

**KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT**

WETENSCHAPPELIJK RAPPORT

SCIENTIFIC REPORT

W.R. 84 - 1

Anne F. de Baas

Interne gravitatiegolven in een stabiel
gelaagde atmosfeer



De Bilt, 1984

Publikatienummer: K.N.M.I. W.R. 84-1 (F.M.)

Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut,
Fysisch Meteorologisch Onderzoek,
Postbus 201,
3730 AE De Bilt,
Nederland.

U.D.C.: 551.511.32

Voorwoord

In het kader van mijn studie Geofysica, afstudeerrichting Meteorologie, aan de Rijksuniversiteit te Utrecht heb ik dit onderzoek uitgevoerd op het KNMI onder leiding van mijn begeleider Ad Driedonks.

Inhoud

Abstract	4
Samenvatting	6
I. Inleiding	8
II. Theorie	10
II.1. Lineaire storingstheorie	10
II.2. De Boussinesq-benaderingen van de bewegingsvergelijkingen voor een gelaagde stroming	11
II.2.1. Algemeen	11
II.2.2. De basisvergelijkingen	11
II.2.3. De referentietoestand en kleine afwijkingen ervan.	12
II.2.4. Benaderingen van de vergelijkingen	13
II.2.4.a. Behoud van impuls	13
II.2.4.b. Behoud van massa	15
II.2.4.c. De energievergelijking	16
II.2.4.d. Gaswet	17
II.3. De gelineariseerde vergelijkingen	18
II.3.1 De gelineariseerde Boussinesq-vergelijkingen	18
II.3.2. De betekenis van de Brunt-Vaisala frekwentie N .	19
II.4. De Taylor-Goldstein vergelijking	21
II.4.1. Fysische beschouwing van een zwaartekrachtsgolf in een atmosfeer in rust ($U_0 = 0$)	21
II.4.2. Vergelijkingen voor een atmosfeer met $U_0(z)$ en $N(z)$	26
II.5. Stabiliteit van verstoringen	30
II.5.1. Groeisnelheid	30
II.5.2. Noodzakelijke voorwaarden voor instabiliteit	32
II.5.3. Halve-cirkel-theorema van Howard	33
II.5.4. Kelvin-Helmholtz instabiliteit bij richtingsdraaiing	36
II.5.5. Randvoorwaarden	40
II.6. Spectra	43

III.	Metingen	44
III.1.	Metingen te Cabauw	44
III.2.	Selectie van de metingen	44
IV.	Methodes	47
IV.1.	Oplosmethode voor de Taylor-Goldstein vergelijking	47
IV.1.1.	De achtergrondgegevens en de projectie van het windprofiel	47
IV.1.2.	De range golfgetallen k	48
IV.1.3.	Het gebied in het (c_r, c_i) -vlak	49
IV.1.4.	De zoekstrategie	49
IV.2.	Spectrale methode	51
V.	Resultaten	52
V.1.	Resultaten van de stabiliteitsanalyse	52
V.2.	Resultaten van de spectrale methode	59
V.3.	Verklaring van de variantieprofielen	60
VI.	Conclusies	66
VII.	Aanbevelingen voor verder onderzoek	68
VIII.	Literatuur	69
	Appendix	72
A.I	Beschrijving van het stabiliteitsanalyse programma STABAN	73
A.II	Programma Listing van STABAN + voorbeeld in- en output	80

Abstract

In models for distribution of airpollution we use the variances of wind and temperature measurements. In a stably stratified boundary layer the measured variances are partly caused by waves and partly by turbulence.

These two mechanisms have very different properties with respect to transport of contaminants. Waves do not transport contaminants, whereas turbulence is an effective mixing mechanism.

It is important for the correct calculation of distribution, that in the distribution model only the part of the measured variances that is caused by turbulence, is used.

This research aims at distinguishing the contributions to the variances due to waves and turbulence in a stably stratified atmospheric boundary layer, where waves and turbulence are present at the same time.

With a stability analysis of the background current we calculate what waves could be generated in the atmosphere. The stability analysis is based on linear theory and leads to a boundary value problem for the Taylor-Goldstein equation. The unstable solutions of this problem are disturbances of the background current, which, if they are present in the atmosphere, could grow until they become waves. Through non-linear interaction turbulence too could grow from these disturbances. We won't take this into account in this research.

With the calculated spectra of the wind- and temperaturefluctuations we can see if and which of these linear waves are present in reality. This is done with the aid of spectral properties of linear waves, which differ clearly from the spectral properties of turbulence.

We also calculate the vertical amplitude structure of the solutions of the stability analysis. This vertical structure is compared to the measured variance profiles.

This research, consisting of a stability analysis of the background current in combination with a research of the measured fluctuation spectra, is applied to one hour of measurements in the stably stratified night boundary layer.

The stability analysis of the measured mean wind- and temperature

profiles results in typical Kelvin-Helmholtz instabilities. These solutions have frequencies that form a continuous interval.

From the measured fluctuation spectra of this hour we can conclude that all these solutions were present in the real atmosphere. The spectra showed an energy rich band, which meet the requirements of linear waves.

Above all the Kelvin-Helmholtz instabilities have a vertical amplitude structure that explains the measured variance profiles.

We come to the conclusion that in the stably stratified atmosphere we can distinguish between waves and turbulence by solving the Taylor-Goldstein equation for measured wind- and temperature profiles. With our mathematical, numerical method we find Kelvin-Helmholtz instabilities, which we find again in the calculated fluctuations spectra and which explain the calculated variance profiles.

A critical note is that this only holds when Kelvin-Helmholtz waves dominate turbulence and other kinds of waves.

Samenvatting

In modellen voor de verspreiding van luchtverontreiniging wordt gerekend met de varianties van de wind- en temperatuurmetingen.

In een stabiel gelaagde grenslaag worden de gemeten varianties voor een deel veroorzaakt door golven en voor een deel door turbulentie. Deze twee mechanismes hebben zeer verschillende eigenschappen ten aanzien van transport van contaminanten. Golven transporteren geen contaminanten, daarentegen is turbulentie een effectief mengmechanisme.

Het is dan ook van belang voor een juiste berekening van verspreiding, dat in het verspreidingsmodel alleen dat deel van de gemeten varianties gebruikt wordt, dat veroorzaakt wordt door turbulentie.

Dit onderzoek richt zich erop de bijdragen aan de variantie van golven resp. turbulentie van elkaar te scheiden in een stabiel gelaagde atmosferische grenslaag, waarin golven en turbulentie gelijktijdig voorkomen.

M.b.v. een stabiliteitsanalyse van de achtergrondstroming wordt berekend welke golven er in de atmosfeer zouden kunnen ontstaan. De stabiliteitsanalyse is gebaseerd op lineaire theorie en leidt tot een randwaardeprobleem voor de Taylor-Goldstein vergelijking. De instabiele oplossingen van dit probleem zijn verstoringen op de achtergrondstroming die, als ze voorkomen in de atmosfeer, uit kunnen groeien tot golven. Door niet-lineaire interactie kan ook turbulentie ontstaan uit deze verstoringen. Dit wordt in dit onderzoek echter buiten beschouwing gelaten.

M.b.v. de berekende spectra van de wind- en temperatuurfluctuaties wordt gekeken of en welke van deze lineaire golven in werkelijkheid voorkomen. Dit wordt gedaan op basis van de spectrale eigenschappen van lineaire golven, die duidelijk verschillen van de spectrale eigenschappen van turbulentie.

Van de oplossingen van de stabiliteitsanalyse wordt ook de verticale amplitudestructuur berekend. Deze verticale structuur wordt vergeleken met de gemeten variantieprofielen.

Dit onderzoek m.b.v. een stabiliteitsanalyse van de achtergrond-

stroming in combinatie met een onderzoek van de gemeten fluctuatiespectra, is toegepast op één uur metingen in de stabiel gelaagde nachtelijke grenslaag.

De stabiliteitsanalyse van de gemeten gemiddelde wind- en temperatuurprofielen leverde typische Kelvin-Helmholtz instabiliteiten. Deze oplossingen hebben frequenties, die een continu interval vormen.

Uit de gemeten fluctuatiespectra van dit uur bleek dat al deze oplossingen ook werkelijk voorkwamen in de atmosfeer. De spectra vertoonden een energierijke band, die aan de eisen voor lineaire golven voldeed.

Bovendien hebben de Kelvin-Helmholtz instabiliteiten een verticale amplitudestructuur, die de gemeten variantieprofielen verklaart.

We komen tot de conclusie, dat we in de stabiel gelaagde atmosfeer golven van turbulentie kunnen onderscheiden door de Taylor-Goldstein vergelijking voor gemeten wind- en temperatuurprofielen op te lossen. M.b.v. onze mathematische, numerieke methode vinden we Kelvin-Helmholtz instabiliteiten, die we in de berekende fluctuatiespectra terugvinden en die ook de gemeten variantieprofielen verklaren.

Kritische aantekening hierbij is dat dit alleen kan als Kelvin-Helmholtz golven domineren over eventueel ook aanwezige turbulentie en over andere soorten golven.

I. Inleiding

De verticale structuur van de stabiel gelaagde atmosferische grenslaag, bijv. gedurende een heldere nacht boven land, wordt gedomineerd door afkoeling aan het oppervlak veroorzaakt door uitstraling. De resulterende stabiele temperatuurgradient onderdrukt verticale uitwisseling en turbulentie. Alleen aan de grond is een dunne laag ($\pm 100-200$ m), waar de verticale windschering groot genoeg is om deze stabiele stratificatie te overwinnen en turbulentie te doen ontstaan. Op grond van dit beeld zou de turbulente kinetische energie (i.h.b. de variantie van de verticale snelheidsfluctuaties) en ook de varianties van de temperatuurfluctuaties moeten afnemen met de hoogte.

Waarnemingen bevestigen deze verwachting echter niet altijd. Metingen tonen aan, dat ondanks een stabiele gelaagdheid, de varianties niet altijd monotoon afnemen met de hoogte en zelfs toenemen. Dit wordt veroorzaakt door zwaartekrachtsgolven, die gemakkelijk opgewekt worden in de stabiele atmosfeer en die een bijdrage leveren aan de varianties.

Dat in een stabiele atmosfeer gelijktijdig golven en turbulentie voorkomen is belangrijk, omdat de dynamische eigenschappen van beide erg verschillend zijn. Turbulentie heeft de eigenschap dat het contaminanten effectief mengt, terwijl lineaire neutrale golven geen transport verzorgen.

Dit is van praktisch belang in verspreidingsmodellen. Schatting van verspreiding uit metingen van de varianties zou verspreiding in deze gevallen sterk overschatten.

De vraag is nu of we m.b.v. mathematische analyses kunnen uitrekenen welke golven aanwezig zijn.

In de stabiel gelaagde atmosfeer kunnen verschillende soorten golven voorkomen. Er kunnen golven worden opgewekt door duidelijke verstoringen in de stroming. Voorbeelden hiervan zijn golven opgewekt door bergen en golven, die in de stabiele lucht boven een convectieve menglaag ontstaan, doordat opstijgende luchtbellens aan de bovenkant van de menglaag in de inversie doordringen.

Anderzijds kunnen er in een stabiele atmosfeer ook door shear golven worden opgewekt (bv. Kelvin-Helmholtz golven) waarvan er een aantal, afhankelijk van de achtergrondstroming, onstabiel kunnen zijn,

d.w.z. de amplitude groeit in de tijd.

In dit onderzoek beperken we ons tot gevallen met een shearlaag in de atmosfeer. De hierdoor veroorzaakte Kelvin-Helmholtz instabiliteiten kunnen berekend worden door een stabiliteitsanalyse van de achtergrondstroming. De onstabiele oplossingen van dit probleem groeien via niet-lineaire processen boven de achtergrondstroming uit tot neutrale golven. Deze neutrale golven veroorzaken geen transport.

We bestuderen een geval van een statisch stabiele nachtelijke grenslaag, waarvan de temperatuurmetingen een duidelijk golfpatroon vertoonden en de verticale variantie toenam met de hoogte. We passen de stabiliteitsanalyse toe op dit uur metingen en kijken of de oplossingen, de Kelvin-Helmholtz golven, deze verschijnselen kunnen verklaren. Verder kijken we of we deze golven ook meten als energierijke pieken in de spectra waarvan de fase, coherentie, co- en kwadratuur spectra aan de eisen voldoen, die aan lineaire neutrale golven gesteld moeten worden. En we onderzoeken of de verticale structuur van de oplossingen het afwijkend vertikaal variantieprofiel van dit uur metingen kan verklaren.

II. Theorie

II.1. Lineaire storingstheorie

Om zwaartekrachtsgolven in een stabiel gelaagde atmosfeer te beschrijven worden vijf basisvergelijkingen voor de druk, dichtheid, en de drie snelheidscomponenten gebruikt en de gaswet voor het verband tussen temperatuur, druk, en dichtheid. Hierin verwaarlozen we al direct het effect van de draaiing van de aarde en van viscositeit en geleiding.

Allereerst zullen we uit de basisvergelijkingen via systematische benadering de zgn. Boussinesq-vergelijkingen afleiden voor kleine afwijkingen in de thermodynamica van een referentietoestand.

Vervolgens worden de vergelijkingen gelineariseerd, ook voor kleine verstoringen in de snelheid. Uit deze gelineariseerde vergelijkingen leiden we de Taylor-Goldstein vergelijking af voor de verticale perturbatiesnelheid. Vervolgens bekijken we wat voor voorwaarden er nodig zijn om initieel kleine verstoringen te doen groeien in de tijd. Als deze onstabiele oplossingen aanwezig zijn zullen ze als eerste uit de "achtergrondruis" zichtbaar worden en waargenomen moeten kunnen worden.

Als de amplitude van verstoringen niet meer infinitesimaal klein is maar tot een eindige waarde gegroeid is, is de lineaire theorie niet meer toepasbaar. Om na te gaan wat er dan met verstoringen gebeurt, moeten niet-lineaire interacties meegenomen worden. Deze bespreken we hier niet.

II.2. De Boussinesq-benaderingen van de bewegingsvergelijkingen voor een gelaagde stroming

II.2.1. Algemeen

De veranderingen t.g.v. stroming van een vloeistof (in dit geval een ideaal gas) worden beschreven door:

- a. De wet van behoud van impuls voor 3 snelheidscomponenten
- b. De wet van behoud van massa
- c. De thermodynamische energie-vergelijking

De toestand van de vloeistof wordt volledig beschreven door de 3 snelheidscomponenten, en door 2 thermodynamische toestandgrootheden, bijv. dichtheid en temperatuur, of dichtheid en druk. De relaties tussen verschillende toestandsvariabelen wordt beschreven door toestandsvergelijkingen. Voor een ideaal gas zijn dit bv.

- | | |
|----------------------|---------------------------|
| - de gaswet | $p = \rho RT$ |
| - de entropie | $S = c_p \ln T - R \ln p$ |
| - de interne energie | $E = c_v T$ |
| - de enthalpie | $H = c_p T$ |

II.2.2. De basisvergelijkingen

We gebruiken de bewegingsvergelijkingen met de volgende aannamen vooraf (ter vereenvoudiging):

- het effect van de draaiïng van de aarde is verwaarloosd (we beschouwen frekwenties veel kleiner dan f (Coriolis parameter)).
- het effect van moleculaire viscositeit en geleiding is verwaarloosd.
- de stroming geschiedt adiabatisch en reversibel, zie $dS = 0$ met S de entropie.

Dan luiden de bewegingsvergelijkingen in de gebruikelijke notaties:

- a. De impulsvergelijkingen

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \tilde{\nabla} p + \tilde{g}$$

$$(\tilde{g} = 0, 0, -g)$$

b. Behoud van massa

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

c. Energievergelijking

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = T \frac{dS}{dt} = 0$$

d. Toestandvergelijking

$$p = \rho RT$$

II.2.3. De referentietoestand en kleine afwijkingen hiervan

We gaan nu kijken of we deze vergelijkingen wat kunnen vereenvoudigen als we alleen kleine afwijkingen in ρ , p , en T toelaten van een referentiebestand. We beschouwen nu een referentietoestand met $p = p_0(z)$, $\rho = \rho_0(z)$ en $T = T_0(z)$ die stationair is met een snelheidsveld $\mathbf{v}_0 = (U_0(z), V_0(z), 0)$. Voor deze referentietoestand volgt dan direkt:

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -g\rho_0 ; \nabla_{\mathbf{H}} p_0 = \nabla_{\mathbf{H}} \rho_0 = \nabla_{\mathbf{H}} T_0 = 0 ; p_0 = \rho_0 RT_0$$

De referentietoestand is verder willekeurig (onder bovenstaande restricties). Hij hoeft dus niet overeen te komen met een "neutraal" gelaagde, homentropische stroming ($S_0 = \text{constant}$). Omdat de viscositeit verwaarloosd is kan ook $\mathbf{v}_0(z)$ willekeurig zijn.

We spreken van een stabiel gelaagde stroming (of een niet homentropische stroming) als overal $\frac{\partial S_0}{\partial z} > 0$.

We nemen nu aan dat door de actuele stroming in de vloeistof slechts kleine afwijkingen in de thermodynamische toestandsgrößen ten opzichte van de referentietoestand optreden:

$$\left\| \frac{p-p_0}{p_0} \right\| = \left\| \frac{p'}{p_0} \right\| \ll 1 ; \left\| \frac{\rho'}{\rho_0} \right\| \ll 1 ; \left\| \frac{T'}{T_0} \right\| \ll 1$$

De voorwaarden, die aan de stroming moeten worden opgelegd om deze afwijkingen inderdaad klein te doen zijn, zullen in het vervolg nader worden besproken. Als hieraan voldaan is kunnen de bewegingsvergelijkingen aanzienlijk worden vereenvoudigd.

II.2.4. Benaderingen van de vergelijkingen

We zullen nu benaderde vormen van de bewegingsvergelijking afleiden voor kleine afwijkingen van de referentietoestand, en de voorwaarden waaronder deze geldig zijn. Daartoe moeten we een aantal schaalgrootheden definiëren om de orde van grootte van verschillende termen af te kunnen schatten. Hiertoe definiëren we:

grootheid	schaal
ρ'	$\hat{\rho}'$
\tilde{v}_H	\hat{v}_H
w	\hat{w}
$\partial\rho'/\partial z$	$\hat{\rho}'/L_{\rho'}$
$\partial w/\partial z$	\hat{w}/L_w
$\partial p'/\partial z$	$\hat{p}'/L_{p'}$
$\nabla_{\tilde{H}} \cdot \tilde{v}_H$	\hat{v}_H/L_H
$\nabla_{\tilde{H}} \rho'$	$\hat{\rho}'/L_H$
$\partial/\partial t$	ω (frekwentie)
$\frac{1}{\rho_0} \partial\rho_0/\partial z$	$H_{\rho_0}^{-1} = \ \frac{1}{\rho_0} \partial\rho_0/\partial z\ $
$\frac{1}{\rho_0} \partial p_0/\partial z$	$H_{p_0}^{-1} = \ \frac{1}{\rho_0} \partial p_0/\partial z\ $

II.2.4a. Behoud van impuls

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{v}}{dt} &= g - \frac{1}{\rho_0(1+\rho'/\rho_0)} \nabla(p_0 + p') \approx g - \frac{1}{\rho_0} (1-\rho'/\rho_0) \nabla(p_0 + p') \\ &= g \rho'/\rho_0 - \frac{1}{\rho_0} \nabla p'. \end{aligned}$$

Dus de benaderde vorm van de impulsvergelijking is:

$$\frac{dy}{dt} = g \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p'$$

Uit schaling van de vergelijking voor u_H volgt direkt:

$$p^1 \sim \rho_0 \hat{v}_H \omega L_H + \rho_0 \hat{v}_H^2$$

Om dus de drukfluctuatie t.g.v. horizontale beweging relatief klein te houden moet gelden:

$$\frac{\rho_0}{p_0} \hat{v}_H^2 \sim \frac{\hat{v}_H^2}{c_s^2} \ll 1$$

$$\text{en } \frac{\rho_0}{p_0} \hat{v}_H \omega L_H = \frac{\hat{v}_H \omega L_H}{c_s} \ll 1,$$

met $c_s^2 = \gamma RT_0$ de geluidsnelheid.

De bewegingsvergelijking voor w levert als orde van grootte schattingen:

$$\omega \hat{w} + \frac{\hat{v}_H \hat{w}}{L_H} + \frac{\hat{w}^2}{L_w} \sim g \frac{\hat{\rho}'}{\rho_0} + \frac{\hat{p}'}{\rho_0 L_{p'}}$$

Hierover valt niet zonder meer iets verder te zeggen. We willen echter zwaartekrachtsgolven (en convectie) beschrijven. We nemen voorlopig aan dat alle termen van dezelfde orde van grootte zijn.

Dus:

$$\omega \hat{w} \sim g \hat{\rho}' / \rho_0$$

$$\text{en } g \hat{\rho}' / \rho_0 \sim \hat{p}' / \rho_0 L_{p'} \sim \frac{\hat{p}'}{p_0} \cdot \frac{c_s^2}{L_{p'}}$$

(Dutton en Fichtl, 1969).

Uit deze schattingen volgt nog:

$$\hat{p}' / p_0 \sim (g / c_s^2) L_{p'}, \quad \hat{\rho}' / \rho_0 \sim (L_{p'} / H_{p_0}) \hat{\rho}' / \rho_0$$

$$\hat{p}' / p_0 \sim \hat{v}_H^2 / c_s^2$$

$$\hat{p}' / p_0 \sim \frac{\omega^2 L_H^2}{c_s^2}$$

II.2.4b. Behoud van massa

De volledige vergelijking luidt:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_o}{dt} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \underline{v}_H \cdot \underline{\nabla}_H \rho' + w \frac{\partial \rho'}{\partial z} &= - \rho_o (1 + \rho'/\rho_o) \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \\ &\approx - \rho_o \underline{\nabla}_H \cdot \underline{v}_H - \rho_o \partial w / \partial z. \end{aligned}$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6)

Schaling van de verschillende termen (bedenk $d\rho_o/dt = w \partial \rho_o / \partial z$) en deling door de laatste levert:

$$\begin{aligned} \frac{L_w}{H \rho_o} \frac{\hat{\rho}'}{\rho_o \hat{w}} + \frac{\omega L_w}{\hat{w} L_{p'} \rho_o} \frac{\hat{\rho}'}{\rho_o} + \frac{L_w \hat{\rho}'}{L_{p'} \rho_o} + \frac{v_H L_w}{w L_H} &= 1 \\ \sim \frac{\omega^2 L_w^2}{g} & \end{aligned}$$

We kunnen nu de wet van behoud van massa sterk vereenvoudigen als we een aantal condities opleggen. We onderscheiden daarin:

- "Ondiepe convectie"

Dit is de situatie waarin alle termen (1)-(4) verwaarloosd worden. Dat mag als:

$$L_w \ll H \rho_o$$

$$\omega^2 L_w / g \ll 1$$

$$\hat{v}_H / \hat{w} \lesssim L_H / L_w$$

$$L_w \lesssim L_{p'}$$

Dan houden we over: $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$.

- "Diepe convectie"

Dit is de situatie waarin term (1) nog een rol blijft spelen, d.w.z. er wordt toegelaten dat de verticale schaal van de beweging

van dezelfde orde is als de schaalhoogte van de referentietoestand.

Dus:

$$L_w \sim H \frac{H}{\rho_0}$$

$$\omega^2 L_w/g \ll 1$$

$$\frac{v_H}{\omega} \lesssim L_H/L_w$$

$$L_w \sim L_\rho$$

Dan houden we over: $\nabla(\rho_0 \tilde{v}) = 0$

II.2.4c. De energievergelijking

Deze luidt (voor adiabatische en reversibele stromingsprocessen):

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = 0$$

ofwel (via gaswet)

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{c_s^2} \frac{dp}{dt} \quad (\text{met } c_s^2 = \gamma RT \text{ en } \gamma = c_p/c_v)$$

Dus: (via substitutie $\rho = \rho_0(1+\rho'/\rho_0)$ en $p = p_0(1+p'/p_0)$)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{c_v}{c_p} \frac{p'}{\rho_0} \right) + w \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{g}{c_s^2} \right) \approx 0$$

We onderscheiden weer:

- "Ondiepe convectie"

Dan mag p'/p_0 verwaarloosd worden t.o.v. ρ'/ρ_0 , en dus houden we over:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right) + w \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{g}{c_s^2} \right) = 0,$$

of in termen van temperatuur:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{T'}{T_o} \right) + \frac{w}{T_o} \left(- \frac{\partial T_o}{\partial z} + \frac{g}{c_p} \right) = 0$$

- "Diepe convectie"

Dan mag p'/p_o niet verwaarloosd worden en houden we:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho'}{\rho_o} - \frac{c_v}{c_p} \frac{p'}{p_o} \right) + w \left(\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial z} + \frac{g}{c_s} \right) = 0,$$

of in termen van temperatuur:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{T'}{T_o} - \frac{R}{c_p} \frac{p'}{p_o} \right) + \frac{w}{T_o} \left(\frac{\partial T_o}{\partial z} + \frac{g}{c_p} \right) = 0,$$

of, met een potentiële temperatuur $\theta = T(p_s/p)^{R/c_p}$, waarin p_s een referentiedruk:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\theta'}{\theta_o} \right) + \frac{w}{\theta_o} \frac{\partial \theta_o}{\partial z} = 0$$

II.2.4d. De gaswet

Deze luidt: $p = \rho RT$

$$\text{Dus } p_o (1+p'/p_o) = \rho_o (1+\rho'/\rho_o) R T_o (1+T'/T_o)$$

$$1+p'/p_o = (1+\rho'/\rho_o)(1+T'/T_o)$$

$$1+p'/p_o \approx \rho'/\rho_o + T'/T_o$$

- "ondiepe convectie": $p'/p_o \ll \rho'/\rho_o \rightarrow \rho'/\rho_o + T'/T_o \approx 0$

- "diepe convectie": $\rightarrow p'/p_o = \rho'/\rho_o + T'/T_o$

II.3. De gelineariseerde vergelijkingen

II.3.1. De gelineariseerde Boussinesq-vergelijkingen

We gaan nu vanuit de in II.2. besproken Boussinesq-vergelijkingen voor ondiepe convectie. Dus:

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = g \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0} \tilde{\nabla} p'$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{v} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right) + w \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{g}{c_s^2} \right) = 0$$

Behalve dat we kleine verstoringen in de thermodynamische variabelen hebben genomen, nemen we nu ook verstoringen in de snelheden die klein zijn. We beschouwen verstoringen in de snelheden van de achtergrondstroming die infinitesimaal klein zijn zodat producten van verstoringen verwaarloosd mogen worden. We lineariseren de vergelijkingen in deze verstoringen, $\tilde{v} = \tilde{v}_0 + \tilde{v}'$, met \tilde{v} infinitesimaal klein, ($\tilde{v}' = (u', v', w')$) met $w' = w$ vanwege het feit dat de achtergrondstroming horizontaal is. We krijgen dan de gelineariseerde Boussinesq-vergelijkingen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{v}' + (\tilde{v}_0 \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{v}' + w \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial z} = g \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0} \tilde{\nabla} p'$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{v}' = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right) + (\tilde{v}_0 \cdot \tilde{\nabla}) \frac{\rho'}{\rho_0} + w \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{g}{c_s^2} \right) = 0$$

De operator $D/Dt = \partial/\partial t + \tilde{v}_0 \cdot \tilde{\nabla}$ wordt de Stokes-operator genoemd. Dit is de tijdsverandering waargenomen door iemand die beweegt met de achtergrondsnelheid.

We definiëren nu de Brunt-Vaisala frekwentie N als

$$N^2 = -g \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{g}{c_s^2} \right) = \frac{g}{T_0} \left(\frac{\partial T_0}{\partial z} + \frac{g}{c_p} \right) \approx \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z}$$

Met deze definitie en een iets andere schrijfwijze van de energie-vergelijking krijgen we dan als stelsel vergelijkingen om verder mee te werken:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{v}' + (\tilde{v}_0 \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{v}' + w \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial z} = g \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0} \tilde{\nabla} p' \quad (1)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{v}' = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\tilde{v}_0 \cdot \tilde{\nabla}) \rho' - \rho_0 w N^2 / g = 0 \quad (3)$$

en de gaswet:

$$\rho' / \rho_0 = - T' / T_0 \quad (4)$$

II.3.2. De betekenis van de Brunt-Vaisala frekwentie

De betekenis van deze frekwentie is als volgt te illustreren. In een statisch stabiele atmosfeer met een constante gradiënt in de potentiële temperatuur gaat een pakketje lucht op $z = h$ een afstandje η omhoog. Hierbij koelt het pakketje zelf adiabatisch af, zodat het kouder is dan de omgeving $d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial z} \eta$. Het pakketje ondervindt een afremmende buoyancy kracht $g \Delta\theta/\theta$.

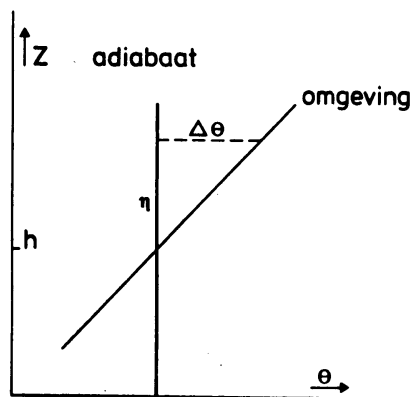


Fig. 1. temperatuurprofielen

Er geldt:

$$\frac{dw}{dt} = -g \frac{\Delta\theta}{\theta} = -\frac{g}{\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} \eta$$

$$w = \frac{d\eta}{dt} \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{g}{\theta} \frac{d\theta}{dz} \eta = 0$$

Deze vergelijking heeft als oplossing $\eta = \eta_0 \sin Nt$, d.w.z. een oscillatie met frekwentie N om de hoogte $z = h$.

In oscillaties waar de beweging van het pakketje onder een hoek α met de vertikaal plaatsvindt is de frekwentie $\sigma = N \cos \alpha$.

II.4 Taylor-Goldstein vergelijking

We kunnen de afgeleide perturbatievergelijkingen toepassen op twee verschillende situaties:

- een atmosfeer zonder gemiddelde wind, toe te spitsen op een bijzonder geval met constante Brunt-Vaisala frekwentie.
- een atmosfeer met een in de hoogte variërende achtergrondwind met willekeurige Brunt-Vaisala frekwentie.

II.4.1. Fysische beschouwing van een zwaartekrachtsgolf in een atmosfeer in rust ($\underline{u}_0 = \underline{0}$).

We laten verder de perturbatie indices weg. Wanneer de gemiddelde wind $\underline{v}_0 = \underline{0}$ en we veronderstellen dat de golf zich in het xz-vlak voortplant gaan de vergelijkingen over in

$$\text{x-impuls} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (6)$$

$$\text{z-impuls} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g \frac{\rho}{\rho_0} \quad (7)$$

$$\text{thermodyn. vgl.} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho_0 w \frac{N^2}{g} = 0 \quad (8)$$

$$\text{continuïteits vgl.} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

$$\text{gaswet} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T}{T_0} \quad (10)$$

Uit deze vergelijkingen kan als volgt een "golf"vergelijking afgeleid worden

$$\text{differentieren van vgl. 7 naar } t \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$$\text{samen met vgl. (8)} \quad \frac{\partial p}{\partial t} = + \frac{N^2}{g} w \rho_0$$

$$\text{geeft dit} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + N^2 w = 0 \quad (11)$$

differentiëren van vgl. (6) naar x en vgl (9) naar t levert

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} \quad (12)$$

De vergelijkingen (11) en (12) zijn lineair en homogeen in de variabelen w en p zodat een oplossing is

$w, p = (w_z, p_z) \exp i(kx - \sigma t)$ waarin k het golfgetal is en σ de hoekfrequentie.

Substitutie van deze oplossing in (11) levert

$$-\sigma^2 w_z - \frac{i\sigma}{\rho_0} \frac{\partial p_z}{\partial z} + N^2 w_z = 0 \quad (13)$$

Substitutie in (12) en differentiëren naar z levert

$$\frac{\partial p_z}{\partial z} = \frac{i\sigma\rho_0}{k^2} \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} + \frac{i\sigma}{k^2} \frac{\partial\rho_0}{\partial z} \frac{\partial w_z}{\partial z} \quad (14)$$

Samen leveren deze vergelijkingen

$$\frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial\rho_0}{\partial z} \frac{\partial w_z}{\partial z} + \frac{k^2}{\sigma^2} (N^2 - \sigma^2) w_z = 0 \quad (15)$$

Deze vgl. (15) is een golfvergelijking voor de amplitude van de verticale snelheid.

We passen deze vgl. toe op het geval N^2 constant. w_z heeft dan de vorm $w_z = \text{Re}\{W \exp(imz)\}$ met $1/m$ de verticale lengteschaal van de golf.

Vgl. (15) gaat over in

$$-m^2 + \frac{m}{\rho_0} \frac{\partial\rho_0}{\partial z} + \frac{k^2}{\sigma^2} (N^2 - \sigma^2) = 0$$

Wanneer nu de verticale lengteschaal van de golf veel kleiner is dan de lengteschaal van de atmosfeer H_{ρ_0} dan geldt $mH_{\rho_0} \gg 1$ en de vgl. gaat over in

$$\frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} + \frac{k^2}{\sigma^2} (N^2 - \sigma^2) w_z = 0 \quad (16)$$

met als oplossing

$$w_z = \text{Re}\{W \exp i(kx+mz-\sigma t)\} \quad (17)$$

$$\text{en } m^2 = \frac{k^2}{\sigma^2} (N^2 - \sigma^2) \quad (18)$$

Fysiche beschouwing van vlakke buoyancy golf

We spitsen dit voorbeeld nog verder toe door te veronderstellen dat $\sigma^2 < N^2$ zodat m reëel is en de oplossing (12) een vlakke golf in x, z en t voorstelt. Dit zijn vlakke golven met vlakken van constante fase, die voldoen aan $kx + mz = \text{constant}$. Deze vlakken staan loodrecht op de golfvektor \tilde{k} . Vgl. (13) kan ook in de volgende vorm geschreven worden

$$\sigma^2 = \frac{k^2 N^2}{k^2 + m^2} = N^2 \cos^2 \theta \quad (18b)$$

met θ de hoek met de vertikaal waaronder de golf zich voortplant zodat $\cos \theta = \|\tilde{k}\| / (k^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$.

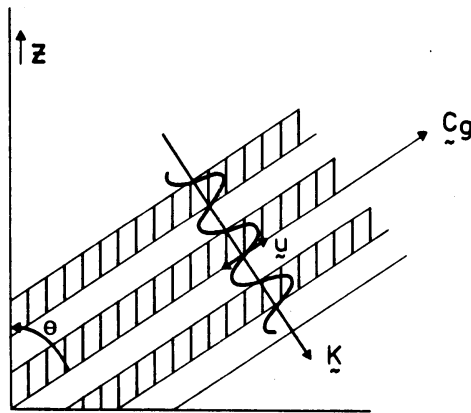


Fig. 2. Voortplanting van een golf.

Wanneer we de golfoplossing voor u en w

$u, w = \text{Re}\{(U, W) \exp i(kx + mz - \sigma t)\}$ substitueren in de continuïteitsvergelijking krijgen we de vgl. $ik U + im W = 0$, de golfvektor \tilde{k} staat loodrecht op de deeltjessnelheid \tilde{u} in dit geval (zie fig. 2). Dit betekent dat de beweging van de deeltjes parallel aan de constante fasevlakken is.

Er geldt ook

$$U = -\frac{m}{k} W, \text{ zodat } \underline{U} = \left(-\frac{m}{k}, 0, 1\right) W \exp i(kx+mz-\sigma t) \quad (19)$$

Uit de impulsvergelijking en het feit dat de golfvector \underline{k} de richting heeft van de vector ∇p , blijkt dat de vector $\partial \underline{u} / \partial t$ in één vlak ligt met \underline{k} en de vertikaal (de richting van \underline{g}). De deeltjesbeweging is op en neer in de richting van de grootste helling in zo'n constant fasevlak.

Uit de x-impulsvergelijking volgt de amplitude P van de golfoplossing voor de druk $p = \text{Re}\{P \exp i(kx+mz-\sigma t)\}$ nl.

$$p = -\frac{\rho_0 \sigma_m}{k^2} W \exp i(kx+mz-\sigma t) \quad (20)$$

Indat p en \underline{u} in fase zijn is de energieflex ongelijk nul $\underline{I} = p \underline{u}$. De verrassende conclusie is dat in buoyancy golven de energieflex gericht is langs de vlakken van constante fase.

De groepssnelheid \underline{c}_g is gedefinieerd als $(c_g)_j = \partial \sigma / \partial k_j$ zodat \underline{c}_g de gradiënt van σ in de golfgetalruimte is. \underline{c}_g staat loodrecht op \underline{k} omdat de component van \underline{c}_g in de richting van \underline{k} de verandering van σ is, als de grootte maar niet de richting van \underline{k} verandert. Uit vgl. (18) volgt dat deze nul is. Uit berekening volgt ook

$$\underline{c}_g = \frac{Nm}{k^2 + m^2} \frac{(m, 0, -k)}{(k^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (21)$$

en deze vector staat inderdaad loodrecht op \underline{k} en in dezelfde richting als de deeltjessnelheid \underline{u} (vgl. (19)).

De golfvector (k, 0, m) bevindt zich op posities bewegend met een snelheid \underline{c}_g , wat tot gevolg heeft dat de energie in de golf beweegt met de snelheid. De golfenergieflux $\underline{I} = p \underline{c}_g$ van een sinusoidale buoyancy-golf ligt in dezelfde richting als de groepssnelheid, d.w.z. loodrecht op de golfgetalvector en in één vlak met deze en de vertikaal.

Het feit dat de groepssnelheid van buoyancygolven parallel aan de vlakken van constante fase is, betekent dat buoyancygolven gegenereerd door een plaatselijke bron nooit het bekende uiterlijk van concentrische cirkels hebben. In plaats daarvan strekken de toppen en andere vlakken van constante fase zich radieel uit vanaf de bron. Voor een bron met een

frekwentie $\sigma < N$ staan deze vlakken onder een hoek $\theta = \arccos\left(\frac{\sigma}{N}\right)$ met de vertikaal, zodat alle golfenergie gegenereerd door de bron terug te vinden is in een dubbele kegel met tophoek θ . De vlakken van constante fase bewegen loodrecht op zichzelf met fasesnelheid $c = \sigma\lambda/2\pi = (N\lambda/2\pi) \cos \theta$, waarin de golflengte λ gedefinieerd is door $\lambda = 2\pi/k$, waarbij c , k en λ langs dezelfde as gemeten.

Vertikale oscillaties ($\theta = 0$, $m = 0$) met de Brunt-Vaisala frekwentie ($\sigma = N$) hebben een groepssnelheid gelijk aan nul (zie vgl. 21) en kunnen dus geen energie transporteren.

Langzame veranderingen ($\sigma \ll N$) planten zich onder een hoek $\theta = \arccos(\sigma/N) \approx 90^\circ$ voort d.w.z. bijna horizontaal. De energie plant zich met de horizontaal gerichte groepssnelheid voort. De grootte van de groepssnelheid

$$\|c_g\| = \frac{N\|m\|}{k^2 + m^2} = \frac{N\lambda}{2\pi} \sin\theta.$$

Dat de groepssnelheid evenredig is met de golflengte λ houdt in dat golven van een bron, die gedurende een korte tijd verschillende golflengtes λ in een bepaalde richting θ (met een frekwentie $\sigma = N\cos\theta$) genereert, zich uitspreiden. Na een tijd t heeft elke golf een afstand $\frac{N\lambda t}{2\pi} \sin\theta$ afgelegd. Naburige toppen hebben een afstand λ zodat de toppen zich inderdaad radieel uitstrekken onder een onderlinge hoek $\alpha = 2\pi/Nt\sin\theta$ en deze hoek neemt af in de tijd.

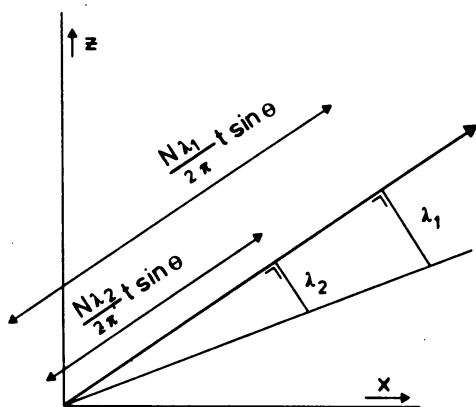


Fig. 3. Het ontstaan van het radiële beeld van buoyancygolven uitgezonden door een puntbron.

II.4.2. Atmosfeer met $\underline{v}_0(z)$ en $N(z)$

Nu bekijken we een geval met een gemiddelde wind in de x-richting die met de hoogte varieert

$$\underline{v}_0 = (u_0(z), 0, 0)$$

We voeren in de Stokes operator $d/dt = -i\sigma + i u_0 k = -i\omega$. ω is de frekwentie, waargenomen door iemand, die beweegt met de nulde orde snelheid.

De vergelijkingen uit II.2 gaan over in

$$\text{impuls vgl.} \quad \rho_0 (\partial u / \partial t + \underline{v}_0 \cdot \nabla u + w \partial u_0 / \partial z) + \partial p / \partial x = 0 \quad (22)$$

$$\rho_0 (\partial w / \partial t + \underline{v}_0 \cdot \nabla w) + \partial p / \partial z + \rho g = 0 \quad (23)$$

$$\text{cont. vgl.} \quad \nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (24)$$

$$\text{therm. dyn. vgl.} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{v}_0 \cdot \nabla \rho - \rho_0 w N^2 / g = 0 \quad (25)$$

Omdat de Brunt-Vaisala frekwentie van z afhangt kunnen we niet meer een vlakke golf in de z -richting veronderstellen, maar we schrijven elke grootheid a als

$$a = \text{Re}\{A(z) \exp i(kx - \sigma t)\} \text{ met}$$

$$\frac{da}{dt} = \text{Re}\{A(z)(-i\sigma + i u_0 k) \exp i(kx - \sigma t)\} \equiv -i\omega a$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \text{Re}\left\{\frac{\partial A(z)}{\partial z} \exp i(kx - \sigma t)\right\}$$

(voor de dichtheid noteren we de amplitude als $Rh(z)$).

We kiezen voor deze vorm van elke grootheid. We zouden alle oplossingen van de vergelijkingen hebben als de oplossingen een volledig stelsel vormen waarin elke beginvoorwaarde ontwikkeld kan worden. Dit is niet altijd zo en moet achteraf geverifieerd worden.

We leiden nu door eliminatie een vergelijking voor $W(z)$ af.

$$\frac{d}{dt} \text{ van de } z \text{ impuls vgl. (23) levert } -\omega^2 W - \frac{i\omega}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{g}{\rho_0} \frac{dRh}{dt} = 0$$

$$\text{de thermodyn. vgl. (25)} \quad \frac{dRh}{dt} = + W \frac{N^2}{g} \rho_0$$

$$\text{Samen levert dit } (N^2 - \omega^2)W(z) - \frac{i\omega}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (26)$$

Het systeem vergelijkingen is dan

$$x\text{-impuls vgl.} \quad \{-i\omega U(z) + \partial u_0(z)/\partial z W(z)\} \rho_0 + ik P(z) = 0$$

$$z\text{-impuls vgl.} \quad (N^2(z) - \omega^2)W(z) - \frac{i\omega}{\rho_0} \frac{\partial P(z)}{\partial z} = 0$$

+ thermodyn. vgl.

$$\text{cont. vgl.} \quad ik U(z) + \partial(W(z))/\partial z = 0$$

Uit $-i\omega = -i\sigma + iu_0 k$ en $c = \sigma/k$ volgt $\omega = (c-u_0)k$ met c en k horizontaal.

Het systeem vergelijkingen is nu

$$(u_0 - c)U - i \frac{W}{k} \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{P}{\rho_0} = 0 \quad (27)$$

$$\{N^2 - k^2(u_0 - c)^2\}W + \frac{ik}{\rho_0} (u_0 - c) \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (28)$$

$$ikU + \partial W/\partial z = 0 \quad (29)$$

Elimineer U uit (27) en (29)

$$(u_0 - c) \frac{\partial W}{\partial z} - W \frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{ik P}{\rho_0} \rightarrow$$

$$\frac{ik}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial u_0}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + (u_0 - c) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial u_0}{\partial z} - W \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \quad (30)$$

waarbij weer gebruikt is dat de verticale schaal van de golf veel kleiner is dan $\frac{1}{\rho_0} / (\partial \rho_0 / \partial z)$.

Substitutie hiervan in (28) levert de Taylor-Goldstein vgl.

$$\frac{\partial^2 W(z)}{\partial z^2} + \left[\frac{N^2(z)}{(u_0(z)-c)^2} - \frac{2}{k} - \frac{\partial^2 u_0(z)/\partial z^2}{(u_0(z)-c)} \right] W(z) = 0 \quad (31)$$

In de volgende hoofdstukken zullen we naar het gedrag van oplossingen van deze vergelijking kijken.

Als W opgelost is uit de Taylor-Goldstein vgl. dan kunnen de andere variabelen gevonden worden uit de volgende relaties.

Uit de continuïteitswet volgt:

$$U(z) = - \frac{i}{k} \frac{\partial W(z)}{\partial z} \quad (32)$$

Uit de vgl. (27) volgt:

$$P(z) = - \frac{i\rho_0}{k} \left\{ (u_0(z)-c) \frac{\partial W(z)}{\partial z} - W(z) \frac{\partial u_0(z)}{\partial z} \right\} \quad (33)$$

Uit de energievergelijking volgt met $\rho = \text{Re}\{\text{Rh}(z) \exp i(kx - \sigma t)\}$:

$$\text{Rh}(z) = - \frac{i}{\omega} W(z) \frac{N^2 \rho_0}{g} \quad (34)$$

Uit de gaswet volgt:

$$T(z) = + \frac{i}{\omega} W(z) \frac{N^2 T_0}{g} \quad (35)$$

Als de achtergrondstroming $u_0 = 0$ en als $W(z)$ de golfvorm $\exp inz$ heeft dan zijn u en w in fase met $U(z) = n/k W(z)$.

De relatie tussen de overdruk en de verticale snelheid wordt

$$P = - \frac{\rho_0 c n W}{k} \text{ zodat als de verticale snelheid maximaal is de druk in het}$$

pakketje kleiner is dan de druk van de omgeving en omgekeerd. De verticale snelheid ijlt 90° na op de dichtheid (zie 34), zodat geldt

$$\rho = \frac{1}{\omega} \frac{N^2 \rho_0}{g} W(z) \exp i\{kx - \sigma t + \pi/2\}.$$
 In de hoogste positie is de verticale snelheid nul terwijl de dichtheid van het pakketje daar groter is dan van de omgeving. In de laagste positie is de verticale snelheid ook nul terwijl de dichtheid kleiner is dan van de omgeving.

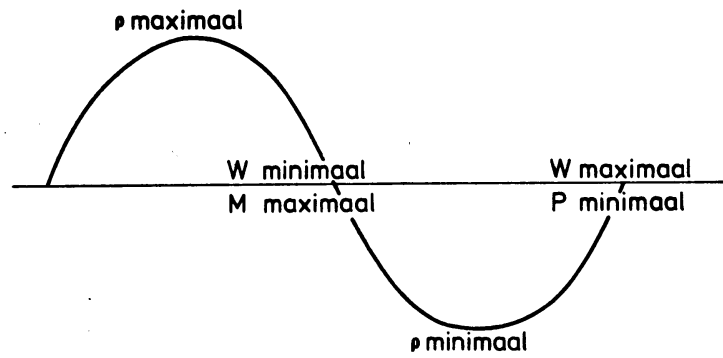


Fig. 4. Druk, dichtheid en snelheid in een vlakke buoyancy golf.

II.5. Stabiliteit van verstoringen

II.5.1. Groeisnelheid

In II.3.1. hebben we vergelijking (15) afgeleid voor w voor een atmosfeer zonder achtergrondwind en met N^2 constant. Verder hebben we ons beperkt tot σ reëel en $\sigma < N$. Dit gaf vlakke golfoplossingen $w = \text{Re}\{W \exp i(kx + mz - \sigma t)\}$ met k , m en σ reëel.

In II.3.2. is de Taylor-Goldstein vergelijking afgeleid voor een atmosfeer met een achtergrondwind en een Brunt-Vaisala frekwentie die afhankelijk zijn van z . Hier veronderstelden we een vlakke golf in de x -richting (k reëel), maar over de golfvorm in de z -richting en over σ deden we geen uitspraken.

Wanneer we de Taylor-Goldstein vergelijking willen oplossen voor reële situaties hebben we te maken met randvoorwaarden die het aantal combinaties k , σ beperken. Bovendien zoeken we in dit onderzoek naar instabiele oplossingen, zodat we toe moeten laten dat σ complex is

$$w = \text{Re}\{W(z) \exp i(kx - \sigma t)\}$$

$$\text{met } \sigma = \sigma_r + i\sigma_i = (c_r + ic_i)k.$$

Over de stabiliteit van de oplossing kunnen we het volgende zeggen. Als $c_i > 0$ dan zal de verstoring exponentieel groeien met de tijd totdat hij zo groot is dat niet-lineaire processen een rol gaan spelen en de oplossing een andere vorm krijgt.

Als $c_i = 0$ dan is de verstoring neutraal stabiel en als $c_i < 0$ dan blijft de verstoring klein voor alle t en noemen we hem stabiel. σ_i noemen we de groeisnelheid.

Welke oplossingen mogelijk zijn hangt af van de situatie, we kunnen dit illustreren aan wat eenvoudige gevallen (Gossard e.a., 1975).

We beschouwen een laag lucht tussen twee platen op $z = 0$ en $z = h$, allereerst zonder achtergrondstroming $\underline{u}_0 = \underline{0}$. Het gestelde probleem is dan

$$W'' + \left[\frac{N^2}{c} - k^2 \right] W = 0$$

$$W(h) = W(0) = 0.$$

$$\text{Stel } \frac{N^2}{c^2} - k^2 = m^2 ,$$

dan heeft het probleem de oplossing

$$W(z) = \text{const.} \sin mz \text{ met } m = \frac{\ell\pi}{h} \quad \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

zodat geldt

$$c^2 = \frac{N^2}{k^2 + \ell^2 \pi^2 / h^2}$$

Nu is de stabiliteit van de oplossing afhankelijk van het teken van N^2 .

In een statisch stabiele atmosfeer geldt $d\theta/dz > 0$ en is $N^2 > 0$ en zijn er alleen oplossingen met $c^2 > 0$ en is c reëel. De oplossingen zijn neutraal stabiel ($c_1 = 0$).

In een statisch instabiele atmosfeer geldt $d\theta/dz < 0$ en is $N^2 < 0$. Er zijn alleen oplossingen met $c^2 < 0$ en c is complex. c_1 kan nu zowel positief als negatief zijn. De oplossing met $c_1 < 0$ verdwijnt met de tijd terwijl de oplossing met $c_1 > 0$ exponentieel groeit. Alleen de instabiele oplossing is na enige tijd nog aanwezig en we noemen dit geval met $N^2 < 0$ dan ook instabiel.

Wanneer we het geval bekijken van een stroming $u_0 = u_0(z)$ met niet constante gradient du_0/dz tussen twee platen, dan is het probleem

$$W'' + \left[\frac{N^2}{(u_0 - c)^2} - k^2 - \frac{u_0''}{(u_0 - c)} \right] W = 0$$

$$W(h) = W(0) = 0$$

De coëfficiënt tussen vierkante haakjes is nu een functie van z en we kunnen niets algemeen zeggen over de oplossing. Zonder dat we de oplossingen van een dergelijk probleem berekenen kunnen we echter al enige globale uitspraken doen over de stabiliteit van de oplossingen aan de hand van het hierna te bespreken Richardson getal en het halve cirkel theorema van Howard.

II.5.2. Noodzakelijke voorwaarde voor ontstaan instabiele golven

Het Richardson getal is gedefinieerd als

$$Ri \equiv -g \frac{d\rho_0}{dz} / \rho_0 \left(\frac{du_0}{dz} \right)^2$$

en is een maat voor de relatieve belangrijkheid van de stabiliserende invloed van de zwaartekracht t.o.v. het destabiliserende effect van de windshear op de stroming. Een criterium waaraan dit getal moet voldoen wordt als volgt afgeleid (Drazin, 1981).

Het essentiële mechanisme van een instabiliteit is de omzetting van de beschikbare kinetische energie van de lagen van de basisstroming die t.o.v. elkaar bewegen in kinetische energie van de verstoring. Hierbij moet potentiële energie geleverd worden om de lucht omhoog te doen gaan.

Stel dat twee vloeistofpakketjes van gelijk volume op de hoogtes z en $z + \delta z$ worden uitgewisseld. De arbeid δW per eenheid van volume die nodig is om de zwaartekracht te overwinnen is

$$\delta W = -g \delta \rho \delta z \quad \text{met} \quad \delta \rho = \frac{d\rho_0}{dz} \delta z$$

Het pakketje op hoogte z had een snelheid u_0 en het pakketje op hoogte $z + \delta z$ had een snelheid $u_0 + \delta u_0$ met

$\delta u_0 = \frac{du_0}{dz} \delta z$. De totale horizontale impuls blijft behouden bij deze uitwisseling, het verschil in snelheid wordt verdeeld over de twee pakketjes zodat het pakketje dat op een hoogte $z + \delta z$ aankomt nu de snelheid $u_0 + n \delta u_0$ heeft en het andere pakketje $u_0 + (1-n) \delta u_0$ met n een getal tussen 0 en 1. De door de basisstroming afgegeven hoeveelheid kinetische energie δT per eenheid van volume is

$$\begin{aligned} \delta T &= \frac{1}{2} \rho_0 u_0^2 + \frac{1}{2} (\rho_0 + \delta \rho_0) (u_0 + \delta u_0)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho_0 (u_0 + n \delta u_0)^2 - \frac{1}{2} (\rho_0 + \delta \rho_0) (u_0 - (1-n) \delta u_0)^2 \\ &= n(1-n) \rho_0 (\delta u_0)^2 + u_0 \delta u_0 \delta \rho_0 \\ &< \frac{1}{2} \rho_0 (\delta u_0)^2 + u_0 \delta u_0 \delta \rho_0 \end{aligned}$$

Wil deze uitwisseling plaats kunnen vinden, dan moet de arbeid die nodig is om de zwaartekracht te overwinnen kleiner zijn dan de door de basisstroming afgegeven hoeveelheid kinetische energie. Een nodige voorwaarde voor instabiliteit is dan dat ergens in de stroming geldt dat $\delta W < \delta T$ oftewel

$$-g \frac{d\rho_0}{dz} < \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{du_0}{dz}\right)^2 + u_0 \frac{du_0}{dz} \frac{d\rho_0}{dz} \quad \text{oftewel}$$

$Ri \equiv -g \frac{d\rho_0}{dz} / \rho_0 \left(\frac{du_0}{dz}\right)^2 < \frac{1}{2}$ als de variatie van de dichtheid te verwaarlozen is.

De uitspraak die we nu al kunnen doen, voordat we het Taylor-Goldstein probleem oplossen, is dat dit probleem alleen oplossingen heeft, als ergens in de stroming de shear zo groot is, dat het Richardson getal daar kleiner dan een $\frac{1}{2}$ is.

Indien het windprofiel een buigpunt heeft, is de shear daar maximaal en is het voldoende te verifiëren of daar geldt dat $Ri < \frac{1}{2}$.

II.5.3. Howards halve cirkel theorema

We hebben een criterium voor het Richardson getal afgeleid waaraan de stroming moet voldoen willen er instabiele oplossingen voor het Taylor-Goldstein randwaarde probleem bestaan.

We gaan nu onderzoeken welke instabiele oplossingen er mogelijk zijn, als aan dit Ri-getal criterium voldaan wordt. Dit leidt tot het halve cirkel theorema van Howard (Drazin e.a., 1981 en Dutton, 1976).

De T.G. vgl. kan geschreven worden als

$$\left[(u_0 - c) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) - \left(u_0'' - \frac{N^2}{u_0 - c} \right) \right] W = 0 \quad (36)$$

De in deze vgl. voorkomende operatoren $u_0 - c$ en $\partial^2 / \partial z^2 - k^2$ commuteren niet, zodat de toegevoegde vgl. is

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) (u_0 - c) - \left(u_0'' - \frac{N^2}{u_0 - c} \right) \right] W^+ = 0 \quad (37)$$

Door substitutie van $W^+ = \text{const} \frac{W}{(u_0 - c)}$ gaat deze vgl. over vgl. (36), zodat W^+ een oplossing is van de toegevoegde vgl. Een vgl. identiek aan (37) wordt afgeleid door in vgl. (36) te substitueren

$W = \text{const} W^+(u_0 - c)$:

$$\frac{\partial}{\partial z} [(u_0 - c)^2 \frac{\partial W^+}{\partial z}] + [N^2 - k^2(u_0 - c)^2] W^+ = 0 \quad (38)$$

Om Howard's halve cirkel theorema af te leiden vermenigvuldigen we deze vgl. met W^{+*} , de complextoegevoegde van W^+ , en integreren we van $z = 0$ tot $z = \infty$.

De eerste term levert

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} [(u_0 - c)^2 \frac{\partial W^+}{\partial z}] W^{+*} dz = - \int_0^{\infty} (u_0 - c)^2 \left\| \frac{\partial W^+}{\partial z} \right\|^2 dz$$

zodat vgl. (37) overgaat in

$$\int_0^{\infty} [(u_0 - c)^2 Q - N^2 \|W^+\|^2] dz$$

$$\text{met } Q = \left\| \frac{\partial W^+}{\partial z} \right\|^2 + k^2 \|W^+\|^2 > 0 \text{ en reeel}$$

waarbij we aangenomen hebben, dat $c_i \neq 0$ zodat W^+ regulier is.

Splitsen in reëel en imaginair deel van de vgl.:

$$\text{reel deel } \int_0^{\infty} \{ (u_0 - c_r)^2 - c_i^2 \} Q - \int_0^{\infty} N^2 \|W^+\|^2 dz = 0 \quad (39)$$

$$\text{imag. deel } c_i \int_0^{\infty} (u_0 - c_r) Q dz = 0 \quad (40)$$

Uit (40) volgt dat c_r tussen u_{\min} en u_{\max} ligt.

Uit (39) volgt m.b.v. (40)

$$\int_0^{\infty} u_0^2 Q dz = (c_r^2 + c_i^2) \int_0^{\infty} Q dz + N^2 \|W^+\|^2 dz \quad (41)$$

$$\text{Er geldt } 0 > \int_0^{\infty} Q(u_0 - u_{\min})(u_0 - u_{\max}) dz$$

$$= u_0^2 \int_0^{\infty} Q dz - (u_{\min} + u_{\max}) \int_0^{\infty} Q u_0 dz + u_{\min} u_{\max} \int_0^{\infty} Q dz$$

M.b.v. (40) en (41) volgt

$$(c_r^2 + c_i^2) - (u_{\min} + u_{\max})c_r + u_{\min} u_{\max} \leq - \frac{\int_0^{\infty} N^2 \|W^+\|^2 dz}{\int_0^{\infty} Q dz}$$

$$[c_r - \frac{1}{2}(u_{\min} + u_{\max})]^2 + c_i^2 \leq \frac{1}{4}(u_{\min} - u_{\max})^2 - \frac{\int_0^{\infty} N^2 \|W^+\|^2 dz}{\int_0^{\infty} Q dz}$$

D.w.z. een noodzakelijke voorwaarde voor de oplossing van het Taylor-Goldstein probleem is dat $c = (c_r, c_i)$ binnen de cirkel ligt met als middelpunt $(\frac{u_{\min} + u_{\max}}{2}, 0)$ en de straal die een bedrag, evenredig met N^2 is dan $\frac{(u_{\max} - u_{\min})}{2}$.

Verder kunnen we afleiden dat de oplossingen voorkomen in paren van stabiele en instabiele verstoringen. De Taylor-Goldstein vgl. kunnen we schrijven als $W''(z) + \Lambda(c_r, c_i)W = 0$
Als $W(z)$ een oplossing is voor $c = (c_r, c_i)$ dan geldt ook

$$W^{*\prime\prime}(z) + \Lambda^*(c_r, c_i)W^* = 0$$

$$W^{*\prime\prime}(z) + \Lambda(c_r, c_i)W^* = 0$$

zodat $W^*(z)$ een oplossing is voor $c = (c_r, -c_i)$ bij dezelfde k . Deze twee oplossingen hebben dezelfde energieinhoud omdat

$$\|W^*(z)\| = \|W(z)\|$$

Eén van de uitspraken, die we op voorhand over de oplossing van het Taylor-Goldstein probleem kunnen doen is, dat als er oplossingen zijn, ze binnen de bovengenoemde cirkel liggen en dat ze in paren van stabiele en instabiele voorkomen.

De instabiele oplossingen van het Taylor-Goldstein probleem moeten dus binnen de bovenste helft van de cirkel liggen.

II.5.4. Kelvin-Helmholtz instabiliteit met richtingsdraaiing

We zoeken die oplossingen van het Taylor-Goldstein randwaarde probleem die een maximale groei vertonen, omdat deze golven gaan overheersen en dus waar te nemen zouden moeten zijn.

In de praktijk hebben we te maken met windprofielen met zowel een verandering van windsnelheid als van windrichting met de hoogte. Hierin brengen we verstoringen aan in de vorm van vlakke golven.

We bewijzen dat voor Kelvin-Helmholtz onstabilliteiten alleen de projectie van het windprofiel in de voortplantingsrichting van de golf van belang is, en dat de groeisnelheid maximaal is als de golf zich evenwijdig aan de windshear voortplant.

We bekijken daartoe een eenvoudig model voor windshear: een twee lagen systeem waarvan de stroming rotatie en divergentievrij is. We voeren een snelheidspotentiaal ψ in

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\psi \text{ met } \psi = \begin{array}{ll} \psi_1 & z < \xi \\ \psi_2 & z > \xi \end{array}$$

met $z = \xi(x,y,t)$ het grensvlak tussen de twee lagen.

Omdat de stroming rotatie- en divergentievrij is moet de snelheidspotentiaal ψ aan de Laplace vlg. voldoen

$$\begin{array}{ll} \Delta \psi_1 = 0 & z < \xi \\ \Delta \psi_2 = 0 & z > \xi \end{array}$$

Als aansluitcondities op $z = \xi$ moet gelden, dat de normale component van de snelheid continu is en dat de normaal component van de stress (= druk) continu is.

De eerste voorwaarde levert

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (43)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (44)$$

Verder moet de stroming voldoen aan Bernouilli's theorema voor rotatievrije stroming

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \psi_1)^2 + \frac{p_1}{\rho} + gz = c_1 \quad z < \xi$$

met c_1 en c_2 willekeurige
constantes

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \psi_2)^2 + \frac{p_2}{\rho} + gz = c_2 \quad z < \xi$$

Voor een rotatievrije stroming geldt $c_1 = c_2$.

Uit de tweede aansluitconditie $p_1 = p_2$ op $z = \xi$ volgt

$$\rho_1 \left(c_1 - \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla \psi_1)^2 - g\xi \right) = \rho_2 \left(c_1 - \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla \psi_2)^2 - g\xi \right) \quad (45)$$

We lineariseren deze drie vergelijkingen (43), (44) en (45) met kleine verstoring ψ'_1 en ψ'_2 :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= u_1 x + v_1 y + \psi'_1 \\ \psi_2 &= u_2 x + v_2 y + \psi'_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \psi'_1}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (46)$$

$$\frac{\partial \psi'_2}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \left\{ c_1 - \frac{\partial \psi'_1}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\left(u_1 + \frac{\partial \psi'_1}{\partial x} \right)^2 + \left(v_1 + \frac{\partial \psi'_1}{\partial y} \right)^2 \right] - g\xi \right\} = \\ \rho_2 \left\{ c_1 - \frac{\partial \psi'_2}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\left(u_2 + \frac{\partial \psi'_2}{\partial x} \right)^2 + \left(v_2 + \frac{\partial \psi'_2}{\partial y} \right)^2 \right] - g\xi \right\} \end{aligned} \quad (48)$$

De eerste orde van de laatste vgl. (48) met de veronderstelling dat $\|\rho_1/\rho\| \sim 1$ en $\|\rho_2/\rho\| \sim 1$ en met $\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ levert

$$g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho} \xi = \frac{\partial \psi'_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \psi'_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \psi'_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi'_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial \psi'_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial \psi'_2}{\partial y} \quad (49)$$

We voeren in

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= \phi_1 \exp i(mx + ny - \sigma t) \\ \psi'_2 &= \phi_2 \exp i(mx + ny - \sigma t) \\ \xi &= \hat{\xi} \exp i(mx + ny - \sigma t) \end{aligned}$$

en we leggen de randvoorwaarden op, dat de snelheid verdwijnt in

$Z \rightarrow \pm \infty$: $\nabla \phi \rightarrow 0$ voor $z \rightarrow \pm \infty$.

Hieruit volgt $\phi_1 = A_1 e^{\ell z}$ en $\phi_2 = A_2 e^{-\ell z}$ met $\ell = (m^2 + n^2)^{\frac{1}{2}}$.

Subst. in de drie vergelijkingen (45), (46) en (48) levert

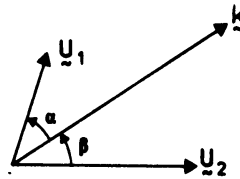
$$\begin{aligned} A_1 \ell &= (-i\sigma + imu_1 + inv_1)\hat{\xi} \\ -A_2 \ell &= (-i\sigma + imu_2 + inv_2)\hat{\xi} \\ g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho} \hat{\xi} &= (-i\sigma + imu_1 + inv_1)A_1 - (-i\sigma + imu_2 + inv_2)A_2 \end{aligned}$$

Als we hieruit A_1 , A_2 en $\hat{\xi}$ elimineren volgt

$$g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho} = \frac{(\sigma - mu_2 - nv_2)^2}{\ell} + \frac{(\sigma - mu_1 - nv_2)^2}{\ell} \quad (50)$$

Schrijf nu $\underline{u}_1 = (u_1, v_1)$ en $\underline{u}_2 = (u_2, v_2)$ met resp. groottes U_1 en U_2
 $\underline{k} = (m, n)$ met grootte k

Dan geldt $mu_1 + nv_1 = k U_1 \cos \alpha$
 $mu_2 + nv_2 = k U_2 \cos \beta$



De vgl. (50) gaat over in

$$\begin{aligned} g \frac{\Delta\rho}{\rho} &= \frac{(\sigma - k U_1 \cos \alpha)^2}{\ell} + \frac{(\sigma - k U_2 \cos \beta)^2}{\ell} \rightarrow \\ 2\sigma^2 - 2k\sigma(U_1 \cos \alpha - U_2 \cos \beta) + k^2(U_1^2 \cos^2 \alpha + U_2^2 \cos^2 \beta)g\ell \frac{\Delta\rho}{\rho} &= 0 \\ \frac{\sigma}{k} &= \frac{U_1 \cos \alpha + U_2 \cos \beta}{2} \pm i \left(\left(\frac{U_1 \cos \alpha - U_2 \cos \beta}{2} \right)^2 + \frac{g \Delta\rho}{2k\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (51) \end{aligned}$$

zodat we vinden dat

$$c_r = \frac{U_1 \cos \alpha + U_2 \cos \beta}{2} \quad (52)$$

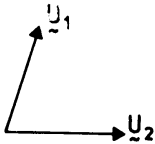
$$c_i = \left(\left(\frac{U_1 \cos \alpha - U_2 \cos \beta}{2} \right)^2 + \frac{g \Delta\rho}{2k\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (53)$$

We komen dan tot de conclusie dat voor Kelvin-Helmholtz instabiliteiten alleen de windcomponent in de voortplantingsrichting van de golf (voorgesteld door $U_1 \cos \alpha$ en $U_2 \cos \beta$) van belang is.

We willen nu de richting vinden, waarin de groeifactor maximaal is, d.w.z. $\frac{\partial c_1}{\partial \alpha} = 0$. Dit levert

$$(U_1 \cos \alpha - U_2 \cos \beta)(U_1 \sin \alpha - U_2 \sin \beta) = 0 \quad (54)$$

Allereerst bekijken we het effect van richtingshear: $U_1 = U_2$.



Vgl. (54) gaat over in:

$$(\cos \alpha - \cos \beta)(\sin \alpha + \sin \beta) = 0 \quad \rightarrow$$

$$\cos \alpha = \cos \beta \text{ of } \sin \alpha = -\sin \beta \quad \rightarrow$$

$$\alpha = \beta \text{ of } \alpha = \beta + \pi$$

($\alpha = -\beta$ voldoet niet aan de eis voor richtingshear)

We zien dat de groeifactor c_1 maximaal is als de golf zich loodrecht of evenwijdig aan de windshear voortplant. Echter als de golf loodrecht op de windshear staat, zijn de projecties van de wind in de voortplantingsrichting gelijk en voelt de golf geen shear. Deze oplossing voldoet dus niet. Dus in het geval van richtingshear is de groei maximaal als de golf zich evenwijdig aan de windshear voortplant.

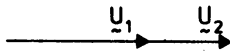
Vervolgens bekijken we het effect van windsnelheidsverschillen

$\alpha = -\beta$ en $U_1 \neq U_2$.

Vgl. (54) gaat over in:

$$(U_1 - U_2)^2 \cos \alpha \sin \alpha = 0 \quad \rightarrow$$

$$\alpha = 0 \text{ of } \alpha = \pi/2.$$



Weer geldt dat de groei maximaal is als de golf zich loodrecht dan wel evenwijdig aan de windshear voortplant.

Echter de oplossing loodrecht op de windrichting voldoet niet, omdat de projectie van de wind in de voortplantingsrichting van de golf nul is.

Wanneer we nu de conclusies van de twee gevallen, richtingshear en windgrootte verschillen, samenvatten, dan zien we dat we voor het oplossen van de Taylor-Goldstein vergelijking alleen rekening hoeven te houden met de projectie van de wind in de voortplantingsrichting van de golf en we weten dat de oplossing met maximale groei zich voortplant evenwijdig aan de windshearrichting.

II.5.5. Randvoorwaarden

In II.4.1. t/m II.4.4. hebben we criteria afgeleid die beperkingen opleggen aan de oplosbaarheid van situaties evenals aan hun oplossingen. Deze oplossingen worden verder beperkt doordat we randvoorwaarden aan het systeem opleggen.

De Taylor-Goldstein vgl. luidt:

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + W \left\{ \frac{N^2}{(u_o - c)^2} - k^2 - \frac{\partial^2 u_o / \partial z^2}{(u_o - c)} \right\} = 0$$

We formuleren een randvoorwaardeprobleem voor deze vgl.

Aan de bodem is geen verticale beweging mogelijk: $W(z=0) = 0$.

De hoogte van de top is zo gekozen dat we kunnen aannemen dat in de bovenste laag de wind en de temperatuurgradiënt constant zijn. Zodoende is ook de coëfficiënt tussen haakjes Λ constant en heeft de oplossing van de Taylor-Goldstein vlg. $W'' + \Lambda W = 0$ de vorm $W(z) \approx \expinz$ met $n = \pm \sqrt{\Lambda} = \pm(n_r + in_i)$.

De randvoorwaarde aan de top hangt van het teken van n_i af.

Als $n_i \neq 0$ kiezen we het teken van de wortel zo dat de golf uitdempt boven de laag en er geen energietransport plaatsvindt: $n_i > 0$.

Als $n_i = 0$ leggen we de eis op dat aan de top alleen energie uitgestraald wordt en er geen transport van energie de laag in plaatsvindt. Dit houdt in dat de groepsnelheid in de z-richting $(c_g)_z$ positief moet zijn. Dit impliceert als volgt een keuze voor het teken van de wortel uit Λ

$$n = \pm \sqrt{\Lambda} = \pm \left(\frac{N^2}{(u_o - c)^2} - k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = n_r \text{ (reel) } \rightarrow$$

$$n_r^2 (ku_o - \sigma)^2 = N^2 k^2 - k^2 (ku_o - \sigma)^2 \rightarrow$$

$$(c_g)_z = \frac{\partial \sigma}{\partial n} = \frac{n_r k (u_o - c_r)}{n_r^2 + k^2}$$

Als $u_o(z_u) > c_r$ dan is $(c_g)_z > 0$ als $n_r > 0$.

Als $u_o(z_u) < c_r$ dan is $(c_g)_z > 0$ als $n_r < 0$.

We zien dat het opleggen van randvoorwaarden equivalent is met het opleggen van eisen aan de verticale structuur van de oplossing.

Samengevat zijn de randvoorwaarden:

bodem: $W(z=0) = 0$

top : stel Λ heeft twee wortels $n_1 = \|n_r\| + i\|n_i\|$
 $n_2 = -\|n_r\| - i\|n_i\|$

als $n_i \neq 0$ kies dan n_1

als $n_i = 0$ en $u_o(z_u) > c_r$ kies dan n_1

als $n_i = 0$ en $u_o(z_u) < c_r$ kies dan n_2 .

II.6. Spectra

In het deel II.4 van dit hoofdstuk hebben we de oplossingen van het Taylor-Goldstein probleem besproken. Wanneer deze oplossingen, de Kelvin-Helmholtz golven in de atmosfeer voorkomen, kunnen we ze meten m.b.v. spectra. Deze spectra worden als volgt berekend uit de metingen (Bendat, 1966).

Op de diverse meethoogtes worden de wind- en potentiële temperatuur fluctuaties gemeten. Deze bestaan uit bijdrage van golven zowel als van turbulentie. Van de bijdrage van lineaire golven kunnen we het volgende zeggen. We beschouwen golfperturbaties van de vorm

$$w(x, y, z, t) = \text{Re}\{\hat{W}(z) \exp i(kx - \sigma t)\}$$

$$\theta(x, y, z, t) = \text{Re}\{\hat{\theta}(z) \exp i(kx - \sigma t)\}$$

Het kruisspectrum $S_{w\theta}(\sigma)$ is de fouriergetransformeerde van de kruis-correlatie $R_{w\theta}(\tau) = \overline{w(t)\theta(t+\tau)}$ gedefinieerd door

$$S_{w\theta}(\sigma) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{w\theta}(\tau) e^{-i\sigma\tau} d\tau = C_{w\theta}(\sigma) - iQ_{w\theta}(\sigma)$$

met $C_{w\theta}(\sigma)$ het cospectrum en $Q_{w\theta}(\sigma)$ het kwadratuurspectrum. Equivalent hieraan zijn het coherentie spectrum $\text{Coh}_{w\theta}(\sigma)$ en het fase spectrum $\phi_{w\theta}(\sigma)$ gedefinieerd als

$$\text{Coh}_{w\theta}(\sigma) = \|S_{w\theta}(\sigma)\| / S_w(\sigma) S_\theta(\sigma)$$

$$S_{w\theta}(\sigma) = \|S_{w\theta}(\sigma)\| \exp\{-i\phi_{w\theta}(\sigma)\}$$

met S_w en S_θ de variantie spectra (Driedonks e.a., 1980).

Voor een lineaire golf geldt dat de flux $\overline{w\theta}$, gemiddeld over een golflengte, te schrijven is als

$$\overline{w\theta} = \frac{\overline{(w + w^*) (\theta + \theta^*)}}{2} = \frac{\overline{w\theta}}{4} + \frac{\overline{w^* \theta}}{4} + \frac{\overline{w\theta^*}}{4} + \frac{\overline{w^* \theta^*}}{4} = \frac{\hat{W} \hat{\theta} + \hat{W} \hat{\theta}^*}{4}$$

We weten uit de polarisatievlg. (35) dat $\hat{\theta}(z) = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\theta_0}{\rho_0} W(z)$ zodat

$$\frac{\overline{w\theta}}{w\theta} = -\frac{W^*W}{4} i \frac{\partial \rho_o}{\partial z} \frac{T_o}{\rho_o} \left[\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^*} \right] = + \frac{1}{2} \|W\|^2 \frac{\partial \rho_o}{\partial z} \frac{T_o}{\rho_o} \frac{\omega_i}{\|\omega\|^2}$$

met $\omega_i = c_i k = \sigma_i$.

Voor neutraal stabiele golven ($\omega_i = 0$) is het vertikaal warmtetransport dus nul. Voor golven met een kleine groeisnelheid σ_i is het vertikale warmtetransport klein. Voor een lineaire neutrale golf ($c_i = \sigma_i = \omega_i = c$) met frekwentie $\sigma = \sigma_r$ zien de spectra er dus zo uit:

$$C_{w\theta}(\sigma) = 0 ; Q_{w\theta}(\sigma) \neq 0 ; \text{Coh}_{w\theta}(\sigma) = 1 ; \phi_{w\theta}(\sigma) = \frac{1}{2}\pi$$

Aan de hand van deze criteria kan geverifieerd worden of de mogelijke Kelvin-Helmholtz oplossingen ook inderdaad voorkomen in de atmosfeer. We moeten hierbij echter rekening houden met het feit dat er ook turbulentie aanwezig kan zijn (Busch, 1969).

Turbulentie is een randbeweging waarvan het cospectrum ongelijk nul is, het heeft een klein kwadratuurspectrum en random verdeelde fase verschillen tussen ω en θ van $-\pi$ tot π . We kunnen Kelvin-Helmholtz golven dan ook alleen waarnemen, indien de turbulentie onderdrukt wordt. Dit is het geval in een statisch stabiele atmosfeer.

III. Metingen

III.1. Metingen te Cabauw

Het KNMI voert een grenslaagonderzoek uit m.b.v. de 200 m hoge meteorologische mast te Cabauw.

In en continu meetprogramma worden gegevens verzameld over de gemiddelde waarde van meteorologische parameters met een grote verticale resolutie. De sample tijd voor deze parameters is 120 s en de standaard middelingstijd is 30 min. (Driedonks e.a., 1978). Op geselecteerde dagen is het mogelijk om gelijktijdig op zes hoogtes de turbulente fluctuaties van drie windcomponenten, droge en natte bol temperatuur te meten. Uit deze gegevens kunnen de standaarddeviaties en de turbulente fluxen afgeleid worden en de spectrale verdelingen hiervan. Standaard sample frekwentie voor deze turbulente data is 5 Hz.

Voor windmetingen worden trievanen gebruikt, die de lengte azimuth en elevatie hoek van de windvector meten. De temperatuur fluctuaties worden gemeten met twee paar ongeventileerde thermokoppels. In dit onderzoek is gebruik gemaakt van de fluctuatietingen.

Voor de verwerking van de tapes op de Burroughs B6700 is een aantal computerprogramma's geschreven (Driedonks e.a., 1980). Op deze programma's is een uitbreiding geschreven (Vermeulen en de Baas, 1983).

III.2. Selectie van de metingen

Verwerkt zijn de metingen van 30 mei 1978 van 1 uur tot 2 uur. Dit uur is gekozen op grond van de tijddiagrammen van wind en temperatuur (fig. 5), de gemiddelde profielen en de variantieprofielen (fig. 6 en 7).

In de tijddiagrammen is gezocht naar een regelmatige golfstructuur. Het bleek dat alleen de temperatuur duidelijke golfpatronen vertoonde en vaak alleen op grotere hoogtes. Dit is te verklaren aan de hand van de relatie tussen de amplitude's van de temperatuur en verticale golfsnelheid (zie vgl. 31)

$$T(z) = \frac{i}{\omega} \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} W(z)$$

De absolute waarde van de vermenigvuldigingsfactor is

$$\frac{T_0}{g} \frac{N^2}{\omega} \sim \frac{290}{10} 10^{-1} \sim 3$$

nl. voor bijna horizontale golven geldt

$\frac{N^2}{\omega} \approx N \approx 10^{-1}$. Dus de amplitude van de golf is groter in de temperatuur dan in de verticale wind.

Dit uur werd gekozen omdat op 200 m een duidelijk golfpatroon zichtbaar was. Verder zien we op 160 m en 120 m een groeiende amplitude, terwijl de lagere hoogtes geen opvallende eigenschappen vertonen.

Aan de gemiddelde wind en potentiële temperatuurprofielen fig. 6 zien we dat de atmosfeer statisch stabiel is. Aan de variantieprofielen fig. 7, zien we dat ondanks dat de atmosfeer statisch stabiel is, de variantie niet afneemt met de hoogte, integendeel, een duidelijke piek heeft op grotere hoogte. Dit wijst op de aanwezigheid van golven (zie hoofdstuk I.).

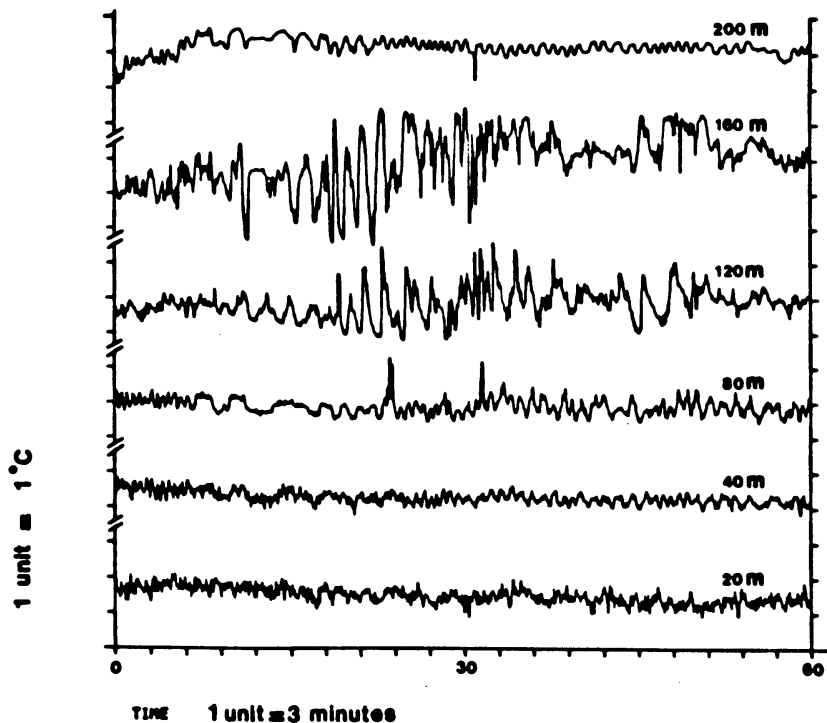


Fig. 5. Tijddiagram van de temperatuur over verschillende hoogtes, 30 mei 1978, 01-02 uur. Temp. eenheden in °C.

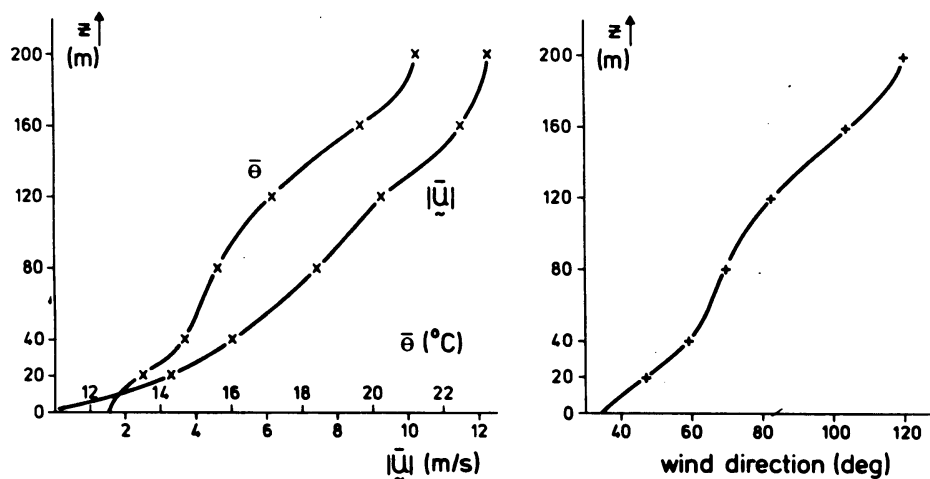


Fig. 6. Gemeten wind en temperatuurprofielen op 30 mei 1978 van 01-02 UT.

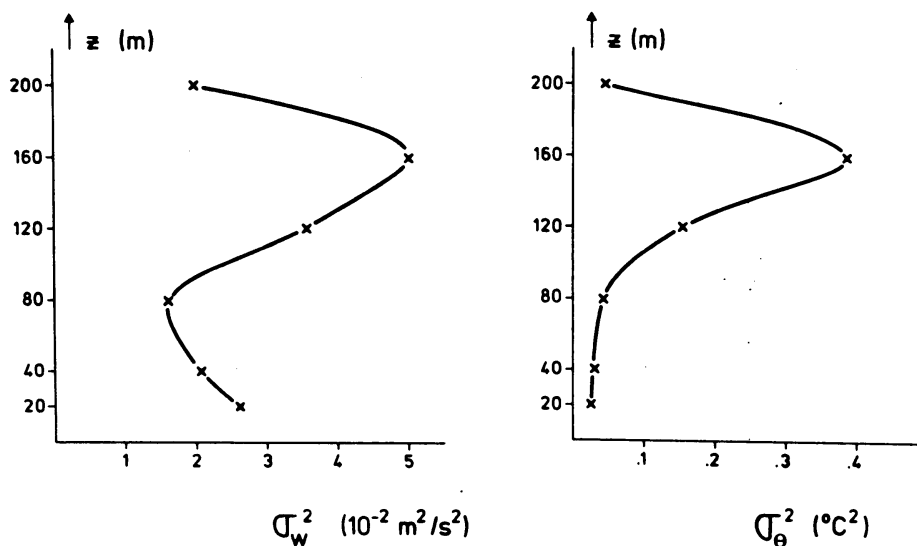


Fig. 7. Gemiddelde variantieprofielen van de verticale windfluctuaties en van de temperatuurfluctuaties, gemeten op 30 mei 1978 van 01-02 UT.

IV. Methodes

Het toepassen van de hiervoor beschreven theorie op het gekozen uur metingen wordt nu beschreven. Hiervoor zijn programma's geschreven, die te vinden zijn in de appendix.

IV.1. Oplosmethode voor de Taylor-Goldstein vgl.

Voor het oplossen van het randvoorwaardeprobleem voor de Taylor-Goldstein vergelijking

$$W''(z) + \left\{ \frac{N^2}{(u_0 - c)^2} - k^2 - \frac{u_0''}{(u_0 - c)} \right\} W(z) = 0$$

is het programma STABAN (stabiliteitsanalyse) geschreven dat alle onstabiele oplossingen zoekt (zie appendix I).

Het zoeken van onstabiele oplossingen houdt in dat we bij gegeven achtergrondprofielen ($N(z)$ en $u_0(z)$) de combinaties van k en c ($= c_r + ic_i$) moeten zien te vinden, waarvoor er een oplossing is die aan de randvoorwaarden voldoet. De strategie hierbij is, dat k in stapjes wordt gevarieerd en dat voor elke k gekeken wordt of er combinaties (c_r, c_i) zijn waarvoor er een oplossing is. We zorgen er daarbij voor dat $c_i \neq 0$ blijft zodat de vergelijking geen singulariteiten heeft.

Eerst is geprobeerd om m.b.v. een "shooting"-methode de mogelijke waarden van (c_r, c_i) te vinden. Nadeel hiervan is dat slechts één mogelijke oplossing gevonden wordt (bij elke k), terwijl er meerdere kunnen zijn. Een ander nadeel is dat bij de iteraties geen controle over (c_r, c_i) bestaat zodat ze incorrecte waarden kunnen krijgen. Daarom is een andere oplosmethode ontwikkeld.

IV.1.1. De achtergrondgegevens en de projectie van het windprofiel

Als achtergrondgegevens moeten we $N(z)$ en $v_{\sim 0}(z)$ kennen. Belangrijk hierbij is dat de wind zowel in grootte als in richting verandert met de hoogte. In de Taylor-Goldstein vergelijking kijken we naar een vlakke

golf met golfgetal k in de x -richting en de windcomponent $u_0(z)$ hierlangs. Dit is natuurlijk identiek aan het beschouwen van een vlakke golf in een willekeurige richting ϕ en $u_0(z)$ als de projectie van het windprofiel op deze richting. Dit houdt wel een complicatie in omdat nu bij de zoek-procedure naar onstabiele oplossingen zowel ϕ als k gevarieerd moeten worden.

Het berekenen van de achtergrondgegevens gaat m.b.v. de gemiddelde wind (grootte en richting) en temperatuur die op een zestal hoogtes gemeten zijn tot op 200 m. Daarboven nemen we aan dat de wind constant is evenals de temperatuurgradiënt. Met behulp van de interpolatie methode SPLINE (KNMI memorandum 75-645) kunnen hieruit continue profielen afgeleid worden (derdegraads polynoom interpolatie).

Voor het groeien van Kelvin-Helmholtz instabiliteiten is alleen de windcomponent in de voortplantingsrichting van belang (II.4.4.). Voor elke voortplantingsrichting waarop we de stabiliteitsanalyse toepassen gebruiken we dan ook een windprofiel dat ontstaan is uit de projectie van de wind in de voortplantingsrichting. Hiermee kunnen alle achtergrondparameters (N^2 , u_0 en $d^2 u_0 / dz^2$) als functie van z berekend worden.

IV.1.2. De range van golfgetallen k

We proberen oplossingen te vinden van het T.G. randwaarde probleem voor bepaalde waarden van het golfgetal k . Davis en Peltier (1976) vonden dat de golflengte van de Kelvin-Helmholtz instabiliteiten met maximale groeisnelheid voor een tangenshyperbolicus profiel 5 tot 8 maal de shearlaagdikte bedraagt. De shearlaag is de laag waar de wind sterk verandert en waarbuiten de wind constant is.

Deze golven met maximale groeisnelheid gaan domineren in de atmosfeer. We passen de stabiliteitsanalyse toe op het golfvectorsgebied dat overeenkomt met golflengtes die 2 tot 20 maal de shearlaagdikte bedragen.

IV.1.3. Het gebied in het (c_r, c_i) -vlak

Het gebied van fasesnelheden (c_r, c_i) waarbinnen een oplossing gezocht moet worden wordt beperkt door het halve cirkel theorema van Howard (II.4.3.) dat zegt dat de complexe fasesnelheid $c = (c_r, c_i)$ van de instabiele oplossingen in de bovenste helft van de cirkel ligt met als uiterste reële waarden de minimale en maximale windsnelheid.

IV.1.4. De zoek-strategie

We zoeken combinaties van ϕ , k , c_r en c_i met $c_i > 0$ die een oplossing van de Taylor-Goldstein vergelijking zijn en aan de gestelde randvoorwaarde voldoen.

Daartoe variëren we ϕ in stapjes van 20° . Voor elke ϕ wordt k gevarieerd in stapjes van $2.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ tussen $2.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ en $30.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$.

Voor elke combinatie van ϕ en k gaan we in de bovenste helft van de cirkel in het (c_r, c_i) -vlak naar oplossingen zoeken. Dit gaat als volgt: Er wordt een rooster in het (c_r, c_i) -vlak gedefinieerd. De rooster-afstand d hangt af van de minimale en maximale windsnelheid

$$d = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{10} .$$

Voor elk roosterpunt wordt de T.G. vgl. van de top ($z=z_u$) naar de grond ($z=0$) geïntegreerd m.b.v. de procedure DØ2BBA uit de NAG bibliotheek met als resultaat de verticale snelheid aan de grond (reëel en imaginair deel) $W(o) = (W_r(o), W_i(o))$.

Daarvoor moeten eerst de startwaarden van de grootheden in de vgl. (aan de top $z=z_u$) berekend worden.

De waarde van de coëfficiënt $\Lambda(z_u)$ is in het algemeen complex

$$\Lambda(z_u) = \frac{N^2}{\{u_o(z_u) - c\}^2} - k^2$$

De waarde van de golfamplitude $W(z_u)$ wordt m.b.v. de randvoorwaarde aan de top berekend (zie II.4.5.). Zo worden op elk roosterpunt c_r , c_i de startwaardes $\Lambda(z_u)$ en $W(z_u)$ bepaald en vervolgens via integratie van de

vergelijking de twee functies $W_r(o)$ en $W_i(o)$.

We zoeken nu dat punt (c_r, c_i) dat aan de randvoorwaarde aan de bodem voldoet, d.w.z. dat de snelheid aan de grond verdwijnt: $W_r(o) = W_i(o) = 0$. Dit gebeurt door eerst het roostervierkantje te bepalen waarbinnen zowel W_r als W_i van teken wisselt. Als er een nulpunt is dan ligt dit binnen zo'n roostervierkantje.

Om dit nulpunt (c_r, c_i) te bepalen gebruiken we een iteratieve twee-dimensionale secant methode. Het is echter niet gegarandeerd dat de iteraties convergeren. Dit kunnen we als volgt verduidelijken.

De methode maakt gebruik van de resultaten $W_r(z = 0)$ en $W_i(z = 0)$ van drie hoekpunten (c_r, c_i) van het roostervierkantje waarbinnen W_r en W_i van teken wisselen. $W_r(z = 0)$ is een functie van (c_r, c_i) en is dus voor te stellen als een vlak in de drie-dimensionale ruimte opgespannen door de c_r -, c_i -, W_r -assen.

Dit vlak $W_r(z = 0)$ snijdt het (c_r, c_i) -vlak volgens een snijlijn a. Analoog snijdt het vlak $W_i(z=0)$ het (c_r, c_i) -vlak volgens een snijlijn b. Alleen wanneer deze snijlijnen a en b een snijpunt binnen het roostervierkantje hebben, convergeert de iteratiemethode.

Elke iteratie maakt een nieuwe benadering voor het nulpunt (c_r, c_i) m.b.v. een gewogen middeling. De weegfactoren zijn

$$\begin{aligned} a_1 &= W_{r2} W_{i3} - W_{r3} W_{i2} \\ a_2 &= W_{r3} W_{i1} - W_{r1} W_{i3} \\ a_3 &= W_{r1} W_{i2} - W_{r2} W_{i1} \end{aligned}$$

met het rangnummer van het hoekpunt als tweede index. Voor het nieuwe punt (c_r, c_i) geldt

$$\begin{aligned} c_r &= (a_1 c_{r1} + a_2 c_{r2} + a_3 c_{r3}) / (a_1 + a_2 + a_3) \\ c_i &= (a_1 c_{i1} + a_2 c_{i2} + a_3 c_{i3}) / (a_1 + a_2 + a_3) \end{aligned}$$

De methode itereert door één oud roosterpunt weg te laten en een volgende benadering van het nulpunt te berekenen m.b.v. twee oude roosterpunten en het nieuw berekende punt. Indien deze iteratie convergeert naar een nulpunt (c_r, c_i) dan heeft het gestelde Taylor-Goldstein randwaarde probleem een oplossing voor de combinatie

(k, c_r, c_i) .

De eigenfunctie $W(z)$ behorende bij deze eigenwaarden k en c wordt verkregen door de Taylor-Goldstein vergelijking nogmaals van top naar de bodem te integreren. De andere grootheden $T(z)$, $U(z)$, $P(z)$ en $Rh(z)$ kunnen m.b.v. de polarisatie vergelijkingen (32)-(35) berekend worden.

IV.2. Spectrale methode

Van de fluctuatiemetingen worden spectra gemaakt m.b.v. de programma's CARTESE, PREPCOVEXTRA en SPEKTRAPLOT (Driedonks e.a., 1980). Geverifieerd wordt of de gevonden oplossingen van de stabiliteitsanalyse ook inderdaad opgewekt zijn en in de metingen terug te vinden zijn.

Dit wordt gedaan door de spectra te onderzoeken op het voorkomen van de karakteristieke eigenschappen van lineaire golven. Van het kruisspectrum van de verticale snelheid en de temperatuur wordt bekeken of voor een bepaalde frekwentieband de coherentie groot is en het fase-spectrum een $\frac{1}{2}\pi$. (zie II.5).

In dezelfde frekwentieband moet het cospektrum klein zijn en het quadratuurspektrum ongelijk nul. Als aan deze voorwaarden voldaan is, zijn er golven met deze frekwentie aanwezig in de atmosfeer.

V. Resultaten

V.1. Resultaten van de stabiliteitsanalyse

M.b.v. de meetresultaten van de achtergrondstroming worden de geprojecteerde windprofielen en het temperatuurprofiel bepaald. Hiermee kan geverifieerd worden of de stroming voldeed aan het Ri-getal criterium.

Voor elke richting waarin instabiliteiten kunnen ontstaan zijn deze oplossingen berekend.

Achtergrondstroming

De gemiddelde wind gemeten op verschillende hoogtes op 30 mei 1978 van 1 uur tot 2 uur varieerde over 60° (fig. 9). Deze metingen staan in tabel 1. De windshearvectoren berekend als het verschil van de gemeten winden op twee hoogtes liggen in het kwadrant tussen Noord en West. De grootste windshear trad op tussen de hoogtes 120 en 160 m. Fig. 10 geeft het temperatuurprofiel weer, de gemeten waarden staan in tabel 1.

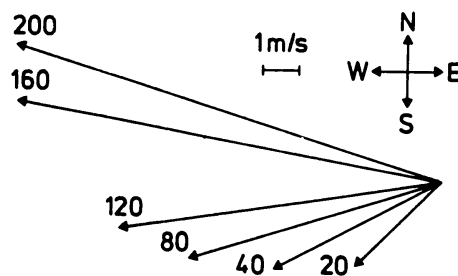


Fig. 8. Windmetingen op de hoogtes 20, 40, 80, 120, 160 en 200 m.

Van de winden werd de projectie berekend in een vertikaal vlak dat een hoek ϕ maakt met de Noord-Zuid richting, ϕ in stapjes van 20° , waarbij met de klok mee positief gerekend is. Deze geprojecteerde profielen staan in tabel 2 en verder in fig. 11.

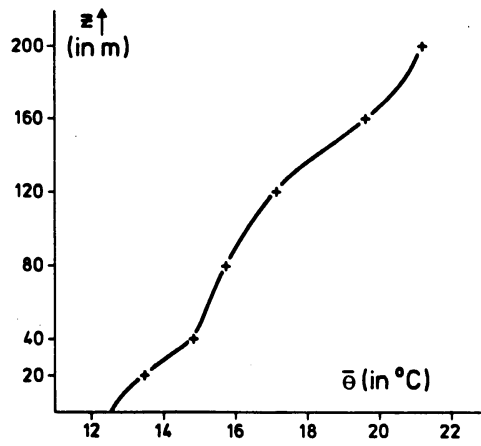


Fig. 9. Gemeten potentieel temperatuurprofiel.

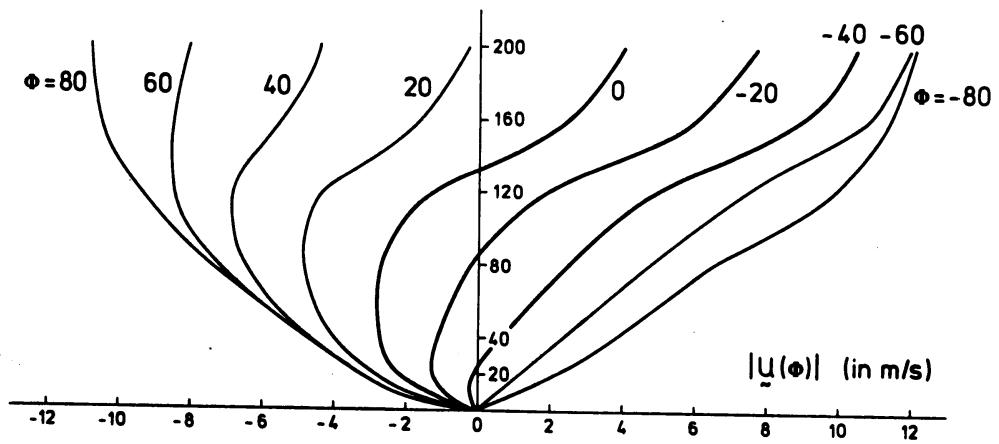


Fig. 10. Geprojecteerde windprofielen op een vertikaal vlak dat een hoek ϕ maakt met de Noord-Zuid richting.

Tabel 1. Gemeten wind- en temperatuurprofielen.

z	windsnelh.	windrichting	temp.
0	0	0	12.5
20	3.4	48	13.5
40	5.0	59	14.7
80	7.4	69	15.7
120	9.3	82	17.1
160	11.4	102	19.6
180	12.2	109	21.2

Tabel 2. Geprojecteerde windprofielen op richting ϕ .

$z \backslash \phi$	-80	-60	-40	-20	0	20	40	60	80
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	2.1	1.1	-0.1	-1.3	-2.3	-3.0	-3.4	-3.3	-2.9
40	3.8	2.4	0.8	-1.0	-2.6	-3.9	-4.7	-5.0	-4.7
80	6.3	4.7	2.4	-0.1	-2.7	-4.9	-6.5	-7.3	-7.3
120	8.8	7.3	4.9	1.9	-1.3	-4.4	-6.9	-8.6	-9.3
160	11.4	10.8	9.0	6.0	2.4	-1.6	-5.4	-8.5	-10.6
180	12.1	12.0	10.5	7.7	4.0	-0.2	-4.4	-8.0	-10.7

Richardson getal criterium

Het Richardson getal als functie van z is berekend voor elke projectierichting en het hoogtegebied is bepaald waar dit Richardson getal kleiner is dan een $\frac{1}{4}$. Alle profielen hadden een buigpunt op $z = 140$ m en daar is het Richardson getal minimaal (II.4.2.). Richardson getallen die kleiner dan $\frac{1}{4}$ zijn kwamen alleen voor rond het buigpunt van profielen in een projectierichting die samenviel met de windshear-richtingen. Deze windshearrichtingen berekend als het verschil van de gemeten winden op twee hoogtes liggen in het kwadrant tussen Noord en West.

In tabel 3 staat van alle richtingen die voldoen aan het Richardson getal criterium het Richardson getal verloop rond het buigpunt.

Tabel 3. Richardson getalverloop rond het buigpunt voor voortplantings-richtingen die samen vallen met de windshearrichtingen.

z	$\phi = 0$	$\phi = -20$	$\phi = -40$
110	0.53	0.33	0.26
120	0.32	0.23	0.21
130	0.24	0.19	0.18
140	0.22	0.18	0.19
150	0.23	0.20	0.22
160	0.31	0.28	0.31

Stabiliteitsanalyse

Op elk van deze richtingen is de stabiliteitsanalyse toegepast. In tabel 4 staat de oplossingsverzameling k , $\sigma_r = c_r k$, $\sigma_i = c_i k$ getabelleerd. De oplossingsverzameling vertoont voor elke ϕ de vorm

- een continu interval horizontale golfvectoren k
- een continu frekwentie interval $\sigma_r = c_r k$
- een continu verzameling groeisnelheden $\sigma_i = c_i k$
deze verzameling is een parabooolachtige functie van k en er is dus een k waarvoor een maximale groei optreedt.

Tabel 4. Oplossingsverzameling voor de projectierichtingen $\phi = 0$,
 $\phi = -20$ en $\phi = -40$.

$\phi = 0$

$k(10^{-3} \text{ m}^{-1})$	$\sigma_r(10^{-2} \text{ Hz})$	$\sigma_i(10^{-3} \text{ s}^{-1})$
7.5	-	-
10.0	1.8	2.3
12.5	2.5	4.7
15.0	3.1	5.0
17.5	3.8	3.7
20.0	-	-

$\phi = -20$

$k(10^{-3} \text{ m}^{-1})$	$\sigma_r(10^{-2} \text{ Hz})$	$\sigma_i(10^{-3} \text{ s}^{-1})$
5.0	-	-
7.5	2.0	1.6
10.0	3.2	5.1
12.5	4.3	6.3
15.0	5.4	5.9
17.5	6.5	4.0
20.0	-	-

$\phi = -40$

$k(10^{-3} \text{ m}^{-1})$	$\sigma_r(10^{-2} \text{ Hz})$	$\sigma_i(10^{-3} \text{ s}^{-1})$
5.0	-	-
7.5	3.7	2.3
10.0	4.9	3.7
12.5	7.4	5.0
15.0	9.2	3.9
17.5	11.1	1.3
20.5	-	-

De windshear is maximaal in de richting $\phi = -20$. In deze richting worden de golven met maximale groeisnelheid opgewekt (tabel 4). In fig. 12 staat de oplossingsverzameling (k , c_r , c_i) afgebeeld.

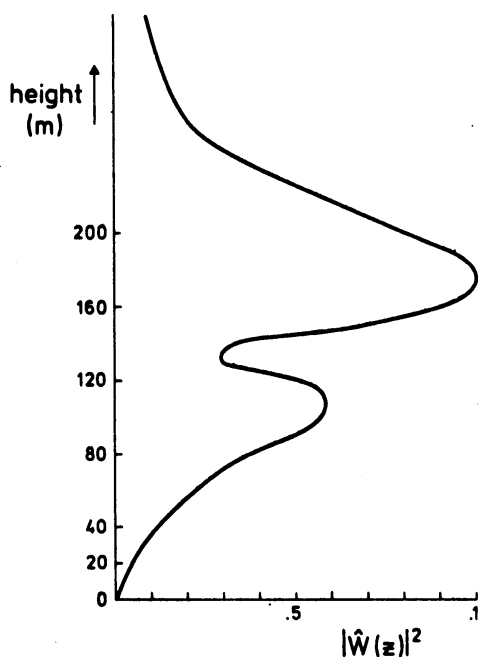


Fig. 11. Oplossing voor de richting met maximale shear ($\phi = -20$).

Wanneer we de resultaten van de stabiliteitsanalyse samenvatten komen we tot de conclusie dat er in deze atmosferische situatie door de shear golven opgewekt kunnen worden met een frequentie $f = \sigma_r / 2 \pi$ van $3 \cdot 10^{-3}$ Hz tot $2 \cdot 10^{-2}$ Hz.

De golflengtes van deze golven variëren van 350 tot 650 m. De golf die het snelst groeit heeft een groeisnelheid van $6 \cdot 10^{-3}/s$, deze plant zich voort in de richting van de maximale shear.

Voor elke voortplantingsrichting die voldoet aan het Richardson getal criterium is er echter een golf die het snelste groeit (tabel 4). Van deze golven hebben we het amplitudoprofiel van de verticale fluctuatiesnelheid $W(z)$ berekend (tabel 5). De amplitudoprofielen hebben

een typische Kelvin-Helmholtz structuur met twee maxima en één minimum op de hoogte waar het Richardson getal het kleinst is. Dit minimum valt dus samen met het buigpunt en ook met het punt waar de windsnelheid gelijk is aan de reële golfsnelheid.

Tabel 5. Amplitudo van de verticale fluctuatiesnelheid van de golf met maximale groeisnelheid genormeerd met maximale waarde.

z (in m)	$\phi = 0$ $\ W\ ^2$	$\phi = -20$ $\ W\ ^2$	$\phi = -40$ $\ W\ ^2$
0	0.0	0.0	0.0
20	0.1	0.0	0.0
40	0.3	0.1	0.1
60	0.5	0.2	0.1
80	0.7	0.4	0.2
100	0.9	0.6	0.4
120	0.0	0.5	0.3
140	0.1	0.3	0.5
160	0.8	0.9	0.9
170	1.0	1.0	1.0
180	0.9	0.9	0.9
200	0.7	0.8	0.7
220	0.5	0.5	0.5
240	0.3	0.3	0.3
260	0.2	0.2	0.2
280	0.1	0.1	0.1
300	0.2	0.1	0.1

De genormeerde energieinhoud $\|W(z)\|^2$ van de golf in de richting van de maximale windshear staat afgebeeld in fig. 13. Deze energieinhoud is genormeerd met de maximale waarde. De absolute waarde van de amplitudo is alleen te bepalen m.b.v. een begin-waarde probleem.

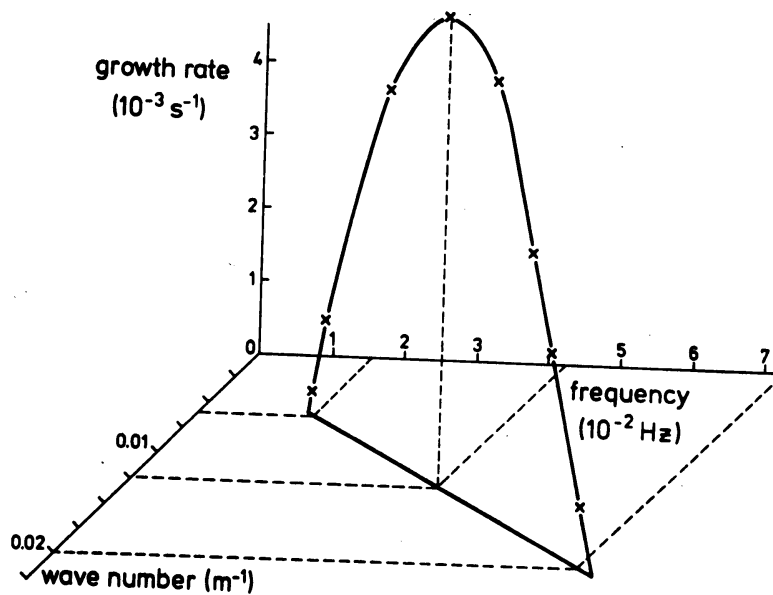


Fig. 12. Amplitude van de verticale fluctuatiesnelheid van de golf met maximale groeisnelheid in de richting $\phi = -20$, $k = 12.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$; $\sigma_r = 4.3 \cdot 10^{-2} \text{ Hz}$ en $\sigma_1 = 6.3 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$.

V.2. Resultaten van de spectrale methode

Van de fluctuatiemetingen van de verticale snelheid w en van de potentiële temperatuur θ zijn de volgende spectra berekend: het energiespectrum van w en van θ , het coherentie en fase spectrum, het co- en kwadratuurspectrum (Bendat e.a., 1966). De energiespectra voor w en θ staan in fig. 14.

Duidelijk is een grote energiepiek te zien rond $f = 10^{-2} \text{ Hz}$ op de hoogtes 160 en 120 m. Deze piek werd onderzocht op lineaire golfeigenschappen. De fase en coherentiespektra van de hoogtes 160 en 120 m (fig. 15) vertonen duidelijk de golfkenmerken rond deze frequentie, nl. een zeer constante fase gelijk aan $\frac{1}{2}\pi$ en een grote coherentie. Buiten dit gebied zijn ze rondom verdeeld, wat op turbulentie duidt. Het cospectrum en het kwadratuurspectrum op deze hoogtes bevestigen de golfeigenschappen. Het cospectrum is klein en het kwadratuurspectrum groot.

Deze piek komt vrijwel overeen met de oplossingsverzameling van de stabiliteitsanalyse, waaruit we concluderen dat in dit geval alle

Kelvin-Helmholtz golven in de atmosfeer voorkwamen en terug te vinden zijn in de spectra. Dit ondanks de beperkingen aan ons onderzoek dat we alleen golven opgewekt door shear beschouwen en dat we geen rekening houden met het feit dat Kelvin-Helmholtz golven kunnen overgaan in turbulentie. In fig. 16 en 17 is de oplossingsverzameling van de stabiliteitsanalyse ingetekend in de spectra.

V.3. Verklaring van de variantieprofielen

We hebben gezien dat de oplossingen van het Taylor-Goldstein randwaarde probleem ook terug te vinden zijn in de gemeten spektra. Verder willen we nagaan of de structuur van de Kelvin-Helmholtz golven het variantieprofiel van de verticale snelheidsfluctuaties verklaren kan.

Hiertoe is de energieinhoud van deze fluctuaties in het frequentie gebied van $3 \cdot 10^{-3}$ tot $2 \cdot 10^{-2}$ Hz berekend, genormeerd met de waarde op 160 m. Het resultaat staat in fig. 18, waarin ook de Kelvin-Helmholtz golf die het snelst groeit getekend is (zie fig. 13). Wanneer we deze twee profielen vergelijken zien we dat beide een maximum rond 170 m vertonen.

Het tweede kleinere maximum van het berekende profiel vinden we niet terug in de metingen. Dit is waarschijnlijk een gevolg van het feit, dat er turbulentie in de atmosfeer aanwezig was tot op de grenslaaghoogte van 180 m. Deze turbulentie overheerst de golfstructuur op lagere hoogtes. We zien dat de structuur van de Kelvin-Helmholtz golven een goede verklaring geeft voor het afwijken van het op grond van het stabiele grenslaagmodel verwachte variantieprofiel.

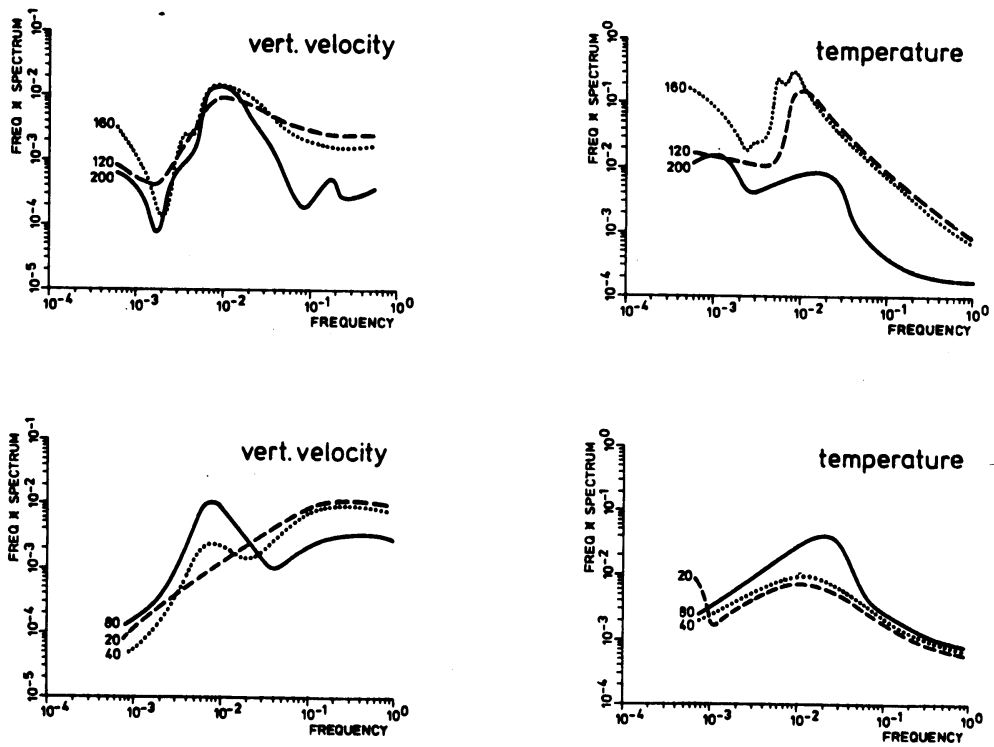


Fig. 13. Spectra van verticale snelheid en temperatuur
30 mei 1978, 01-02 uur.

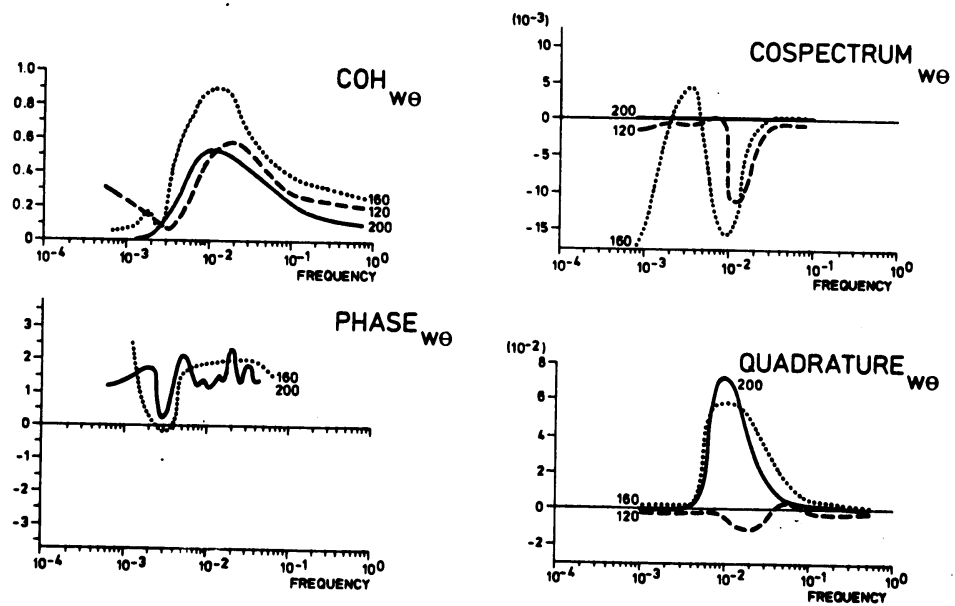


Fig. 14. Coherentie, fase, co- en kwadratuurspectra van fluctuatie metingen, 30 mei 1978, 01-02 uur.

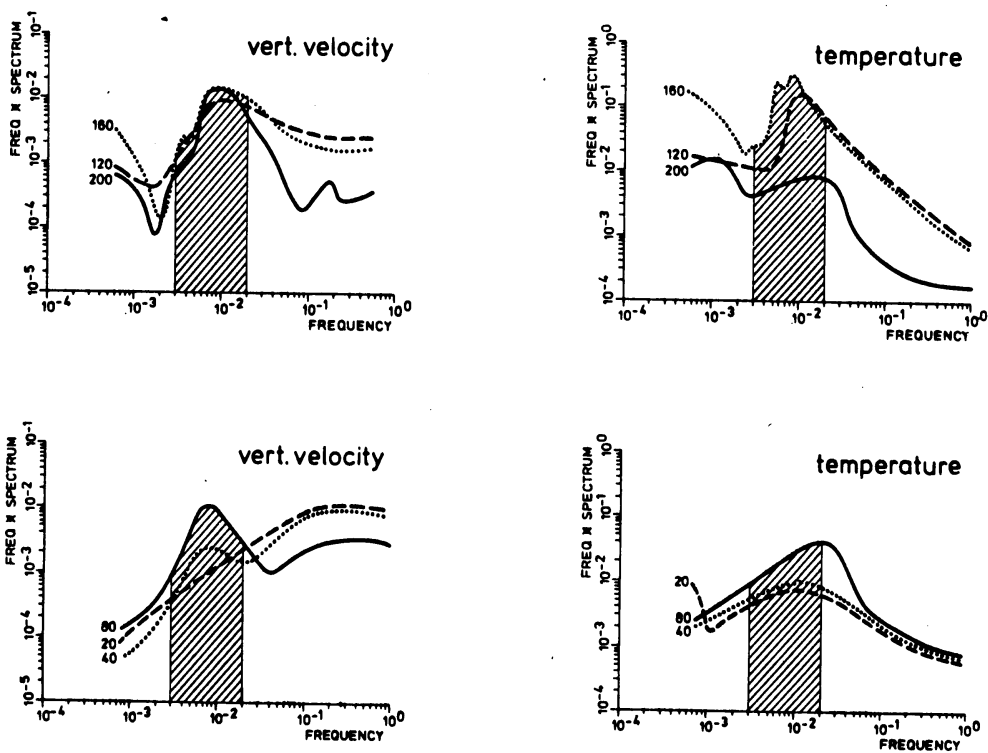


Fig. 15. Spectra van verticale snelheid en temperatuur met daarin aangegeven de oplossingen van de stabiliteitsanalyse.

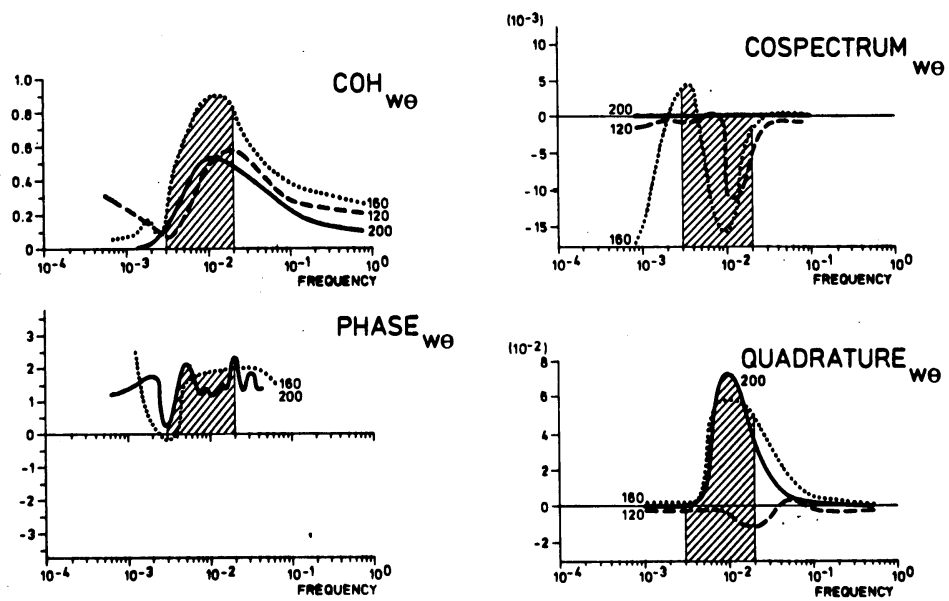


Fig. 16. Spectra met oplossingen van de stabiliteitsanalyse (gearceerde gebied).

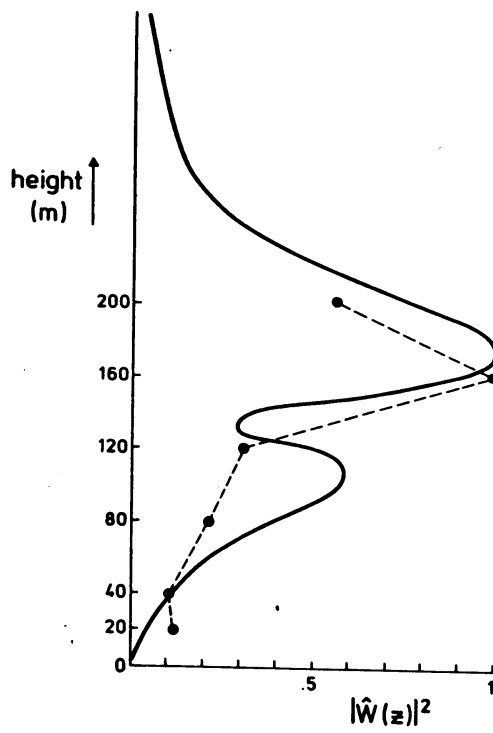


Fig. 17. -- gemeten variantie van de verticale snelheidsfluctuaties
 — kwadraat van de amplitude van de Kelvin-Helmholtz golf
 met maximale groei.

VI. Conclusies

Dit onderzoek heeft zich gericht op het verklaren van gemeten anomalieën in de stabiele grenslaag, met name een met de hoogte toenemende variantie van de verticale snelheid. Op grond van de structuur van de turbulentie in een stabiele grenslaag zou de variantie van de verticale snelheid af moeten nemen met de hoogte. Wanneer dit niet het geval is kan dit het gevolg zijn van golven.

Bij het beschouwen van de golfbijdragen aan de variantie hebben we ons beperkt tot de door shear opgewekte Kelvin-Helmholtz golven. Deze K.H. golven groeien uit instabiliteiten, die berekend kunnen worden m.b.v. een stabiliteitsanalyse van het Taylor-Goldstein randwaarde probleem voor de achtergrondstroming. De stabiliteitsanalyse werd toegepast op het uurmetingen van 1 tot 2 uur 30 mei 1978. Deze analyse is gebaseerd op lineaire-theorie.

Rekeninghoudend met het feit dat K.H. golven alleen de windshear in hun voortplantingsrichting voelen, werd de analyse toegepast m.b.v. geprojecteerde windprofielen. Voor voortplantingsrichtingen, die voldeden aan het Ri getal criterium voor instabiliteit, had de oplossingsverzameling de volgende vorm: Een continu gebied van groeiende golven, begrensd door twee neutraal stabiele oplossingen. De snelst groeiende oplossingen hebben een golflengte, die 5 tot 8 maal de shearlaagdikte lang is en een reële fasesnelheid, die gelijk is aan de windsnelheid in het buigpunt. De groeisnelheid is een parabolachtige functie op het continue golfgetal interval.

De frekwentie van de Kelvin-Helmholtz instabiliteiten komen overeen met een gebied in de spectra, dat voldoet aan de golfcriteria. Ondanks dat we ons in dit onderzoek alleen tot deze instabiele golven, opgewekt door shear, hebben beperkt en er nog veel meer golven mogelijk zijn in de stabiele atmosfeer, kunnen we in dit geval het golfgebied uit de spektra verklaren met deze Kelvin-Helmholtz golven.

De eigenfuncties $W(k, c_r, c_i, z)$ van het Taylor-Goldstein randwaarde probleem hebben een typische Kelvin-Helmholtz vorm: een minimum in het buigpunt van het windprofiel en twee maxima aan weerszijde. De vorm van deze eigenfuncties $W(z)$ werd vergeleken met het gemeten variantieprofiel. Beide vertonen een groot maximum rond 170 m. Het

tweede kleinere maximum van de eigenfunctie $W(z)$ vinden we niet terug in het gemeten variantieprofiel. De grenslaaghoogte gedurende dit uur was klein. De turbulentie is het sterkst op lagere hoogtes en overheerst hier met zijn mengend effect de golfstructuur.

We komen dan tot de conclusie dat, als we de Taylor-Goldstein vergelijking voor gemeten wind en temperatuurprofielen oplossen, we Kelvin-Helmholtz oplossingen vinden, die inderdaad voorkomen in de atmosfeer en gemeten kunnen worden m.b.v. spectra. Deze golven kunnen het afwijkend gedrag van de variantieprofielen verklaren in gevallen, waarin Kelvin-Helmholtz golven domineren over eventueel ook aanwezige turbulentie en andere soorten golven.

Aanbevelingen voor verder onderzoek

Dit onderzoek heeft zich geconcentreerd op de bestudering van één geval, waarin de golven duidelijk meer energie hadden dan de turbulentie. Onderzocht moet worden voor welke atmosferische condities deze methode resultaten geeft.

De onderzochte Kelvin-Helmholtz golven worden door de shear opgewekt. Gedacht kan worden aan andere ontstaanmechanismes, die golven doen ontstaan, zoals het opstijgen van luchtballonnen die tegen de inversie aanstoten. Dit zou op moeten treden vlak na zonsopgang, maar de inversie bleek vaak te hoog om te kunnen meten boven de menglaag.

De voortplantingsrichting van de golf kan niet gemeten worden, omdat er slechts één meetplaats is. Onderzocht kan worden of deze richting te bepalen is m.b.v. het op hoofdasen brengen van de correlatiematrix van de golfgrootheden, waarbij de eigenwaarde van de eigenvector een maat voor de energie van de golf in deze richting is. Deze methode werkt als het aantal energierijke golven kleiner is dan de dimensie van de correlatiematrix.

Met de lineaire benadering van het probleem kan alleen het ontstaan van de golven beschreven worden. Niet-lineaire effecten bepalen de groei van de golven. Deze mechanismes worden beschreven m.b.v. niet-lineaire differentiaalvergelijkingen, die een geheel eigen oplosmethode vereisen.

Verder zouden deze Kelvin-Helmholtz golven de turbulentie kunnen moduleren. Zie hiervoor de artikels van J. Klostermeijer.

Literatuurlijst

- Bendat, J.S. & Piersol, A.G., 1966: Measurements and Analysis of Random Data. Wiley & Sons, New York.
- Betchov, R. & Criminale, W.O., 1967: Stability of Parallel Flows. Applied Math. & Mech. Ser. Vol. 10, Acad. Press.
- Busch, N.E., 1969: Waves and Turbulence. Radio Science, Vol. 4 nb 12, 1377-1379.
- Davis, P.A. & Peltier, W.R., 1976: Resonant Parallel Shear Instability in the Stably Stratified Planetary Boundary Layer. Journal of the Atm. Sc., Vol. 33.
- Drazin, P.G., 1957: The stability of a shear layer in an unbounded heterogenous inviscid fluid.
- Drazin, P.G. & Reid, W.H., 1981: Hydrodynamic Stability. Camb. Monographs on Mech. and App. Math. Cambridge Univ. Press.
- Driedonks, A.G.M. & v. Dop, H. & Kohsiek, W.H., 1978: Meteorological observations on the 213 m mast at Cabauw in the Netherlands. Fourth Symp. Met. Obs. and Inst. Denver. Am. Met. Soc., 41-46.
- Driedonks, A.G.M., Nieuwendijk, P.A.T. and Goes, C.J., 1980: A set of computer programs to process turbulence data measured at the 200 m mast at Cabauw. KNMI WR 80-3.
- V. Duin, C.A., 1981: On the propagation and ducting of waves in inhomogeneous media. Ph. D. Thesis Univ. of Eindhoven.
- V. Duin, C.A. & Kelder, H., 1981: Reflection properties of internal gravity waves incident upon a hyperbolic tangent shear layer. J. Fluid Mech., vol. 120, 505-521.

- Duin, C.A. van, 1983: Some general properties of ideal fluids with regular critical layers. KNMI-WR 83-1.
- Dutton, J.A., 1976: the ceaseless wind. McGrawhill book company, New York.
- Einaudi, F. & Finnigan J.J., 1981: The interaction between an internal gravity wave and the planetary boundary layer. Part I: the linear analysis. Quart. J. R. Met. Soc., vol. 107, 793-806.
- Dutton, J.A., and G.H. Fichtl, 1969: Approximate equation of motion for gases and liquids. J. Atmos. Sci., 26, 241-254.
- Fritts, D.C., 1982: Shear Extension of Atm. Gravity Waves. Journ. Atm. Sci., vol. 39, 1936-1952.
- Gossard, E.E. & Hooke, W.H., 1975: Waves in the atmosphere; Atm. Infra-sound and gravity waves; Their generation and propagation level. Developments in Atm. Sc. 2, Amsterdam.
- Harris, F.J., 1978: On the use of windows for harmonic analysis with discrete Fourier transform. Proceedings of the IEEE, vol. 66, no. 7.
- Kantha, L.H., 1978: On the generation of internal waves by turbulence in the mixed layer. Dyn. Atm. Oceans, Vol. 3, 39-46.
- Klostermeijer, J., 1980: Computation of Acoustic-Gravity waves, Kelvin-Helmholtz instabilities, and wave-induced eddy transport in realistic atmospheric models. J. of Geophysical Research, vol. 85, 2829-2839.
- Klostermeijer, J. & R. Rüster, 1980: Radar observation and model computation of a jetstream generated Kelvin-Helmholtz instability. J. of Geophysical Research, vol. 85, 2841-2846.

- Klostermeijer, J. & R. Rüster, 1981: Further study of a jetstream-generated Kelvin-Helmholtz instability. *J. of Geophysical Research*, vol. 86, 6631-6637.
- Lalas, D.P. & Einaudi, F., 1976: On the characteristics of gravity waves generated by atmospheric shear layers. *Journ. Atm. Sci.*, vol. 3, 1248-1259.
- Lighthill, J., 1978: *Waves in Fluids*. Cambridge Univ. Press London.
- Miles, J.W. & Howard, L.N., 1964: Note on a heterogeneous shear flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 20, 331-336.
- Stull, R.B, 1976: Internal gravity waves generated by penetrative convection. *Journ. Atm. Sci.*, vol. 33, 1279-1286.

APPENDIX

A.I. Beschrijving van het stabiliteitsanalyse programma STABAN.

A.II. Programma listing STABAN.

A.I. Beschrijving van het stabiliteitsanalyse programma STABAN.

Dit programma zoekt alle instabiele oplossingen van het randwaarde probleem voor de Taylor-Goldstein vergelijking

$$W''(z) + \left[\frac{N^2}{(u_0 - c)^2} - k^2 - \frac{u_0''}{(u_0 - c)} \right] W(z) = 0.$$

Voor de wind- en temperatuurprofielen worden 3^e graads polynomen berekend met constante coëfficiënten F_j , B_j , K_j , C_j op een meet-interval j met $z_j < z < z_{j+1}$ m.b.v. de procedure SPLINE (zie KNMI memorandum 75-645).

$S_j(z) = F_j + (z - z_j)B_j + \frac{1}{2}(z - z_j)^2 K_j + \frac{1}{6}(z - z_j)^3 C_j$, waarbij S de wind dan wel temperatuur is en z_j de meethoogte.

Het windprofiel wordt langs een opgegeven richting berekend die een hoek FI met de Noord-Zuid richting maakt, positief met de klok mee. Het minimum en maximum van de wind wordt berekend (te gebruiken in het theorema van Howard).

De Taylor-Goldstein vgl. wordt opgelost voor verschillende golfgetallen kk , waarvan de beginwaarde BIASKK, de stapgrootte DKK en het aantal stappen KKT opgegeven wordt. De minimale en maximale reële golfsnelheid is UMIN en UMAX.

De horizontale stapgrootte DCR van het rooster in het (c_r, c_i) -vlak wordt bepaald door $DCR = (UMAX - UMIN)/JJT$ waarbij JJT het op te geven aantal stappen is. De minimale imaginaire golfsnelheid wordt gesteld op 0.001 m/s^2 ($c_i=0$ is een singulier punt van de vergelijking).

Het aantal stappen MMT wordt opgegeven en m.b.v. het Howard theorema wordt de stapgrootte DCI bepaald als $DCI = MMT(UMAX - UMIN)/2$.

Het verdere programma bestaat uit een grote do-loop die voor elke golfvector doorlopen wordt.

Het array SEAR wordt op elk roosterpunt (JJ,MM) van het (c_r, c_i) -vlak binnen de bovenste helft van de cirkel (zie II.4.3.) gevuld met de waarden van c_r , c_i , $W_r(0)$ en $W_i(0)$, die als volgt berekend zijn: de waarden van de verticale snelheid aan de top $z = z_u$ worden berekend m.b.v. de procedure BCAUX waarna de integratie van de Taylor-Goldstein vgl. van de top naar de grond plaatsvindt in de procedure VALZL, wat

$W_r(o)$ en $W_i(o)$ levert.

Procedure BCAUX

De procedure BCAUX is opgebouwd uit een aantal subroutines, waarvan de procedures UNULTHETA en LABDA ook later weer gebruikt worden.

BCAUX berekent het reële en imaginaire deel van $W(z_u)$ en $dW(z_u)/dz$ in een array G1. Het hoogtebereik z_u is zo gekozen dat in de bovenste laag ($200 \text{ m} < z < z_u = 500 \text{ m}$) de wind en temperatuur constant zijn. Zodoende is ook Λ constant en heeft de T.G. vgl. $W'' + \Lambda W = 0$ als oplossing $W(z) = \exp(inz)$ met $n = \pm \sqrt{\Lambda} = \pm (n_r + in_i)$ dus $W(z) = \pm e^{(in_r z - n_i z)}$. $\Lambda(z_u)$ wordt berekend m.b.v. de procedure LABDA toegepast op $z = z_u$.

Procedure LABDA

De wind en temperatuur worden op hoogte z berekend m.b.v. de procedure UNULTHETA (zie programma tekst). Met deze gegevens en de waarden k en $c = (c_r, c_i)$ kunnen het reële en imaginaire deel van Λ berekend worden:

$$\Lambda_r = \frac{N^2}{((u_o - c_r)^2 + c_i^2)^2} ((u_o - c_r)^2 - c_i^2) - k^2 - \frac{u_o''}{(u_o - c_r)^2 + c_i^2} (u_o - c_r)$$

$$\Lambda_i = \frac{2(u_o - c_r)c_i N^2}{((u_o - c_r)^2 + c_i^2)^2} - \frac{u_o'' c_i}{((u_o - c_r)^2 + c_i^2)}$$

De wortel $n(z_u)$ uit de constante waarde $\Lambda(z_u)$ wordt berekend m.b.v. de procedure NN.

Procedure NN

M.b.v. de procedure A02AAA uit de NAG bibliotheek wordt de complexe wortel $n(z_u)$ uit het complexe getal $\Lambda(z_u)$ berekend (zie II.4.5.). Het teken van de wortel wordt bepaald aan de hand van de randwaarde aan de top.

- indien $n_i = 0$ leggen we de eis op dat er alleen energie uitgestraald wordt en er geen transport van energie de laag in plaats vindt; de groepssnelheid in de z -richting $(c_g)_z > 0$.

$(c_g)_z > 0$ impliceert een keus voor het teken van de wortel uit Λ als

volgt:

$$\Lambda = \frac{N^2}{(u_o - c)^2} - k^2$$

$$n = \pm \left(\frac{N^2 k^2}{(ku_o - \omega)^2} - k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = n_r$$

$$n^2 (ku_o - \omega)^2 = N^2 k^2 - k^2 (ku_o - \omega)^2$$

$$(c_g)_z = \frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{n(ku_o - \omega)}{n^2 + k^2} = \frac{nk(u_o - c)}{n^2 + k^2}$$

Als $u_o(z_u) > c$ dan is $(c_g)_z > 0$ als $n_r > 0$

Als $u_o(z_u) < c$ dan is $(c_g)_z > 0$ als $n_r < 0$.

- indien $n_i \neq 0$ kiezen we het teken van de wortel zo dat $n_i > 0$ omdat de golf dan uitdempt boven de laag en er nauwelijks energie transport plaatsvindt de laag in of uit: $n = (\text{sign } n_i)(n_r + in_i)$.

Procedure VALZL

De Taylor-Goldstein vergelijkingen (reëel en imaginair deel) worden geïntegreerd van de top naar de bodem met als resultaat de verticale snelheid aan de grond. Dit gebeurt in de procedure VALZL.

$$\begin{aligned} W'_r &= dW_r/dz ; & W'_i &= dW_i/dz \\ \text{T.G. vgl}^{\text{en}} \quad W''_r + \Lambda_r W_r - \Lambda_i W_i &= 0 \\ W''_i + \Lambda_i W_r + \Lambda_r W_i &= 0 \end{aligned}$$

De procedure D02BBA uit de NAG bibliotheek verzorgt de integratie van deze set vergelijkingen met resultaten $W_r(o)$ en $W_i(o)$ in het array SOL. Hierbij worden de arrays Y en F gebruikt die de componenten van de vergelijkingen bevatten.

$$\begin{aligned} Y[1] &= W_r \\ Y[2] &= W_i \\ Y[3] &= W'_r = F[1] \\ Y[4] &= W'_i = F[2] \\ W''_r &= F[3] = -\Lambda_r W_r + \Lambda_i W_i \\ W''_i &= F[4] = -\Lambda_i W_r - \Lambda_r W_i \end{aligned}$$

Nadat het array SEAR gevuld is met de waarden van c_r , c_i , $W_r(o)$ en $W_i(o)$ in de halve cirkel worden de resultaten op de roosterpunten als volgt verwerkt. Eerst wordt een plot gemaakt van de tekens van $W_r(o)$ en $W_i(o)$.

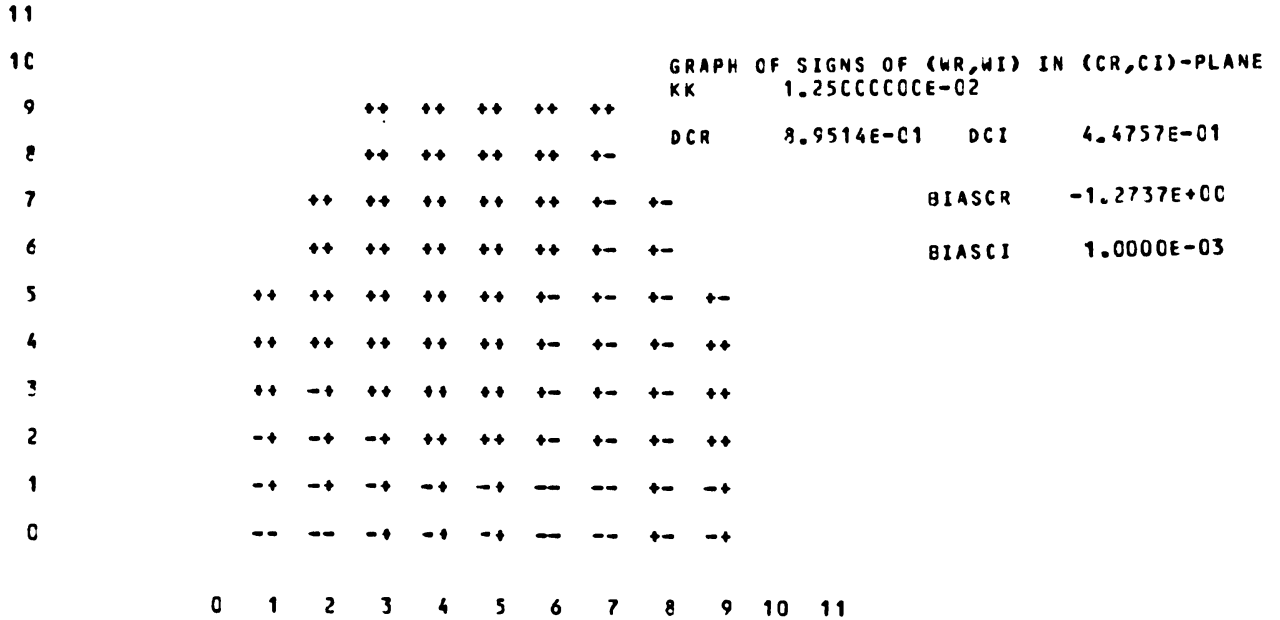


Fig. 18. Voorbeeld voor tekenplot van $W_r(o)$ (rechterteken) en $W_i(o)$ (linkerteken).

De roostervierkantjes worden gezocht, waarbinnen W_r en W_i mogelijk een nulpunt hebben: W_r zowel als W_i moeten binnen het vierkantje van teken wisselen. De coördinaten van de linkeronderhoekpunten worden opgeslagen in het array NULPT. Elk vierkantje wordt als volgt verwerkt:

De waarden $W_r(o)$ en $W_i(o)$ van drie hoekpunten van zo'n vierkantje worden gebruikt in de iteratieve secant methode, die een betere schatting maakt voor het nulpunt (c_r, c_i) . Deze schatting wordt als volgt bepaald:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= W_{r2} W_{i3} - W_{r3} W_{i2} & c_r &= (a_1 c_{r1} + a_2 c_{r2} + a_3 c_{r3}) / (a_1 + a_2 + a_3) \\
 a_2 &= W_{r3} W_{i1} - W_{r1} W_{i3} & c_i &= (a_1 c_{i1} + a_2 c_{i2} + a_3 c_{i3}) / (a_1 + a_2 + a_3) \\
 a_3 &= W_{r1} W_{i2} - W_{r2} W_{i1}
 \end{aligned}$$

De volgende iteratie gebruikt punt 2 en 3 en de nieuwe schatting van het nulpunt, na op dit nieuwe punt $W_r(o)$ en $W_i(o)$ berekend te hebben met de

procedure VALZL (zie eerder). De iteratie procedure wordt afgebroken als geen convergentie optreedt binnen 15 stappen of het nieuw berende punt (c_r, c_i) buiten de bovenste halve cirkel komt.

Indien er convergentie optreedt wordt dit nulpunt (c_r, c_i) de uiteindelijke oplossing $W(z)$ berekend m.b.v. de procedures BCAUX en VALZL (zie eerder) evenals de andere golfgrootheden $U(z)$, $P(z)$, $T(z)$, $Rh(z)$ (zie II.3.3.)

met hun energie inhouden σ_w^2 , σ_{wt}^2 , σ_T^2 , σ_u^2 , σ_{uw}^2 , σ_{ut}^2

geprint worden: $u_o(z)$, $\partial u_o / \partial z$, $\partial^2 u_o / \partial z^2$, $\theta(z)$

$N^2(z)$, $Ri(z)$, $\Lambda(z)$

$W(z)$, $U(z)$, $P(z)$, $T(z)$, $Rh(z)$

σ_w^2 , σ_{wt}^2 , σ_T^2 , σ_u^2 , σ_{uw}^2 , σ_{uT}^2

de intrinsieke frequentie $\omega(z) = (c_r - u_o(z))k$.

Invoer

DATUM,DATUM2	(219)	specificatie van de meetperiode
F12	(F8.0)	richting waarin de wind geprojecteerd wordt
FF1	(/)	windsnelheden (gemeten en geëxtrapoleerd) op 11 punten $z = 0, 20, 40, 80, 120, 160$ en 200 m
DD1	(/)	windrichtingen
F	(/)	temperaturen
BIASDD,DKK,KKT	(2(F8.5,I3))	beginwaarde, stapgrootte en aantal stappen van de horizontale golfvector kk .
JJT,MMT	(/)	aantal stappen van resp. c_r en c_i waarmee de bovenste halve cirkel uit het Howard theorema doorlopen wordt.

Uitvoer

specificatie van de meetperiode DATUM
projectierichting FI
minimale en maximale windsnelheid UMIN, UMAX
gemeten windsnelheid en richting op 11 hoogtes
berekende windprofielcoëfficiënten in de 10 intervallen (F,B,K,C)
gemeten temperatuur op de 11 hoogtes
berekende temperatuurprofielcoëfficiënten in de 10 intervallen (F,B,K,C)
golfvectoren en golfsnelheden die gebruikt zijn:
voor golfvector : beginwaarde : BIASKK
: stapgrootte : DKK
: aantal stappen : KKT
voor golfsnelheid: beginwaarden : BIASCR, BIASCI
: stapgroottes : DCR, DCI
: aantal stappen : JJT, MMT

voor elke golfvector:
- een plotje van de tekens van $(W_r(o), W_i(o))$ in het (c_r, c_i) -vlak met gegevens over k, c_r, c_i (zie fig. 19).

- de linkeronderhoekpunten van de vierkanten waarin voor zowel W_r als W_i tekenwisseling optreedt.
- voor elk vierkantje:
- de waarden van c_r , c_i , $W_r(o)$ en $W_i(o)$ op de drie punten gebruikt in de secant methode, dit voor elke iteratie.
 - indien de iteratieprocedure convergeert de uiteindelijke oplossing:
 - de waarde IFAIL een parameter uit de procedure D02BBA
 - golfgetal, golflengte, c_r , c_i , frequentie groeisnelheid
 - voor elke hoogte om de 5 meter vijf regels met
 - 1^e regel: hoogte z , de intrinsieke frekwentie ω ,
 - 2^e regel: achtergrond u_o , afgeleide $\partial u_o / \partial z$, tweede afgeleide $\partial^2 u_o / \partial z^2$ potentiële temperatuur θ_o , Brunt Vaisale frekwentie N^2 en het Richardson getal Ri .
 - 3^e regel: reële deel, imaginair deel, de modulo en het argument van Λ en de verticale snelheid W .
 - 4^e regel: reële deel, imaginair deel, de modulo en het argument van horizontale snelheid U en de druk P .
 - 5^e regel: idem voor dichtheid ρ en de temperatuur T .
 - de energieinhouden genormaliseerd op hun maximale waarde σ_w^2 , σ_{wt}^2 , σ_u^2 , σ_{uw}^2 , σ_{uT}^2 voor elke 5 meter.
 - indien geen convergentie
 - omdat het aantal iteraties groter worden dan 15, wordt geprint "NO CONVERGENCE WITHIN 15 ITERATIONS"
 - omdat het nieuwe punt buiten de halve cirkel ligt "NO CONVERGENCE INSIDE RANGES"

A II Programma listing.

PROG/STABAN (05/31/83)

```

100      BEGIN JOB STABAN;USERCODE=BAAA/ANNE;CHARGECODE=MOBALG;
200      CLASS=6;
300      COMPILER OBJECT/STABAN WITH ALGOL;
400      ALGOL FILE CARD=STABAN ON TEST;
500      FILE CARD=INPUT/STABAN ON TEST;
600      END JOB;

```

WORKFILE: INPUT/STABAN (05/31/83)

```

100      781500100,781500200
200      -20
300      0.,3.4,5.0,7.4,9.3,11.4,12.2,12.2,12.2,12.2,12.2
400      0,48,59,69,82,102,102,109,102,109,109
500      12.5,13.5,14.7,15.7,17.1,19.6,21.2,22.1,23.0,23.9,27.9
600      .0025,.0025,10
700      10,10

```

O B J E C T / S T A B A N O N D I S K
 = = = = =

```
$SET LIST LINEINFO
$SET LISTINCL
BEGIN
```

```
XTHIS PROGRAM CALCULATES EIGENVALUES C (REAL) AND C (IM) AND
XEIGENFUNCTIONS W(Z) (REAL AND IMAG PART) FOR GIVEN (IN PROGRAM) REAL
XWAVE NUMBER KK FOR TAYLOR-GOLDSTEIN EQUATION WITH BOUNDARY
XCONDITIONS  $w=0$  AT  $ZL=0$  AND  $DW/DZ=+IKW$  FOR  $Z=ZU$ .
XWIND AND TEMPERATURE PROFILES ARE IMPOSED AS UNUL(Z),
XD2U/DZ2(Z), THETA(Z) AND N2(Z) (B.V. FREQ.).
XSPLINE INTERPOLATION FOR THE PROFILES IS USED
XMETHOD OF SOLUTION IS 2-DIM SECANT TECHNIQUE FOR FINDING
X THE ROOTS CREAL AND CIM.
XFIRSTLY THE ROOTS ARE LOCATED IN THE CR,CI PLANE
XBY A SEARCH AND STEP PROCEDURE.THESE FINDINGS CAN BE
XUSED AS THE INITIAL GUESSES FOR THE PARAMETERS.
XWITH THE RESULTING CR,CI THE FINALSOLUTION W(Z) IS CALCULATED
XAS WELL AS THE OTHER WAVE CHARACTERISTICS SL 52500
XTHIS METHOD FAILS WHEN C(IM)=0.
X
LIBRARY NAGLIBRARY(TITLE="*SYSTEM/NAGLIBRARY CN TEST.");
$INCLUDE "*NAGAI/A02AAA ON TEST."
PROCEDURE A02AAA(XR,XI,YR,YI);
  VALUE XR,XI;
  REAL XR,XI,YR,YI;
  LIBRARY NAGLIBRARY;X.....
$INCLUDE "*NAGAI/D02BBA ON TEST."
PROCEDURE D02BBA(X,XEND,N,Y,TOL,IRELAB,FCN,OUTPUT,IFAIL);
  VALUE XEND,N,IRELAB;
  REAL X,XEND,TOL;
  INTEGER N,IRELAB,IFAIL;
  REAL ARRAY Y[1];
  PROCEDURE FCN(T,Y,F);
    VALUE T;
    REAL T;
    REAL ARRAY Y,FC[1];
    FORMAL;
  PROCEDURE OUTPUT(XSOL,Y);
    REAL XSOL;
    REAL ARRAY Y[1];
    FORMAL;
  LIBRARY NAGLIBRARY;X.....
XPROCEDURE D02BBA(X,XEND,N,Y,TOL,IRELAB,FCN,OUTPUT,IFAIL);
X INTEGRATION PROCEDURE FROM NAG LIBRARY
XVALUE XEND,N,IRELAB;
XINTEGER N,IRELAB,IFAIL;
XREAL X,XEND,TOL;
XREAL ARRAY Y[*];
XPROCEDURE FCN,OUTPUT;
XEXTERNAL;
X
X
X$INCLUDE "NAG/ALGOLHEADINGS" 01000000-01003000 XA02AAA
X
```

```

INTEGER N,M,IFAIL,DATUM,DATUM2;
REAL ZL,ZU, PI;
FILE CARD(KIND=DISK,FILETYPE=7),LP(KIND=PRINTER);

```

```

ZL:=0; ZU:=500; M:=100; IFAIL:=0; N:=4;
XZL,ZU LOWER AND UPPER BOUNDARY; M NUMBER OF STEPS IN Z DIRECTION
PI:=ARCTAN(1)*4;

```

```

EEGIN

```

```

    INTEGER I,J,TEL,T,K,JJ,MM,KKT,JJT,MMT,TEKENR,TEKENI,LL,IRELAB;

```

```

    BOOLEAN CONV;

```

```

    EBCDIC ARRAY EACO(131);

```

```

    INTEGER ARRAY SWR,SWIC(1:4),NULPEO(100);

```

```

    LABEL REP,KLAAR,FOUT,UIT,UIT1,UIT2;

```

```

    REAL Z,DUDZ,UNULZ,DZUDZ2,THETAZ,N2,LABREAL,LABIM,MODLABDA,ARGLABDA
    ,PREAL,FIN,MODP,ARGP,OMEGAREAL,OMEGAIM,

```

```

    RHOZ,DRHODZ,DTDZ,A,TO,TA,

```

```

    RHOREAL,RHOIM,MODRHO,ARGRHO,FREQ;

```

```

    REAL NORMSW,NORMWT,NORMST,NORMU,NORMUW,NORMUT;

```

```

    REAL KK,PHI,A1,A2,A3,ZU1,ZL1,NORM,STAP,UMIN,UMAX,

```

```

    DKK,DCR,DCI,BIASKK,BIASCR,BIASCI,TOL,PARERROR ;

```

```

    ARRAY !SCL(1:N),SOLFINAL(O:M,1:N),TREAL,TIM,MODT,ARGTEO:M],

```

```

    MODW,ARGW(O:M),GISPARAM(1:2),PARAM1,PARAM2,PARAM3(1:2),

```

```

    WREAL(1:3),WIM(1:3),SEAR(1:4,0:20,0:20),SIGMA2W,SIGMAWT,

```

```

    SIGMA2I,SGM2U,SGMUW,SGMUT,UREAL,UIM,MODU,ARGUEO:M];

```

```

    ARRAY USB,USK,USC,TSB,TSK,TSC,UFMET,TFMET,ZMETEO:10];

```

```

    %

```

```

    PROCEDURE POOL(X,Y,L,F,PI);

```

```

    % CONVERSION INTO POLECOORDINATES

```

```

    VALUE X,Y,PI; REAL X,Y,PI;

```

```

    REAL L,F;

```

```

    XPI MUST HAVE THE VALUE ARCTAN(1)*4

```

```

    BEGIN

```

```

        REAL PHI;

```

```

        L:=SGRT(X**2+Y**2);

```

```

        IF X=0 THEN

```

```

            BEGIN

```

```

                IF Y>0 THEN PHI:=PI/2

```

```

                ELSE

```

```

                    IF Y<0 THEN PHI:=3*PI/2

```

```

                    ELSE

```

```

                        PHI:=0;

```

```

            END

```

```

        ELSE

```

```

            BEGIN

```

```

                PHI:=ARCTAN(Y/X);

```

```

                IF Y<0 THEN

```

```

                    BEGIN

```

```

                        IF X<0 THEN PHI:=PHI+PI

```

```

                        ELSE PHI:=PHI + 2*PI;

```

```

                    END

```

```

                ELSE

```

```

                    BEGIN

```

```

                        IF X<0 THEN PHI:=PHI+PI

```

```

                        ELSE PHI:=PHI;

```

```

                    END;

```

```

            END;

```

```

        F:=PHI;

```

```

    END;

```

```

%
%
PROCEDURE SPLINE(N,H,F,B,K,C,U,NA,FA,B1,B2);
% POLYNOME COEFFICIENTS CALCULATION BETWEEN MEASURING POINTS
VALUE N;
INTEGER N;
ARRAY H,F,B,K,C[*];
BOOLEAN NA,FA,U;
REAL B1,B2;
BEGIN
  INTEGER I;

  ARRAY A,AA,GG,D[1:N-1],CC[1:N-2];
  REAL DC,DN,AAO,CCO,GGO,CCN1,AAN,GGN;
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N-1 DO
    BEGIN
      A[I]:=H[I-1]/(H[I-1]+H[I]);
      D[I]:=6*(F[I-1]*(1-A[I])-F[I]+F[I+1]*A[I])/(H[I-1]*H[I]);
    END;
  IF FA THEN
    BEGIN
      DC:=6*(F[1]-F[0]-H[0]*B1)/(H[0]*H[0]);
      DN:=-6*(F[N]-F[N-1]-H[N-1]*B2)/(H[N-1]*H[N-1]);
      AAO:=2;
      CCO:=1/AAO;
      GGO:=DO/AAO;
    END
  ELSE
    BEGIN
      DO:=DN:=AAO:=CCO:=GGO:=0
    END;
  IF U THEN
    BEGIN
      IF N=2 THEN WRITE(LP,"GEEN UNF. SPLINE MOGELIJK, DIM=2");
      A[1]:=A[1]/(1-A[1]);
      A[N-1]:=(1-A[N-1])/A[N-1];
      AA[1]:=2+A[1];
    END
  ELSE AA[1]:=2-A[1]*CCO;
  IF N NEQ 2 THEN
    CCE[1]:=(1-A[1])/AA[1];
    GGE[1]:=(D[1]-A[1]*GGO)/AA[1];
    FOR I:=2 STEP 1 UNTIL N-2 DO
      BEGIN
        AA[I]:=2-A[I]*CC[I-1];
        CCE[I]:=(1-A[I])/AA[I];
        GGE[I]:=(D[I]-A[I]*GGE[I-1])/AA[I];
      END;
    IF U THEN
      BEGIN
        AAN[N-1]:=2+A[N-1]-(1-A[N-1])*CC[N-2];
        GGN[N-1]:=(DN-1)-(1-A[N-1])*GG[N-2])/AAN[N-1];
      END
    ELSE
      BEGIN
        IF N NEQ 2 THEN
          BEGIN
            AAN[N-1]:=2-A[N-1]*CC[N-2];
            GGN[N-1]:=(DN-1)-A[N-1]*GG[N-2])/AAN[N-1];
          END;
        END;
      END;
    END;

```

```

IF FA THEN
BEGIN
  CCN1:=(1-A[N-1])/A[N-1];
  AAN:=2-CCN1;
  GGN:=(DN-GG[N-1])/AAN;
  K[N]:=GGN;
  K[N-1]:=GG[N-1]-CCN1*K[N];
END
ELSE
BEGIN
  K[N-1]:=GG[N-1];
  CCN1:=AAN:=GGN:=0;
END;
FOR I:=N-2 STEP -1 UNTIL 1 DO K[I]:=(GG[I]-CC[I]*K[I+1]);
IF U THEN
BEGIN
  K[0]:=D[1]-K[1]-K[2];
  K[N]:=D[N-1]-K[N-1]-K[N-2];
END
ELSE
IF FA THEN
BEGIN
  K[0]:=GG0-CC0*K[1];
END
ELSE
BEGIN
  K[0]:=0;
  K[N]:=0;
END;
C[0]:=(K[1]-K[0])/H[0];
IF FA THEN B[0]:=B1 ELSE
B[0]:=(F[1]-F[0])/H[0]-(K[1]+2*K[0])*H[0]
/6;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N-1 DO
BEGIN
  B[I]:=(F[I+1]-F[I])/H[I]-(K[I+1]+2*K[I])*H[I]/6;
  C[I]:=(K[I+1]-K[I])/H[I];
END;
IF FA THEN B[N]:=B2 ELSE
B[N]:=(F[N]-F[N-1])/H[N-1]+(2*K[N]+K[N-1])*H[N-1]/6;
C[N]:=C[N-1];
END;

```

```

X
PROCEDURE SPL(Z,B,K,C,F,UMIN,UMAX);
%WINDPROFILE CALCULATION IN DIRECTION FI
ARRAY B,K,C,Z,F[*];
REAL UMIN,UMAX;
BEGIN
  INTEGER I,J,N;

  ARRAY H[0:9],FF1,DD1[0:10];
  REAL FI;
  BOOLEAN NN,UU,FF;
  N:=10;
  Z[0]:=0; Z[1]:=20; Z[2]:=40; Z[10]:=500;
  FOR J:=3 STEP 1 UNTIL 9 DO Z[J]:=Z[J-1]+40;
  FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 9 DO H[J]:=Z[J+1]-Z[J];
  NN:=TRUE; UU:=FALSE; FF:=FALSE;
  READ (CARD,/,FI);
  READ (CARD,/,FF1[*]);
  READ (CARD,/,DD1[*]);
  UMIN:=C; UMAX:=C;
  FOR I:=0 STEP 1 UNTIL 10 DO
  BEGIN
    F[I]:=-FF1[I]*COS((DD1[I]-FI)*PI/180.);
    IF F[I]>UMAX THEN UMAX:=F[I];
    IF F[I]<UMIN THEN UMIN:=F[I];
  END;
  SPLINE(N,H,F,B,K,C,UU,NN,FF,0,0);
  WRITE (LP,</,"PROJECTION DIRECTION=",F8.0>,FI);
  WRITE(LP,</,"UMIN=",F8.3,X3,"UMAX=",F8.3>,UMIN,UMAX);
  WRITE(LP,</,"MEASURED WINDSPEED AND DIRECTION">);
  FOR I:=0 STEP 1 UNTIL 10 DO
    WRITE(LP,<X6,F8.3,X4,F8.3>,FF1[I],DD1[I]);
  WRITE(LP,</,"WINDPOLYNOME COEFFICIENTS">);
  WRITE(LP,<X5,"Z[I]",X6,X3,"F[I]",X6,X3,"B[I]",X6,X3,"K[I]",
  X3,X6,"C[I]">);
  FOR I:=0 STEP 1 UNTIL N DO
  WRITE (LP,<5F13.6>,Z[I],F[I],B[I],K[I],C[I]);
END;

X
PROCEDURE SPL1(Z,B,K,C,F);
%TEMPERATURE PROFILE CALCULATION
ARRAY B,K,C,Z,F[*];
BEGIN
  INTEGER I,J,N;

  ARRAY H[0:9];
  BOOLEAN NN,UU,FF;
  N:=10;
  Z[0]:=0; Z[1]:=20; Z[2]:=40; Z[10]:=500;
  FOR J:=3 STEP 1 UNTIL 9 DO Z[J]:=Z[J-1]+40;
  FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 9 DO H[J]:=Z[J+1]-Z[J];
  NN:=TRUE; UU:=FALSE; FF:=FALSE;
  READ(CARD,/,F[*]);
  SPLINE(N,H,F,B,K,C,UU,NN,FF,0,0);
  WRITE(LP,<X3,"Z[I]",X6,X3,"F[I]",X6,X3,"B[I]",X6,X3,"K[I]",
  X3,X6,"C[I]">);
  FOR I:=0 STEP 1 UNTIL N DO
  WRITE (LP,<5F13.6>,Z[I],F[I],B[I],K[I],C[I]);
END;

```

```

%
PROCEDURE UNULTHETA(Z, UNULZ, DUDZ, D2UDZ2, THETAZ, DTDZ, N2);
%THIS PROCEDURE GIVES THE WIND, TEMP AND ITS DERIVATIVES
%AT THE REQUIRED Z
REAL Z, DUDZ, UNULZ, D2UDZ2, THETAZ, DTDZ, N2;
BEGIN
  LABEL L10;

  REAL FU, BU, KU, CU, UZ, FT, BT, KT, CT, TZ, DTDZ;
  INTEGER J;
  FOR J:=9 STEP -1 UNTIL 0 DO
  BEGIN
    %POLYNOME COEFFICIENTS OF SAMPLE INTERVAL Z BELONGS TO
    IF Z GEQ ZMET[J] AND Z LEQ ZMET[J+1] THEN
    BEGIN
      FU:=UFMET[J]; FT:=TFMET[J];
      BU:=USB[J]; BT:=TSB[J];
      KU:=USK[J]; KT:=TSK[J];
      CU:=USC[J]; CT:=TSC[J];
      UZ:=ZMET[J]; TZ:=UZ;
      GO L10;
    END;
  END;
L10:
  UNULZ:=FU+BU*(Z-UZ)+0.5*KU*(Z-UZ)**2+0.166*CU*(Z-UZ)**3;
  DUDZ:=BU+KU*(Z-UZ)+0.5*CU*(Z-UZ)**2;
  D2UDZ2:=KU+CU*(Z-UZ);
  THETAZ:=FT+BT*(Z-TZ)+0.5*KT*(Z-TZ)**2+0.166*CT*(Z-TZ)**3;
  DTDZ:=BT+KT*(Z-TZ)+0.5*CT*(Z-TZ)**2;
  N2:=(9.81/293)*DTDZ;
END;

%
PROCEDURE RANGE(ZL, ZU);
%DETERMINATION OF BOUNDARIES, NECESSARY BECAUSE THE INTEGRATION
%PROCEDURE CHANGES ZU
REAL ZL, ZU;
BEGIN
  ZL:=0; ZU:=500;
END;
%
%
PROCEDURE LABDA(Z, LABDAREAL, LABDAIM, PARAM );
% CALCULATION OF COEFFICIENT OF TAYLOR-GOLDSTEIN EQUATION
REAL Z, LABDAREAL, LABDAIM; ARRAY PARAM[*];
BEGIN
  REAL DUM1, DUM2, DUM3, DUM4, DUM5;

  UNULTHETA(Z, DUM1, DUDZ, DUM5, THETAZ, DTDZ, DUM2);
  DUM3:=(DUM1-PARAM[1])**2 +PARAM[2]**2;
  DUM4:=DUM3 **2;
  LABDAREAL:= (DUM2/DUM4)*((DUM1-PARAM[1])**2 -PARAM[2]**2)
  -KK**2 -(DUM5/DUM3)*(DUM1-PARAM[1]);
  LABDAIM := (DUM2/DUM4)*2*PARAM[2]*(DUM1-PARAM[1])
  -(DUM5/DUM3)*PARAM[2];
END;

```



```

X
X
PROCEDURE NN(Z,NNREAL,NNIM,PARAM);
XROOT OF LABDA, ONLY USED FOR UPPER BOUNDARY CONDITION
REAL Z,NNREAL,NNIM; ARRAY PARAM[*];
BEGIN
  REAL LREAL,LIM,LMOD,LHALFRE,LHALFIM,LHALFMOD;

  LABDA(Z,LREAL,LIM,PARAM );
  A02AAA(LREAL,LIM,LHALFRE,LHALFIM);
  XPROCEDURE FROM NAG LIBRARY FOR ROOT OF COMPLEX NUMBER
  UNULTHETA(Z,UNULZ,DUDZ,D2UDZ2,THEYAZ,DTDZ,N2);
  XRADIATION CONDITION DETERMINES SIGN OF ROOT
  IF LHALFIM=0 THEN
  BEGIN
    IF UNULZ>PARAM[1] THEN
      NNREAL:=+ SIGN(LHALFRE)*LHALFRE
    ELSE
      NNREAL:=- SIGN(LHALFRE)*LHALFRE;
  END
  ELSE
  BEGIN
    NNREAL:=SIGN(LHALFIM)*LHALFRE;
    NNIM:=SIGN(LHALFIM)*LHALFIM;
  END;
END;

X
X
X
PROCEDURE BCAUX( G1,PARAM,ZU);
X CALCULATIONS OF W AND DW/DZ AT THE TOP
ARRAY G1[*],PARAM[*]; REAL ZU;
BEGIN
  REAL NNREAL,NNIM,SCHAAL,DUM;

  INTEGER I;
  NN(ZU,NNREAL,NNIM,PARAM);
  IF NNIM*ZU>10 THEN NNIM:=10/ZU; XNORMALIZATION
  DUM:=EXP(-NNIM*ZU);
  G1[1]:=DUM*COS((NNREAL*ZU) MOD (2*PI));
  G1[2]:=DUM*SIN((NNREAL*ZU) MOD (2*PI));
  G1[3]:= -NNIM*G1[1]-NNREAL*G1[2];
  G1[4]:= + NNREAL*G1[1] - NNIM*G1[2];
END;

```

```

X
X
PROCEDURE OUTP(XSOL,Y);
X PROCEDURE WHICH PRODUCES W(O) IN ARRAY Y
REAL XSOL; ARRAY Y[1];
BEGIN
  XSOL:=ZL;
END;
X
X
PROCEDURE OUTPF(XSOL,Y);
X AFTER CR AND CI ARE FOUND AND THE FINAL RESULT IS CALCULATED,
X WREAL AND WIM AND DERIVATIVES AT Z=0 ARE STORED IN SOLFINAL
REAL XSOL; ARRAY Y[1];
BEGIN
  INTEGER I,J;

  J:=M*(XSOL-ZL)/(ZU-ZL);
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
    SOLFINAL[J,I]:=Y[I];
  XSOL:=(XSOL-(ZU-ZL)/M;
  IF XSOL<ZL THEN XSOL:=ZL;
END;

X
X
X
PROCEDURE VALZL(PARAM,WR,WI,ZUV,ZLV,OUTP);
X STARTING WITH THE VALUES OF W AT THE TOP THE T-G EQUATION
X IS INTEGRATED TO THE GROUND
ARRAY PARAM[*]; REAL WR,WI,ZUV,ZLV; PROCEDURE OUTP(XSOL,Y);
REAL XSOL; ARRAY Y[1]; FORMAL;
BEGIN
  PROCEDURE FCN(Z,Y,F);

  VALUE Z;
  REAL Z;
  ARRAY FC[1],Y[1];
  BEGIN
    REAL LABDAREAL,LABDAIM;

    LABDA(Z,LABDAREAL,LABDAIM,PARAM );
    X REAL AND IMAGINARY PART OF THE T-G EQUATION
    FC[1]:=Y[3];
    FC[2]:=Y[4];
    FC[3]:=-LABDAREAL*Y[1]+LABDAIM*Y[2];
    FC[4]:=-LABDAIM*Y[1]-LABDAREAL*Y[2];
  END;

  DO2BBA(ZUV,ZLV,N,SOL,TOL,IRELAB,FCN,OUTP,IFAIL);
  WR:=SOL[1]; WI:=SOL[2];
END;

X
X
X
X
XEND OF DECLARATIONS
X
X

```

```

%
%
READ (CARD,/, DATUM, DATUM2);
% IDENTIFICATION OF DATASET
WRITE (LP, <"/, "DATUM=", ZI9>, DATUM, DATUM2);
% WIND AND TEMP PROFILE CALCULATION
SPL(ZMET, USB, USK, USC, UFMET, UMIN, UMAX);
WRITE(LP, <"/, " POTENTIAL TEMP.">);
SPL1(ZMET, TSB, TSK, TSC, TFMET);
%
% START INITIALIZATION
% DETERMINATION OF K, CR AND CI
READ(CARD,/, BIASKK, DKK, KKT);
WRITE(LP, <"/, "BIASKK=", F8.5, X2, "DKK=", F8.5, X2, "KKT=", I3>,
BIASKK, DKK, KKT);
READ(CARD,/, JJT, MMT);
BIASCR:=UMIN; BIASCI:=0.001;
DCR:=(UMAX-UMIN)/JJT;
DCI:=(UMAX-UMIN)/(2*MMT);
WRITE(LP, <"/, "BIASCR=", F8.5, X2, "BIASCI=", F8.5, X2, "DCR=", F8.5,
X2, "DCI=", F8.5, X2, "JJT=", I3, X2, "MMT=", I3>,
BIASCR, BIASCI, DCR, DCI, JJT, MMT);
%
% LARGEST DO-LOOP WITH WAVENUMBER KK AS PARAMETER
FOR KK:=BIASKK STEP DKK UNTIL BIASKK + KKT*DKK DO
BEGIN
%
% SET ERROR BOUNDS
%
TOL:=0.001; IRELAB:=2; %RELATIVE ERROR TEST
CONV:=TRUE;
PARERROR:=0.0001;
RANGE(ZL, ZU); WRITE(LP[SKIP 1]);
%
%
% START OF SEARCH AND STEP
%
% IN SEAR[I, J, K] WILL BE STORED THE VALUES OF CR, CI, WR
% AND WI FOR I=1, 2, 3, 4 AT THE POINT(J, K).
% IF THIS POINT (J, K) IS OUTSIDE THE CIRCLE
% SEAR HAS THE VALUE 9999
FOR I:=1, 2, 3, 4 DO FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO
FOR K:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO SEAR[I, J, K]:=9999;
FOR JJ:=0 STEP 1 UNTIL JJT DO
BEGIN
PARAM1[1]:=BIASCR + JJ*DCR; WRITE(LP, </>);
FOR MM:=0 STEP 1 UNTIL MMT DO
BEGIN
PARAM1[2]:=BIASCI + MM*DCI;
IF ((UMAX+UMIN)/2-PARAM1[1])**2+PARAM1[2]**2
LEQ ((UMAX-UMIN)/2)**2 %BINNEN CIRKEL, STRAAL=...
THEN
BEGIN
RANGE(ZL, ZU); BCAUX(SOL, PARAM1, ZU);
VALZL(PARAM1, WREAL[1], WIM[1], ZU, ZL, OUTP);
SEAR[1, JJ, MM]:=PARAM1[1];
SEAR[2, JJ, MM]:=PARAM1[2];
SEAR[3, JJ, MM]:=WREAL[1];
SEAR[4, JJ, MM]:=WIM[1];
END;
END;
END;
END;

```

```

X
XRESULTS TABULATED,MAKE GRAPH
X
WRITE(LP,SKIP 1));
WRITE(LP,</,"GRAPH OF SIGNS OF (WR,WI) IN (CR,CI)-PLANE">);
WRITE(LP,<"KK",E20.8,/,/,,"DCR",E15.4,X3,"DCI",E15.4,
X3,"BIASCR",E15.4,X3,"BIASCI",E15.4,/,>,
KK,DCR,DCI,BIASCR,BIASCI );
WRITE(LP,</,/>);
REPLACE EA BY " " FOR 132;
FOR MM:=MMT+1 STEP -1 UNTIL 0 DO
BEGIN
  WRITE(LP,132,EA);
  REPLACE EA BY MM FOR 2 NUMERIC;
  FOR JJ:=0 STEP 1 UNTIL JJT+1 DO
  BEGIN
    FOR LL:=1,2 DO
    BEGIN
      IF SEAR[LL+2,JJ,MM]=9999 THEN
        REPLACE EAC[12+ JJ*4+LL] BY " "
      ELSE
        IF SIGN(SEAR[LL+2,JJ,MM])>0 THEN
          REPLACE EAC[12+JJ*4+LL] BY "+"
        ELSE
          REPLACE EAC[12+ JJ*4+LL] BY "-";
    END;
  END;
  WRITE(LP,132,EA);
  REPLACE EA BY " " FOR 132;
END;
WRITE(LP,</>); MM:=-1;
FOR JJ:=13 STEP 4 UNTIL 13+4*(JJT+1) DO
REPLACE EAC[JJ] BY MM:=*+1 FOR 2 NUMERIC;
WRITE(LP,132,EA);
X
XFIND RELEVANT SQUARES
X
LL:=0;
WRITE(LP,</,/,,"SQUARES WITH SIGN CHANGES",
" CR",X17,"CI">);
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL 100 DO NULP[I]:=9999;
FOR MM:=0 STEP 1 UNTIL MMT DO
BEGIN
  FOR JJ:=0 STEP 1 UNTIL JJT DO
  BEGIN
    IF SEAR[1,JJ,MM]=9999 THEN GO UIT1; XNEXT JJ
    IF SEAR[1,JJ+1,MM]=9999 THEN GO UIT2; XNEXT MM
    IF SEAR[1,JJ,MM+1]=9999 AND SEAR[1,JJ+1,MM+1]=9999
    THEN GO UIT1; XNEXT JJ
  END;
END;

```

```

SWR[1]:=SIGN(SEAR[3,JJ,MM]);
SWR[2]:=SIGN(SEAR[3,JJ+1,MM]);
SWR[3]:=IF SEAR[1,JJ+1,MM+1] NEQ 9999 THEN
SIGN(SEAR[3,JJ+1,MM+1]) ELSE 9999;
SWR[4]:=IF SEAR[1,JJ,MM+1] NEQ 9999 THEN
SIGN(SEAR[3,JJ,MM+1]) ELSE 9999;
SWI[1]:=SIGN(SEAR[4,JJ,MM]);
SWI[2]:=SIGN(SEAR[4,JJ+1,MM]);
SWI[3]:=SIGN(SEAR[4,JJ+1,MM+1]);
SWI[4]:=SIGN(SEAR[4,JJ,MM+1]);
IF SWR[3]=9999 OR SWR[4]=9999 THEN
BEGIN
    TEKENR:=SWR[1]+SWR[2]+
    (IF SWR[3]=9999 THEN 0 ELSE SWR[3])+
    (IF SWR[4]=9999 THEN 0 ELSE SWR[4]);
    TEKENI:=SWI[1]+SWI[2]+
    (IF SWR[3]=9999 THEN 0 ELSE SWI[3])+
    (IF SWR[4]=9999 THEN 0 ELSE SWI[4]);
    IF ABS(TEKENR) NEQ 3 AND ABS(TEKENI) NEQ 3 THEN
    BEGIN
        WRITE(LP,<2I4,X13,2E20.8>,
        JJ,MM,JJ*DCR+BIASCR,MM*DCI+BIASCI);
        NULP[LL]:=JJ; NULP[LL+1]:=MM; LL:=LL+2;
        GO UIT1; XNEXTJJ
    END
    ELSE GO UIT1; XNEXT JJ
END
ELSE
BEGIN
    TEKENR:=SWR[1]+SWR[2]+SWR[3]+SWR[4];
    TEKENI:=SWI[1]+SWI[2]+SWI[3]+SWI[4];
    IF ABS(TEKENR) NEQ 4 AND ABS(TEKENI) NEQ 4 THEN
    BEGIN
        WRITE(LP,<2I4,X13,2E20.8>,
        JJ,MM,JJ*DCR+BIASCR,MM*DCI+BIASCI);
        NULP[LL]:=JJ; NULP[LL+1]:=MM; LL:=LL+2;
        GO UIT1; XNEXT JJ
    END;
    GO UIT1; X NEXT JJ
END;
UIT1:
    END;
UIT2:
    END;
UIT:
    X

```

```

X
X SQUARES WITH SIGN CHANGES ARE IN NULP
X SECANTMETHOD ON SQUARES
X
X
X
LL:=0 ;
X
X
WHILE NULP[LL] NEQ 9999 DO
BEGIN
  XCR AND CI AT THREE POINTS OF SQUARE WITH SIGNCHANGES
  WRITE(LP[SKIP 1]); JJ:=NULP[LL]; MM:=NULP[LL+1];
  FOR I:=1,2 DO
  BEGIN
    PARAM1[I]:=SEAR[I,JJ,MM];
    PARAM2[I]:=SEAR[I,JJ+1,MM];
    PARAM3[I]:=IF SEAR[1,JJ+1,MM+1] NEQ 9999 THEN
      SEAR[I,JJ+1,MM+1] ELSE SEAR[I,JJ,MM+1];
  END;
  X
  X
  X
  XSTART ITERATION
  X
  TOL:=0.0001;
  WRITE(LP,</,"SECANTMETHOD FOR ",I4," ST/ND SQUARE"
    >,LL/2);

  TEL:=1; WRITE(LP,</,"ITERATIONS",I,X1,"NR",X17,"CREAL",
    X19,"CIM",X18,"WRZL",X18,"WIZL",X18, I>);

  IF TEL=1 THEN
  BEGIN
    XFIRST ITERATION ON WR AND WI OF THREE SQUAREPOINTS
    WREAL[1]:=SEAR[3,JJ,MM];
    WIM [1]:=SEAR[4,JJ,MM];
    WREAL[2]:=SEAR[3,JJ+1,MM];
    WIM [2]:=SEAR[4,JJ+1,MM];
    WREAL[3]:=IF SEAR[3,JJ+1,MM+1] NEQ 9999 THEN
      SEAR[3,JJ+1,MM+1] ELSE SEAR[3,JJ,MM+1];
    WIM [3]:=IF SEAR[4,JJ+1,MM+1] NEQ 9999 THEN
      SEAR[4,JJ+1,MM+1] ELSE SEAR[4,JJ,MM+1];
  END

```

REP:

```

ELSE
BEGIN
  %NEXT ITERATIONS USE LAST TWO POINTS OF FORMER
  %ITERATION AND A NEW POINT (GISPARAM[1],GISPARAM[2])
  %AT WHICH WR(0) AND WI(0) ARE CALCULATED
  WREAL[1]:=WREAL[2];
  WREAL[2]:=WREAL[3];
  WIM[1]:=WIM[2];
  WIM[2]:=WIM[3];
  RANGE(ZL,ZU);
  BCAUX(SOL,PARAM3,ZU);
  VALZL(PARAM3,WREAL[3],WIM[3],ZU,ZL,OUTP);
END;
WRITE(LP,<I3, 4(X2,E20.8),/,X3,4(X2,E20.8),/,
X3,4(X2,E20.8),/>,
TEL,PARAM1[1],PARAM1[2],WREAL[1],WIM[1],
PARAM2[1],PARAM2[2],WREAL[2],WIM[2],
PARAM3[1],PARAM3[2],WREAL[3],WIM[3] );
% CONVERGENCE DEMANDED WITHIN 15 ITERATIONS
IF TEL>15 THEN GO KLAAR;
% CALCULATION OF NEW POINT
A1:=WREAL[2]*WIM[3]-WREAL[3]*WIM[2];
A2:=WREAL[3]*WIM[1]-WREAL[1]*WIM[3];
A3:=WREAL[1]*WIM[2]-WREAL[2]*WIM[1];
GISPARAM[1]:=(A1*PARAM1[1]+A2*PARAM2[1]+A3*PARAM3[1])/
(A1+A2+A3);
GISPARAM[2]:=(A1*PARAM1[2]+A2*PARAM2[2]+A3*PARAM3[2])/
(A1+A2+A3);
% CONVERGENCE CRITERIUM
IF ABS( (GISPARAM[1]-PARAM1[1])/PARAM1[1] )<PARERROR
AND ABS( (GISPARAM[2]-PARAM1[2])/PARAM1[2] )<PARERROR
THEN GO KLAAR;
% NEW POINT SHOULD BE WITHIN UPPERHALF OF CIRCLE
IF ((UMAX+UMIN)/2-GISPARAM[1])**2+GISPARAM[2]**2
> ((UMAX-UMIN)/2)**2
OR GISPARAM[2]<0
THEN
BEGIN
  CONV:=FALSE;
  WRITE(LP,<X3,2(X2,E20.8),/>,GISPARAM[1],GISPARAM[2]);
  FOR I:=1,2 DO PARAM3[I]:=GISPARAM[I];
  GO KLAAR;
END;
FOR I:=1,2 DO
BEGIN
  PARAM1[I]:=PARAM2[I];
  PARAM2[I]:=PARAM3[I];
  PARAM3[I]:=GISPARAM[I];
END;
TEL:=TEL+1;
GO REP;

```

KLAAR:

```

%
%FINAL SOLUTION
%
%
%OUTPUT FINAL RESULTS
%
WRITE(LP, </, "IFAIL= ", I2>, IFAIL);
WRITE(LP, </, "WAVE NUMBER= ", E12.5, X5,
" WAVE LENGTH= ", E12.5>, KK, 2*PI/KK);
WRITE(LP, </, "FINAL PARAMETER VALUES ", /,
"CREAL ", E20.8, /, "CIM ", E20.8>,
FOR I:=1,2 DO GISPARAM[I]);
WRITE(LP, </, "FREQUENCY", E20.8, X5, "GROWTH RATE", E20.8>,
KK*GISPARAM[1], KK*GISPARAM[2]);
IF TEL>15 THEN
BEGIN
WRITE(LP, </, "NO CONVERGENCE", />); GO FOUT;
END;
IF NOT CONV THEN
BEGIN
WRITE(LP, </, "NO CONVERGENCE INSIDE RANGES", />);
GO FOUT;
END;
WRITE(LP, </, "FINAL SOLUTION ", /, /,
X2, "Z", X1, "OMEGAR", /,
X4, "UNULZ", X10, "DUDZ", X10, "D2UDZ2", X8, "THETAZ", X8,
"N2", X12, "RI", X12, /, X4,
"LABRE", X10, "LIM", X11, "MODL", X10, "ARGL", X10,
"WREAL", X10, "WIM", X11, "MODW", X10, "ARGW", /, X4,
"UREAL", X10, "UIM", X11, "MODU", X10, "ARGU", X10,
"PREAL", X10, "PIM", X11, "MODP", X10, "ARGP", /, X4,
"RHORE", X10, "RHI", X11, "MODR", X10, "ARGR", X10,
"TRREAL", X10, "TIM", X11, "MODT", X10, "ARGT", />);

% FINALSOLUTION W(Z) AND OTHER WAVECHARACTERISTICS
% CALCULATED FROM POLARISATION FORMULAS
RANGE(ZL, ZU); RANGE(ZL1, ZU1); BCAUX(SOL, GISPARAM, ZU);
VALZL(GISPARAM, WREAL[3], WIM[3], ZU1, ZL1, OUTPF);

T0:=TFMET[0]+273; A:=-9.8/(8.3*TC);

```



```

FOR I:=0 STEP 2 UNTIL M DO
BEGIN
  STAP:=I*(ZU-ZL)/M;
  UNULTHETA(STAP,UNULZ,DUDZ,D2UDZ2,THETAZ,DTDZ,N2);

  LABDA(STAP,LABREAL,LABIM,GISPARAM);
  POOL(LABREAL,LABIM,MODLABDA,ARGLABDA,PI);
  ARGLABDA:=ARGLABDA*360/(2*PI);
  NORM:=0;
  POOL(SOLFINAL[I,1],SOLFINAL[I,2],MODW[I],ARGW[I],PI);
  ARGW[I]:=ARGW[I]*360/(2*PI);
  IF NORM<MODW[I] THEN NORM:=MODW[I];

  OMEGAREAL:=(GISPARAM[1]-UNULZ)*KK; XCR POS OF NEG
  TA:=THETAZ+273;

  RHOZ:=1000*EXP(A*STAP)/(8.3*TA);
  DRHODZ:=-RHOZ*(A+DTDZ/TA);

  UREAL[I]:=SOLFINAL[I,4]/KK;
  UIM[I]:=-SOLFINAL[I,3]/KK;
  POOL(UREAL[I],UIM[I],MODU[I],ARGU[I],PI);
  ARGU[I]:=ARGU[I]*360/(2*PI);

  PREAL:=RHOZ*(UNULZ*SOLFINAL[I,4]-GISPARAM[1]*SOLFINAL[I,4]
  -GISPARAM[2]*SOLFINAL[I,3]-SOLFINAL[I,2]*DUDZ)/KK;
  PIM:=-RHOZ*(UNULZ*SOLFINAL[I,3]-GISPARAM[1]*SOLFINAL[I,3]
  +GISPARAM[1]*SOLFINAL[I,4]-SOLFINAL[I,1]*DUDZ)/KK;
  POOL(PREAL,PIM,MODP,ARGP,PI);
  ARGP:=ARGP*360/(2*PI);

  RHOREAL:=DRHODZ*(SOLFINAL[I,2]*OMEGAREAL-SOLFINAL[I,1]*OMEGAIM)
  /(OMEGAREAL**2+OMEGAIM**2);
  RHOIM:=-DRHODZ*(SOLFINAL[I,1]*OMEGAREAL+SOLFINAL[I,2]*OMEGAIM)
  /(OMEGAREAL**2+OMEGAIM**2);
  POOL(RHOREAL,RHOIM,MODRHO,ARGRHO,PI);
  ARGRHO:=ARGRHO*360/(2*PI);

  TREAL[I]:=-THETAZ*DRHODZ*(SOLFINAL[I,2]*OMEGAREAL
  -SOLFINAL[I,1]*OMEGAIM)
  /(RHOZ*(OMEGAREAL**2+OMEGAIM**2));
  TIM[I]:=THETAZ*DRHODZ*(SOLFINAL[I,1]*OMEGAREAL
  +SOLFINAL[I,2]*OMEGAIM)
  /(RHOZ*(OMEGAREAL**2+OMEGAIM**2));
  POOL(TREAL[I],TIM[I],MODT[I],ARGT[I],PI);
  ARGT[I]:=ARGT[I]*360/(2*PI);

```

```

IF DUDZ=0 THEN DUDZ:=999;
IF D2UDZ2=0 THEN D2UDZ2:=999;
WRITE(LP,<I3,X4,E10.3>,STAP,OMEGAREAL);
WRITE(LP,<X4,F4.1,X6,2(X4,E10.3),X3,E10.3,4(X4,E10.3)>,
UNULZ,DUDZ,D2UDZ2,THETAZ,N2,N2/DUDZ**2);
WRITE(LP,<2(3(X4,E10.3),X4,I3,X5)>,LABREAL,LABIM,MODLABDA,
ARGLABDA,SOLFINAL[I,1],SOLFINAL[I,2],MODW[I],ARGW[I]);
WRITE(LP,<2(3(X4,E10.3),X4,I3,X5)>,UREAL[I],UIMCI],MODU[I],ARGU[I],
PREAL,PIM,MODP,ARGP);
WRITE(LP,<2(3(X4,E10.3),X4,I3,X5),/,>,RHOREAL,RHCIM,MODRHO,ARGRHO,
TREAL[I],TIMCI],MODTCI],ARGTCI]);
END;

```

```

% CALCULATION OF ENERGYCONTENT

```

```

WRITE(LP,</,X2,"Z",X2,"SIGMA2W",X2,"SIGMAWT",X2,"SIGMA2T"
,X2,"SGM2U",X2,"SGMUW",X2,"SGMUT",/,>);

```

```

NORMSW:=0; NORMWT:=0; NORMST:=0; NORMU:=0; NORMUW:=0;
NORMUT:=0;

```

```

FOR I:=0 STEP 2 UNTIL M DO
BEGIN

```

```

SIGMA2W[I]:=MODW[I]**2/2;

```

```

IF NORMSW<SIGMA2W[I] THEN NORMSW:=SIGMA2W[I];

```

```

SIGMAWT[I]:=(SOLFINAL[I,1]*TREAL[I]+SOLFINAL[I,2]*TIM[I])/2;

```

```

IF NORMWT<SIGMAWT[I] THEN NORMWT:=SIGMAWT[I];

```

```

SIGMA2T[I]:=TREAL[I]**2/2;

```

```

IF NORMST<SIGMA2T[I] THEN NORMST:=SIGMA2T[I];

```

```

SGM2U[I]:=MODU[I]**2/2;

```

```

IF NORMU<SGM2U[I] THEN NORMU:=SGM2U[I];

```

```

SGMUW[I]:=(SOLFINAL[I,1]*UREAL[I]+SOLFINAL[I,2]*UIMCI])/2;

```

```

IF NORMUW<SGMUW[I] THEN NORMUW:=SGMUW[I];

```

```

SGMUT[I]:=(UREAL[I]*TREAL[I]+UIMCI]*TIM[I])/2;

```

```

IF NORMUT<SGMUT[I] THEN NORMUT:=SGMUT[I];

```

```

END;

```

```

FOR I:=0 STEP 2 UNTIL M DO

```

```

WRITE(LP,<I3,6(X1,F7.3)>,I*5,SIGMA2W[I]/NORMSW,

```

```

SIGMAWT[I]/NORMWT,SIGMA2T[I]/NORMST,

```

```

SGM2U[I]/NORMU,SGMUW[I]/NORMUW,SGMUT[I]/NORMUT);

```

```

FCUT:

```

```

LL:=**+2; CONV:=TRUE;

```

```

END;

```

```

END;

```

```

X

```

```

END;

```

```

END.

```

DATUM=781500100781500200

PROJECTION DIRECTION= -20.

UMIN= -1.274 UMAX= 7.678

MEASURED WINDSPEED AND DIRECTION

0.000	0.000
3.400	48.000
5.000	59.000
7.400	69.000
9.300	82.000
11.400	102.000
12.200	109.000
12.200	109.000
12.200	109.000
12.200	109.000
12.200	109.000

WINDPOLYNOME COEFFICIENTS

Z[I]	F[I]	B[I]	K[I]	C[I]
0.000000	0.000000	-0.084506	0.000000	0.000312
20.000000	-1.273662	-0.022037	0.006247	-0.000367
40.000000	-0.954045	0.029547	-0.001089	0.000048
80.000000	-0.129148	0.024543	0.000838	0.000038
120.000000	1.933579	0.088853	0.002377	-0.000126
160.000000	6.041080	0.082814	-0.002679	0.000044
200.000000	7.677709	0.010703	-0.000926	0.000029
240.000000	7.677709	-0.002877	0.000247	-0.000008
280.000000	7.677709	0.000806	-0.000063	0.000002
320.000000	7.677709	-0.000345	0.000006	-0.000000
500.000000	7.677709	0.000173	0.000000	-0.000000

POTENTIAL TEMP.

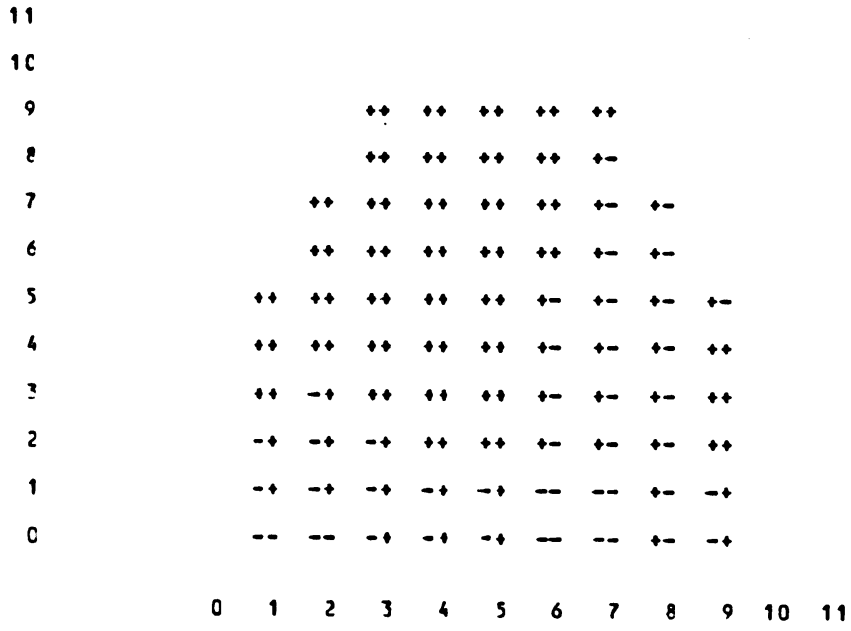
Z[I]	F[I]	E[I]	K[I]	C[I]
0.000000	12.500000	0.045685	0.000000	0.000065
20.000000	13.500000	0.058631	0.001295	-0.000174
40.000000	14.700000	0.049792	-0.002178	0.000070
80.000000	15.700000	0.018985	0.000638	0.000012
120.000000	17.100000	0.054269	0.001126	-0.000054
160.000000	19.600000	0.056439	-0.001018	0.000015
200.000000	21.200000	0.027475	-0.000431	0.000014
240.000000	22.100000	0.021160	0.000115	-0.000004
280.000000	23.000000	0.022886	-0.000028	0.000001
320.000000	23.900000	0.022295	-0.000001	0.000000
500.000000	27.900000	0.022186	0.000000	0.000000

BIASKK= 0.00250 DKK= 0.00250 KKT= 10

BIASCR=-1.27366 BIASCI= 0.00100 DCR= 0.89514 DCI= 0.44757 JJT= 10 NMT= 10

GRAPH OF SIGNS OF (WR,WI) IN (CR,CI)-PLANE
 KK 1.25CCCC0CE-02

DCR 8.9514E-01 DCI 4.4757E-01 BIASCR -1.2737E+00 BIASCI 1.0000E-03



SQUARES WITH SIGN CHANGES		CR	CI
8	0	5.88743453E+00	1.00000000E-03
5	1	3.20202313E+00	4.48568559E-01
8	1	5.88743453E+00	4.48568559E-01

ITERATIONS NR	CREAL	CIM	WRZL	WIZL
1	3.20202318E+00	4.48568559E-01	-1.32023062E-02	5.08630132E-02
	4.09716030E+00	4.48568559E-01	-2.67845733E-02	-1.79187808E-01
	4.09716030E+00	3.96137119E-01	1.21580099E-01	-1.62197783E-01
2	4.09716030E+00	4.48568559E-01	-2.67845733E-02	-1.79187808E-01
	4.09716030E+00	3.96137119E-01	1.21580099E-01	-1.62197783E-01
	3.40720319E+00	4.97787433E-01	-2.13290599E-03	5.33486095E-03
3	4.09716030E+00	3.96137119E-01	1.21580099E-01	-1.62197783E-01
	3.40720319E+00	4.97787433E-01	-2.13290599E-03	5.33486095E-03
	3.42838841E+00	5.04993876E-01	-5.23114061E-04	1.06861645E-03
4	3.40720319E+00	4.97787433E-01	-2.13290599E-03	5.33486095E-03
	3.42838841E+00	5.04993876E-01	-5.23114061E-04	1.06861645E-03
	3.43341357E+00	5.07027567E-01	9.05254556E-05	-1.35737416E-03
5	3.42838841E+00	5.04993876E-01	-5.23114061E-04	1.06861645E-03
	3.43341357E+00	5.07027567E-01	9.05254556E-05	-1.35737416E-03
	3.43648465E+00	5.07619075E-01	1.97892056E-04	-1.70204292E-03
6	3.43341357E+00	5.07027567E-01	9.05254556E-05	-1.35737416E-03
	3.43648465E+00	5.07619075E-01	1.97892056E-04	-1.70204292E-03
	3.46012518E+00	5.09679433E-01	6.49317789E-04	-5.99960001E-03
7	3.43648465E+00	5.07619075E-01	1.97892056E-04	-1.70204292E-03
	3.46012518E+00	5.09679433E-01	6.49317789E-04	-5.99960001E-03
	3.42680636E+00	5.06688629E-01	-1.43983358E-04	8.71933744E-04
8	3.46012518E+00	5.09679433E-01	6.49317789E-04	-5.99960001E-03
	3.42680636E+00	5.06688629E-01	-1.43983358E-04	8.71933744E-04
	3.42831922E+00	5.06884194E-01	-1.39969820E-04	1.43987625E-03
9	3.42680636E+00	5.06688629E-01	-1.43983358E-04	8.71933744E-04
	3.42831922E+00	5.06884194E-01	-1.39969820E-04	1.43987625E-03
	3.43369064E+00	5.07343794E-01	-1.92180575E-05	2.41175081E-04
10	3.42831922E+00	5.06884194E-01	-1.39969820E-04	1.43987625E-03
	3.43369064E+00	5.07343794E-01	-1.92180575E-05	2.41175081E-04
	3.43443488E+00	5.07401991E-01	5.65461618E-05	-4.71881013E-04
11	3.43369064E+00	5.07343794E-01	-1.92180575E-05	2.41175081E-04
	3.43443488E+00	5.07401991E-01	5.65461618E-05	-4.71881013E-04
	3.43793424E+00	5.07713968E-01	1.92876407E-04	-3.85970405E-03

IFAIL= 0

WAVE NUMBER= 1.25000E-02 WAVE LENGTH= 5.02655E+02

FINAL PARAMETER VALUES

CREAL 3.43394131E+00
CIM 5.07364494E-01

FREQUENCY 4.29242664E-02 GROWTH RATE 6.34205618E-03

Z	OMEGA	OMDZ	J2UJZ2	THETAZ	N2	RI	PODB	ARGW
	LNULZ	LIP	MJDL	ARGL	WREAL	bIP	PODP	AREP
	LREAL	UIP	MDDU	ARGU	FREAL	FIP	PODT	ARET
	RHORZ	RHI	MDDR	ARGR	TREAL	TIP		
100	3.567E-02							
	0.6	4.930E-32	1.608E-03	1.622E+01	1.145E-03	4.767E-01		
	5.178E-04	-1.441E-34	5.375E-04	344	2.218E-02	-9.439E-02	9.696E-02	283
	-3.223E-02	-2.422E-02	4.032E-02	217	1.239E-01	7.348E-02	1.440E-01	31
	-3.015E-03	-7.083E-34	3.097E-03	193	1.776E-01	4.171E-02	1.824E-01	13
110	2.846E-02							
	1.2	6.700E-32	1.972E-03	1.661E+01	1.460E-03	3.253E-01		
	9.203E-04	-2.594E-34	7.678E-04	342	2.534E-02	-9.520E-02	9.852E-02	285
	2.498E-02	-2.681E-02	3.664E-02	313	1.161E-01	2.933E-02	1.198E-01	14
	-3.651E-03	-9.718E-04	3.778E-03	195	2.298E-01	6.116E-02	2.378E-01	15
120	1.975E-02							
	1.9	8.895E-02	2.377E-03	1.710E+01	1.817E-03	2.302E-01		
	1.841E-03	-9.204E-34	2.058E-03	333	2.914E-02	-8.614E-02	9.093E-02	289
	1.320E-01	-3.650E-02	1.369E-01	345	1.001E-01	-4.837E-02	1.111E-01	334
	-4.872E-03	-1.625E-03	5.070E-03	199	3.248E-01	1.099E-01	3.429E-01	19
130	6.425E-03							
	2.9	1.063E-31	1.113E-03	1.769E+01	2.104E-03	1.862E-01		
	9.927E-04	-9.117E-33	5.212E-03	291	3.673E-02	-5.924E-02	6.970E-02	302
	3.033E-01	-1.131E-31	3.239E-01	340	6.966E-02	-1.671E-01	1.810E-01	293
	-9.233E-03	-5.724E-03	1.036E-02	212	6.747E-01	4.182E-01	7.938E-01	32
140	-7.303E-03							
	4.0	1.111E-31	-1.510E-04	1.834E+01	2.212E-03	1.792E-01		
	5.090E-04	3.786E-03	3.820E-03	82	6.874E-02	-2.288E-02	7.245E-02	342
	1.764E-01	-3.170E-31	3.629E-01	299	3.376E-02	-4.172E-02	5.366E-02	309
	3.004E-03	9.022E-03	7.509E-03	72	-2.377E-01	-7.139E-01	7.524E-01	252
150	-2.085E-02							
	5.1	1.033E-01	-1.415E-03	1.899E+01	2.141E-03	2.007E-01		
	1.275E-03	6.280E-04	1.357E-03	28	1.015E-01	-7.911E-03	1.018E-01	356
	8.610E-02	-2.091E-31	2.262E-01	292	2.291E-02	4.300E-02	4.872E-02	62
	3.481E-04	4.468E-03	4.481E-03	86	-2.980E-02	-3.825E-01	3.838E-01	266
160	-3.259E-02							
	6.0	8.281E-02	-2.679E-03	1.960E+01	1.890E-03	2.755E-01		
	1.082E-03	2.931E-04	1.121E-03	15	1.213E-01	6.078E-04	1.213E-01	0
	5.208E-02	-1.052E-01	1.174E-01	296	1.665E-02	7.445E-02	7.629E-02	77
	-1.639E-05	3.270E-03	3.270E-03	90	1.512E-03	-3.017E-01	3.017E-01	270
170	-4.136E-02							
	6.7	5.821E-02	-2.241E-03	2.012E+01	1.573E-03	4.643E-01		
	6.395E-04	1.434E-34	5.554E-04	13	1.289E-01	5.594E-03	1.290E-01	2
	2.947E-02	-2.195E-02	3.669E-02	323	1.228E-02	8.681E-02	8.767E-02	82
	-1.138E-04	2.622E-03	2.625E-03	92	1.125E-02	-2.592E-01	2.594E-01	272
180	-4.732E-02							
	7.2	3.799E-02	-1.903E-03	2.054E+01	1.306E-03	9.050E-01		
	3.979E-04	8.627E-35	4.072E-04	12	1.281E-01	8.317E-03	1.283E-01	4
	1.514E-02	3.008E-32	3.367E-02	63	9.219E-03	8.757E-02	8.845E-02	84
	-1.417E-04	2.182E-33	2.187E-03	94	1.493E-02	-2.300E-01	2.304E-01	274
190	-9.103E-02							
	7.5	2.216E-02	-1.365E-03	2.090E+01	1.089E-03	2.217E+00		
	2.353E-04	5.666E-05	2.420E-04	14	1.222E-01	9.584E-03	1.226E-01	4
	5.836E-03	6.130E-02	6.123E-02	85	7.059E-03	8.325E-02	8.355E-02	85
	-1.451E-04	1.850E-03	1.856E-03	94	1.623E-02	-2.070E-01	2.076E-01	274
200	-9.305E-02							
	7.7	1.070E-02	-7.264E-04	2.120E+01	9.199E-04	8.031E+00		
	1.079E-04	3.760E-35	1.143E-04	19	1.135E-01	9.923E-03	1.139E-01	5
	8.837E-05	7.676E-02	7.676E-02	90	5.520E-03	7.568E-02	7.588E-02	86
	-1.335E-04	1.584E-33	1.590E-03	95	1.640E-02	-1.875E-01	1.882E-01	275

Z	SIGMA2h	SIGMAhT	SIGMA2T	SGM2U	SGMUW	SGMUT
0	0.000	-0.000	0.000	0.030	0.001	-0.002
10	0.014	0.000	0.001	0.076	0.002	-0.009
20	0.044	-0.042	0.001	0.053	0.005	-0.012
30	0.078	0.000	0.003	0.029	0.009	-0.012
40	0.113	0.000	0.005	0.027	0.012	-0.015
50	0.159	-0.333	0.008	0.037	0.011	-0.023
60	0.221	0.000	0.013	0.047	0.011	-0.033
70	0.301	0.667	0.020	0.052	0.014	-0.043
80	0.395	-0.667	0.029	0.049	0.022	-0.051
90	0.490	0.000	0.044	0.034	0.041	-0.052
100	0.565	0.000	0.069	0.012	0.081	-0.037
110	0.583	0.000	0.116	0.010	0.164	0.022
120	0.497	0.000	0.232	0.142	0.361	0.211
130	0.292	0.000	1.000	0.822	0.931	0.873
140	0.316	0.000	0.124	1.000	1.000	1.000
150	0.624	0.000	0.002	0.389	0.537	0.420
160	0.884	0.000	0.000	0.105	0.323	0.173
170	1.000	0.000	0.000	0.010	0.190	0.033
180	0.990	0.667	0.000	0.009	0.113	-0.036
190	0.903	0.000	0.001	0.029	0.067	-0.068
200	0.780	-1.000	0.001	0.045	0.040	-0.078
210	0.649	0.667	0.001	0.052	0.024	-0.077
220	0.526	1.000	0.001	0.051	0.015	-0.069
230	0.420	-1.000	0.000	0.045	0.010	-0.059
240	0.334	0.000	0.000	0.035	0.009	-0.047
250	0.267	0.000	0.000	0.026	0.008	-0.037
260	0.215	0.000	0.000	0.020	0.007	-0.029
270	0.174	0.333	0.000	0.016	0.006	-0.024
280	0.141	0.000	0.000	0.013	0.005	-0.019
290	0.114	0.000	0.000	0.011	0.004	-0.016
300	0.092	0.000	0.000	0.009	0.003	-0.013
310	0.074	0.333	0.000	0.007	0.002	-0.011
320	0.060	0.000	0.000	0.006	0.002	-0.009
330	0.048	-0.125	0.000	0.005	0.001	-0.007
340	0.039	0.000	0.000	0.004	0.001	-0.006
350	0.031	-0.042	0.000	0.003	0.001	-0.005
360	0.025	0.000	0.000	0.002	0.001	-0.004
370	0.020	0.083	0.000	0.002	0.001	-0.003
380	0.016	0.000	0.000	0.002	0.000	-0.003
390	0.013	0.042	0.000	0.001	0.000	-0.002
400	0.011	0.042	0.000	0.001	0.000	-0.002
410	0.008	0.042	0.000	0.001	0.000	-0.001
420	0.007	0.000	0.000	0.001	0.000	-0.001
430	0.005	0.000	0.000	0.001	0.000	-0.001
440	0.004	-0.016	0.000	0.000	0.000	-0.001
450	0.004	-0.021	0.000	0.000	0.000	-0.001
460	0.003	0.010	0.000	0.000	0.000	-0.000
470	0.002	-0.005	0.000	0.000	0.000	-0.000
480	0.002	0.005	0.000	0.000	0.000	-0.000
490	0.002	-0.005	0.000	0.000	0.000	-0.000
500	0.001	0.005	0.000	0.000	0.000	-0.000