



Koninklijk Nederlands
Meteorologisch Instituut
Ministerie van Infrastructuur en Milieu



Model Weerballon

Toon Rouws
Stagiair KNMI

Student Toegepaste Natuurwetenschappen
Fontys Hogeschool Eindhoven

31 januari 2012

Model Weerballon

- De ontwikkeling van een computermodel voor het bepalen van verticale luchtstroming in de atmosfeer met behulp van weerballonnen van het Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut.
- De fysica waaraan een dergelijke ballon onderhevig tijdens een vlucht en hoe men deze kennis toepast op het numerieke model.

KNMI

Wilhelminalaan 10
3732 GK De Bilt
<http://www.knmi.nl/>

Fontys

Rachelsmolen 1
5612 MA Eindhoven
<http://www.fontys.nl/>

Direct betrokkenen

Auteur/Stagiair
Stagebegeleider/Instituutsmentor
Opdrachtgever
Stagementor

Toon Rouws
Jos de Kloe
Ad Stoffelen
Helger van Halewijn

Voorwoord

Het Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut is onderdeel van het Nederlandse ministerie van infrastructuur en milieu. Het KNMI is het kenniscentrum voor weer, klimaat en seismologie. Dag in dag uit is het instituut bezig met het monitoren van het weer. Een kerntaak van het KNMI is bijdragen aan de nationale veiligheid door het verstrekken van waarschuwingen voor gevaarlijk weer zodat het algemeen publiek en de hulpdiensten daarop kunnen anticiperen. Een andere belangrijke opgave is het onderzoek naar weersverschijnselen en het klimaat om steeds betere verwachtingen te kunnen maken van aanstaande omstandigheden op basis van waarnemingen en weermodellen.

De afdeling weer-onderzoek van het KNMI is steeds bezig met het in kaart brengen van diverse processen in de atmosfeer. Men kan zo bepalen wat voor invloed deze processen hebben op het weertype. Het doel van de afdeling is een bijdrage te leveren aan het optimaliseren van meteorologische modellen om een nauwkeurige verwachting van het weer uit te kunnen geven, zowel op korte als op lange termijn. De afdeling draagt ook kennis over aan producenten van meetapparatuur. Samen met andere bedrijven werkt men bijvoorbeeld aan software voor apparaten die metingen doen vanaf kunstmatige satellieten.

Het KNMI biedt naast bovenstaande belangrijke activiteiten tevens mogelijkheden aan voor het onderwijs. Studenten krijgen de kans om een stage te vervullen. Vanuit mijn studie had ik via Ad Stoffelen de mogelijkheid om er een opdracht uit te voeren. Het volgende verslag geeft een uitvoerige uiteenzetting van mijn activiteiten bij het instituut.

Voor aanvang van het verhaal een bijzonder dankwoord aan de volgende mensen die de uitvoering van mijn opdracht mogelijk hebben gemaakt:

- Bovenal Jos de Kloe die mij met veel geduld door een aantal leerstappen heeft begeleid en door wiens toewijding ik een stel bijzonder handige vaardigheden en inzichten heb verworven. Zijn kritische blik op mijn werkzaamheden droeg bovendien bij aan een steeds productievere voortgang.
- Ad Stoffelen die mijn stage überhaupt mogelijk heeft gemaakt bij het instituut door het regelen van een werkplek, het vinden van een geschikte opdracht en het deels sturen van de activiteiten.
- Voor de praktische zaken: Richard Rothe die mij de procedure van het oplaten van een ballon (radiosonde) heeft laten zien en, niet onbelangrijk, mij stof gaf om over na te denken door het geven van prikkelend commentaar op mijn gedachten.

- Hans Beekhuis die altijd bereid was om advies te geven over meetmethoden en om mee te zoeken naar geschikte meetapparatuur.
- De mensen uit het ijklab: Rob van Krimpen, Hans de Heus en Peter Westenbrink. Zij hebben hun meetapparatuur toevertrouwd aan een onbekende student.
- Marco Nolet die voor mij en vier medestudenten zonder enige voorbereiding een zeer compleet en interessant beeld heeft geschetst over activiteiten van de weerkamer tijdens een van de stagebezoeken door jongerejaars technisch fysici.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	5
2	Aanpak	10
3	Theorie	11
3.1	Belangrijkste aannames	11
3.2	Opwaartse beweging	14
3.2.1	Vrije lift	14
3.2.2	Luchtweerstand	15
3.2.3	Bepaling verticale snelheid	18
3.3	Thermodynamisch proces	20
3.3.1	Rekenstap I: Adiabatische expansie	20
3.3.2	Rekenstap II: Warmtediffusie	21
3.3.3	Rekenstap III: Correctie	26
4	Modelleren	30
4.1	Adiabatische expansie	30
4.2	Warmtediffusie	31
4.3	Correctie	36
4.4	Numerieke fouten	36
5	Experiment	39
5.1	Drukverschil binnen en buiten systeem	39
5.2	Tijd van uitvlakken temperatuur	40
5.3	Analyse sleepfactor	44
6	Resultaten	48
7	Aanbevelingen	56
8	Duurzaamheid	59
	Referenties	62
	Lijst van tabellen	64
	Lijst van figuren	65

Hoofdstuk 1

Inleiding

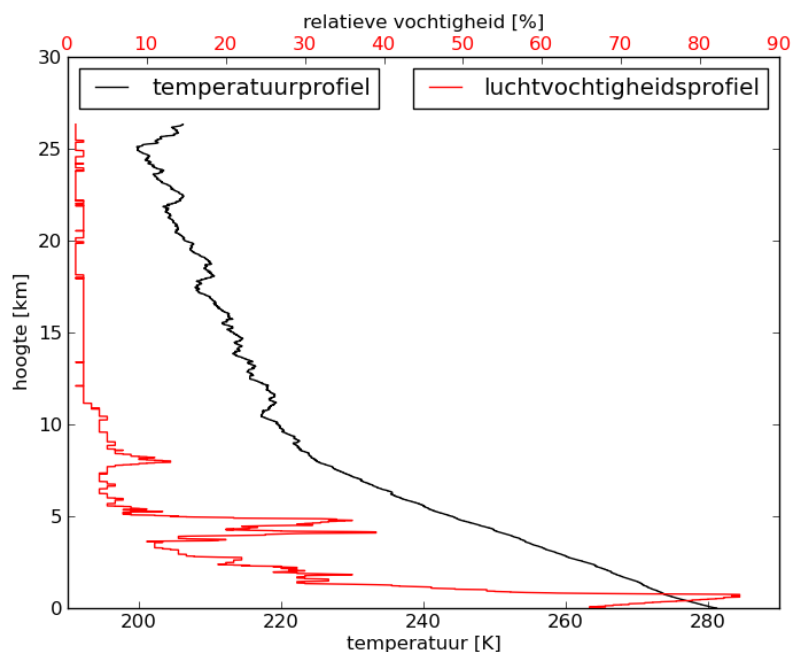
Het doel van de stage is het ontwikkelen van een methode voor het bepalen van verticale windsnelheden met behulp van een meteorologische peilballon. Het gewenste resultaat is een praktisch model om de verticale wind in kaart te brengen met gebruik van meetgegevens. Mocht dit niet worden behaald, is het in ieder geval de bedoeling om relevante theorie en bevindingen zo compleet mogelijk te bespreken en een nuttig advies aan eventuele opvolgers in dit onderzoek uit te brengen.

Vanuit didactisch perspectief is het de bedoeling om ervaring op te doen met het leven als aspirant-fysicus in een onderzoeksinstituut en met het toepassen van verworven kennis in een nieuwe omgeving.

Een meteorologisch verschijnsel waarnaar nog weinig onderzoek is verricht is de verticale luchtstroom. De atmosfeer is continu in beweging. Iedereen kent het fenomeen wind, dat wordt ervaren als een horizontale luchtstroming. Ook in verticale richting stroomt de lucht. Bij het vormen van wolken of tijdens een zware onweersbui verplaatst zich bijvoorbeeld veel lucht omhoog en omlaag, maar ook bij rustig weer vinden dat soort bewegingen plaats. Met het systematisch kunnen meten van deze wind, heeft men een extra puzzelstukje voor complexe weermodellen ter beschikking. Niet alleen de modellen kunnen worden verbeterd met het meten van de wind, ook satellietmetingen van dit en verwante fenomenen zijn te verifiëren.

Het KNMI laat tweemaal daags een met helium gevulde ballon op in De Bilt, een ballon 's middags en een ballon om middernacht. De ballon neemt iedere vlucht een zogenaamde radiosonde mee. Dat apparaat bevat meetapparatuur voor luchtdruk, -temperatuur en -vochtigheid; in het vervolg wordt hiernaar verwezen onder de noemer '*meetbare grootheden*' of '*de drie grootheden*'. Naast deze belangrijke grootheden, valt ook de horizontale wind af te leiden uit de positie van sonde; aangezien de ballon relatief licht is en in horizontale richting geen kracht uitoefent, mag men aannemen dat de positieverandering in de tijd gelijk is aan de windsnelheid op de betreffende hoogte. Zie figuur 1.2 voor een indruk van het uiterlijk van de sonde.

Tijdens de stijging worden door de sonde met behulp van radiocommunicatie



Figuur 1.1: Profiel van temperatuur en luchtvochtigheid

iedere twee seconden meetdata naar het instituut verstuurd waar een computer ze opslaat voor latere analyse. Een software-pakket van het bedrijf ‘Vaisala’¹ berekent de hoogte van de ballon uit de lokale druk. Zo zijn als functie van de hoogte profielen van de temperatuur en vochtigheid te schetsen, is te bepalen wat de omstandigheden in verschillende lagen van de atmosfeer zijn en kan men controleren of weermodellen overeenstemmen met de werkelijkheid. Figuur 1.1 toont een voorbeeld van een gemeten profiel van de meetbare grootheden, in meteorologische vaktermen een *temp* genoemd. Wereldwijd worden honderden weerballonnen per dag opgelaten vanuit hiervoor bestemde stations. Het wereldkaartje in figuur 1.3 geeft een eenvoudig overzicht van waar de stations zich bevinden. De meeste vluchten gebeuren uit interesse in het verticale verloop van enkel de drie meetbare grootheden. Internationale standaarden betreffende het type ballon, de hoeveelheid helium per vlucht en dat soort zaken bestaan niet. Omdat dit soort gegevens van belang zijn bij het onderzoek naar verticale wind, zijn de internationale data niet bruikbaar.

Voorafgaande aan het gedetailleerd in kaart brengen van processen die de ballon onderweg ondergaat, een basale uitleg over het verloop van een vlucht. Een ballon wordt op de grond gevuld met helium om hem te laten stijgen. De dichtheid van helium is kleiner dan van lucht, dus met voldoende volume zorgt de drijfkraft² voor een opwaartse beweging door de atmosfeer. Gedurende de vlucht worden data naar het instituut gezonden van de drie eerder genoemde

¹<http://www.vaisala.com/>

²Bij velen beter bekend onder de Engelstalige term ‘buoyancy-force’.

grootheden en de horizontale positie. De ballon scheurt op een hoogte van circa vijftieng kilometer en valt met bijgaande goederen terug naar de grond. Een parachute zorgt voor een zachte landing van het geheel. Aangezien een ballon gemakkelijk enkele honderden kilometers kan afleggen, bevindt zich op de sonde een kaartje waarmee het KNMI de vinder verzoekt hem in te leveren als klein chemisch afval. Opmerkelijk detail is dat de taal van de tekst op het kaartje afhankelijk is van de windrichting.

Het rapport is volgens logische stappen opgebouwd. In het hoofdstuk ‘*Aanpak*’ staan in grote lijnen de gedachtegang en motieven voor en tijdens het onderzoek. De ‘*Theorie*’ vormt de kern van het onderzoek en geeft de fysische achtergrond van relevante processen en een aantal belangrijke aannames. Het onderdeel ‘*Modelleren*’ geeft uitleg over de toepassing van de theorie in een door meteorologen bruikbaar numeriek model. Om wat aannames en constatering te verklaren en onderbouwen, zijn een aantal proeven gedocumenteerd in het hoofdstuk ‘*Experiment*’. De behaalde resultaten en conclusies die daaruit zijn getrokken zet het hoofdstuk ‘*Resultaten*’ uiteen. Adviezen en aanbevelingen voor een eventuele vervolgstudie, zijn opgenomen in de ‘*Aanbevelingen*’. Onder het kopje ‘*Duurzaamheid*’ wordt in het kader van *Duurzaam Onderwijs* tot slot een korte en bondige blik geworpen op het instituut en mijn opdracht in relatie tot (milieu)bewust ondernemen.

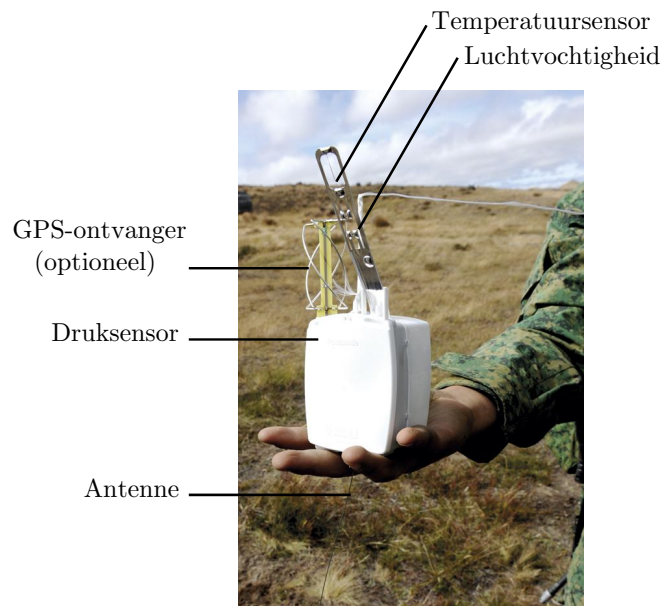
Tabel 1.1 dient als ondersteuning voor het verslag en geeft een overzicht van gebruikte constanten. Het KNMI wenst het te beschrijven model te gebruiken op vluchten met het ballontype ‘TX350’ van de Japanse fabrikant Totex³. Het zijn latex ballonnen die hoogtes bereiken van twintig tot dertig kilometer, afhankelijk van de productiekwaliteit van de ballon en de weersomstandigheden. De nominale massa van een dergelijke ballon is 350 gram. In het verslag wordt vijftieng kilometer gehouden voor de gemiddelde reikhoogte van een sonde. Tabel 1.2 geeft het overzicht van interessante vluchten voor het onderzoek. Het zijn er slechts vier, maar een goed hulpmiddel voor het beschrijven van eventueel op deze studie volgende onderzoeksmethoden. De nummers dienen als referentie in de vorm van het woord ‘*case*’ met het betreffende nummer. De datum en het type spreken voor zich en de opwaartse kracht is gemeten op grondniveau⁴. Verder staan in tabel 1.3 de gebruikte meetinstrumenten en bijbehorende meetfout.

N.B. Indien de richtingen van grootheden in de theoretische context van belang zijn, zijn hun vectoren in betreffende onderdelen **dikgedrukt**.

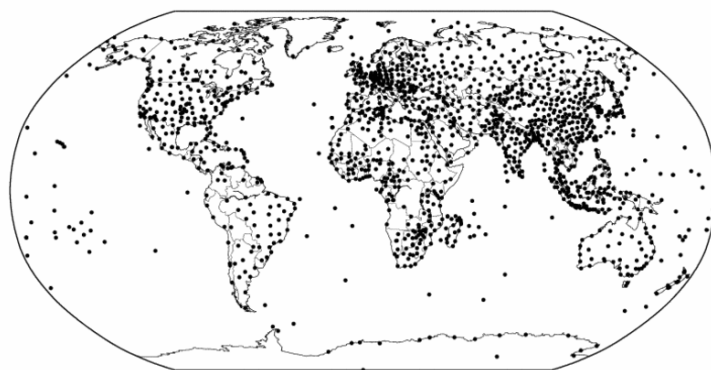
Naar de referenties op pagina 62 wordt verwezen met een superscript van het betreffende nummer tussen rechte haken: [#].

³<http://www.totex.jp/>

⁴Grondniveau op postcode 3732 GK, De Bilt: +2,7m t.o.v. NAP^[14]



Figuur 1.2: Radiosonde



Figuur 1.3: Locatie stations

Tabel 1.1: Tabel met constanten

symbool	betekenis	waarde	eenheid
g	valversnelling	9,81	$\frac{m}{s^2}$
R_u	universele gasconstante	8,31	$\frac{J}{mol \cdot K}$
M_a	molaire massa lucht	28,97	$\frac{g}{mol}$
M_{he}	molaire massa helium	4,003	$\frac{g}{mol}$
$T_{cr,he}$	kritische temperatuur van helium	5,3	K
$T_{cr,a}$	kritische temperatuur van lucht	132,5	K
$P_{cr,he}$	kritische druk van helium	$0,23 \cdot 10^6$	Pa
$P_{cr,a}$	kritische druk van lucht	$3,77 \cdot 10^6$	Pa
G	gravitatieconstante	$6,673 \cdot 10^{-6}$	$\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$
M_{aarde}	massa van de aarde	$5,98 \cdot 10^{24}$	kg
$R_{0,a}$	straal van de aarde	$6,37 \cdot 10^6$	m
$C_{s,a}$	constante van Sutherland voor lucht	120	-
$T_{0,a}$	referentietemperatuur van lucht	291,15	K
$\eta_{0,a}$	referentieviscositeit van lucht	$1,827 \cdot 10^{-5}$	$Pa \cdot s$

Tabel 1.2: Vluchten

nummer	datum (dd-mm-jjjj)	ballontype	opwaartse kracht ($h = 0$)
1	12-12-2011	TX350	$11,3 \pm 0,1 N$
2	13-12-2011	TX350	$11,1 \pm 0,1 N$
3	14-12-2011	TX350	$12,6 \pm 0,1 N$
4	16-12-2011	TX350	$13,1 \pm 0,1 N$

Tabel 1.3: Meetapparatuur

grootheid	naam instrument	meetfout	eenheid
druk	Digiquartz [®] Intell. Transm. 1030G	$\pm 0,05$	hPa
massa	Sartorius type 1407	± 1	g
temperatuur	Systemteknik S1220	$\pm 0,1$	K

Hoofdstuk 2

Aanpak

In dit verslag wordt een model beschreven dat de snelheid van de ballon berekent, als die zich in een stille atmosfeer zou bevinden. Een stille atmosfeer wil zeggen dat zich in verticale richting geen lucht verplaatst. Het model houdt voor de berekening rekening met door de radiosonde gemeten grootheden. De plaatselijke opwaartse wind is het verschil tussen de waargenomen snelheid en de snelheid die het model berekent op corresponderende hoogte.

Momenteel bestaan er nog weinig accurate modellen betreffende de verticale snelheid van peilballonnen. Het meest nauwkeurige en complete bij het KNMI bekende model is onderdeel van een artikel^[9] dat door Zwitserse wetenschappers onder leiding van A. Gallice is uitgegeven. Dat artikel dient dan ook als belangrijkste referentie voor dit verslag.

Een aantal moeilijkheden spelen een rol bij het maken van het model. Het is bijvoorbeeld onmogelijk om metingen aan de ballon zelf te verrichten tijdens de vlucht zonder gebruik te maken van speciale apparatuur. Vanaf het moment dat de ballon zijn vlucht inzet, kan men slechts vertrouwen op een goed theoretisch model met als input de onderweg gemeten grootheden. Het model berekent dus aan de hand van waarnemingen op een tijdstip wat er verandert aan het beschreven systeem, ofwel de ballon, ten opzichte van de vorige situatie. Op het volgende tijdstip, na een ‘tijdstap’ Δt , doet het dat opnieuw tot er geen bruikbare data meer voorhanden zijn; na *bursting altitude*. Voor een goed model is een goede methode en zijn juiste aannames van belang. De methode is de wijze waarop wordt omgegaan met verkregen data en welke berekeningen zijn toegepast om tot bruikbare resultaten te komen. De aannames zijn redelijke schattingen van onbekende variabelen en het verloop van processen; zij maken de berekening van het model uitvoerbaar, ze geven een gerechtvaardigde versimpeling van het complexe fysische geheel. In de theorie zijn de methodes en aannames uitgebreid toegelicht en onderbouwd.

Hoofdstuk 3

Theorie

De theorie beschrijft tot op zeker niveau de processen die het systeem ondergaat tijdens de vlucht en waarvan die afhankelijk zijn. Hierop volgt de vertaalslag naar een numeriek model.

3.1 Belangrijkste aannames

In de basis draait het verloop van de vlucht in verticale richting om drie krachten: de zwaartekracht, de opwaartse drijfkracht en de neerwaartse luchtwrijving. Voordat deze krachten en hun relaties uiteen worden gezet, zijn hieronder de belangrijkste aannames opgesomd en uitgelegd.

- i De ballon beschouwt men thermodynamisch gezien als een bolsymmetrisch systeem. De warmte in het systeem verdeelt zich enkel als gevolg van diffusie; er vindt geen convectie plaats van het heliumgas.
- ii Het helium dat zich in de bol bevindt en de lucht waardoor het systeem zich beweegt, gedragen zich als een ideaal gas.
- iii De druk in de ballon is ten alle tijde gelijk aan de druk in de omgeving; de druk van het helium verandert mee met de omgevingsdruk.
- iv In horizontale richting werkt geen resulterende kracht op het systeem; de ballon waait eenvoudigweg mee met horizontale winden.
- v De valversnelling g blijft constant, ongeacht de hoogte van de ballon.
- vi De massa van het systeem blijft gedurende de vlucht constant; er ontsnapt geen helium.

De eerste aanname is een stelling die men later kan nuanceren en optimaliseren. Door de opwaartse beweging en de tegendruk op de ballon, zal het systeem niet bolvormig zijn. Door de lage viscositeit van gassen, kan convectie bovendien nooit worden uitgesloten. Door alleen vluchten te analyseren die 's nachts plaatsvonden, is het effect van convectie wel te minimaliseren. Overdag zal ten gevolge van invallende zonnestraling aan een zijde van het systeem namelijk een

groot verloop van temperatuur op de wand ontstaan, wat een menging van het heliumgas veroorzaakt. Zie ook hoofdstuk 7.

De tweede veronderstelling van het gedrag als ideale gassen is goed aannemelijk. De algemene gaswet luidt:

$$P \cdot v = Z \cdot R_g \cdot T \quad (3.1)$$

De ideale gaswet luidt:

$$P \cdot v = R_g \cdot T \quad (3.2)$$

waarbij P voor de druk in $[Pa]$, v voor het soortelijk volume in $\left[\frac{m^3}{kg}\right]$, Z voor de ‘compressibiliteitsfactor’, R_g voor de gasconstante in $\left[\frac{J}{kg \cdot K}\right]$ en T voor de temperatuur in $[K]$ staan. De gasconstante voor een specifiek gas is als volgt gedefinieerd:

$$R_g = \frac{R_u}{M} = \frac{\text{universele gasconstante } \left[\frac{J}{mol \cdot K}\right]}{\text{molaire massa betreffend gas } \left[\frac{kg}{mol}\right]} \quad \left[\frac{J}{kg \cdot K}\right] \quad (3.3)$$

Als de gereduceerde temperatuur T_R van een gas veel groter is dan twee, nadert de zogenaamde compressibiliteitsfactor Z naar één. Als de gereduceerde druk P_R van een gas veel kleiner is dan één, nadert Z ook naar één. De formules van de gereduceerde waarden luiden:

$$\begin{aligned} T_R &= \frac{T}{T_{cr}} = \frac{\text{lokale temperatuur } [K]}{\text{kritische temperatuur } [K]} && [-] \\ P_R &= \frac{P}{P_{cr}} = \frac{\text{lokale druk } [Pa]}{\text{kritische druk } [Pa]} && [-] \end{aligned}$$

De kritische temperatuur en druk zijn specifieke eigenschappen van een gas of vloeistof, zij staan gedocumenteerd in velerlei wetenschappelijke literatuur zoals Çengel^[1] en Poling^[2].

Voor helium geldt $T_{cr,he} = 5,3 K$, $P_{cr,he} = 0,23 \cdot 10^6 Pa$ en voor lucht geldt $T_{cr,a} = 132,5 K$, $P_{cr,a} = 3,77 \cdot 10^6 Pa$. Typisch geldt voor de temperatuur van de atmosfeer tijdens de vlucht $190 K < T_{atm} < 320 K$ en voor de druk geldt dat die hooguit zo’n $1,03 \cdot 10^5 Pa$ is en daarna slechts afneemt. Deze gegevens leiden tot de volgende grenswaarden van de gereduceerde grootheden:

Helium	$T_{R,max}$	=	59,1
	$T_{R,min}$	=	36,4
	$P_{R,max}$	=	0,448
Lucht	$T_{R,max}$	=	2,29
	$T_{R,min}$	=	1,46
	$P_{R,max}$	=	0,0274

Nu is zichtbaar dat deze gassen altijd aan een van de voorwaarden voldoen. De algemene gaswet 3.1 reduceert dus tot de ideale gaswet, formule (3.2) en mag men dus in die vorm toepassen bij dit onderzoek.

De derde aanname is een goede aanname. De druk binnen de ballon moet groter zijn dan in de omgeving om hem bol te laten staan, maar uit proeven is gebleken dat men de overdruk in de ballon voorlopig als verwaarloosbaar klein kan beschouwen. Daarover verderop meer in hoofdstuk 5 ‘*Experiment*’.

Het vierde punt gaat over de vorm van de ballon en het effect daarvan op de luchtweerstand. Aan de invloed van zijdelingse druk op de vorm van het systeem kan men een heel nieuw onderzoek wijden. Voor nu gaan we uit van alleen weerstand in verticale richting.

Dat de valversnelling gelijk blijft, is een goede aanname. De ballon bereikt ongeveer een hoogte van vijftientig kilometer. Dat is weinig ten opzichte van de totale afstand tot de kern van de aarde. Door de extra hoogte neemt de zwaartekracht op het systeem niet significant af. De valversnelling g op een afstand R_d van de kern van een object met massa M_{obj} bepaalt men met de ‘zwaartekrachtsvergelijking’ van Newton^[7]:

$$g = \frac{G \cdot M_{obj}}{R_d^2} \quad \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

waarbij G staat voor de universele constante van zwaartekracht, zie tabel 1.1.

In het geval van de aarde en de weerballon op maximale hoogte waarbij M_{obj} gelijk is aan de massa van de aarde M_{aarde} en $R_{0,a}$ aan haar straal (tabel 1.1), geldt voor het verlies aan valversnelling:

$$\frac{g_0 - g_{25km}}{g_0} = \left(\frac{1}{R_{0,a}^2} - \frac{1}{(R_{0,a} + 25 \cdot 10^3)^2} \right) \cdot R_{0,a}^2 \quad [-] \quad (3.4)$$

met de valversnelling op zeeniveau g_0 , de valversnelling op zeeniveau plus vijftientig kilometer g_{25km} en de afstand van zeeniveau tot de kern van de aarde $R_{0,a}$. Deze vergelijking geeft een fractie van $7,8 \cdot 10^{-6}$, ter indicatie.

Ten slotte zal de kleine overdruk in de ballon tot gevolg hebben dat een deel van het helium onderweg verloren gaat. De permeabiliteit ofwel doordringbaarheid $\langle p \rangle$ van helium door ge vulkaniseerd rubber ten gevolge van een dergelijk kleine overdruk bedraagt volgens Edwards e.a.^[3] bij kamertemperatuur negen tot tien liter per vierkante meter per 24 uur. Het bolvormig oppervlak A_s van het systeem als functie van zijn straal R wordt bepaald met de formule:

$$A_s = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

De permeabiliteit in de SI-eenheden kubieke meter per seconde $\langle p \rangle_{SI}$ is dan maximaal:

$$\langle p \rangle_{SI} = \langle p \rangle \cdot \frac{A_s \cdot [\text{kubieke meter per liter}]}{[\text{seconden per 24 uur}]} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 0,001}{24 \cdot 3600} \left[\frac{m^3}{s} \right]$$

De tijdsduur van een vlucht bedraagt maximaal zo’n twee uur. Uit proeven van Edwards blijkt dat de permeabiliteit van rubber kleiner wordt als de temperatuur daalt. In de regel daalt de temperatuur met toenemende hoogte, vooral in

de eerste kilometers van de troposfeer. Met het toepassen van de meest extreme waarden en gegeven het bovenstaande, zal het systeem nog geen tiende massa-procent aan helium verliezen voor hij ‘*bursting altitude*’ bereikt. Het verlies zal nu geen significante uitwerking hebben op de voorspelling van de stijgsnelheid, wat ook zal blijken uit de behaalde nauwkeurigheid van het model.

3.2 Opwaartse beweging

Dit onderdeel beschrijft het verloop van het stijgen van de ballon op macroschaal. Hier wordt uitgelegd welke krachten het systeem beïnvloeden en waarvan die krachten afhankelijk zijn.

3.2.1 Vrije lift

De opwaartse beweging van het systeem en de stijgsnelheid zijn een gevolg van een evenwicht tussen de ‘vrije lift’ \mathbf{F}_{FL} en de luchtweerstand \mathbf{F}_D . Met de positieve richting ‘naar boven’ is de vrije lift gelijk aan de drijfkraft \mathbf{F}_B die de atmosfeer op het systeem uitoefent minus het totale gewicht \mathbf{W}_{tot} van het systeem:

$$\mathbf{F}_{FL} = \mathbf{F}_B - \mathbf{W}_{tot}$$

Volgens het principe van Archimedes geldt dat de opwaartse drijfkraft \mathbf{F}_B in een fluïdum gelijk is aan het gewicht van het verplaatste volume van dat fluïdum. In het geval van de weerballon is het fluïdum lucht met dichtheid ρ_a en heeft het systeem volume V :

$$\mathbf{F}_B = V \cdot \rho_a \cdot \mathbf{g} \quad [N] \quad (3.5)$$

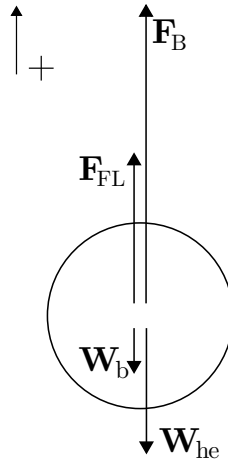
Het totale gewicht \mathbf{W}_{tot} is de som van de gewichten van een lege ballon \mathbf{W}_b en het heliumvolume \mathbf{W}_{he} . Als het systeem volume V heeft, het helium dichtheid ρ_{he} en de lege ballon massa m_b , leidt dit tot de relaties:

$$\mathbf{W}_{tot} = \mathbf{W}_{he} + \mathbf{W}_b \equiv V \cdot \rho_{he} \cdot \mathbf{g} + m_b \cdot \mathbf{g} \quad [N]$$

Uit het bovenstaande volgt een nieuwe uitdrukking voor de vrije lift die zich in de volgende paragraaf nuttig toont:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{FL} &= \mathbf{F}_B && - \mathbf{W} \\ &= (V \cdot \rho_a \cdot \mathbf{g}) && - (V \cdot \rho_{he} \cdot \mathbf{g} + m_b \cdot \mathbf{g}) \quad [N] \\ &= V \cdot (\rho_a - \rho_{he}) \cdot \mathbf{g} - m_b \cdot \mathbf{g} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Door het systeem in rust aan een krachtmeter te koppelen, is de vrije lift meetbaar. Figuur 3.1 geeft het krachtendiagram schematisch weer.



Figuur 3.1: Schematisch krachtdiagram van systeem in rust

3.2.2 Luchtweerstand

De luchtweerstand \mathbf{F}_D is de kracht die het systeem tijdens beweging ondervindt omdat lucht langs de wand sleept en er moleculen in tegengestelde richting tegenaan stoten, zie figuur 3.2. De ‘achterkant’ van een geometrie die door een gas of vloeistof beweegt, heeft bovenal te maken met een zuigende kracht door een continu ‘gebrek’ aan deeltjes, dus een lagere druk. De pijlen die naar beneden wijzen, stellen de stroomlijnen voor van deeltjes die tegen het systeem botsen (stagneren) en er langs bewegen, de kromme pijlen illustreren wervelingen die ontstaan door de turbulente toevoer van deeltjes achter het object naar het lagere drukgebied, ook wel zog of ‘wake’ genoemd.

Tijdens de vlucht zoekt het systeem voortdurend naar een krachtenevenwicht in verticale richting, de z -richting. Dat wil zeggen dat de opwaartse kracht gelijk is aan de luchtweerstand volgens $\mathbf{F}_{FL} = \mathbf{F}_D$. Hier wordt overigens nog geen rekening gehouden met de traagheid van het systeem; dus het effect van versnelling en vertraging op de berekende snelheid (zie hoofdstuk 7). Dat de vrije lift afhangt van de omvang van het systeem, is bekend. De luchtweerstand, ofwel drag force \mathbf{F}_D , van de ballon is afhankelijk van de dimensieloze sleepcoëfficiënt¹ C_d , de dichtheid van de lucht ρ_a , de relatieve snelheid ten opzichte van het medium \mathbf{v}_{rel} en het frontale oppervlak A_\perp volgens:

$$\mathbf{F}_D = \frac{1}{2} \cdot C_d \cdot \rho_a \cdot \mathbf{v}_{rel}^2 \cdot A_\perp \quad [N] \quad (3.7)$$

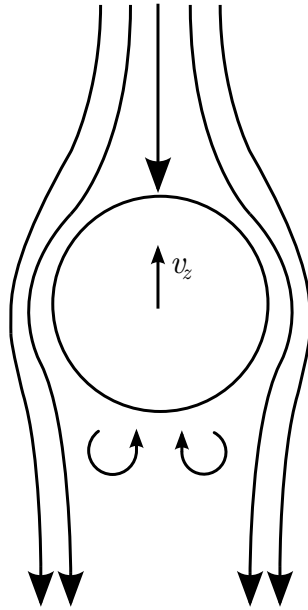
Een ruimtelijke indruk van het systeem staat in figuur 3.3.

C_d als functie van het Reynolds-getal Re wordt berekend uit een parametrisatie die Gallice e.a.^[9] empirisch hebben bepaald, namelijk:

$$C_d(Re) = 4,808 \cdot 10^{-2} \cdot (\ln(Re))^2 - 1,406 \cdot \ln(Re) + 10,490 \quad (3.8)$$

Of de functie evengoed toepasbaar is op dit project, is nog niet duidelijk. Deze parametrisatie wordt voorlopig gebruikt, omdat het fysisch berekenen van de

¹Beter bekend onder de Engelstalige term ‘drag-coefficient’.



Figuur 3.2: Schematisch stroomdiagram

factor buiten de strekking van het onderzoek ligt. Zie voor verdere discussie hoofdstuk 7. Zie het kopje ‘*Reynolds-getal*’ voor de bepaling van Re .

De luchtdichtheid op een tijdstip leidt men af met behulp van de ideale gaswet, formule (3.2), en de meetwaarden op dat tijdstip:

$$\rho = \frac{1}{v} = \frac{P}{R_g \cdot T} \quad \left[\frac{kg}{m^3} \right] \quad (3.9)$$

uiteraard met de gasconstante R_g voor lucht.

De gemeten verticale snelheid v_z wordt bepaald uit de hoogtedata. De hoogte van het systeem, de z -coördinaat, wordt zoals eerder vermeld met behulp van software uit de druk afgeleid. Het verschil in hoogte tussen twee meetmomenten Δz gedeeld door de duur van een tijdstap Δt is de verticale snelheid:

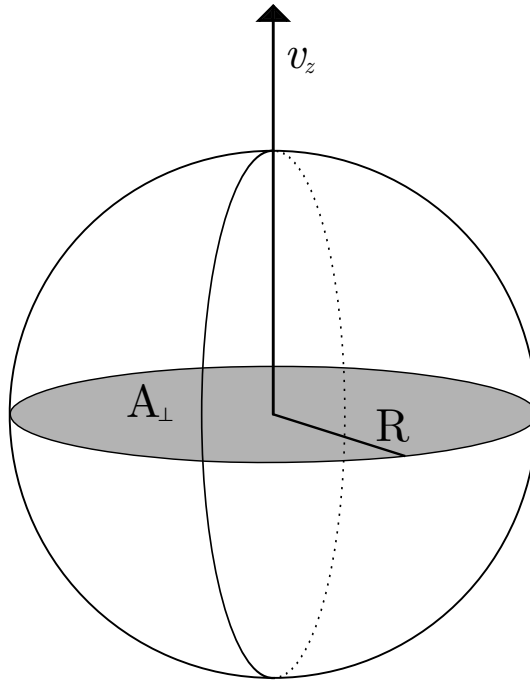
$$v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Het is aangenomen dat de druk van het helium P_{he} in de gehele ballon ten alle tijden gelijk is aan de luchtdruk in de omgeving P_a :

$$P_{he}(t) = P_a(t) \quad [Pa]$$

Op het moment van loslaten, $t = 0$, is de temperatuur van het systeem homogeen verdeeld en in evenwicht met de omgeving:

$$T_{he}(r) \Big|_{t=0} = T_a \Big|_{t=0} \quad [K]$$



Figuur 3.3: Ruimtelijke schets grootheden

waarbij t het tijdstip in seconden na loslaten is en r de afstand tot het centrum van het systeem in meters; de radiale coördinaat.

Men kan vergelijking (3.6) nu met behulp van vergelijking (3.3) en (3.9) uitdrukken in het volume van het systeem vóór vertrek (subscript $_0$) als functie van bekende getallen en meetbare grootheden:

$$V_0 = \frac{F_{FL0} + m_b \cdot g}{\left(\frac{M_a}{R_u} - \frac{M_{he}}{R_u}\right) \cdot \frac{P_0}{T_0} \cdot g} \quad [m^3] \quad (3.10)$$

De relaties tussen volume en straal luiden:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \quad \longleftrightarrow \quad R = \left(\frac{3}{4 \cdot \pi} \cdot V\right)^{\frac{1}{3}} \quad [m^3] \longleftrightarrow [m] \quad (3.11)$$

Het frontale oppervlak is nu simpelweg gelijk aan:

$$A_{\perp} = \pi \cdot R^2 \quad [m^2] \quad (3.12)$$

Hoe de straal zich tijdens de vlucht ontwikkelt, is afhankelijk van de druk en thermodynamica in het systeem. In paragraaf 3.3 wordt dat uitgebreid behandeld.

Reynolds-getal Het Reynolds-getal is een van de factoren waarvan de luchtweerstand, of beter gezegd de sleepfactor, afhangt. Het getal is een functie van de dichtheid ρ van het medium waardoor een object zich beweegt, de snelheid van het object ten opzichte van het medium v_{rel} , de karakteristieke lengte van het object L_c en de viscositeit η volgens

$$Re = \frac{\rho \cdot v_{rel} \cdot L_c}{\eta} \quad [-] \quad (3.13)$$

De dichtheid is wederom die van lucht volgens formule (3.9). De relatieve snelheid is eigenlijk de snelheid waarin men geïnteresseerd is.

De karakteristieke lengte is in het geval van externe stroming over een bol gelijk aan de diameter $L_c = D = 2 \cdot R$. De waarden in de teller zijn betrekkelijk eenvoudig te herleiden. De methode waarmee men de viscositeit bepaalt, staat hieronder beschreven.

Bij temperaturen lager dan 550 K en drukken onder 3,45 MPa is de formule van Sutherland voor viscositeit op ideale gassen toepasbaar. De formule luidt:

$$\eta = \eta_0 \cdot \frac{T_0 + C_s}{T + C_s} \cdot \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}}$$

De *constante van Sutherland* C_s is een gasspecifieke eigenschap. Voor lucht is deze volgens Bar-Meir^[8] gelijk aan 120. Ieder gas kent ook zijn referentietemperatuur en -viscositeit, respectievelijk T_0 en η_0 , zie tabel 1.1.

3.2.3 Bepaling verticale snelheid

Om de verticale snelheid te bepalen die het systeem zou hebben in een stille atmosfeer, wil men het krachtenevenwicht tussen F_{FL} en F_D oplossen. Herformulering van de formules (3.6) en (3.7) volgens dit krachtenevenwicht leidt tot:

$$V \cdot (\rho_a - \rho_{he}) \cdot g - m_b \cdot g = \frac{1}{2} \cdot C_d \cdot \rho_a \cdot v_{rel}^2 \cdot A_{\perp}$$

dan volgt:

$$v_{rel}^2 = \frac{2 \cdot V \cdot (\rho_a - \rho_{he}) \cdot g - 2 \cdot m_b \cdot g}{C_d \cdot \rho_a \cdot A_{\perp}}$$

substitutie van relaties (3.11) en (3.12):

$$v_{rel} = \sqrt{\frac{8 \cdot g \cdot R \cdot (\rho_a - \rho_{he})}{3 \cdot \rho_a \cdot C_d} - \frac{2 \cdot g \cdot m_b}{\rho_a \cdot \pi \cdot R^2 \cdot C_d}}$$

De massa van het complete systeem blijft gedurende de vlucht nagenoeg gelijk (aanname **vi**):

$$m_{tot} = m_b + m_{he} = \text{constant}$$

waarbij

$$m_{he} = V \cdot \rho_{he}$$

Men kan de functie dus ook als volgt op schrijven:

$$v_{rel} = \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot g}{3 \cdot C_d} \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot m_{tot}}{4 \cdot \rho_a \cdot \pi \cdot R^3}\right)} = \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot g}{3 \cdot C_d} \cdot \left(1 - \frac{m_{tot}}{m_{a,ver}}\right)} \quad (3.14)$$

Hierbij is $m_{a,ver}$ de massa van de verplaatste lucht.

Kanttekening sleepfactor Het berekenen van de C_d volgens de parametrisatie van Gallice e.a. (3.8) is voor dit project geen goed uitgangspunt. Tijdens de campagne die zij hebben gevoerd, zijn ballonnen gebruikt van het type TX1200, ofwel ‘twaalfhonderd-grammer’. Bij het KNMI is men geïnteresseerd in de sleepfactor van ballontype TX350, omdat die bij het gros van de vluchten wordt gebruikt en dus snel een grote set data verschaft voor nader onderzoek van verticale wind (zie ook sectie 5.3, ‘Analyse sleepfactor’).

De sleepfactor wordt geacht alleen afhankelijk te zijn van het Reynolds-getal. Dit getal is afhankelijk van de set grootheden in vergelijking (3.13): de dichtheid van de atmosfeer ρ_a , de relatieve snelheid tussen systeem en atmosfeer v_{rel} , de karakteristieke lengte van het systeem L_c en de viscositeit van de atmosfeer η . Voor verschillende ballen gelden in de huidige context verschillende Reynolds-getallen. Voor ieder systeem en op iedere hoogte is de set grootheden uniek. Wel kan men zeggen dat meerdere ballonnen van eenzelfde type een bepaalde zelfde orde-grootte van Reynolds-getallen ‘ondergaan’. In de meteorologische literatuur spreekt men namelijk van een standaard atmosfeer met een vooraf bepaald druk- en temperatuur- en eventueel vochtigheidsverloop waar een willekeurige atmosfeer op lijkt; een gemiddelde van vele waarnemingen. Het ballontype bepaalt mede de karakteristieke lengte van het systeem en is dus de belangrijkste bepalende factor die het Reynolds-getal en dus de sleepcoëfficiënt vastlegt. De laatste stelling is de reden om op de hieronder beschreven wijze, geïnspireerd op het artikel van Gallice, een relatie te vinden tussen de sleepfactor en het Reynolds-getal voor het TX350 type.

Gallice e.a. hebben de parametrisatie uitgevoerd door de verticale snelheid ten opzichte van de grond uit data van tien vluchten te herleiden en met andere benodigde gegevens om te rekenen naar een Reynolds-getal volgens formule (3.13). Dan wordt aangenomen dat de gemiddelde verticale windsnelheid nul is. De relatieve snelheid van het systeem ten opzichte van de lucht is dus gelijk aan de snelheid van het systeem ten opzichte van de grond (in z -richting).

$$v_{rel} = v_z$$

Voor hoe meer metingen men deze aanname hanteert, hoe beter hij uitkomt. Ook al is het een vrij ingrijpende veronderstelling, met name in de context van dit project, het leidt voorlopig tot de meest toereikende methode om de sleepfactor te bepalen van een weerballon. Een functie van C_d verkrijgt men door vergelijking (3.14) om te schrijven voor C_d :

$$C_d = \frac{8 \cdot R \cdot g}{3 \cdot v_z^2} \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot m_{tot}}{4 \cdot \rho_a \cdot \pi \cdot R^3}\right) \quad (3.15)$$

De straal R wordt berekend in subsectie 3.3.3. v_z Wordt bepaald uit het drukverloop in de tijd. m_{tot} Bepaalt men op de grond voor vertrek, deze massa zal weinig variëren van vlucht tot vlucht, aangezien de ballonnen zelf de grootste massa vertegenwoordigen en erg nauwkeurig worden gefabriceerd; in geval van het type TX350 wegen zij 350 gram². Uit ervaring is bekend dat de onzekerheid nog te verwaarlozen is. De dichtheid van de lucht ρ_a bepaalt men met vergelijking (3.9) en door de sonde gemeten grootheden.

Met behulp van regressieanalyse op de gevonden dataset, is een parametrisatie te maken voor een ‘*dragcurve*’ ($C_d(Re)$). Men kan dan met een bepaalde zekerheid een uitspraak doen over de wrijvingskracht die een ‘TX350-systeem’ ondervindt, uitgaande van een bepaald Reynolds-getal. Zie sectie 5.3 voor de werkelijke analyse op de beschikbare data.

3.3 Thermodynamisch proces

Tijdens het stijgen veranderen de omstandigheden in en rond het systeem. De invloed en uitwerking van die veranderingen op het systeem staan hieronder stapsgewijs uitgelegd. Door de ingewikkelde samenloop van deelprocessen, is het wenselijk om zorgvuldig uiteen te zetten welke processen beschouwd zijn en welke aannamen worden gebruikt. Door middel van drie ‘rekenstappen’ berekent het model steeds de nieuwe eigenschappen van het systeem. Voor het berekenen van de straal van de ballon gaat men uit van een toestand op hoogte z . Waarden van meetbare grootheden op die hoogte worden toegepast. De waarde van de niet meetbare straal moet worden berekend op basis van de vorige toestand. Uiteindelijk wordt het krachtenevenwicht onder de nieuwe condities opnieuw bepaald en aan de hand daarvan de snelheid die het systeem zou hebben in een stilstaande atmosfeer. Op het moment dat de volgende gegevens zich aanbieden, bevindt het systeem zich op hoogte $z + \Delta z$ en begint een nieuwe rekensessie van het model. Grootheden op de hoogtes z en $z + \Delta z$ zijn in het vervolg aangeduid met respectievelijk een subscript 1 en 2.

3.3.1 Rekenstap I: Adiabatische expansie

De straal van de ballon verandert, zoals eerder aangegeven, door de dalende omgevingsdruk. Als gevolg van die expansie, daalt ook de temperatuur van het heliumgas. Formules voor de nieuwe adiabatische straal R^* en temperatuurverdeling $T^*(r)$ ten gevolge van het drukverschil op hoogte z en $z + \Delta z$ zijn hieronder gedefinieerd. Grootheden met het superscript ‘*’ duiden op een ongecorrigeerde tussenuitkomst. De betrouwbaarheid van uitkomsten van de gebruikte functies is afhankelijk van de nauwkeurigheid van de de gemeten grootheden en berekende waarden op hoogte z . De expansie is opgelost volgens een adiabatisch proces, dat wil zeggen dat het systeem geen warmte uitwisselt met de omgeving door zijn grenzen. Latere stappen corrigeren hiervoor. Bij het adiabatische proces wordt uitgegaan van de ideale gaswet (3.2). Ze beschrijft in dit geval

²Naar de statistische afwijking van die massa is nader onderzoek nodig.

twee toestanden waarbij de temperatuur en de hoeveelheid gas (aannname **vi**) constant blijven.

Substitutie van het soortelijk volume v in de ideale gaswet volgens:

$$v = \frac{V}{m} = \frac{\text{volume-eenheid}}{\text{massa-eenheid}} \longrightarrow V = \frac{m \cdot R_g \cdot T}{P} \left[\frac{m^3}{kg} \right] \rightarrow [m^3] \quad (3.16)$$

levert met voorgaande gegevens:

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V^* \longrightarrow V^* = \frac{P_1}{P_2} \cdot V_1 \quad (3.17)$$

Dit volume met behulp van vergelijking (3.11) omrekenen naar de ‘adiabatische straal’ R^* geeft:

$$R^* = \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot R_1 \quad [m] \quad (3.18)$$

Via de ideale gaswet (3.2) en vergelijkingen (3.16) en (3.17) komt men dan tot de nieuwe temperatuurverdeling na adiabatische expansie, want

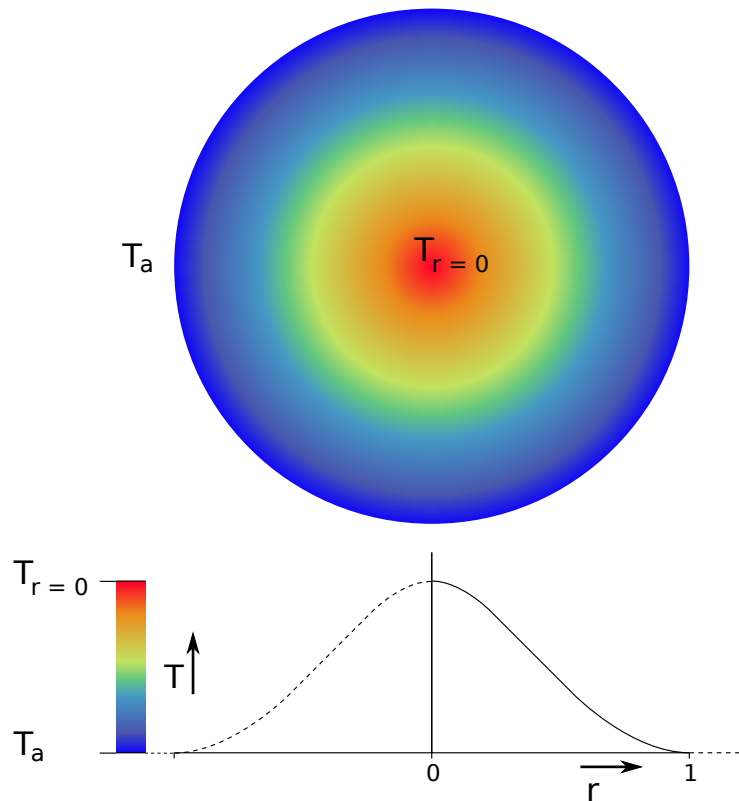
$$\frac{\cancel{m} \cdot \cancel{R_g} \cdot T_1(r)}{P_1} = \frac{\cancel{m} \cdot \cancel{R_g} \cdot T^*(r)}{P_2} \longrightarrow T^*(r) = \frac{P_2}{P_1} \cdot T_1(r) \quad (3.19)$$

Voor het gehele systeem geldt dus dezelfde relatieve verandering in temperatuur, als men aanneemt dat hij geen warmte uitwisselt met de omgeving en dat er nog geen warmte is gediffundeerd. Diffusie van warmte en haar verdeling als functie van straal en tijd worden in sectie 3.3.2 ‘*Warmtediffusie*’ besproken.

De onzekerheid in de uitkomst van de adiabatische straal in deze context, dus afgezien van de al dan niet bolsymmetrische vorm van de ballon, is nog niet vergelijkbaar met die in de berekening van de sleepfactor (zie het kopje *Kanttekening sleepfactor* in paragraaf 3.2.3).

3.3.2 Rekenstap II: Warmtediffusie

Omdat het systeem wel degelijk warmte uitwisselt en de temperatuur een significante invloed heeft op de dichtheid van een gas en dus op de omvang van het systeem, is het zaak om ook de temperatuurverdeling op ieder tijdstip te berekenen. Het is goed voor te stellen dat helium aan de rand van het systeem sneller warmte opneemt uit of verliest aan de atmosfeer dan helium dichterbij het centrum. In de richting van de straal ontstaat er een zogenaamde temperatuurgradiënt. De tweede rekenstap gaat over het bepalen van de nieuwe temperatuurgradiënt als gevolg van de warmtediffusie in het systeem en energie-uitwisseling met de omgeving. De illustratie in figuur 3.4 geeft een twee-dimensionaal inzicht in deze gradiënt. $T_{r=0}$ is de temperatuur in het centrum, T_a die van de omgeving. Het grafiekje onder het systeem is een impressie van de temperatuur als functie van de straal. Het balkje links geeft de met de temperatuur corresponderende kleuren aan.



Figuur 3.4: Indruk van de gradiënt in het systeem

Het streven van de natuur naar evenwichten en homogeniteit manifesteert zich in de vorm van diffusie. De energie in een volume verdeelt zich, als het de kans krijgt, gelijkmatig over alle deeltjes. Diffusie van warmte door een medium is afhankelijk van de temperatuurgradiënt en het vermogen tot warmtegeleiding van het medium. Warmteflux in het algemeen beschrijft men met de wet van Fourier:

$$\dot{\mathbf{Q}} = -k \cdot \nabla \mathbf{T} \quad \left[\frac{J}{s \cdot m^2} \right]$$

In deze vergelijking is de grootte en richting van de warmteflux $\dot{\mathbf{Q}}$ afhankelijk van de warmtegeleidingscoëfficiënt k en beschrijft $\nabla \mathbf{T}$ de grootte en richting van de temperatuurgradiënt in een drie-dimensionale ruimte. Aangezien de netto verplaatsing van warmte plaatsvindt in de richting van de negatieve temperatuurgradiënt, is het rechterlid negatief uitgedrukt. Notatie van een punt boven grootheden duidt op een snelheid van verandering; een verloop.

Geleiding van warmte is de energie-overdracht van energetische deeltjes op minder energetische deeltjes. De geleidingsconstante k is volgens een parametrisatie van data uit Weast^[6] afhankelijk van de temperatuur T volgens:

$$k = 4,165 \cdot 10^{-4} \cdot T + 2,849 \cdot 10^{-2} \quad \left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$$

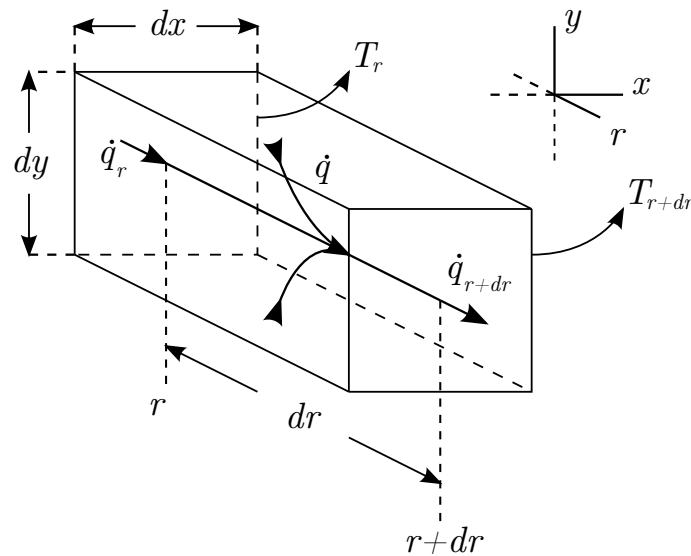
met een onzekerheid van $\delta k = 3,3 \cdot 10^{-3} \frac{W}{m \cdot K}$

De gradiënt van de temperatuur is in het bijzondere geval van een bolsymmetrisch systeem alleen aanwezig in de richting van de straal. De warmtestroom door het helium als gevolg van temperatuurverschillen en het temperatuurverloop dat daarvan afhangt, zijn hierna beschreven.

In het algemeen geldt voor geleiding in een richting \mathbf{r} door oppervlakte A :

$$\dot{Q}_r = -k \cdot A \cdot \frac{dT}{dr} \quad [W] \quad (3.20)$$

Men beschouwt een bolschil in het systeem met oppervlakte $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ en dikte dr . Dan kiest men een klein volume-element uit de schil: $dV = dx \cdot dy \cdot dr$. De illustratie in figuur 3.5 geeft een indruk.



Figuur 3.5: Schematische weergave warmtestroom door dV

De schil heeft twee randen op radiale afstand r en $r + dr$. Deze randen hebben respectievelijk temperatuur T_r en T_{r+dr} . De gradiënt van de temperatuur

$$\frac{dT}{dr} = \frac{T_r - T_{r+dr}}{dr}$$

Op positie r stroomt warmte \dot{q}_r het element binnen; op $r + dr$ verlaat warmte \dot{q}_{r+dr} het element. Voor de energiestromen die dit specifieke element betreffen en verlaten gelden respectievelijk:

$$\begin{aligned} \dot{q}_r &= -k \cdot (dx \cdot dy) \cdot \left. \frac{dT}{dr} \right|_r \\ \dot{q}_{r+dr} &= -k \cdot (dx \cdot dy) \cdot \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r+dr} \end{aligned} \quad [W]$$

De warmtestroom op afstand $r + dr$ is gelijk aan die op afstand r plus de ‘warmtestroomtoename’ over de afstand dr :

$$\dot{\mathbf{q}}_{r+dr} = \dot{\mathbf{q}}_r + \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dr} \cdot dr \quad [W] \quad (3.21)$$

De totale energie *van* het element is q_e . De energietoename dq_e van het element zelf is gelijk aan het verschil tussen de in- en uitgestroomde energie, uitgedrukt in snelheid geeft dat:

$$\frac{dq_e}{dt} = \dot{q}_e = \dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}}_{r+dr} \quad [W] \quad (3.22)$$

Het element voldoet aan

$$\begin{aligned} \Delta Q &= m \cdot c_p \cdot \Delta T \\ &= \rho \cdot V \cdot c_p \cdot \Delta T \end{aligned} \quad [J]$$

met de dichtheid ρ in $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ en de warmtecapaciteit onder constante druk c_p in $\left[\frac{J}{kg \cdot K}\right]$. Het energieverloop van het element is dus ook te schrijven als

$$\dot{q}_e = \rho \cdot (dx \cdot dy) \cdot dr \cdot c_p \cdot \frac{dT}{dt} \quad [W]$$

Nu blijkt uit formules (3.21) en (3.22) dat

$$\dot{q}_e = -\frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dr} \cdot dr \quad [W]$$

dus

$$-\frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dr} \cdot dr = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dr \cdot c_p \cdot \frac{dT}{dt}$$

Vul vergelijking (3.20) in:

$$-\frac{d}{dr} \left(-k \cdot A \cdot \frac{dT}{dr} \right) \cdot dr = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dr \cdot c_p \cdot \frac{dT}{dt}$$

Herschrijven levert:

$$\frac{d}{dr} \left(k \cdot \frac{dT}{dr} \right) = \rho \cdot c_p \cdot \frac{dT}{dt} \quad (3.23)$$

Bovenstaande vergelijking geldt voor het kleine element $dx \cdot dy \cdot dr$. Voor een meer algemene vorm is zij te noteren in partiële vorm. De gradiënt hoeft immers niet overal een gelijke grootte te hebben. Laat staan het verloop van temperatuur in de tijd. De volgende vergelijking is de algemene relatie voor warmtediffusie:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.24)$$

Diffusiecoëfficiënt Een variabele waarvan de warmteverdeling in de ballon afhankelijk is, is de diffusiecoëfficiënt α . Dat getal geeft de mate weer van de snelheid waarmee warmte zich ruimtelijk verspreidt door een medium. Eerder in het verslag is de aanname gemaakt dat er in de ballon geen convectie plaatsvindt (aannahme **i**); een berekening van de warmteverdeling enkel op basis van diffusie is voorlopig voldoende voor een geschikt model. Om de numerieke implementatie van de warmtediffusie niet onnodig complex te maken, wordt de coëfficiënt voor constant gehouden over de gehele ruimte van het systeem. Deze paragraaf bespreekt de totstandkoming van die constante, over het volume gemiddelde coëfficiënt.

Het gewogen gemiddelde van de diffusiecoëfficiënt in de gehele bol is afhankelijk van het totale volume en plaatselijke waarden van de warmtegeleidingscoëfficiënt k , de dichtheid van helium ρ_{he} en de soortelijke warmtecapaciteit c_p . Per definitie wordt de diffusiecoëfficiënt α beschreven volgens

$$\alpha = \frac{k}{\rho \cdot c_p} \quad (3.25)$$

Het volume van een bolschil δV met straal r berekent men volgens

$$\delta V(r) = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr \quad (3.26)$$

De gemiddelde waarde van α , α_{gem} , in een bolvormige ruimte met straal R is gelijk aan de som van producten van ‘schil-volume’ en bijbehorende diffusiecoëfficiënt gedeeld door het totale volume:

$$\alpha_{gem} = \frac{1}{V} \cdot \sum_0^R dV_s(r) \cdot \frac{k(r)}{\rho(r) \cdot c_p(r)} \quad (3.27)$$

Met behulp van formule (3.11) en door integratie is het gewogen gemiddelde als volgt op te schrijven:

$$\begin{aligned} \alpha_{gem} &= \frac{3}{4\pi \cdot R^3} \cdot \int_0^R 4\pi \cdot r^2 \cdot \frac{k(r)}{\rho(r) \cdot c_p(r)} \cdot dr \\ &= \frac{3}{R^3} \cdot \int_0^R r^2 \cdot \frac{k(r)}{\rho(r) \cdot c_p(r)} \cdot dr \end{aligned} \quad (3.28)$$

Een tijdsinterval Δt is de tijd waarin het systeem van z naar $z + \Delta z$ stijgt. De diffusiecoëfficiënt wordt door het model gedurende ieder tijdsinterval als een constante beschouwd die is bepaald, aan de hand van condities aan het begin van de rekenstap.

De nieuwe gradiënt ten gevolge van diffusie en warmte-uitwisseling kan men berekenen met de diffusievergelijking (3.24) in een vorm voor een bolvormig systeem met alleen warmtestroom in radiale richting volgens Incropera e.a.^[4]. Het is een tweede orde differentiaalvergelijking met de gemiddelde diffusiecoëfficiënt α_{gem} volgens vergelijking (3.25), de ongecorrigeerde straal van het

systeem R^* , de radiale coördinaat r en het temperatuurprofiel op tijdstip 0 ($T_0(r)$) als bekende invoer.

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \frac{\alpha_{gem}}{R^2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right) \quad (3.29)$$

De gewenste oplossing van deze vergelijking is de nieuwe gradiënt $T_2(r, t)$. De aanname bij dit onderdeel is dat het volume en de druk gelijk blijven gedurende de berekening. Voor de oplossing van de vergelijking zijn een aantal methodes beschikbaar. Twee daarvan zijn uitgevoerd tijdens de stage, een daarvan heeft zich bruikbaar getoond en staat beschreven in hoofdstuk 4 ‘Modelleren’.

3.3.3 Rekenstap III: Correctie

Bovenstaande berekeningen beschrijven een geïdealiseerd proces. De eerste stap gaat uit van een adiabatisch proces en de tweede stap van constante druk en een niet-samendrukbaar gas. Alle processen vinden tegelijkertijd plaats. In de berekening worden effecten genegeerd die in de praktijk constant aan de orde zijn. De fout die daardoor wordt geïntroduceerd, is grotendeels te corrigeren aan de hand van de ideale gaswet en een cumulatieve oplosmethode. Deze paragraaf geeft de methode en haar totstandkoming weer.

Uit de ideale gaswet (3.2) volgt dat het volume van een massa-eenheid gas afhangt van onder anderen de temperatuur volgens het tweede deel van vergelijking (3.16):

$$V = \frac{m \cdot R_g \cdot T}{P}$$

Doordat het gas in rekenstap II niet comprimeert of expandeert, wordt de adiabatische straal R^* die resulteert uit rekenstap 1 bij deze gecorrigeerd naar een uiteindelijke straal R_2 met behulp van bovenstaande vergelijking en het uit rekenstap II verworven temperatuurprofiel. Tot de belangrijkste aannames behoren dat de druk in het systeem gedurende deze stap constant is, gelijk aan die op hoogte $h + \Delta h$, en dat de massa van het systeem niet verandert tijdens de vlucht. De vorige vergelijking reduceert zich dan voor twee toestanden tot de volgende functie van de temperatuurverhouding en het adiabatische volume:

$$\frac{V_2}{V^*} = \frac{T_2}{T^*} \quad \longrightarrow \quad V_2 = \frac{T_2}{T^*} \cdot V^* \quad (3.30)$$

Omrekenen naar de straal met behulp van vergelijking (3.11) levert voor ononderbroken bollen:

$$R_2 = \left(\frac{T_2}{T^*} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot R^* \quad (3.31)$$

Wederom is het systeem onderverdeeld in schillen, maar de schillen hebben nu een eindige dikte. Dit maal is men geïnteresseerd in de volumeverandering van een schil ten gevolge van de temperatuurverandering. Het volume van een bolschil dV is gelijk aan het volume van de bol die haar buitenste straal R^+

beschrijft, minus het volume van de bol die haar binnenste straal R^- beschrijft:

$$dV = \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot \left((R^+)^3 - (R^-)^3 \right) \quad (3.32)$$

Men beschouwt de straal en temperatuurverdeling die is berekend uit de eerste twee stappen, dan neemt men in acht dat de omvang van de ballon niet dermate is veranderd als was verwacht op basis van die stappen.

Omdat de schil haar massa behoudt, maar als gevolg van de nieuwe temperatuurverdeling uit de tweede rekenstap een ander volume inneemt dan volgens de eerste rekenstap, levert ze een andere bijdrage aan de straal van het systeem. Het volume van een schil op positie x , dV_x , na correctie is simpelweg een kwestie van het toepassen van functie (3.30). Voor de duidelijkheid:

$$\frac{dV_{x,2}}{dV_x^*} = \frac{T_{x,2}}{T_x^*} \quad \longrightarrow \quad dV_{x,2} = \frac{T_{x,2}}{T_x^*} \cdot dV_x^* \quad [m^3] \quad (3.33)$$

Het systeem is onderverdeeld in N schillen, de dikte van iedere schil dr is gelijk aan:

$$dr = \frac{R^*}{N}$$

De nieuwe totale straal wordt bepaald op basis van de binnenste schil, ofwel de kern, en relatie (3.33). De nieuwe straal van de kern $R_{2(x=0)}$ berekent men uit vergelijking (3.31) omdat de kern volgens de definitie geen ‘binnenste’ straal heeft: het is een ononderbroken bol. De nieuwe straal van de kern fungeert steeds als binnenste straal voor de volgende schil:

$$R_{(x=0)}^+ = R_{(x=1)}^- \quad (3.34)$$

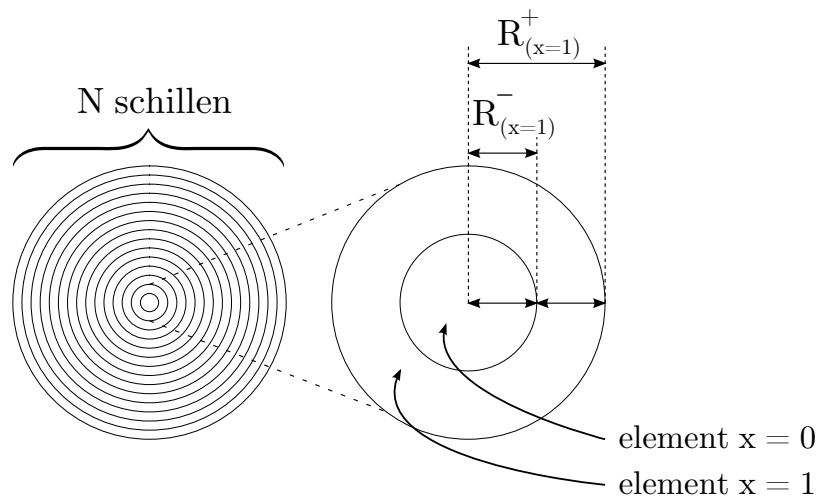
Ook het nieuwe volume van deze volgende schil is bekend uit vergelijkingen (3.32) en (3.33), dus kan men haar nieuwe bijdrage aan de straal berekenen volgens vergelijking (3.32) in de volgende vorm:

$$\begin{aligned} R_{2(x=1)}^+ &= \left(\frac{3 \cdot dV_{2(x=1)}}{4 \cdot \pi} + R_{2(x=1)}^- \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{3 \cdot \delta V_{2(x=1)}}{4 \cdot \pi} + R_{2(x=0)}^+ \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Deze eenvoudige stappen worden herhaald voor alle schillen. De nieuwe buitenste straal van een schil op positie x is voor ieder tijdstip gelijk aan de binnenste straal van een schil op positie $x - 1$. Uiteindelijk is de buitenste straal van de buitenste schil gelijk aan de totale nieuwe straal van het systeem:

$$R_{2,totaal} = R_{2(x=N)}^+ \quad (3.36)$$

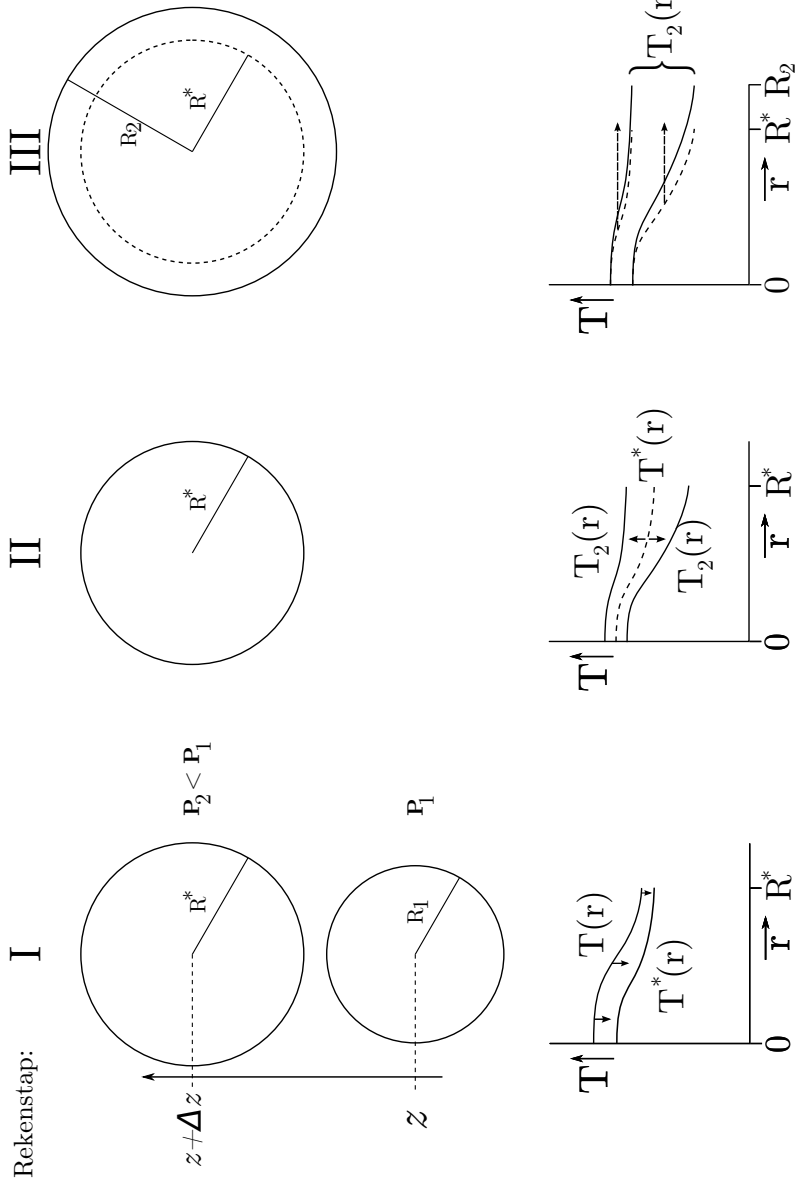
Figuur 3.6 geeft een indruk van de verdeling van het systeem voor de laatste rekenstap en een aantal definities.



Figuur 3.6: Weergave van de bolverdeling voor correctie

Afsluitend op dit hoofdstuk is in figuur 3.7 het rekenplan grafisch voorgesteld. De beschreven rekenstappen zijn hierin van links naar rechts uitgebeeld met de verandering van de ballon zelf bovenaan en de temperatuurverdeling binnen het systeem als functie van de straal in een grafiek onderaan.

Het volgende hoofdstuk bespreekt de methodes voor het daadwerkelijk numeriek implementeren van het model. Het presenteert numeriek oplosbare versies van belangrijke functies.



Figuur 3.7: Schematisch overzicht rekenstappen

Hoofdstuk 4

Modelleren

Om de processen die de ballon ondergaat te modelleren, is in de programmeertaal *Python*¹ een aantal scripts geschreven. Met meetdata als input zorgt dit script voor een benadering van de snelheid die de sonde zou hebben in stilstaande atmosfeer. Voor het schrijven van het programma is gerefereerd aan de in het artikel van Gallice e.a.^[9] beschreven werkwijze. De functies uit de theorie zijn hier vertaald naar numeriek oplosbare varianten. De tijd tussen twee metingen geldt telkens als de totale tijd Δt waarover het model met een set variabelen aan de slag gaat.

Het aantal tijdstapjes dat het model zelf gebruikt om tot de volgende situatie te komen en hoe fijn het systeem ruimtelijk is verdeeld, bepalen mede de nauwkeurigheid van de berekening. Het model borduurt na iedere tijdstap bij het aanbod van nieuwe meetgegevens voort op de laatste berekeningen. Het risico van deze methode is dus dat kleine afwijkingen in de berekeningen voortdurend worden versterkt. Een analyse van de afwijkingen door deze berekeningen staat in sectie 4.4 ‘*Numerieke fouten*’.

Zoals in de theorie besproken, hanteren Gallice e.a. in hun artikel een driedeling van het groeiproces van de ballon: eerst een adiabatiscche expansie, dan de ontwikkeling van de temperatuurgradiënt en uiteindelijk een correctie op deze vereenvoudigde beschouwing. Op deze manier blijft de procedure overzichtelijk en numeriek oplosbaar. Dit hoofdstuk bespreekt de implementatie van de drie stappen in logische volgorde.

4.1 Adiabatiscche expansie

De adiabatiscche expansie verloopt volgens formules (3.18) en (3.19). Numeriek zijn het recht toe recht aan vergelijkingen. De bekende waarde van de straal en temperatuur vóór de berekening zijn samen met de drukverhouding op het huidige en het volgende tijdstip invoer.

¹Ontwikkeld door Guido van Rossum en vrij verkrijgbaar via <http://python.org/>

4.2 Warmtediffusie

Stap twee gaat over het zich opnieuw verdelen van warmte binnen de ballon als gevolg van warmte-uitwisseling met de omgeving en -diffusie bij een constante druk en constant volume. Aangezien het heliumgas warmte uitwisselt met zijn omgeving, ontstaat er in het systeem een radiale temperatuurgradiënt. Het helium heeft dus ook een radiaal verloop in dichtheid. Tijdens deze stap berekent het model het nieuwe temperatuurprofiel met behulp van de numerieke oplossing van vergelijking (3.29). Het numeriek oplossen van die vergelijking kan op meerdere manieren. Tijdens de stage is aanvankelijk gekozen voor de expliciete ‘*forward Euler*’-methode, vanwege haar eenvoud. De oplossingen van deze methode bleken echter niet redelijk te zijn; zij vertoonden een sterke divergentie naarmate het aantal rekenstappen vorderde. De impliciete ‘*backward Euler*’-methode is beter bruikbaar. De oplossingen hiervan blijven stabiel. Voor alle duidelijkheid wordt een voorbeeld gegeven aan de hand van de volgende situatie: een systeem met een straal van een meter en een vlakke temperatuurverdeling van driehonderd Kelvin wordt blootgesteld aan een omgeving van 280 Kelvin. In figuur 4.1 staan de temperatuurgradiënten op tijdstippen tussen $t = 0s$ en $t = 1200s$. Alleen de gradiënten op $t = 0s$, $t = 300s$ en $t = 600s$ zijn in de legenda weergegeven omwille van overzicht. Nu is duidelijk dat hoe dichter men de kern nadert, hoe langer de reactietijd is van de temperatuur op veranderingen aan de rand. Dergelijk extreme fluctuaties komen tijdens een sondemeting niet voor in de twee seconden waarin het model telkens een nieuwe situatie berekent. Het vertrouwen na aanleiding van dit resultaat is dus op de impliciete Euler-methode gevestigd.

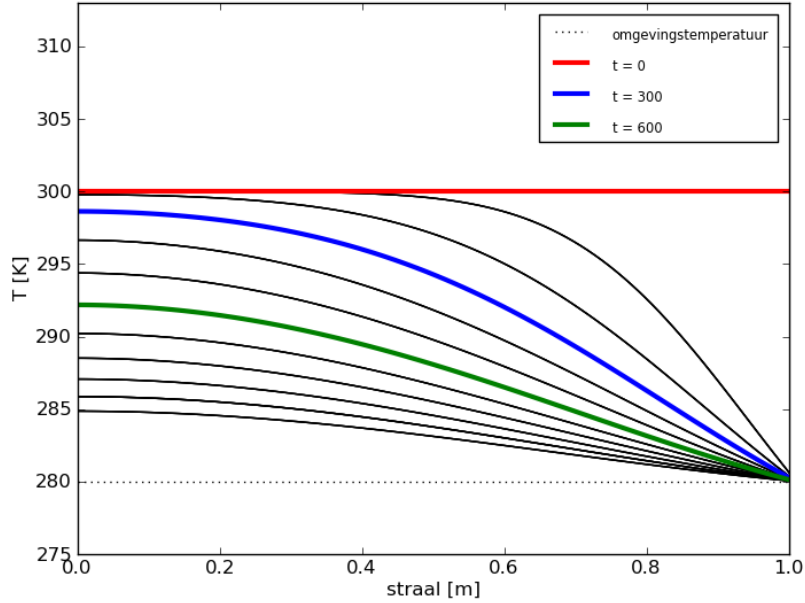
Om met behulp van een computer numeriek te kunnen rekenen, is een discrete verdeling nodig van tijd en plaats: de ‘rekenpunten’. Figuur 4.2 geeft de ruimtelijke verdeling van rekenpunten schematisch weer. De straal is onderverdeeld in kleine elementen. Elk element correspondeert met een radiale positie. Het volume van het systeem bestaat uit een aantal concentrische bolschillen met dikte δr . De randen van bolschil nummer ‘ i ’ zijn aangeduid met het superscript ‘ i ’. I is de maximale waarde van i : de buitenste schil van het systeem.

De verdeling ‘begint’ met $i = 0$ op een afstand van een $\frac{1}{2}\delta r$ van $r = 0$. De definitie van de absolute afstand van de schilranden tot het centrum luidt dus:

$$r = \left(i + \frac{1}{2}\right) \cdot \delta r \quad (4.1)$$

Later blijkt dat deze wijze van verdelen bij het oplossen van de differentiaalvergelijking van diffusie een wiskundige moeilijkheid voorkomt.

De tijd van een ‘rekensessie’ van het model loopt van het ontvangen van data op tijdstip t (hoogte z) tot het ontvangen van de volgende data op tijdstip $t + \Delta t$ (hoogte $z + \Delta z$). Hierin bevindt zich een bepaald aantal rekenstappen. De ge-discretiseerde tijdstapjes van de berekening zijn weergegeven met subscript ‘ n ’. ‘ n ’ duidt waarden aan op het huidige moment, ‘ $n+1$ ’ op het volgende, ‘ $n-1$ ’ op het vorige en ga zo maar door. Een tijdstapje n duurt δt seconden. De maximale waarde voor n is N en geldt telkens aan het einde van de rekensessie; op



Figuur 4.1: Temperatuurgradiënten van het systeem op elf tijdstippen

$t + \Delta t$. Figuur 4.3 geeft de verdeling van rekenpunten in de tijd schematisch weer.

De gemiddelde diffusiecoëfficiënt wordt beschouwd als een constant gegeven gedurende de gehele tijdstap Δt . Onderstaande vergelijkingen geven de totstandkoming van de discrete variant van vergelijking (3.29) weer. Het geeft nog geen oplossing, maar is slechts een nieuwe schrijfwijze.

De afgeleide naar de tijd en plaats zijn voor een willekeurige functie F respectievelijk als volgt gedefinieerd:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{F_{n+1}^i - F_n^i}{\delta t} \quad (4.2)$$

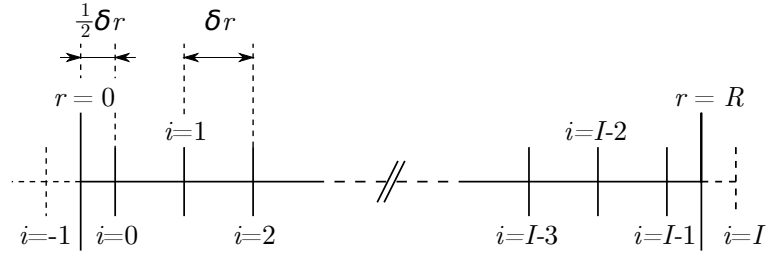
$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{F_n^{i+\frac{1}{2}} - F_n^{i-\frac{1}{2}}}{\delta r} \quad (4.3)$$

Invullen van vergelijking (4.1) voor de radiale coördinaat r geeft:

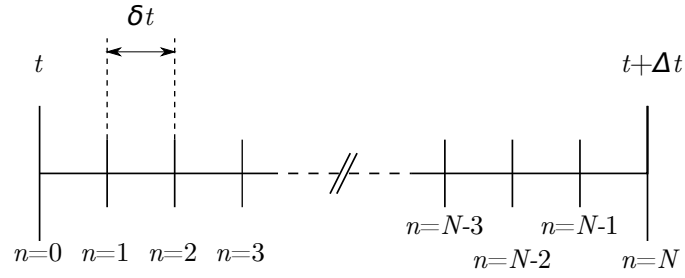
$$\frac{T_{n+1}^i - T_n^i}{\delta t} = \frac{\alpha_{gem}}{(R^*)^2} \cdot \frac{1}{\left(i + \frac{1}{2}\right) \cdot \delta r} \cdot \frac{F_n^{i+\frac{1}{2}} - F_n^{i-\frac{1}{2}}}{\delta r} \quad (4.4)$$

De functie F is in dit geval gelijk aan (zie vergelijking (3.29)):

$$r^2 \cdot \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \xrightarrow{\text{numeriek}} \left(\left(i + \frac{1}{2}\right) \cdot \delta r\right)^2 \cdot \frac{T_n^{i+\frac{1}{2}} - T_n^{i-\frac{1}{2}}}{\delta r} \quad (4.5)$$



Figuur 4.2: Straalverdeling schematisch



Figuur 4.3: Tijdverdeling schematisch

Substitutie van vergelijking (4.5) in (4.4) levert:

$$\begin{aligned} \frac{T_{n+1}^i - T_n^i}{\delta t} &= \frac{\alpha_{gem}}{(R^*)^2} \cdot \frac{1}{\left(\left(i + \frac{1}{2}\right) \cdot \delta r\right)^2} \\ &\hookrightarrow \frac{\left(\left(i + 1\right) \cdot \delta r\right)^2 \cdot \frac{T_{n+1}^{i+1} - T_{n+1}^i}{\delta r} - \left(i \cdot \delta r\right)^2 \cdot \frac{T_{n+1}^i - T_{n+1}^{i-1}}{\delta r}}{\delta r} \end{aligned}$$

Omdat de implicite oplosmethode is gekozen, staan in het rechterlid van de uiteindelijke versie termen van de temperatuur op tijdstip $n + 1$.

Oplossen voor T_n^i geeft dan:

$$\begin{aligned} T_n^i &= T_{n+1}^i - \frac{\alpha_{gem}}{(R^*)^2} \cdot \frac{\delta t}{\left(\left(i + \frac{1}{2}\right) \cdot \delta r\right)^2} \\ &\hookrightarrow \left(\left(i + 1\right)^2 \cdot \left(T_{n+1}^{i+1} - T_{n+1}^i\right) - i^2 \cdot \left(T_{n+1}^i - T_{n+1}^{i-1}\right) \right) \end{aligned}$$

en is om te schrijven naar

$$T_n^i = C^{i-1} \cdot T_{n+1}^{i-1} + C^i \cdot T_{n+1}^i + C^{i+1} \cdot T_{n+1}^{i+1} \quad (4.6)$$

waarbij de ‘implicite factoren’ C als volgt zijn gedefinieerd:

$$\begin{aligned}
C^{i-1} &= - \frac{\alpha_{gem}}{(R^*)^2} \cdot \frac{\delta t}{\left(\left(i + \frac{1}{2}\right) \cdot \delta r\right)^2} \cdot i^2 \\
C^i &= 1 + \frac{\alpha_{gem}}{(R^*)^2} \cdot \frac{\delta t}{\left(\left(i + \frac{1}{2}\right) \cdot \delta r\right)^2} \cdot \left((i+1)^2 + i^2\right) \\
C^{i+1} &= - \frac{\alpha_{gem}}{(R^*)^2} \cdot \frac{\delta t}{\left(\left(i + \frac{1}{2}\right) \cdot \delta r\right)^2} \cdot (i+1)^2
\end{aligned}$$

In de definities van de impliciete factoren is zichtbaar dat de keuze van straalverdeling volgens figuur 4.2 deling door nul voorkomt indien $i = 0$.

De relatie (4.6) is in matrix-vorm te noteren:

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}_{n+1} \quad (4.7)$$

De oplossing is dan:

$$\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{T}_n \quad (4.8)$$

De matrix \mathbf{M} bestaat uit de waarden van C op corresponderende posities met de temperatuurvectoren zoals hieronder geïllustreerd:

$$\begin{pmatrix} \dots \\ T_n^{i-2} \\ T_n^{i-1} \\ T_n^i \\ T_n^{i+1} \\ T_n^{i+2} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & C^i & C^{i+1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & C^{i-1} & C^i & C^{i+1} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & C^{i-1} & C^i & C^{i+1} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & C^{i-1} & C^i & C^{i+1} & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & C^{i-1} & C^i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ T_{n+1}^{i-2} \\ T_{n+1}^{i-1} \\ T_{n+1}^i \\ T_{n+1}^{i+1} \\ T_{n+1}^{i+2} \\ \dots \end{pmatrix}$$

De grenzen worden bepaald aan de hand van aangenomen grenswaarden. De temperatuur van de rand van het systeem veronderstelt men aan het begin van iedere tijdstap onmiddellijk gelijk aan de omgevingstemperatuur en wordt als een constante beschouwd tot de start van de volgende rekensessie met nieuwe meetdata:

$$T_{n\dots N}^I = T_{t\dots\Delta t} \quad (4.9)$$

Op positie I geldt de randvoorwaarde. Deze positie valt echter buiten het systeem en is dus een fictieve plaats in het rekenmodel. Het is een hulpmiddel om de differentiaalvergelijking op te kunnen lossen. De eventueel isolerende werking van de wand van het systeem wordt genegeerd.

Zoals aanname \mathbf{i} stelt, geldt er bolsymmetrie voor de thermodynamica in het systeem; de temperatuur kent geen gradiënt exact in het midden:

$$\left. \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (4.10)$$

en (zie figuur 4.2)

$$T_n^{i=-1} = T_n^{i=0} \quad (4.11)$$

Positie $i - 1$ is evenals I fictief; formule (4.1) mag geen negatieve afstand geven. Ze is, zoals positie I , bedoeld om beter inzicht te verschaffen in de randcondities.

Toepassing van de randvoorwaarden resulteert ter plaatse het centrum voor $i = 0$ in het vervallen van de factor C^{-1} . Door de temperatuur iets voorbij de wand op $i = I$ gelijk te stellen aan die van de omgeving, wordt de derde term in vergelijking (4.6) een product van de omgevingstemperatuur en de factor C^{i+1} , dus:

$$T(t) \cdot C^{(I-1)+1} \quad (4.12)$$

Om dit te realiseren, wordt $C^{(I-1)+1}$ uit de matrix \mathbf{M} weggelaten en telt men een nieuwe vector voor de randvoorwaarde \mathbf{V}_{bc} bij het totale product op:

$$\mathbf{V}_{bc} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ T(t) \cdot C^{(I-1)+1} \end{pmatrix}$$

Als men met de huidige kennis stelt dat:

$$\mathbf{T}_n = \begin{pmatrix} T_n^0 \\ T_n^1 \\ T_n^2 \\ T_n^3 \\ \dots \\ \dots \\ T_n^{I-4} \\ T_n^{I-3} \\ T_n^{I-2} \\ T_n^{I-1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_{n+1} = \begin{pmatrix} T_{n+1}^0 \\ T_{n+1}^1 \\ T_{n+1}^2 \\ T_{n+1}^3 \\ \dots \\ \dots \\ T_{n+1}^{I-4} \\ T_{n+1}^{I-3} \\ T_{n+1}^{I-2} \\ T_{n+1}^{I-1} \end{pmatrix}$$

en

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} C^0 & C^{i+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C^{i-1} & C^0 & C^{i+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{i-1} & C^i & C^{i+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^{i-1} & C^i & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C^i & C^{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C^{i-1} & C^i & C^{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C^{i-1} & C^i & C^{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & C^{i-1} & C^i \end{pmatrix}$$

volgt de oplossing van de numerieke methode:

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}_{n+1} + \mathbf{V}_{bc} \quad (4.13)$$

dus

$$\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{T}_n - \mathbf{V}_{bc}) \quad (4.14)$$

4.3 Correctie

Omdat in de voorgaande stappen is aangenomen dat de ballon adiabatisch expandeert en de warmteverdeling een evenwichtstoestand zoekt onder constant volume en constante druk, zal men daar met een derde stap voor corrigeren. De temperaturen van de schillen voor de volgende rekensessie zijn bekend, zij zijn namelijk gelijk aan waarden uit de vector \mathbf{T}_{n+1} uit formule (4.14). Alvorens een nieuwe rekensessie van start gaat, moet het model de straal van het systeem corrigeren volgens de theorie uit sectie 3.3.3. De computer doet niet veel anders dan wat daar is uitgelegd. Eerst wordt het systeem onderverdeeld in bolschillen met gelijke dikte. Dan bepaalt het model volgens vergelijking (3.31) de straalverandering van de kern. Op basis van deze eerste nieuwe straal, bepaald het model met vergelijking (3.33) het nieuwe volume van de volgende schil en vervolgens haar nieuwe buitenste straal met behulp van vergelijking (3.35). Ten slotte rekent het model de buitenste straal van de laatste, ofwel buitenste, schil uit en gebruikt die waarde als beginstraal van het systeem in de volgende sessie. De vergelijkingen in de software staan in dezelfde vorm en volgorde zoals zij in het betreffende theoretische gedeelte zijn besproken.

4.4 Numerieke fouten

In de eerste alinea van dit hoofdstuk wordt al aangegeven dat de nauwkeurigheid van het model onder anderen wordt bepaald door het aantal tijdstapjes en rekenposities dat het model hanteert om grootheden opnieuw te bepalen. De

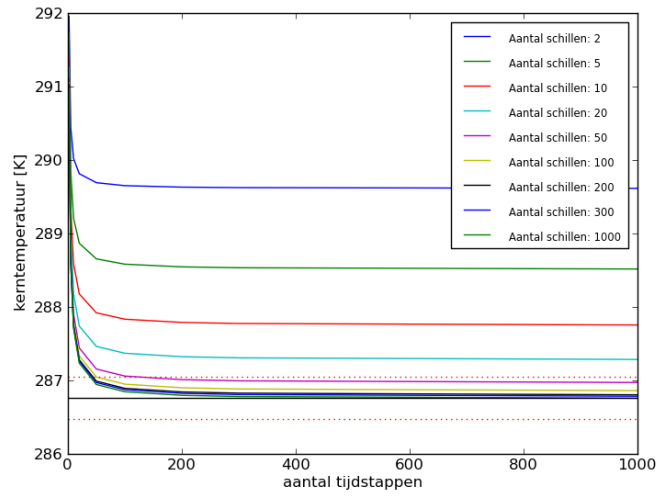
diffusie- en correctiestap zijn de onderdelen van het model waar de keuze van het aantal tijdstippen en rekenplaatsen (schillen) invloed heeft op de uitkomst. Het vinden van een minimale waarde voor het aantal tijd- en rekenstappen leidt onder andere tot een sneller model. Om te testen wat het minimale aantal stappen is om tot een deugdelijke uitkomst te komen, wordt de temperatuur van de binnenste schil, de kern, uitgezet tegen het aantal tijdstappen en het aantal schillen; de kerntemperatuur is een goede indicator voor nauwkeurigheid van het model, want de kern reageert het traagste op veranderingen rond het systeem. Als de kern verandert, is de rest ook veranderd. Het scenario dat hier wordt bekeken is weer een systeem met een straal van een meter, een vlak temperatuurprofiel van driehonderd Kelvin om mee te beginnen en een omgevingstemperatuur van 280 Kelvin. Vrij extreme waarden om een goed beeld te krijgen van het oplosvermogen van het betreffende script.

Om een overzicht te maken van het numerieke effect in het model, staat in figuur 4.4 een aantal grafieken van de kerntemperatuur, uitgezet tegen het aantal tijdstappen voor verschillende waarden van het aantal schillen. Het is duidelijk dat de grafieken vanaf een waarde van circa tweehonderd tijdstapjes nagenoeg vlak worden en een eindwaarde bereiken. Daarnaast valt het op dat naarmate het aantal schillen vordert, de grafieken dichter op elkaar gaan liggen. Na tweehonderd schillen is het onderscheid moeilijk te maken tussen losse lijnen. Bij deze wordt aangenomen dat voor duizend tijdstappen en duizend schillen de juiste uitkomst wordt gegeven. De zwarte horizontale lijn stelt die uitkomst voor in dit scenario, de rode stippellijnen markeren het grensgebied van $\pm 1\%$ van de goede uitkomst. Om hooguit een promille in te boeten op nauwkeurigheid van de diffusiestap in het model kan men dus kiezen voor bijvoorbeeld de volgende combinaties:

Aantal schillen:	100
Aantal tijdstappen:	50
of	
Aantal schillen:	50
Aantal tijdstappen:	200

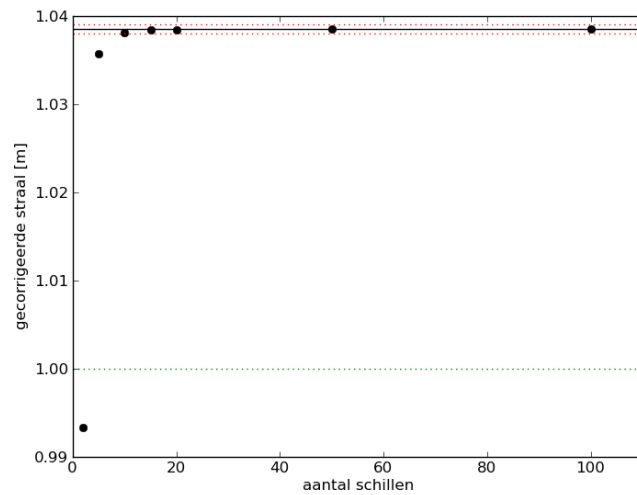
Uit een simpele test blijkt dat het script de diffusie met honderd schillen en vijftig tijdstappen bijna twee maal zo snel oplost als met vijftig schillen en tweehonderd tijdstappen.

Een andere stap die een numeriek effect ondergaat is de correctie van de straal na adiabatische expansie en diffusie. Deze functie werkt enkel met een ruimtelijke verdeling. Figuur 4.5 toont de relatie tussen de afwijking tot de verwachte waarde (zwarte lijn) en het aantal schillen. De rode lijnen geven in dit geval de grenzen van $\pm 0,5\%$. De zwarte stippen tonen voor het aantal schillen de door het model berekende gecorrigeerde straal. Een aantal schillen groter dan vijftig geeft blijkbaar een nagenoeg perfecte uitkomst. Omdat het script van deze functie relatief licht is en dus weinig tijd vergt, wordt het aantal schillen van de diffusiestap gehandhaafd op honderd. Het script rekent hierbij telkens met in het begin een vlak profiel over het systeem van 250 Kelvin en uiteindelijk een vlak profiel van 280 Kelvin. De beginstraal is een meter (groene stippellijn). De reden om een vlak profiel te kiezen, is dat er dan makkelijk een verwachting kan worden berekend op basis van vergelijking (3.30). Deze overgang van temperatuur in



Figuur 4.4: Grafiek numeriek effect diffusie

het systeem is extreem en onrealistisch, wat nog eens aangeeft dat een keuze van honderd schillen zeer veilige marges biedt. De fouten die worden gemaakt met het numeriek diffunderen en corrigeren, zijn nog niet interessant voor een bijdrage aan de totale onnauwkeurigheid van het model.



Figuur 4.5: Grafiek numeriek effect correctie

Hoofdstuk 5

Experiment

Om tot een goed model te komen en om een gedeelte van de aannames te valideren, heb ik een stel proeven bedacht en uitgevoerd, in dit hoofdstuk een bondige beschrijving daarvan.

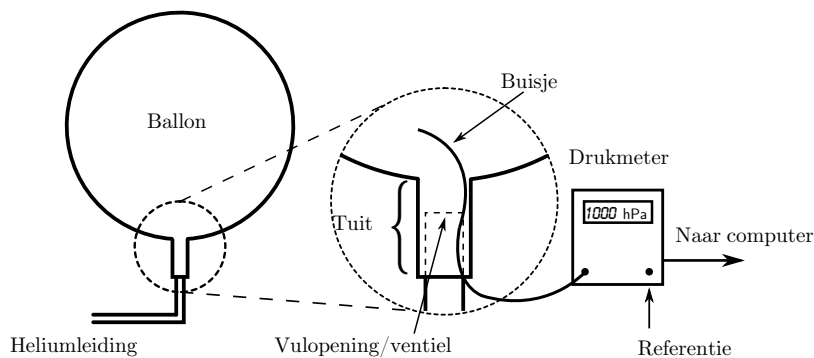
5.1 Drukverschil binnen en buiten systeem

In de aanname van Gallice e.a.^[9] dat binnen het systeem dezelfde druk heerst als daarbuiten, geloofde ik niet. Het gas zit in een rubberen ballon die almaar groter wordt, dus leek me dat een toenemende spanning in de wand zou leiden tot een significante drukverhoging van het helium. Om het te testen is de overdruk van het heliumgas gemeten tijdens het opblazen met gebruik van de *Digiquartz[®] Intelligent Transmitter* van het Amerikaanse *Paroscienific*. Het apparaat meet voor deze proef de overdruk ten opzichte van de atmosferische druk op de grond.

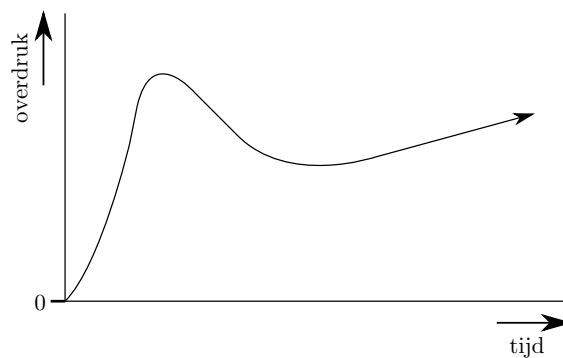
De proefopstelling wordt uitgelegd aan de hand van figuur 5.1. De rubberen tuit van de ballon wordt over een vulventiel getrokken en met een stuk touw vastgebonden. Het buisje van de drukmeter kan eenvoudig tussen de tuit en het ventiel worden geklemd, hij is stevig genoeg om open te blijven en niet te knikken tussen het rubber en het metalen ventiel. Door de drukmeter met een computer uit te lezen, is een verloop van de druk tegen de tijd uit te zetten.

Mijn hypothese was dat de druk in het begin van de inflatie relatief sterk zou toenemen en dan een beetje af om vervolgens langzaam maar zeker weer groter te worden. Zoals bekend bij het opblazen van ballonnen, kost het wat moeite om een bepaalde rek in het materiaal te krijgen. Na deze drempel wordt het met het toenemen van het volume zwaarder blazen. Figuur 5.2 illustreert mijn toenmalige veronderstelling weer van het drukverloop.

Na de meting en het verzamelen en analyseren van de data, bleek dat de drukverhoging aan het begin inderdaad optreedt, maar dat deze hierna weer uitvlakt naar een lage waarde van hooguit twee hectopascal. Zie figuur 5.3, die geeft het overdrukverloop van het systeem ten opzichte van de omgeving weer voor vier



Figuur 5.1: Schematische weergave opstelling drukmeter



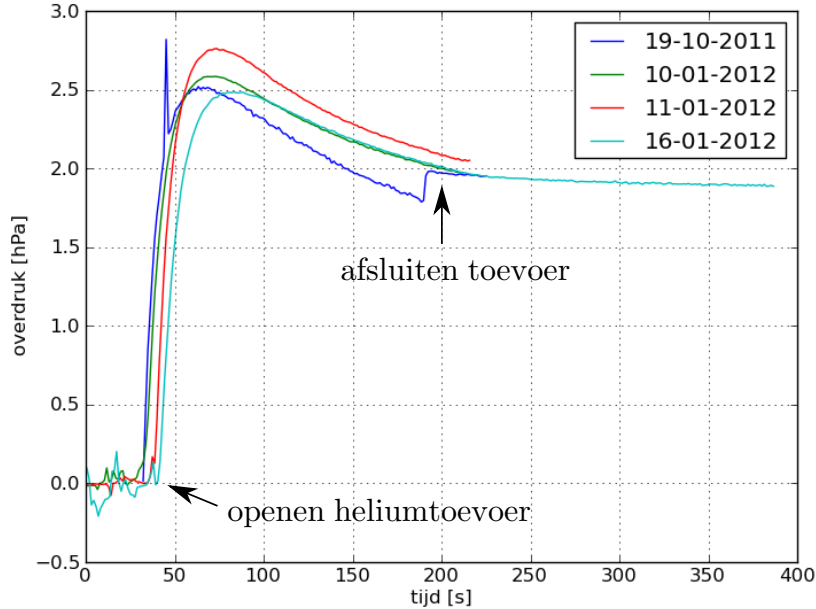
Figuur 5.2: Aanvankelijke hypothese

metingen. De legenda toont de datum van meten. Het gevolg van deze overdruk op het drijfvermogen van de ballon kan men bepalen volgens de formule voor drijfkraft (3.5) en het volume van het systeem (3.10). De berekening van het volume en dus de drijfkraft met de aanname van gelijke drukken binnen en buiten het systeem geeft op grondniveau nog geen twee promille overschatting. Dit soort waarden zijn in huidige staat van onderzoek nog niet relevant. Tot het vulsysteem¹ stopt met de toevoer van helium, neemt de druk niet meer toe. Of het drukverschil tussen binnen en buiten het systeem tijdens de vlucht bij grotere hoogtes toeneemt is de volgende vraag. Het is echter een nieuw punt van onderzoek buiten de strekking van dit project. Voorlopig is met deze kleine proef aangetoond dat aanname **iii** te rechtvaardigen valt.

5.2 Tijd van uitvlakken temperatuur

Om het volume en de straal te bepalen aan het begin van de vlucht volgens vergelijking (3.10) uit de theorie, moet de opwaartse kracht bekend zijn. Om de

¹Zie voor beschrijving van het vulsysteem hoofdstuk 8 'Duurzaamheid'

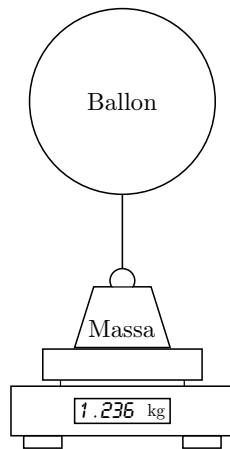


Figuur 5.3: Verloop overdruk ballon

kracht te bepalen, is kennis over de dichtheid van het helium nodig. Deze kan via de ideale gaswet, vergelijking (3.9), worden bepaald. Voorwaarde om die formule te kunnen gebruiken is dat de temperatuur in het systeem homogeen is verdeeld. Een methode om te onderzoeken hoe lang dit uitvlakken duurt wordt in deze sectie uitgelegd.

De drijfkraft van het systeem is afhankelijk van zijn omvang. De omvang van het complete systeem is op zijn beurt afhankelijk van de dichtheid die het helium heeft. De dichtheid is afhankelijk van de temperatuur en kan, zoals eerder aangegeven, een bepaalde distributie in radiale richting volgen. Het uitvlakken van een temperatuurprofiel binnen het systeem heeft tot gevolg dat de drijfkraft verandert. Afhankelijk van respectievelijk een toe- dan wel afname van de gemiddelde temperatuur, neemt de gemiddelde dichtheid af, dan wel toe en neemt de drijfkraft respectievelijk toe, dan wel af.

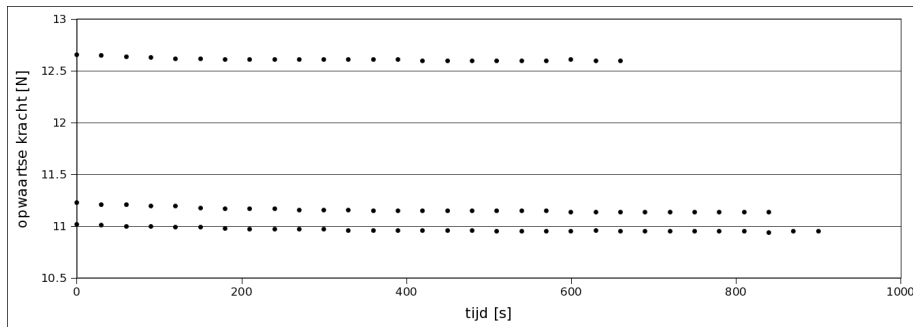
Als de ballon wordt gevuld, expandeert het helium uit voorraadflessen. Aanvankelijk had het de temperatuur van de buitenlucht, maar door de expansie koelt het af. Het gas neemt gedurende en na het expanderen energie op uit de omgeving tot het diens temperatuur weer heeft bereikt. Mijn hypothese voor dit experiment was dat het gas dusdanig snel door de leiding werd getransporteerd dat de expansie daarin adiabatisch gebeurde en dat het belangrijkste deel van de warmte-uitwisseling plaatsvond als het in de ballon hing. Deze gedachte heeft geleid tot het ontwerpen van een opstelling om de opwaartse kracht te meten, zie figuur 5.4. Tijdens het vullen is de ballon aan het vulsysteem gekoppeld. Zodra de ballon gevuld is, is het zaak om hem dicht te knopen en zo snel



Figuur 5.4: Schematische weergave opstelling opwaartse kracht

mogelijk aan een massa te bevestigen die op een weegschaal staat. De kracht die de ballon nu op de massa uitoefent, zorgt voor een afname van het gewicht van die massa en is een maat voor het volume van de ballon. Omdat ik dacht dat het leeuwendeel van warmte-uitwisseling tussen omgeving en helium plaatsvond wanneer het helium zich in de ballon bevond en dat het veronderstelde adiabatisch geëxpandeerde gas kouder was dan de omgeving, verwachtte ik dat de massa na verloop van tijd minder ging wegen.

Metingen van het gewicht hebben uitgewezen dat er een toename plaatsvond na verloop van tijd. Dat zou duiden op een gemiddelde temperatuur *afname*. In figuur 5.5 staan drie grafieken van uit metingen berekende opwaartse kracht versus de tijd. Bij iedere meting is er sprake van een afname van opwaartse kracht; hoewel het relatief weinig is, is het een goede indicatie. Vanwege het herhaaldelijk vaststellen van deze gewichtstoename of afname van opwaartse kracht, is een derde proef uitgevoerd naar de eigenlijke temperatuur van het gas dat de ballon betreft. Een opstelling om dit te meten is geïllustreerd in figuur 5.6. De thermometer is met een snoer verbonden aan zijn sensor die goed tussen het rubber en het ventiel is te plaatsen. De meting is slechts bedoeld als indicatie. De hypothese is na aanleiding van de krachtproef dat het gas de ballon betreft met een temperatuur hoger dan van de omgeving. Normaal gesproken worden ballonnen in een oven voorverwarmd om het latex een bepaalde elasticiteit te geven. Dit keer heb ik een ballon genomen uit de voorraad die op omgevingstemperatuur was, zodat een hoge temperatuur van het rubber uitgesloten was. Om er verder zeker van te zijn een indruk te krijgen van de gastemperatuur ten opzichte van de omgeving, is het vullen pas begonnen na alle betrokken materialen af te laten koelen van overgebrachte lichaamswarmte tijdens het prepareren van de opstelling. Na het openen van de gastoevoer was het duidelijk dat het helium warmer was dan zijn omgeving; het metaal van het vulsysteem werd warmer. De verklaring is dat het heliumgas door een leiding in de grond wordt getransporteerd en tijd genoeg heeft om warmte uit de grond op te nemen en in temperatuur te stijgen. De dag dat de meting plaatsvond, was tijdens het begin van de winter. De grond koelt minder snel af dan de

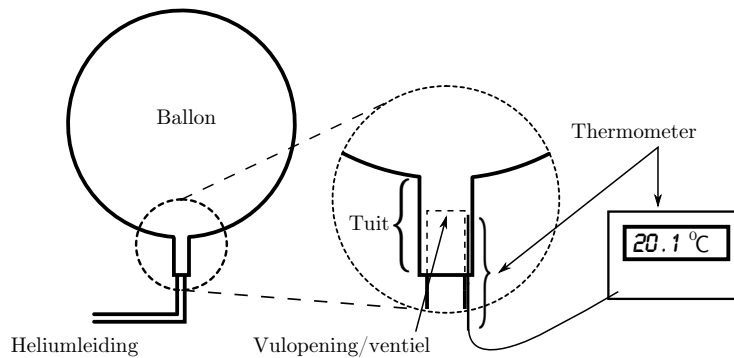


Figuur 5.5: Verloop opwaartse kracht systeem

lucht na warmere seizoenen. Conclusie van deze proeven is dat het helium dat de ballon binnenkomt, niet adiabatisch is geëxpandeerd in de leidingen. Of het exact de temperatuur van de grond ter plaatse van de leiding aanneemt, is nog niet bekend, maar als eerste aanname werkt het beter dan het oplossen van een adiabatisch verloop. Het gas dat de ballon betreedt is niet veel kouder dan de omgeving, dus verloopt het uitvlakken van temperatuur in het systeem sneller dan werd gedacht. Dit is gunstig voor eventuele systematische krachtmetingen, gezien zij vrijwel direct een bruikbare waarde verschaffen en niet onnodig veel tijd vergen van de meteoroloog die de oplating uitvoert. Ervaring heeft geleerd dat de kracht na zo'n vijf minuten constant blijft en dat de eindwaarde slechts in de orde van een tiende Newton afwijkt van de waarde juist na het vullen. Op een totale vrije lift van ongeveer vijftien Newton is dat een overkomelijk probleem ten opzichte van de onzekerheid bij het bepalen van de sleepfactor (zie *Kanttekening sleepfactor* in paragraaf 3.2.3 en sectie 5.3).

Een andere eigenschap van het systeem die men kan herleiden uit de krachtmeting, is de tijdsconstante. Vele natuurlijke veranderprocessen die afhankelijk zijn van een verschil in een onafhankelijke grootte, verlopen minder snel naarmate het verschil in die grootte kleiner wordt. Het verloop volgens zo'n exponentiële functie kent een tijdsconstante. Dat is de tijd waarin een afhankelijke grootte van een systeem circa 63% van haar eindwaarde heeft bereikt. Ook al is de waargenomen verandering van opwaartse kracht klein in de hierboven besproken proef, uit figuur 5.5 valt een ordegrootte van enkele honderden seconden af te leiden voor het koelen, dus het verliezen van warmte in de richting van de negatieve temperatuurgradiënt, van het heliumgas. Deze ordegrootte klopt met het model. In sectie 4.2 staan de volgende randcondities beschreven voor het systeem: een initiële temperatuur van driehonderd Kelvin en een omgeving van 280 Kelvin. Na een tijd van ongeveer acht- tot negenhonderd seconden bedraagt de afname ca. 63%, dat wil zeggen:

$$T_{na\ tijdsconstante} \approx 300 - 0,63 \cdot (300 - 280) \approx 287K \quad (5.1)$$



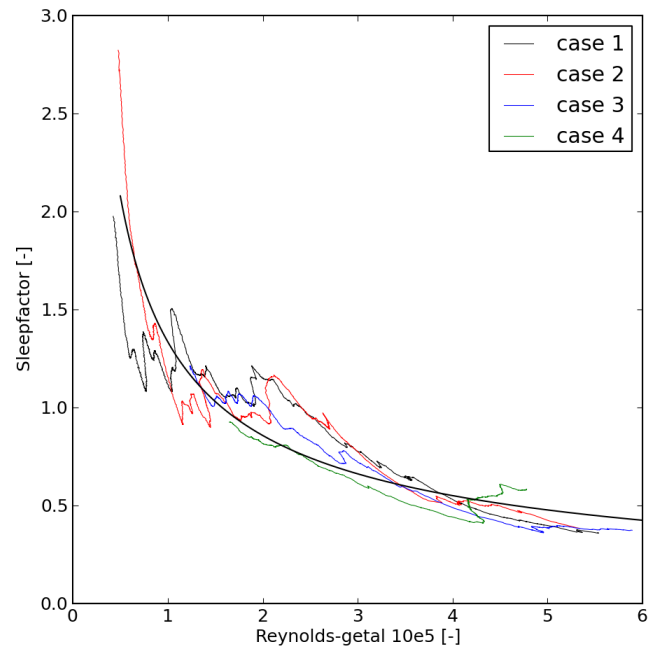
Figuur 5.6: Schematische weergave opstelling gastemperatuur

5.3 Analyse sleepfactor

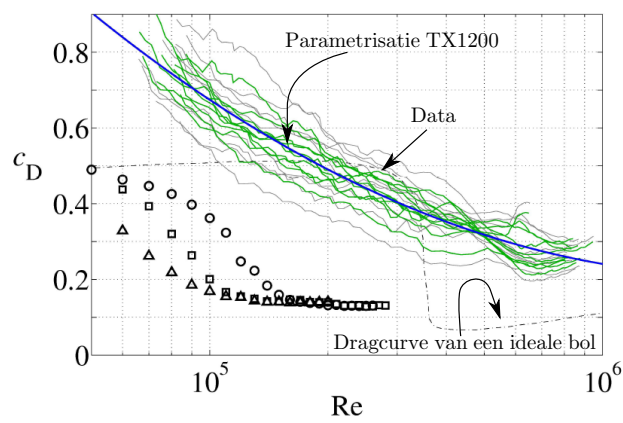
In hoofdstuk 3 onder het kopje ‘*Kanttekening sleepfactor*’ wordt vooruit gelopen op het feit dat de parametrisatie voor de sleepfactor van Gallice niet opgaat voor het type ballon dat het KNMI gebruikt. Van de vier ballonnen waarvan de opwaartse kracht is bepaald voor de vlucht en waarvan de beginstraal dus bekend is, heb ik de verticale snelheid als functie van de gemeten druk ingevoerd in formule (3.15) en bij elkaar in een diagram geplot. Het resultaat staat in figuur 5.7. Hoewel het slechts om vier curves gaat, is er een verband zichtbaar tussen de twee factoren voor het TX350-type ballon. De relatie die met behulp van exponentiële regressie is gevonden luidt:

$$C_d = 2094 \cdot Re^{-0,64} \quad (5.2)$$

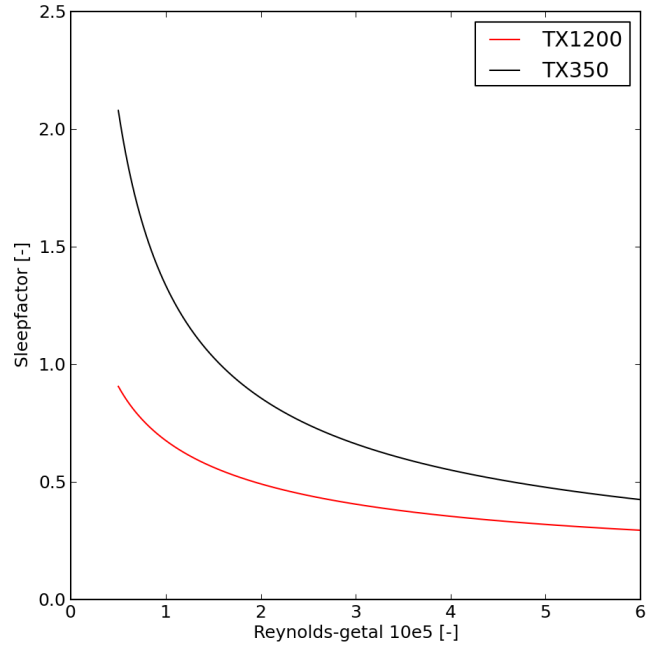
De correlatie coëfficiënt of *coëfficiënt van bepaling* r^2 van deze vergelijking voor de data is 0,855. In figuur 5.8 staat het diagram van Gallice, volgens dezelfde opzet. De groene lijnen zijn zijn gevonden data van tien vluchten. De blauwe lijn stelt de parametrisatie voor. Op de achtergrond is de sleepcurve van een ideale bol geprojecteerd. De symbolen onder die laatste curve zijn sleepfactoren van een ideale bol in een medium met verschillende intensiteit van turbulentie. Op het laatste wordt niet ingegaan. Figuur 5.9 vergelijkt de parametrisatie van de TX1200 ballon door Gallice met de TX350 zoals die tot nu toe bekend is.



Figuur 5.7: Grafieken $C_d(Re)$

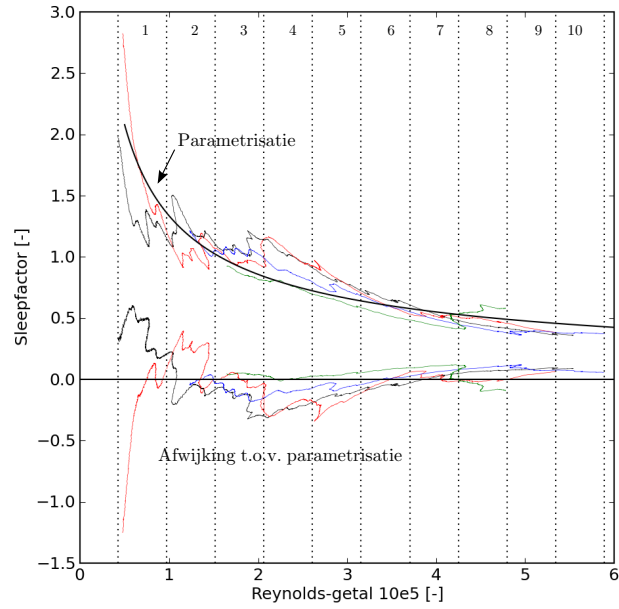


Figuur 5.8: $C_d(Re)$ door Gallice e.a.^[9]



Figuur 5.9: Verschil parametrisatie TX1200 en TX350

Om te bepalen hoe betrouwbaar de bovenstaande parametrisatie (5.2) is, zijn een aantal standaarddeviaties bepaald voor de data ten opzichte van de functie. Omdat de data op het oog niet over het gehele spectrum evenveel spreiding vertonen, is gekozen om het domein van Reynolds-getallen onder te verdelen in tien subdomeinen van gelijke breedte. Per domein geldt een andere standaarddeviatie. Figuur 5.10 laat de data zien en waar de domeinen zijn begrensd. Onder de originele data staan de grafieken die de afwijking van meetpunten ten opzichte van de parametrisatie uitzetten over het domein. Het is een belangrijke illustratie, omdat die aangeeft dat de onzekerheid in de nieuwe parametrisatie niet valt te vergelijken met eerder in het verslag gevonden onzekerheden. Tabel 5.1 geeft per subdomein de standaarddeviatie ten opzichte van de parametrisatie van de zich daarin bevindende data. Uit de tabel en de grafiek blijkt dat de sleepfactor bij hogere Reynolds-waarden beter door de parametrisatie bepaald worden dan bij lagere. Hoe dan ook ligt de prioriteit voor verbetering van de voorspelbaarheid van C_d bij het vinden van een parametrisatie met eenvoudiger te verifiëren data. Zie ook hoofdstuk 7 ‘Aanbevelingen’.



Figuur 5.10: Data met afwijkingen

Tabel 5.1: Standaarddeviatie per deeldomein

domeinnummer	standaarddeviatie
1	0,38
2	0,17
3	0,13
4	0,18
5	0,17
6	0,06
7	0,05
8	0,07
9	0,09
10	0,07

Hoofdstuk 6

Resultaten

In dit hoofdstuk worden enkele resultaten besproken. De resultaten zijn vaak de aanzet tot een nieuwe manier van benaderen van het probleem. Als er ongelooftwaardige waarden worden weergegeven, wordt gezocht naar de oorzaak en probeert men die op te lossen. Voor de voorbeelden in dit hoofdstuk is hoofdzakelijk gebruik gemaakt van data uit *case 1* (tabel 1.2). Grafieken van de verticale snelheid zijn gladgestreken volgens een lopend gemiddelde van honderd datapunten; vijftig *vorige* en vijftig *volgende* punten. Op deze manier is de ruis onderdrukt en zijn de grafieken overzichtelijk en beter te interpreteren. Om het effect duidelijk te maken, staan figuur 6.1 twee grafieken van dezelfde data, de ene *smoothed* en de andere niet.

Op basis van Gallice' werk werd de adiabatiese expansie aanvankelijk berekend uitgaande van een polytropisch proces waarbij de polytropische exponent gelijk is aan de verhouding tussen de warmtecapaciteit onder constante druk en die van een constant volume: C_p/C_v ; voor helium gelijk aan $\frac{5}{3}$. Figuur 6.2 laat een grafiek zien van de gemeten snelheid de berekende snelheid van de sonde. De berekende snelheid neemt met de hoogte steeds sterker af en stopt na ongeveer achttien kilometer. De oorzaak was een tijd lang onduidelijk, maar na wat testjes is bevonden dat de massa van het systeem volgens het model niet constant bleef. Men kwam hier achter door iedere rekenstap de dichtheden van alle schillen te vermenigvuldigen met hun volume en bij elkaar op te tellen. Met het implementeren van de adiabatiese expansie uitgaande van de ideale gaswet, dus volgens formules (3.18) en (3.19), was het probleem opgelost en bleef de massa volgens dezelfde test constant.

Toen bovenstaand probleem was opgelost, kon het model over de gehele hoogte een snelheidsprofiel berekenen. Dat laat figuur 6.3 zien. Omdat de parametrisatie voor de TX1200 ballon voor het model werd gebruikt, berekende het model een snelheid met de juiste ordegröte, maar met een systematische afwijking naar te hoge waarden. Men verwacht in een bereik van tientallen kilometers een fluctuatie van verticale wind tussen negatieve en positieve waarden, dus een berekende snelheid die zowel hoger als lager dan de meting kan zijn. Met deze resultaten werd bevestigd dat de parametrisatie van $C_d(Re)$ niet klopt voor het type ballon dat gebruikt wordt voor de meeste metingen: de TX350.

Met de nieuwe relatie tussen de sleepfactor en Reynolds, vergelijking (5.2) uit sectie 5.3, klopt de gemiddelde verticale snelheid beter met de gemeten snelheid ten opzichte van de grond. Dat laat de grafiek zien in figuur 6.4. De nieuwe parametrisatie geeft een reëler beeld en is dus een verbetering op het model. Het blijkt dat een goed bekende sleepfactor een erg belangrijke bijdrage levert aan het nauwkeurig bepalen van de verticale snelheid van het systeem.

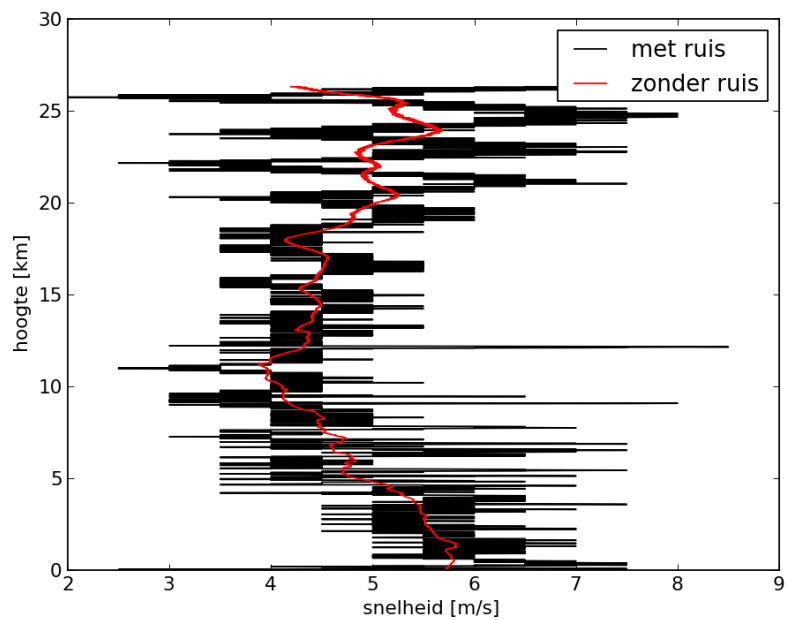
Een andere verwachting is dat verticale luchtverplaatsing een snelheid kent in de orde van tientallen centimeters per seconde. De definitie van de verticale windsnelheid, $v_{z,wind}$, is het verschil tussen de gemeten en de door het model berekende snelheid:

$$v_{z,wind} = v_{z,gemeten} - v_{z,berekend} \quad (6.1)$$

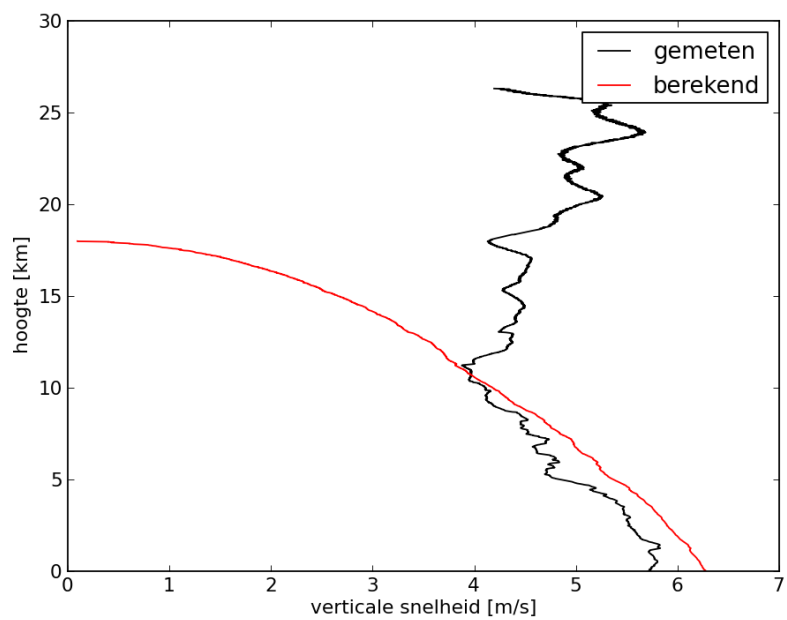
De grafiek in figuur 6.5 zet de tot nu toe berekenbare windsnelheid uit tegen de hoogte. Die is nu in de orde van enkele tientallen centimeters per seconden en wisselt van teken. In principe naar verwachting, maar de afstand waarover de wind in één richting waait, wordt nog als ongeloofwaardig beschouwd. Ook is de snelheid op de grond niet gelijk aan nul, terwijl men aan de grond geen grote verticale winden verwacht; het zou nergens heen kunnen gaan of vandaan kunnen komen. Bij de rest van de cases is het laatste ook het geval, zie figuren 6.6, 6.7 en 6.8. Dat de wind op grondniveau telkens een andere waarde heeft, duidt aan dat het niet gaat om een systematische rekenfout. Het model is blijkbaar onvolkomen en houdt nog niet met alle invloeden rekening. Ook de kans op een implementatie-fout van het script is nooit uit te sluiten.

Voor deze stageperiode is het implementeren van de sleepfactor volgens de parametrisatie voor het TX350-type ballon de laatste grote verbetering aan het model. In hoofdstuk 7 staan suggesties voor een eventuele vervolgstudie.

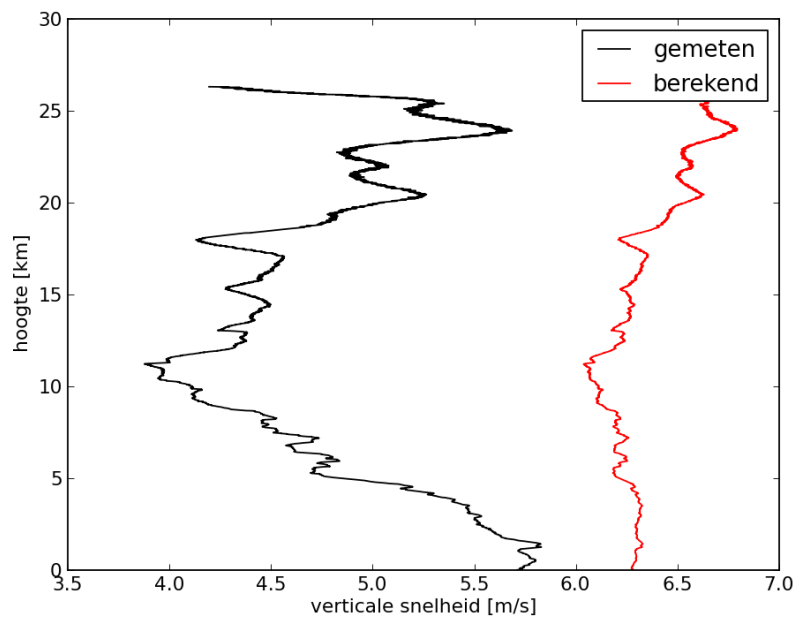
Een andere interessante gemodelleerde grootte is de kerntemperatuur van het systeem. Het model laat het centrum van de ballon afkoelen als gevolg van de expansie. Figuur 6.9 zet de temperatuur van de omgeving, ofwel de rand, en de kern uit tegen de hoogte. Of het in het midden zo koud wordt als het model berekent, is niet zeker. Het is een consequentie van de implementatie van de adiabatische expansie en het diffusieproces. Dat het wel een redelijke benadering is blijkt uit de berekende diameter van het systeem. Die hangt namelijk af van de temperatuurverdeling. De *bursting altitude* en *-diameter* van een aantal ballontypen is door Brock e.a.^[5] bepaald. Een overzicht vindt men in tabel 6.1. In figuur 6.10 is het verloop van de straal tegen de hoogte uitgezet en zijn de *burstwaarden* voor de ballontypen volgens die tabel aangegeven door kruisjes. De ‘driehonderdvijftig-grammer’ is niet vertegenwoordigd, de rode getallen en het rode kruisje komen voort uit een interpolatie van de data. Nu blijkt dat de waarde van de straal niet veel afwijkt van deze interpolatie.



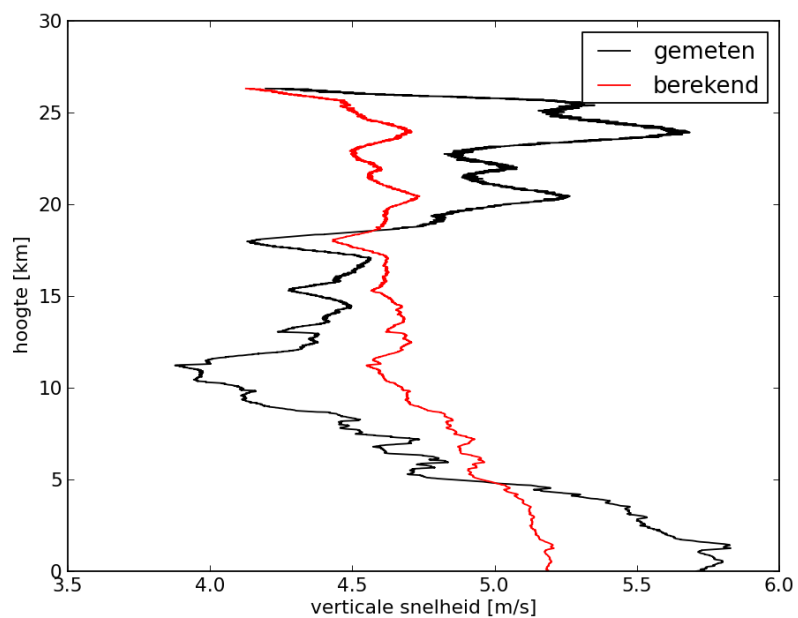
Figuur 6.1: Effect van ruisonderdrukking



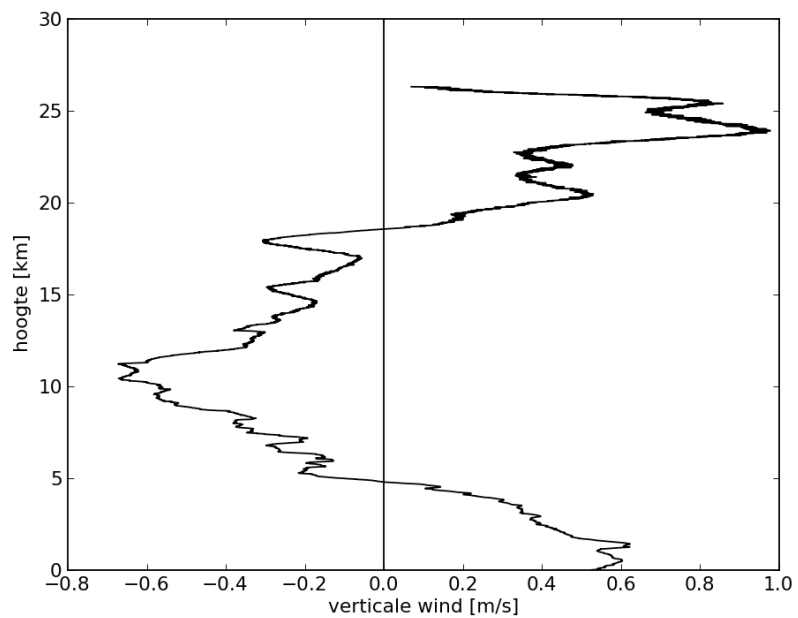
Figuur 6.2: Snelheden met polytropische expansie



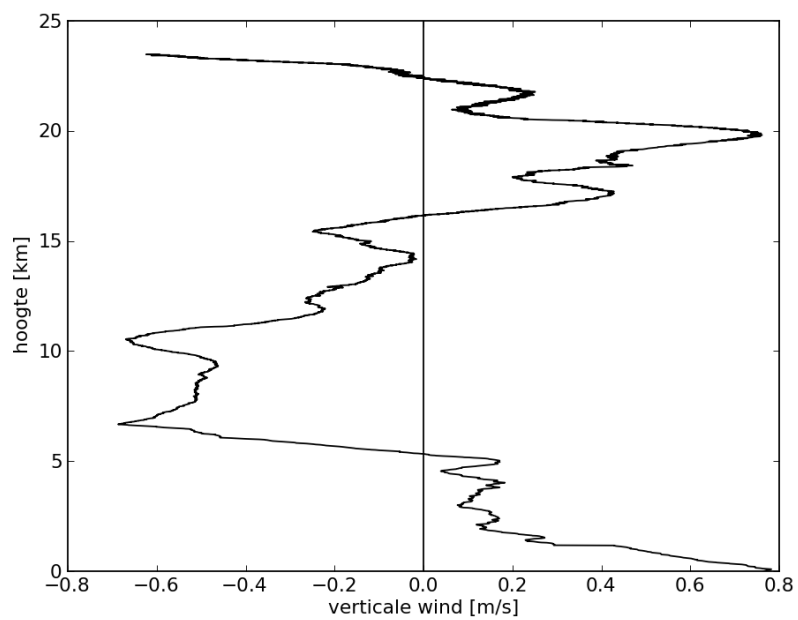
Figuur 6.3: Snelheden met parametrisatie TX1200



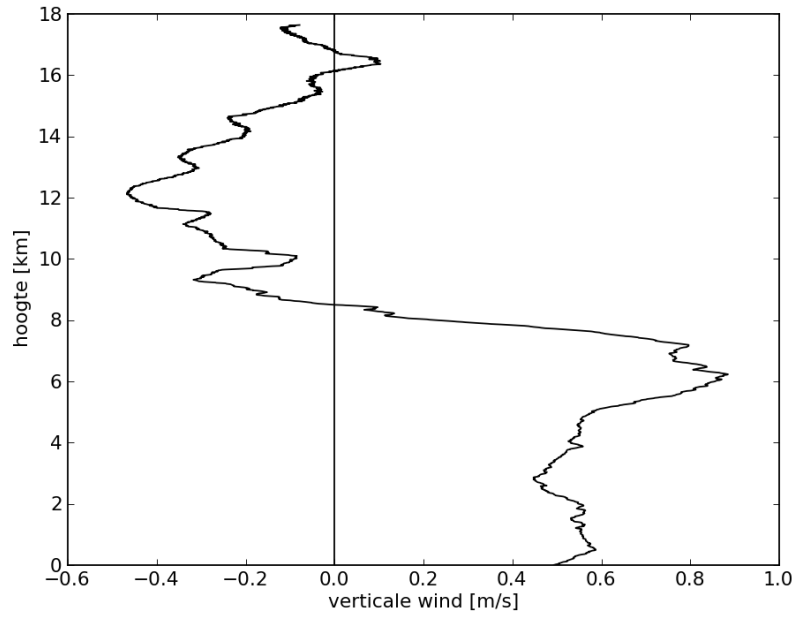
Figuur 6.4: Snelheden met parametrisatie TX350



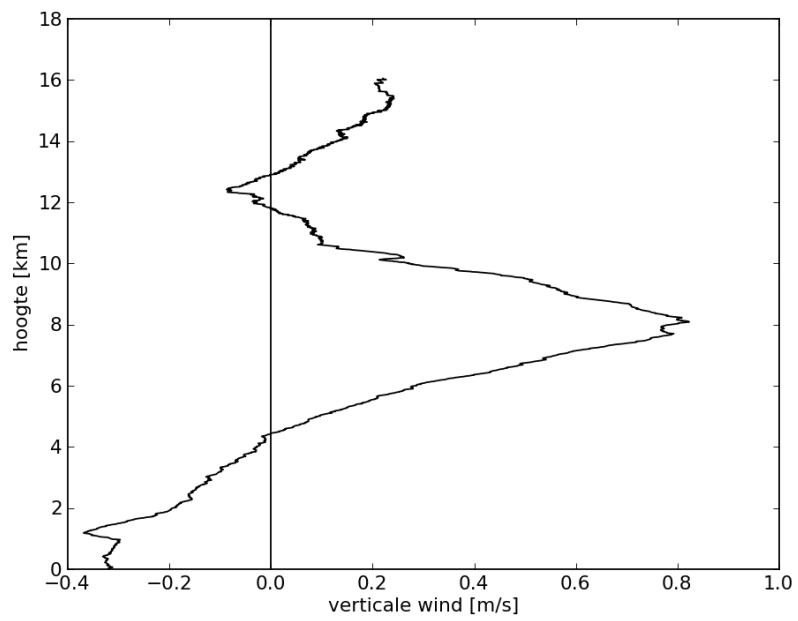
Figuur 6.5: Verticale wind als functie van de hoogte



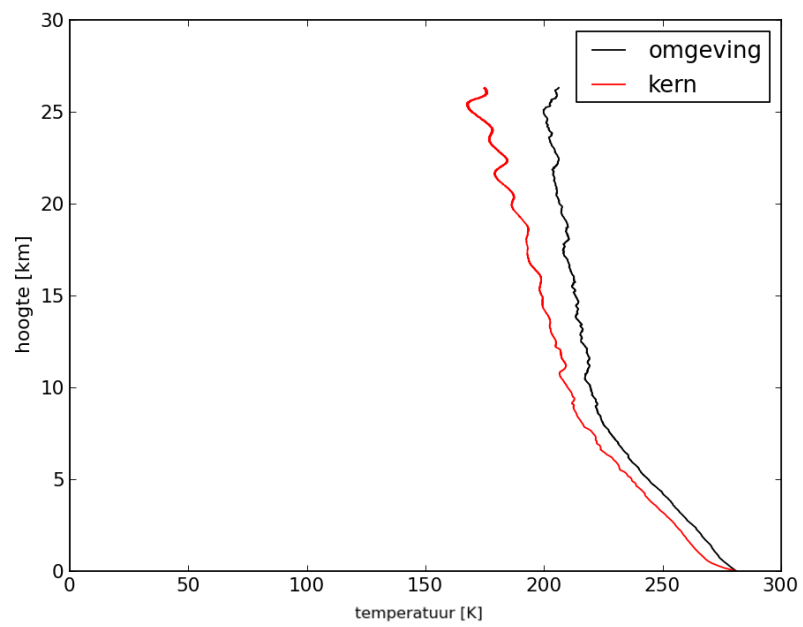
Figuur 6.6: Verticale wind voor case 2



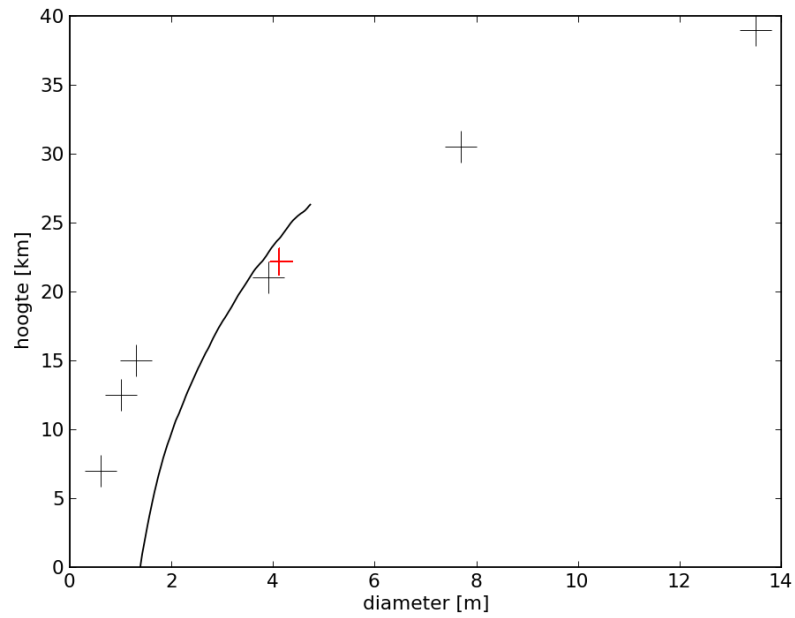
Figuur 6.7: Verticale wind voor case 3



Figuur 6.8: Verticale wind voor case 4



Figuur 6.9: De temperatuur van kern en omgeving tegen de hoogte



Figuur 6.10: Diameter-ontwikkeling en bekende burstwaarden

Tabel 6.1: Burstwaarden van enkele ballontypen

massa (gram)	hoogte (km)	diameter (m)
10	7,0	0,6
30	12,5	1,0
100	15,0	1,3
300	21,0	3,9
350	21,7	4,2
1000	30,5	7,7
3000	39,0	13,5

Hoofdstuk 7

Aanbevelingen

De consequentie van het uitvoeren van onderzoek is dat, hoe verder men vordert, hoe meer vragen er ontstaan. Dit project is gebaseerd op het oplossen van een stel moeilijkheden, de deelonderwerpen. Bij de analyse van elk onderwerp komen nieuwe problemen aan het licht. Gezien de beperkte tijd van de stage en de moeilijk te voorspellen voortgang van het onderzoek, zijn in dit hoofdstuk een aantal aanbevelingen gedaan voor een eventueel vervolg. Zij betreffen interpretaties en suggesties van belangrijke mogelijke verbeteringen. Iedere alinea behandelt een aanbeveling en geeft argumenten hoe en waarom die zal bijdragen aan een goede voortzetting.

Tijdens het project is getracht een verband te vinden tussen de sleepfactor en het Reynolds-getal. Dit verband is gebaseerd op de aanname dat de verticale wind tijdens sondemetingen nul was, dus de relatieve snelheid van de ballon ten opzichte van de lucht gelijk aan de snelheid ten opzichte van de grond. Hoe meer metingen op die wijze worden geanalyseerd, een hoe nauwkeuriger verband men kan vinden tussen de twee factoren. Het advies is om meer metingen uit te voeren naar de opwaartse kracht voor vertrek, zodat de startdiameter (karakteristieke lengte) van de ballon bekend is en door het model voor iedere volgende hoogte kan worden berekend. Het invullen van de verticale snelheid ten opzichte van de grond (dus afgeleid van de druk) en alle corresponderende grootheden in de formules (3.15) en (3.13) voor veel meer metingen dan de vier in dit verslag gepresenteerden, leidt tot een beter betrouwbaar verband met zekerheden die zich wellicht kunnen meten met die van andere berekende waarden in het model.

Een ander punt dat opvalt in de berekende windprofielen uit het model, is dat de verticale wind dicht bij de grond niet nul is. Wellicht is het verstandig om in de toekomst een aanname te maken die stelt dat verticale wind vlak boven het aardoppervlak uitgesloten is. Het kan leiden tot een extra term in de parametrisatie waardoor de sleepfactor met een grotere zekerheid kan worden bepaald.

Om referentiemetingen uit te voeren, is rustig weer wenselijk. Als het bijvoorbeeld mistig is, wordt de aanname dat verticale snelheid ten opzichte van de grond gelijk is aan die ten opzichte van de atmosfeer goed gerechtvaardigd.

Mistige weertypen worden namelijk alleen gehandhaafd in een vrijwel stilstaande atmosfeer. Door de luchtvochtigheid tijdens een ‘mistvlucht’ te analyseren, is ook bekend tot welke hoogte de mist reikt en dus tot welke hoogte de aanname geldt. Een analyse van de *drag* versus Reynolds voor dergelijke gevallen zal naar verwachting minder spreiding vertonen dan de datasets die zijn gebruikt voor dit project.

Een andere manier om het model te testen, is door het met bestaande verticale windmetingen te vergelijken. De metingen vanaf de grond hebben slechts een bereik van hooguit enkele honderden meters. Niettemin is het een goede mogelijkheid tot verificatie. Een van de systemen die verticale wind kunnen meten is het zogenaamde ‘Lidar’^[16]. Het is een suggestie waarop niet verder wordt ingegaan.

Betreffende de vorm en afmeting van het systeem. Het flexibele rubber waarvan de ballon is gemaakt, zorgt dat hij gevoelig is voor vervorming; de vorm heeft invloed op sleepfactor, dus de wrijving. In principe wordt dat al in rekening genomen door de dataregressie, beschreven in sectie 5.3. Een ander probleem van de rubberen wand is dat nog onbekend is wat de overdruk in het systeem doet op grotere hoogtes. Om te scheuren moet er in het materiaal een bepaalde spanning zijn en een gebrek aan rubberdeeltjes om die spanning te kunnen verdragen. Deze verschijnselen zijn beide verantwoordelijk voor het klappen van de ballon, maar welke weegt het zwaarst? Het zou interessant zijn om te weten wat de overdruk in het systeem doet als functie van de hoogte. Voor nu is nog aangenomen dat die verwaarloosbaar klein is, maar is dit correct tot een hoogte van vijftientig kilometer en wat is de invloed van de eventuele significante overdruk op de diameter van de ballon? Men zou de fysische eigenschappen van het rubber kunnen onderzoeken. Bijvoorbeeld de vervorming als functie van de spanning en de invloed van temperatuur en vochtigheid op de capaciteit om die spanning de doorstaan.

De aanname dat er geen convectie optreedt in het systeem gaat het beste op indien er geen zonnestralen op de ballon vallen. Invallende straling zorgt voor hogere temperatuur aan een zijde van het systeem. De berekening van het temperatuurprofiel ten gevolge van diffusie zoals beschreven in rekenstap II uit de theorie kan dan niet zonder meer worden toegepast. Het is dus verstandig om er voor te kiezen nachtmetingen te gebruiken als referentie-, maar ook als werkelijke meting. Wat de convectie door zonlicht voor effect heeft op het verloop van de vlucht, is nog een interessant punt van onderzoek.

Als men voor de bovenstaande zaken verbeteringen kan doorvoeren die de onzekerheid in de luchtweerstand voldoende weten te beperken, zijn er nog de volgende kwesties waarmee het model aangescherpt kan worden.

Naar de invloed van luchtvochtigheid op viscositeit en het gedrag van de lucht als ideaal gas is nog niet gekeken. De sonde meet de grootte, dus wellicht valt ook hier wat extra nauwkeurigheid te behalen.

Gezien het systeem een massa heeft en beweegt, bezit het een bepaalde traagheid. Deze traagheid heeft tot gevolg dat het systeem niet direct de ‘theoretische’ snelheid heeft bereikt, maar nog moet *versnellen* of *vertragen* na het toef of afnemen van wrijvingskrachten door verticale wind. Het is nog onbekend hoeveel invloed dit effect heeft op de resultaten.

De sonde hangt met een touw aan de ballon Tussen de plaats van het systeem en de plaats waar daadwerkelijk een meting wordt gedaan door de sonde, zit een afstand van circa twintig meter. Het systeem is dus constant onderhevig aan grootheden die de sonde een touwlengte 'later' meet, aannemende dat de grootheden niet significant veranderen in de tijd waarin die afstand wordt overbrugd. De lengte van het touw zou als een invoer voor het model kunnen dienen, zodat het rekening kan houden met de voorsprong van het systeem op de metingen.

Hoofdstuk 8

Duurzaamheid

Fontys Hogescholen hebben het handvest van de stichting ‘Duurzaamheid HBO’ ondertekent. Dat houdt in dat hun opleidingen door de stichting worden beoordeeld op duurzaam ondernemen. Leerlingen worden hier door middel van maatregelen door de opleiding, maar ook en vooral vakinhoudelijk, bewust van gemaakt. Een opdracht vanuit de opleiding is om het onderwerp in relatie met de stage te bespreken, daarom volgt een bespreking van de algemene houding van het KNMI tegenover duurzaamheid en welke aspecten een rol spelen bij de opdracht in het bijzonder.

Bij het KNMI is een zogenaamde ‘milieucommissie’ actief. Deze commissie coördineert besluitvorming met betrekking tot energieconsumptie en -besparing. In 2003 heeft het directie-team van het instituut een intentieverklaring ondertekend ‘waarin staat vaststelt dat het KNMI maatschappelijke verantwoordelijkheid neemt ten aanzien van milieuzorg’^[10]. Men wil maatregelen treffen om milieubelasting te verminderen, te beheersen dan wel te stabiliseren. In dit hoofdstuk worden een aantal belangrijke doelstellingen behandeld die door de commissie zijn opgesteld. Drie grote speerpunten in hun doelen zijn duurzaam inkopen, energie en vervoer & mobiliteit. De commissie wil tevens doelstellingen naleven die zijn opgesteld in de KADO, de *Kabinetsbrede Aanpak Duurzame Ontwikkeling*. Deze luiden:

- Jaarlijks 2% energiebesparing met 25% reductie in 2020 ten opzichte van de verschijningsdatum van het plan tijdens de kabinetsperiode Balkenende IV¹.
- In 2012 is de energievoorziening klimaatneutraal.
- In 2010 wordt over de gehele linie duurzaam ingekocht.
- Ondernemen vanuit het *Cradle to Cradle*-perspectief.
- Aansporen van mensen in alle sectoren en beroepsvelden tot een maatschappelijke dialoog over duurzaamheid om algemeen bewustzijn te bevorderen.

¹Exacte data vallen niet te achterhalen, er is überhaupt weinig informatie beschikbaar betreffende de KADO

- De catering van overheden is per 2010 voor minimaal 40% biologisch.

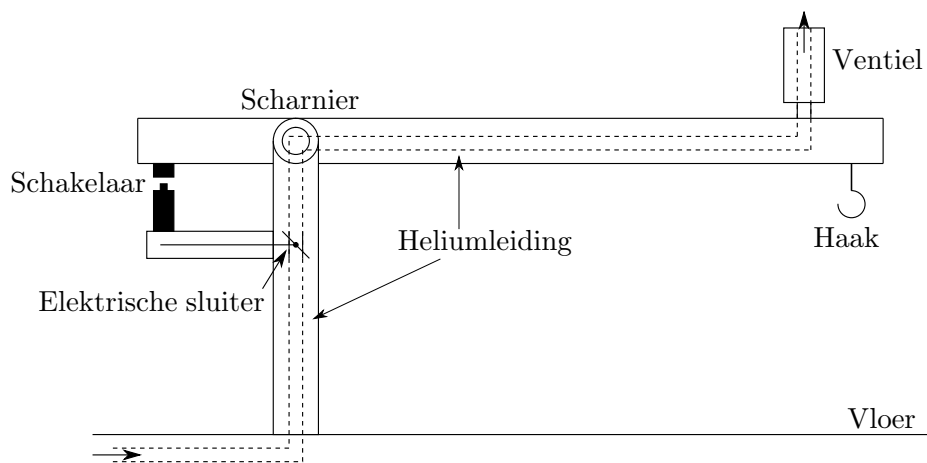
De beweging van de KADO is sinds het aantreden van kabinet Rutte in een sluimertoestand geraakt. Desondanks worden de bovenstaande stellingen toch als leidraad gebruikt in de volgende beschouwing.

Interpretatie doelstellingen Over hoe het KNMI aan deze stellingen bijdraagt, moet haar milieucommissie beslissen. Ten tijde van schrijven dateren de meest recent gepubliceerde behaalde doeleinden uit 2010. Deze paragraaf zet mijn interpretatie van belangrijkste vorderingen omtrent duurzaamheid uiteen.

- Het KNMI heeft eind 2011 de nieuwe Bull-supercomputer in gebruik genomen. De computerzaal wordt gekoeld middels koude-/warmteopslag en heeft ondanks een grotere reken capaciteit een lagere netto energieconsumptie dan het voormalige systeem.
- Men is bezig met een beproeving van zowel bewegingssensoren als ledverlichting. Zodra door middel van het experiment is aangetoond dat deze nieuwe systemen geen storende invloed hebben op werknemers, zal zij in het gehele gebouw worden toegepast. De ledverlichting zal in de bestaande armaturen passen, zodat vervangingskosten laag blijven.
- Het aantal dienstkilometers wordt momenteel al teruggedrongen door het gebruik van een *videoconference* ruimte waar werknemers via het wereldwijde net visueel kunnen communiceren met projectparticipanten.
- Het water in de ketel van de centrale verwarming is in 2010 op twee graden Celcius lager afgesteld. Wat de besparing op gas is, moest ten tijde van opstellen van het referentierapport^[10] nog worden onderzocht.
- Het KNMI is ook bezig om de computers/werkstations aan elkaar te koppelen, zodat onbenutte capaciteit kan worden verdeeld over computers in de rest van het instituut. 's Nachts en in de weekenden staan zij namelijk constant aan. De energie die anders wordt weggegooid, zal door middel van dit 'grid' nuttig kunnen worden gebruikt.

Het KNMI doet onderzoek naar andere nieuwe manieren om klimaat-neutraal ondernemen te realiseren. De volgende paragraaf bespreekt mijn stageproject inzake duurzaamheid.

Weerballonnen Betreffende de grondstoffen en werkwijze om de sondemeting mogelijk te maken. Waarvan de ballonnen precies zijn gemaakt, laat de fabrikant niet weten, maar het hoofdbestanddeel is het door de natuur afbreekbare latex. Aangezien er een grote kans is dat de ballon in onbewoond gebied belandt, is dit een gunstig gegeven. Per meting gaat ook om en nabij twintig meter *sisal* touw mee en een plastic parachute. Het touw zou eventueel dierlijk leven ter plaatse van de landing tijdelijk onnodig kunnen verstoren, maar is ook biologisch afbreekbaar. De behuizing van de meetinstrumenten bestaat ook uit een natuurlijk afbreekbare kunststof. De batterij van het meetinstrument is een door water geactiveerde energiebron. Zelfs deze is deels door de natuur afbreekbaar, maar bevat nog wel wat lichte chemicaliën. Het doel van de parachute is



Figuur 8.1: Schematische weergave vulsysteem

dat de ballon en bijgaande apparatuur niet met levensgevaarlijke snelheid naar beneden vallen. Veiligheid weegt in dit geval op tegen het eventueel vervuilen van het milieu.

Het KNMI verzoekt de vinder van huidige sonde-apparatuur niet meer om het terug te zenden, maar wel om het indien mogelijk in te leveren als klein-chemisch afval. Het enige grote nadeel van de ballonnen is dat hun fabrikant in Japan is gevestigd en dat de bestellingen de halve wereld over moeten reizen voor gebruik.

Het vullen van de ballon gebeurt met een speciale voorziening die zorgt dat iedere ballon ongeveer dezelfde stijgsnelheid heeft. Figuur 8.1 geeft de opstelling schematisch weer. De voorziening bestaat uit een gasleiding die tevens fungeert als een hefboom van een soort balans. Aan het ene einde van de hefboom zit het ventiel, aan het andere een arm boven een elektrisch sluitmechanisme. Als de ballon de gewenste lift heeft bereikt drukt de arm op de afsluiter. Aan de haak kan men naar wens extra gewicht hangen zodat de ballon meer lift uitoefent voor het vullen stopt. Van deze laatste functie maakt men gebruik bij extreme weersomstandigheden. Door dit systeem valt het heliumverbruik beter te controleren dan voorheen toen men het vullen meer op gevoel deed. Ervaringsdeskundige Richard Rothe kan beamen dat het heliumverbruik sinds ingebruikname van het apparaat flink is afgenomen. Een gunstige ontwikkeling voor zowel onderzoek vanwege een bepaalde reproduceerbaarheid in lift als voor verbruik van het kostbare helium.

Referenties

1. Çengel, Yunus A., Turner, Robert H., Cimbala, Robert H.,
'Fundamentals of Thermal-Fluid Sciences'
(2008, McGraw-Hill, Verenigde Staten)
2. Poling, Bruce E., Prausnitz, John M., O'Connell, John P.,
'The Properties Of Gases And Liquids'
(2001, McGraw-Hill, Verenigde Staten)
3. Edwards, Junius D., Pickering, S. F.,
'Permeability of rubber to gases'
(1920, Government Printing Office, Washington, Washington D.C.)
4. Incropera, Dewitt, Bergman & Lavine,
'Fundamentals of Heat and Mass Transfer'
(2007, Wiley)
5. Brock, Fred V., Richardson, Scott J.,
'Meteorological measurement systems'
(2001, Oxford University Press, Inc., New York, New York)
6. Weast, R. C.,
'CRC Handbook of Chemistry and Physics', 50^{ste} editie
(1969, The Chemical Rubber Company)
7. Ph.D. Simpson, D.G., *'Gauss's law for gravity'*
(6 December 2006, Department of Physical Sciences and Engineering,
Prince Georges Community College)
8. Ph.D. Bar-Meir, G., *'Basics of Fluid Mechanics'*
(21 December 2011, Genick Bar-Meir, Chicago)
9. Gallice, A., *'Modeling the ascent of sounding balloons: derivation of the
vertical air motion'* Versie 20 Oktober, 2011,
<http://www.atmos-meas-tech.net/4/2235/2011/amt-4-2235-2011.html>
geraadpleegd op 21 Oktober, 2011
10. Uiling, G., Kok, K., Siegmund, P., A, R. van der,
'Jaarverslag 2010 Milieucommissie'
(1 september 2011, KNMI)
11. *'High-pressure physics'*,
McGraw-Hill Dictionary of Scientific and Technical Terms
(2003, The McGraw-Hill Companies)

<http://www.answers.com/topic/high-pressure-physics>
geraadpleegd op 22 November 2011

12. *'High-pressure physics'*,
McGraw-Hill Encyclopedia of Science and Technology,
(2005, The McGraw-Hill Companies)
<http://www.answers.com/topic/high-pressure-physics>
geraadpleegd op 22 November 2011
13. Wikipedia, *'Viscosity'* Versie 19 December, 2011,
<http://en.wikipedia.org/w/index.php?oldid=422550206>
geraadpleegd op 30 december 2011
14. Actueel Hoogtebestand Nederland
<http://www.ahn.nl/postcodetool>
geraadpleegd op 25 januari 2012
15. Physical properties of the Earth
http://www.kayelaby.npl.co.uk/general_physics/2.7/2.7_4.html
geraadpleegd op 26 januari 2012
16. Weer Algemeen, 'Licht op wolken'
<http://www.knmi.nl/cms/content/83483/>
(16 augustus 2010, KNMI)

Lijst van tabellen

1.1	Tabel met constanten	9
1.2	Vluchten	9
1.3	Meetapparatuur	9
5.1	Standaarddeviatie per deeldomein	47
6.1	Burstwaarden van enkele ballontypen	55

Lijst van figuren

1.1	Profiel van temperatuur en luchtvochtigheid	6
1.2	Radiosonde	8
1.3	Locatie stations	8
3.1	Schematisch krachtendiagram van systeem in rust	15
3.2	Schematisch stroomdiagram	16
3.3	Ruimtelijke schets grootheden	17
3.4	Indruk van de gradiënt in het systeem	22
3.5	Schematische weergave warmtestroom door dV	23
3.6	Weergave van de bolverdeling voor correctie	28
3.7	Schematisch overzicht rekenstappen	29
4.1	Temperatuurgradiënten van het systeem op elf tijdstippen	32
4.2	Straalverdeling schematisch	33
4.3	Tijdverdeling schematisch	33
4.4	Grafiek numeriek effect diffusie	38
4.5	Grafiek numeriek effect correctie	38
5.1	Schematische weergave opstelling drukmeter	40
5.2	Aanvankelijke hypothese	40
5.3	Verloop overdruk ballon	41
5.4	Schematische weergave opstelling opwaartse kracht	42
5.5	Verloop opwaartse kracht systeem	43

5.6	Schematische weergave opstelling gastemperatuur	44
5.7	Grafieken $C_d(Re)$	45
5.8	$C_d(Re)$ door Gallice e.a. ^[9]	45
5.9	Vershil parametrisatie TX1200 en TX350	46
5.10	Data met afwijkingen	47
6.1	Effect van ruisonderdrukking	50
6.2	Snelheden met polytropische expansie	50
6.3	Snelheden met parametrisatie TX1200	51
6.4	Snelheden met parametrisatie TX350	51
6.5	Verticale wind als functie van de hoogte	52
6.6	Verticale wind voor case 2	52
6.7	Verticale wind voor case 3	53
6.8	Verticale wind voor case 4	53
6.9	De temperatuur van kern en omgeving tegen de hoogte	54
6.10	Diameter-ontwikkeling en bekende burstwaarden	55
8.1	Schematische weergave vulsysteem	61

Einde document