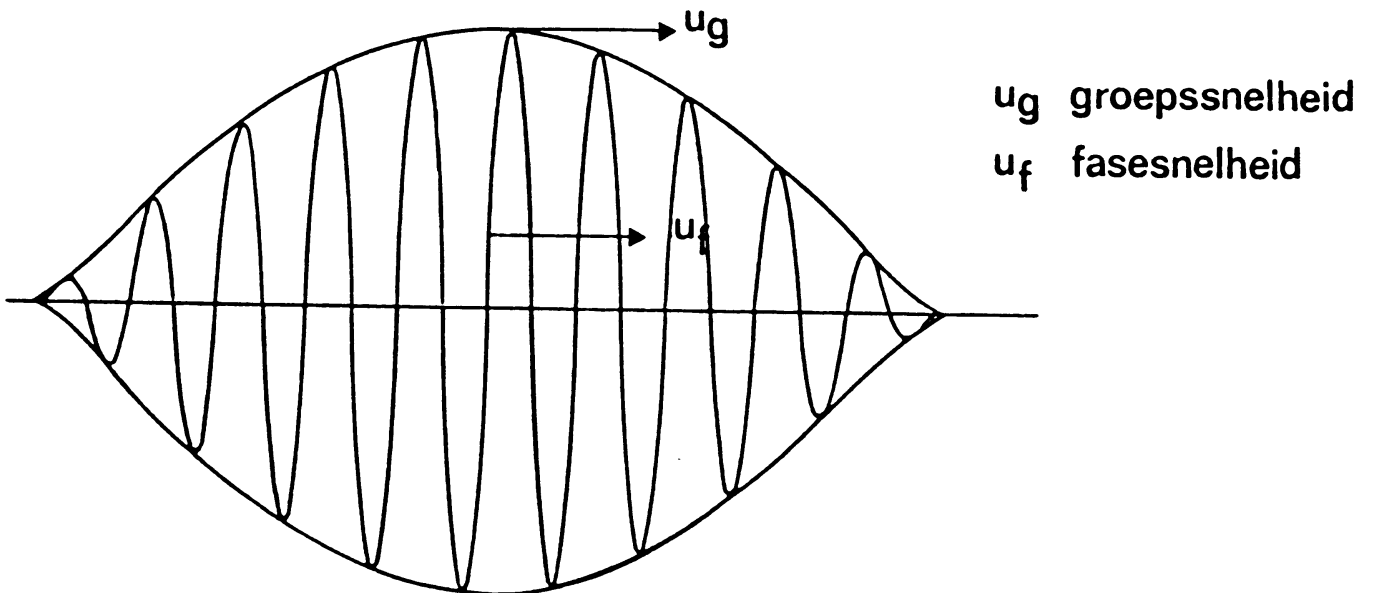
$$A = -2 \cos\left(\frac{\Delta kx - \Delta\omega t}{2}\right)$$

De fasesnelheid waarmee de amplitude A zich verplaatst is $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ hetgeen voor $\Delta k \rightarrow 0$ overeenkomt met de groepssnelheid $u_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$. De energie van de golf is evenredig met het kwadraat van de amplitude zodat ook de energie met de groepssnelheid verplaatst wordt. Meer algemeen geldt dat de energie van een golf van de vorm $A e^{i\phi}$ gelijk is aan

$$E = \frac{1}{2} (A \cdot e^{i\phi} + A^* \cdot e^{-i\phi})^2 = (\operatorname{Re}(A \cdot e^{i\phi}))^2 = A \cdot \cos 2\phi$$

voor het geval A reëel is.

In een figuur is een golfpakket het best als volgt voor te stellen:



De golf verplaatst zich met de fasesnelheid u_f terwijl de omhullende, de amplitude, zich verplaatst met de groepssnelheid u_g .

Om een voorbeeld van een dispersief systeem aan te geven kunnen we het 2-dimensionale, gelineariseerde hydrostatische Boussinesq stelsel vergelijkingen nemen. Dit stelsel luidt als volgt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 \cdot g \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\rho_0 N^2}{g} w = 0. \quad (\text{A.4})$$

Hierbij zijn: u horizontale (x-richting) windsnelheid
 u_0 gemiddelde horizontale windsnelheid
 w verticale (z-richting) windsnelheid
 p druk
 ρ dichtheid
 ρ_0 gemiddelde dichtheid
 N^2 Brunt-Väisälä frequentie
 g zwaartekracht.

Door nu voor iedere grootte een oplossing van de vorm $q(x, z, t) = Q(x, z, t) \cdot e^{i(kx - \omega t)}$ te substitueren waarbij q gelijk is aan u , p , w of $\rho(r)$ is de volgende vergelijking af te leiden:

$$(-i\omega + iu_0 k)U + \frac{ik}{\rho_0} P = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -gR \quad (\text{A.6})$$

$$ikU + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$(-i\omega + iu_0 k)R - \frac{\rho_0 N^2}{g} = 0 \quad (\text{A.8})$$

Door nu (A.7) in (A.5) en (A.8) in (A.6) in te vullen krijgen we:

$$\left(\frac{\omega}{k} - u_0\right) \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{ik}{\rho_0} P = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = - \frac{i\rho_0 N^2}{(\omega - u_0 k)} W \quad (\text{A.10})$$

Door nu (A.9) nogmaals naar z te differentiëren wordt na substitutie van (A.10) de volgende differentiaalvergelijking verkregen:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{N^2 k^2}{(\omega - u_0 k)^2} W = 0 \quad (\text{A.11})$$

Stel nu dat de oplossing van deze differentiaalvergelijking de vorm $W(z) = e^{ilz}$ heeft. Als we deze invullen dan kunnen we de volgende dispersierelatie afleiden:

$$l^2 - \frac{N^2 k^2}{(\omega - u_0 k)^2} = 0 \quad (\text{A.12})$$

dit is equivalent met:

$$\omega = u_0 k \pm \frac{N \|k\|}{\|l\|}$$

Als we de golfgetallen positief stellen dan zijn eenvoudig de fasesnelheden en groepssnelheden te bepalen.

. fasesnelheid	horizontaal	$u_{f,h} = \frac{\omega}{k} = u_0 \pm \frac{N}{l}$
	verticaal	$u_{f,v} = \frac{\omega}{l} = \frac{u_0 k}{l} \pm \frac{Nk}{l^2}$
. groepssnelheid	horizontaal	$u_{g,h} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = u_0 \pm \frac{N}{l}$
	verticaal	$u_{g,v} = \frac{\partial \omega}{\partial l} = \mp \frac{Nk}{l^2}$

In de horizontale richting zijn de fasesnelheid en groepssnelheid van dezelfde grootte en richting. In de verticaal daarentegen zijn ze precies tegengesteld als er geen achtergrondwind aanwezig is. Golven die dan omhoog lopen transporteren energie naar beneden, golven die naar beneden lopen transporteren energie omhoog.