

# KONINKLIJK NEDERLANDS METEOROLOGISCH INSTITUUT

WETENSCHAPPELIJK RAPPORT

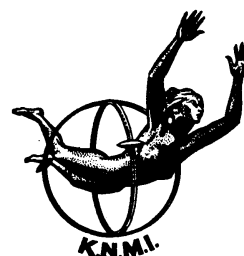
SCIENTIFIC REPORT

W.R. 83 - 8

J. van der Steeg \*

De numerieke modellering van de grenslaagstroming  
na een plotselinge ruwheidsovergang

\* Stagiaire TH-Delft



---

De Bilt, 1983

Publikatienummer: K.N.M.I. W.R. 83-8 (FM)

Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut,  
Afd. Fysisch Meteorologisch Onderzoek,  
Postbus 201,  
3730 AE De Bilt.  
Nederland.

U.D.C.: 551.509.313 :  
551.510.522

INHOUDSOPGAVE

0.	SYMBOLENLIJST VAN GEBRUIKTE GROOTHEDEN	5
1.	INLEIDING	7
2.	HET MODEL	9
2.1.	<u>Het beschouwde fenomeen</u>	9
2.2.	<u>Intuïtieve beschrijving van het proces</u>	9
2.3.	<u>De vergelijkingen</u>	10
2.3.1.	De continuïteitsvergelijking en de impulsbalans	10
2.3.2.	De sluiting van de impulsbalans	11
2.3.3.	De energiebalans	12
2.3.4.	Sluiting van de energiebalans	13
2.3.5.	Dimensieloze vorm van het stelsel	13
2.3.6.	Logaritmische hoogteschaal	14
2.4.	<u>De rand- en beginvoorwaarden</u>	14
2.4.1.	Beginwaarden	14
2.4.2.	Randvoorwaarden	15
3.	HET NEUTRALE MODEL	19
3.1.	<u>Inleiding</u>	19
3.2.	<u>Het gediscretiseerde stelsel</u>	19

3.3.	<u>Resultaten: vergelijking met experimenten van Bradley</u>	21
3.3.1.	Ontwikkeling van de oppervlakschuifspanning met de stroomafwaartse afstand	21
3.3.2.	Ontwikkeling van het gemiddelde snelheidsprofiel	23
4.	HET MODEL MET BUOYANCY-TERM EN VASTE LENGTESCHAAL	24
4.1.	<u>Samenvatting van de ontwikkeling</u>	24
4.2.	<u>De lengteschaal</u>	24
4.3.	<u>De bovenrandvoorwaarde</u>	26
4.4.	<u>Vergelijking van resultaten met experimenten van Bradley</u>	26
4.4.1.	Stroomafwaartse ontwikkeling van de wandschuifspanning	26
4.4.2.	Ontwikkeling van het gemiddelde snelheidsprofiel	28
4.4.3.	Groei van de interne grenslaag	30
4.5.	<u>Resultaten met parameters van Cabauw situatie</u>	30
4.6.	<u>Conclusie</u>	34
5.	HET TWEEDE-ORDE MODEL	35
5.1.	<u>De lengteschaal vergelijking</u>	35
5.2.	<u>De rand- en beginvoorwaarden</u>	36
5.3.	<u>Het kiezen van de constanten <math>C_{\epsilon 1}</math>, <math>C_{\epsilon 2}</math> en <math>C_{\kappa \epsilon}</math></u>	36
5.4.	<u>Enkele inleidende resultaten</u>	38
5.5.	<u>Conclusies en aanbevelingen voor verder onderzoek</u>	39

6.	SAMENVATTING	40
	NAWOORD	41
	<u>Literatuur</u>	42
	APPENDICES	43



0. SYMBOLENLIJST VAN GEBRUIKTE GROOTHEDEN

Grootheden voorzien van het superscript "+" zijn genormeerd. Overstreping betekent middeling van de gehele overstreepte grootheden combinatie. Overstreping door een tilde betekent dat de instantane waarde wordt bedoeld.

c	correlatie coëfficiënt tussen de horizontale en verticale snelheidsfluctuaties
$C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}, C_{\kappa \epsilon}$	constanten in de dissipatievergelijking
E	gemiddelde turbulente energie $E = \bar{E} = \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2)$
$\tilde{E}$	fluctuerende turbulente energie, $\tilde{E} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$
g	zwaartekrachtsversnelling
$h_{EL}$	hoogte van de evenwichtslaag
$h_{IBL}$	hoogte van de interne grenslaag
l	lengteschaal in turbulente viscositeit
le	logaritmische lengteschaal: $l/e^\eta$
m	ruwheidsovergang parameter: $\ln(z_{o1}/z_o)$
U, W	componenten in x-, resp. z-richting van gemiddelde snelheid
u, v, w	fluctuerend gedeelte van snelheid: $u = \tilde{u} - U, v = \tilde{v}, w = \tilde{w} - W$
$\tilde{u}$	snelheidsschaal van grote wervels
$u_{*0}$	wandschuifspanningssnelheid van stroomopwaartse, globale terrein
$u_{*1}$	wandschuifspanningssnelheid, lokaal boven terrein na de ruwheidsovergang
$u_*$	lokale schuifspanningssnelheid
$u', v', w'$	turbulentie intensiteiten in resp. x-, y- en z-richting
x, y, z,	de drie Cartesische coördinaten;
	x langs oppervlak in richting v.d. gemiddelde stroming
	z loodrecht oppervlak
	y loodrecht x en z (rechtsdraaiend stelsel)
$\alpha$	snelheidsschaal-energie parameter
$\epsilon$	dissipatie van turbulente energie naar warmte
$\eta$	logaritmische hoogtecoördinaat
$\theta$	fluctuatie van potentiële temperatuur
$\kappa$	Von Karman constante: $\kappa = 0,4$
$\lambda$	lengteschaal van de grote wervels
$\mu$	dynamische viscositeit van het fluïdum (lucht)

$\nu$	kinematische viscositeit van het fluïdum (lucht)
$\nu_t$	turbulente "viscositeit"
$\rho$	dichtheid
$\sigma_u, \sigma_v, \sigma_w$	varianties van $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ (de snelheidscomponenten)
$\tau$	schuifspanning (kinematisch beschreven: fysische spanning gedeeld door dichtheid)
$\phi$	dimensieloze afschuiving
$\chi$	volume viscositeit van het fluïdum ( $\chi \approx 0$ )



## 1. INLEIDING

Voor zeer veel problemen in de atmosfeer is de schuifspanningssnelheid  $u_*$  de schalingsgrootte voor de snelheden. Bovendien hangt de temperatuurschaal  $\theta_*$  met  $u_*$  samen door:  $\theta_* = \frac{w\bar{\theta}}{u_*}$  ( $w\bar{\theta}$  is de warmteflux). Vrijwel alle modellen van de atmosferische grenslaag zijn gebaseerd op de Monin-Obukhov gelijkvormigheidstheorie, geldig voor de oppervlaktelaag. Modellen voor de ontwikkeling van de nachtelijke grenslaag (bijv. voor de minimum temperatuur) gebruiken  $u_*$  en  $\theta_*$  in de randvoorwaarden. Ook in luchtverontreiniging-, vochtopname- en warmteoverdrachtproblemen spelen deze parameters een belangrijke rol.

Om theoretische modellen experimenteel te verifiëren moeten de metingen geschaald worden met  $u_*$  en  $\theta_*$ . Ook als we een model willen toepassen op een specifiek geval, moeten de geldende  $u_*$  en  $\theta_*$  bekend zijn.

De schalingsparameters willen we met eenvoudige middelen bepalen; bijvoorbeeld  $u_*$  uit een gemiddelde snelheidsprofiel (zie appendix A). Dit kan alleen als we de relatie kennen tussen het profiel en de impulsflux (immers:  $\tau = u_*^2$ ). Definieer de dimensieloze afschuiving  $\phi$ :

$$\phi = \frac{\kappa \cdot z}{u_*} \frac{\partial U}{\partial z} \quad (1.1.1)$$

Hierbij is  $U$  de gemiddelde windsnelheid op hoogte  $z$  en  $\kappa$  de Von Karman-constante. Voor een homogeen aanstroomoppervlak is  $\phi$  bekend (zie Businger [1]). Onder neutrale omstandigheden is  $\phi$  zeer eenvoudig:  $\phi = 1$ . In het algemeen is  $\phi$  een functie van de stabiliteitsparameter  $\frac{z}{L}$ , waarin  $L$  de Monin-Obukhov lengte is:

$$L = - \frac{\theta u_*^3}{g \kappa \overline{w\theta}} \quad (1.1.2)$$

Waarbij  $\theta$  staat voor de absolute potentiële temperatuur en  $g$  voor de zwaarte-krachtsversnelling.

Uit metingen met de meteorologische mast van het KNMI te Cabauw is gebleken dat de flux-profielrelaties, zoals  $\phi$ , in inhomogene omstandigheden eveneens afwijken (zie Schotanus [2]).

Het doel van dit onderzoek is te voorspellen hoe  $\phi$  afhangt van de grootte en de stroomafwaartse afstand van een ruwheidssprong.

We styleren het probleem enigszins zodat het als tweedimensionaal is op te vatten. Duym [3] heeft een "anderhalve-orde" model ontwikkeld

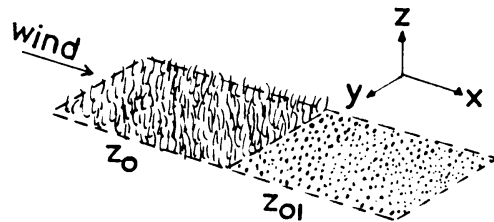
(schuifspanning bepaald door de energievergelijking, geen lengteschaalvergelijking). Dit model geeft voor neutrale gevallen uitstekende resultaten, het is echter helaas niet uit te breiden naar stabiele en onstabiele atmosferische omstandigheden. Ons model is wèl geschikt om niet-neutrale omstandigheden te berekenen. Het is eveneens een "anderhalve-orde" model, maar gebruikt de energiebalans op een andere manier dan Duym [3] en Peterson [4].

## 2. HET MODEL

### 2.1 Het beschouwde fenomeen

We bestuderen verschijnselen in de onderste laag van de atmosferische grenslaag: de oppervlaktelaag. Onder homogene omstandigheden is in deze laag de schuifspanning  $\tau$  constant met de hoogte. Onze vraag is: wat gebeurt er met de wind als deze na een erg ruw oppervlak (zoals boomgaarden, bebouwing) plotseling op een glad oppervlak (bijv. een weiland) komt?

We kiezen ons referentiesysteem vastverbonden aan het aardoppervlak, de oorsprong bij de ruwheidsovergang, de x-as langs het aardoppervlak en langs de windrichting, de z-as loodrecht op het oppervlak. We nemen aan dat de ruwheidsovergang loodrecht op de windrichting staat (langs de y-as derhalve). Hierdoor is het probleem twee-dimensionaal.



Figuur 2.1 Overzicht fysische situatie en definitie coördinaten.

Dit referentiesysteem is strikt genomen geen inertiaal systeem: de aarde draait immers. De hierdoor optredende schijnkrachten spelen echter op de te beschouwen tijd- en lengteschaal geen rol.

Verder nemen we aan dat het verschijnsel stationair is: zich dus niet wijzigt in de tijd.

### 2.2 Intuïtieve beschrijving van het proces

We hebben een globaal idee hoe het proces ongeveer verloopt. Na de ruwheidssprong vormt zich op het nieuwe oppervlak een interne grenslaag, zie figuur 2.2. De onderste laag hiervan verkeert in evenwicht met de nieuwe ruwheid. Deze laag noemen we de evenwichtslaag. De grootheden schalen hier met de lokale parameters: de nieuwe ruwheid  $z_{01}$  en de lokale schuifspannings-

snelheid  $u_{*1}$ .

Buiten de interne grenslaag is de invloed van de nieuwe ruwheid  $z_{01}$  nog niet doorgedrongen, zodat de processen hier door de stroomopwaartse ( $x \leq 0$ ) parameters worden bepaald.

Boven de evenwichtslaag vindt een overgang plaats van de lokaal geschaalde processen tegen het oppervlak naar het oorspronkelijke evenwicht, dat op enige hoogte nog heerst. Deze overgangslaag is het interessantst.

De overgangslaag vormt samen met de evenwichtslaag de interne grenslaag.

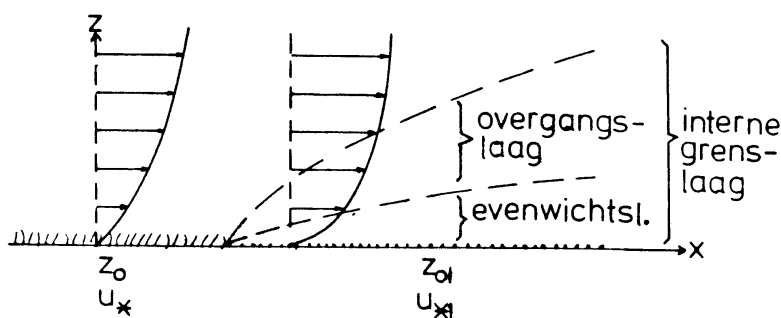


Fig. 2.2 Vorming van een interne grenslaag

## 2.3 De vergelijkingen

### 2.3.1 De continuïteitsvergelijking en de impulsbalans.

De stromingsleer levert ons voor dit probleem de volgende vergelijkingen (zie appendix B):

$$\text{Kontinuiteitsvergelijking: } \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (2.3.1)$$

$$\text{Impulsbalans in x-richting: } U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (2.3.2)$$

$$\text{met: } \tau = \nu \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{uw}$$

aangezien  $\nu \frac{\partial U}{\partial z} \ll -\overline{uw}$  volgt  $\tau \approx -\overline{uw}$

Dit betekent dat er voor de drie onbekenden -  $U$ ,  $W$  en  $\overline{uw}$  - slechts twee vergelijkingen zijn. Dit is een gevolg van de Reynoldse middelingsprocedure.

### 2.3.2 De sluiting van de impulsbalans

Naar analogie met moleculaire uitwisseling kiezen we in dit probleem voor een aanpak met turbulente viscositeit:

$$\tau = \nu_t \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.3.3)$$

Hierbij moet men goed bedenken dat de turbulente viscositeit  $\nu_t$  een eigenschap van de stroming is, dus niet van het fluïdum (het stromende medium).

Uit dimensie-overwegingen is  $\nu_t$  te schrijven als het produkt van een snelheidsschaal en een lengteschaal. Dit inspireert ons tot de sluitings-hypothese:

$$\tau = l \cdot \sqrt{(\alpha E)} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.3.4)$$

Waarin E de gemiddelde kinetische energie van de turbulentie is:

$$E = \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2) \quad (2.3.5)$$

$$\text{met } u' = \sigma_u = \sqrt{\overline{u^2}}$$

$$v' = \sigma_v = \sqrt{\overline{v^2}}$$

$$w' = \sigma_w = \sqrt{\overline{w^2}}, \text{ de turbulentie-intensiteiten}$$

In neutrale omstandigheden is de lengteschaal  $l = \kappa z$ . Voor evenwichtsomstandigheden, d.w.z. in homogene en neutrale omstandigheden is af te leiden:

$$\alpha E = u_*^2 = \tau = -\overline{uw} = c u' w' \quad (2.3.6)$$

Waarbij c de correlatiecoëfficiënt tussen u en w is. Uit (2.3.6) en (2.3.5) volgt:

$$\alpha = \frac{c u' w'}{\frac{1}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2)}$$

Schotanus heeft gemeten (zie Beljaars [5])

$$u' = 2 u_*$$

$$v' = 1,75 u_* \quad (2.3.7)$$

$$w' = 1,2 u_*$$

Hieruit volgt:  $c = 0,417$  en  $\alpha = 0,235$ .

We zullen  $\alpha$  in deze orde van grootte kiezen.

### 2.3.3 De energiebalans

Voor de turbulente energie hebben we de volgende vergelijking

$$U \frac{\partial E}{\partial x} + W \frac{\partial E}{\partial z} = \tau \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{g}{\theta} \overline{w\theta} - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{wE}) - \epsilon \quad (2.3.8)$$

Waarin:

$$\tau \frac{\partial U}{\partial z} = \text{produktie van turbulentie door afschuiving}$$

$$\frac{g}{\theta} \overline{w\theta} = \text{produktie van turbulentie door buoyancy}$$

$\overline{w\theta} = \text{warmteflux}$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\overline{wE}) = \text{diffusie van kinetische energie}$$

$$\epsilon = \text{dissipatie}$$

Een positieve warmteflux produceert turbulentie doordat warme, dus lichte lucht zich onder koude en zware lucht bevindt. Door het zwaartekrachtveld ontstaat op warme luchtdeeltjes een naar boven gerichte kracht, terwijl koude pakketjes naar beneden willen zakken. Dit heeft een "roerend" effect. Licht luchtdeeltjes willen dus "boven gaan drijven", we noemen dit "buoyancy".

In tegenstelling tot de schuifspanning blijkt de warmtestroom in de praktijk niet of nauwelijks door versturende ruwheidsovergangen te worden beïnvloed (Schotanus [2]). De buoyancy-productie is dus constant:

$$\frac{g}{\theta} \overline{w\theta} = \frac{g}{\theta} \frac{u_*^3}{\kappa L} = - \frac{u_*^3}{\kappa L} \quad (2.3.9)$$

$$L \text{ is de Monin-Obukhovlengte: } L = - \frac{\theta u_*^3}{g \kappa \overline{w\theta}} \quad (1.1.2)$$

### 2.3.4 Sluiting van de energiebalans.

We hebben nu een extra vergelijking, maar ook nieuwe onbekenden:  $\overline{wE}$ ,  $\epsilon$  en  $l$ . Hiervoor moeten we vergelijkingen bedenken om het model te sluiten. Neem aan:

$$\overline{wE} = - l \sqrt{\alpha E} \frac{\partial E}{\partial z} \quad (2.3.10)$$

$$\epsilon = \frac{u^3}{1} = \frac{(\alpha E)^{3/2}}{1} \quad (2.3.11)$$

$$\text{En voorlopig: } l = l(z). \quad (2.3.12)$$

D.w.z.  $l$  is een functie van de hoogte, maar blijft in de  $x$ -richting constant.

Met (2.3.4), (2.3.9) t/m (2.3.12) wordt de energiebalans:

$$U \frac{\partial E}{\partial x} + W \frac{\partial E}{\partial z} = l \sqrt{(\alpha E)} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - \frac{u_*^3}{\kappa L} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ l \sqrt{(\alpha E)} \frac{\partial E}{\partial z} \right\} - \frac{(\alpha E)^{3/2}}{1} \quad (2.3.13)$$

### 2.3.5 Dimensieloze vorm van het stelsel

Het model moet algemeen zijn, d.w.z. niet aan de specifieke maten van een bepaald geval gebonden. Daarom schalen we het stelsel met:

$z_0$ , ruwheidslengte van het stroomopwaartse terrein  
 $u_*$ , stroomopwaartse (globale) schuifspanningssnelheid

$$\begin{aligned} x^+ &= \frac{x}{z_0} & z^+ &= \frac{z}{z_0} & l^+ &= \frac{l}{z_0} & L^+ &= \frac{L}{z_0} & \tau^+ &= \frac{\tau}{u_*} \\ U^+ &= \frac{U}{u_*} & W^+ &= \frac{W}{u_*} & \sqrt{\alpha E^+} &= \frac{\sqrt{\alpha E}}{u_*} & E^+ &= \frac{E}{u_*} \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

a t/m i)

Invullen in ons stelsel geeft

$$\frac{\partial U^+}{\partial x^+} + \frac{\partial W^+}{\partial z^+} = 0 \quad (2.3.15)$$

$$U^+ \frac{\partial U^+}{\partial x^+} + W^+ \frac{\partial U^+}{\partial z^+} = \frac{\partial \tau^+}{\partial z^+} \quad (2.3.16)$$

$$\tau^+ = l^+ \sqrt{\alpha E^+} \frac{\partial U^+}{\partial z^+} \quad (2.3.17)$$

$$U^+ \frac{\partial E^+}{\partial x^+} + W^+ \frac{\partial E^+}{\partial z^+} = 1^+ \sqrt{\alpha E^+} \left( \frac{\partial U^+}{\partial z^+} \right) - \frac{1}{\kappa L^+} + \frac{\partial}{\partial z^+} \left\{ 1^+ \cdot \sqrt{\alpha E^+} \cdot \frac{\partial E^+}{\partial z^+} \right\} - \frac{(\alpha E^+)^{3/2}}{1^+} \quad (2.3.18)$$

### 2.3.6 Logaritmische hoogteschaal

Tegen het oppervlak treden de grootste gradiënten op. Hier zouden we de verschijnselen nauwkeuriger willen volgen. Dit kan door de logaritme van de hoogte:  $\eta = \ln z^+$  als coördinaat te kiezen.

$$\eta = \ln z^+ \quad (2.3.19)$$

$$z^+ = e^\eta \quad (2.3.20)$$

$$\frac{dz^+}{d\eta} = e^\eta \quad (2.3.21)$$

Verder:  $1e = \frac{1}{e^\eta} \rightarrow 1^+ = e^\eta 1e$  (2.3.22  
a + b)

Zo wordt ons stelsel (2.3.15) t/m (2.3.18):

$$\frac{\partial U^+}{\partial x^+} + e^{-\eta} \frac{\partial W^+}{\partial \eta} = 0 \quad (2.3.23)$$

$$U^+ \frac{\partial U^+}{\partial x^+} + W^+ e^{-\eta} \frac{\partial W^+}{\partial \eta} = e^{-\eta} \frac{\partial \tau^+}{\partial \eta} \quad (2.3.24)$$

$$\tau^+ = e^\eta \cdot 1e \sqrt{\alpha E^+} e^{-\eta} \frac{\partial U^+}{\partial \eta} = 1e \sqrt{\alpha E^+} \frac{\partial U^+}{\partial \eta} \quad (2.3.25)$$

$$U^+ \frac{\partial E^+}{\partial x^+} + W^+ \cdot e^{-\eta} \frac{\partial E^+}{\partial \eta} = 1e \cdot \sqrt{\alpha E^+} e^{-\eta} \left( \frac{\partial U^+}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{1}{\kappa L^+} + e^{-\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ 1e \sqrt{\alpha E^+} \frac{\partial E^+}{\partial \eta} \right\} - \frac{(\alpha E^+)^{3/2}}{e^\eta 1e} \quad (2.3.26)$$

## 2.4 De rand- en beginvoorwaarden

### 2.4.1 Beginwaarden

We nemen aan dat de stroming boven het stroomopwaartse terrein ( $x < 0$ ) in



evenwicht is en dat tot de ruwheidssprong op  $x = 0$  blijft. In de door ons beschouwde oppervlaktelaag is de schuifspanning constant met de hoogte. Volgens Businger [1] geldt in niet-stabiele omstandigheden

$$U^+ = \frac{U}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left( \ln \frac{z}{z_0} - \psi \right) = \frac{1}{\kappa} (\eta - \psi) \quad (2.4.1)$$

$$\text{met: } \psi = 2 \ln \left( \frac{\frac{1}{\phi} - 1}{2} \right) + \ln \left( \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{\phi}{2}} \right) - 2 \cdot \arctan \left( \frac{1}{\phi} \right) + \frac{\pi}{2} \quad (2.4.2)$$

$$\text{waarin: } \phi = \left( 1 - 15 \frac{z^+}{L^+} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.4.3)$$

Met behulp van de sluitingshypothese (2.3.4) is in logaritmische coördinaten voor de oppervlaktelaag af te leiden:

$$\sqrt{\alpha E^+} = \frac{\kappa z}{l \phi} = \frac{\kappa}{l e \cdot \phi} \quad (2.4.4)$$

De evenwichtswaarde voor  $l$  volgt uit de eis dat het rechterlid van de energiebalans (2.3.8) gelijk nul is.

Hierop komen we in hoofdstuk 4 terug. Onder neutrale omstandigheden ( $L \rightarrow \infty$ ) geldt:

$$\phi = 1 \quad (2.4.5a)$$

$$U^+ = \frac{\eta}{\kappa} \quad (2.4.5b)$$

$$\sqrt{\alpha E^+} = 1 \quad (2.4.5c)$$

$$l = \kappa z \quad (2.4.5d)$$

## 2.4.2 Randvoorwaarden

### Onderrand

Dichtbij het oppervlak worden zowel de produktie als de dissipatie zeer groot t.o.v. de overige termen. Dit betekent dat in een laagje dichtbij het oppervlak lokaal evenwicht en neutrale omstandigheden heersen. De grootheden moeten geschaald worden met lokale parameters:  $u_*1$  en  $z_{01}$ . In deze evenwichts-

laag geldt:

$$\phi^1 = \frac{\kappa z}{u_{*1}} \frac{\partial U}{\partial z} = 1 \quad \text{dimensieloos via 2.3.14 a t/m i:}$$

$$\kappa \frac{\partial U^+}{\partial \eta} = u_{*1}^+ \quad (2.4.6)$$

$$\text{waarbij: } u_{*1}^+ = \frac{u_{*1}}{u_*} \quad (2.4.7)$$

$$\tau = \text{constant} = u_{*1}^2 \rightarrow \tau^+ = (u_{*1}^+)^2 \quad (2.4.8)$$

$$l = \kappa z \rightarrow l_e = \kappa \quad (2.4.9)$$

$$U = \frac{u_{*1}}{\kappa} \ln \frac{z}{z_{o1}} \rightarrow U^+ = \frac{u_{*1}^+}{\kappa} (\eta - m) \quad (2.4.10)$$

$$\text{Waarin: } m = \ln \frac{z_{o1}}{z_o} \quad (2.4.11)$$

m is de parameter voor de grootte van de ruwheidssprong.

Uit de sluitingshypothese (2.3.25) volgt met (2.4.6), (2.4.8) en (2.4.9):

$$\sqrt{\alpha E^+} = u_{*1}^+ = \text{constant} \quad (2.4.12)$$

Omdat het oppervlak ondoordringbaar is, is de randvoorwaarde voor W erg simpel  $W(z = 0) = 0$ . We nemen voor

$$z = z_o \text{ (waar } U = 0): W(z = z_o) = W(\eta = 0) = 0 \quad (2.4.13)$$

De stapgrootte  $\Delta x$  in de x-richting hangt samen met de hoogte van het onderste roosterpunt. De gradiënt van  $U^+$  wordt naar het oppervlak toe erg groot. Als ook lage roosterpunten worden meegenomen in het numeriek oplossen van de vergelijkingen, dan moet de stapgrootte  $\Delta x$  erg klein worden gekozen wil er geen instabiliteit optreden, zie Duym [3].

We willen echter sneller voortgaan, d.w.z. een grotere stapgrootte kiezen. Daarom moeten we een  $z_{\min}$ , of - equivalent hiermee - een  $\eta_{\min}$ , kiezen waarboven we rekenen. We nemen aan dat beneden  $\eta_{\min}$  evenwicht heerst. Dit evenwichtslaagje hoeft niet neutraal te zijn. We krijgen dan:

$$\alpha E^+(\eta) = \text{constant} = \alpha E(\eta_{\min}) \text{ voor } \eta < \eta_{\min} \quad (2.4.14)$$

$$U^+(\eta) = \frac{u_{*1}^+}{\kappa} \{\eta - m - \psi(\eta)\} \quad \text{voor } \eta < \eta_{\min} \quad (2.4.15)$$

$$\text{Waarin: } \frac{u_{*1}^+}{\kappa} = \frac{U^+(\eta_{\min})}{\{\eta_{\min} - m - \psi(\eta_{\min})\}} \quad (2.4.16)$$

Opmerking: De keuze  $\alpha E^+(\eta) = \text{constant}$  is ongelukkig. In de evenwichtslaag geldt:  $\tau^+ = \text{constant} = (u_{*1}^+)^2$ . Onder neutrale omstandigheden geldt:  $\tau^+ = \alpha E^+$ , maar onder niet-neutrale omstandigheden is dit onjuist! Omdat het in het rekenschema beter uitkwam is toch (2.4.14) gekozen. Hierdoor is  $\tau^+$ , volgens (2.3.2) niet constant voor  $\eta < \eta_{\min}$ .

Beter zou zijn:

$$\tau^+(\eta) = \tau^+(\eta_{\min}) \quad \text{voor } \eta < \eta_{\min} \quad (2.4.17)$$

Met (2.3.25) volgt:

$$\sqrt{\alpha E^+(\eta)} = \frac{\tau^+(\eta)}{1e(\eta) \cdot \frac{\partial U^+(\eta)}{\partial \eta}} = \frac{\kappa \sqrt{\tau^+(\eta_{\min})}}{1e(\eta) \cdot \phi(\eta)} \quad (2.4.18)$$

Bovenrand

We kiezen de bovenrand van ons rekengebied hoger dan de interne grenslaag. Bij de bovenrand hebben we dus te maken met een constante spanningslaag, die schaalte met de stroomopwaartse ( $x < 0$ ) parameters.

Er geldt:

$$\tau = u_*^2 \rightarrow \tau^+ = 1, \quad \frac{\partial \tau^+}{\partial z} = 0 \quad (2.4.19)$$

$$\rightarrow U \frac{\partial U}{\partial u} + W \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$$

Dimensieloos en met de logaritmische hoogtecoördinaat:

$$U^+ \frac{\partial U^+}{\partial x^+} + W^+ \frac{\partial U^+}{e^{\eta} \partial \eta} = 0 \quad (2.4.20)$$

Hiermee wordt  $U(x, \eta_{\text{bovenrand}})$  bepaald.

Onder neutrale omstandigheden volgt uit (2.4.20):

$$\sqrt{\alpha E} = u_* \rightarrow \alpha E^+(x, \eta_{\text{bovenrand}}) = \alpha E^+(x, \eta_{\text{bovenrand}} - \Delta \eta) \quad (2.4.21)$$

Het zal nog blijken dat (2.4.21) onder niet-neutrale omstandigheden niet voldoet.

### 3. HET NEUTRALE MODEL

#### 3.1 Inleiding

Als aanloopje wordt een model en programma ontwikkeld dat alleen neutrale gevallen kan berekenen. Het programma heet: STEP/J, de diverse versies worden met een nummer aangegeven: 3A en 4 zijn de foutloze, werkende versies.

Dit programma is ontstaan uit (een verbouwde versie van) STEP/E7 van Nijs Jan Duijm [3].

Voor neutrale gevallen geldt:

$$le(z) = \text{constant} = \kappa \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \overline{w\theta} = 0 \quad (3.1.2)$$

#### 3.2 Het gediscretiseerde stelsel

Als we de differentiaalquotiënten in ons stelsel (2.3.23) t/m (2.3.26) vervangen door eindige-differentiequotiënten ontstaan:

$$a) \quad \frac{\frac{(U_{i+i,j}^+ - U_{i,j}^+)}{\Delta x^+} + \frac{(U_{i+1,j-1}^+ - U_{i,j-1}^+)}{\Delta x^+}}{2} + \frac{1}{e^{\eta_{j-\frac{1}{2}}}} \frac{W_{i+1,j}^+ - W_{i+1,j-1}^+}{\Delta \eta} = 0 \quad (3.2.1)$$

$$b) \quad U_{i,j}^+ \frac{U_{i+1,j}^+ - U_{i,j}^+}{\Delta x^+} + W_{i,j}^+ \left\{ \frac{f(U_{i,i+1}^+ - U_{i,j}^+) + (1-f)(U_{i,j}^+ - U_{i,i-1}^+)}{e^{\eta_{j,\Delta \eta}}} \right\} = \quad (3.2.2)$$

$$\frac{\tau_{i,j+\frac{1}{2}}^+ - \tau_{i,j-\frac{1}{2}}^+}{e^{\eta_{j,\Delta \eta}}} \quad \text{met } f = 1, \text{ als } W_{i,j} < 0 \\ f = 0, \text{ als } W_{i,j} \geq 0$$

$$c) \quad \tau_{i+1,j-\frac{1}{2}}^+ = le_{j-\frac{1}{2}} \left( \frac{\sqrt{\alpha E_{i+1,j}^+} + \sqrt{\alpha E_{i+1,j-1}^+}}{2} \right) \cdot \left( \frac{U_{i+1,j}^+ - U_{i+1,j-1}^+}{\Delta \eta} \right) \quad (3.2.3)$$

$$d) \quad U_{i,j}^+ \cdot \frac{E_{i+1,j}^+ - E_{i,j}^+}{\Delta x^+} + W_{i,j}^+ \left\{ \frac{f(E_{i,i+1}^+ - E_{i,j}^+) + (1-f) \cdot (E_{i,j}^+ - E_{i,i-1}^+)}{e^{\eta_{j,\Delta \eta}}} \right\} =$$

$$\frac{1e_j \cdot \sqrt{\alpha E_{i,j}^+}}{e^{\eta_j}} \left( \frac{U_{i,j+1}^+ - U_{i,j-1}^+}{2 \cdot \Delta \eta} \right)^2 - \frac{1}{\kappa L^+} - \frac{(\alpha E_{i,j}^+)^{3/2}}{1e_j \cdot e^{\eta_j}} +$$

$$\frac{1}{e^{\eta_j}} \left\{ \frac{1e_{j+1/2} \cdot (\sqrt{\alpha E_{i,j+1}^+} + \sqrt{\alpha E_{i,j}^+}) (E_{i,j+1}^+ - E_{i,j}^+)}{2 \Delta \eta} - \frac{1e_{j-1/2} \cdot (\sqrt{E_{i,j}^+} + \sqrt{\alpha E_{i,j-1}^+}) (E_{i,j}^+ - E_{i,j-1}^+)}{2 \Delta \eta} \right\}$$

(3.2.4)

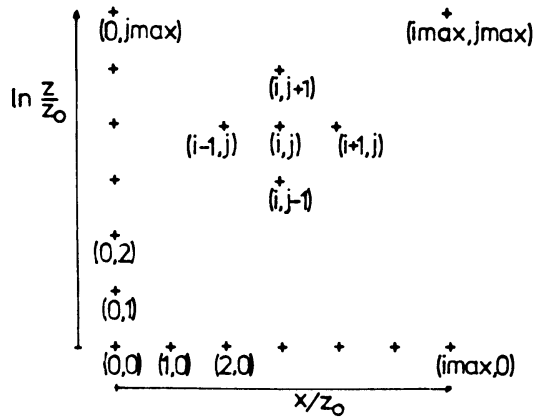


Fig. 3.1 Verdeling van roosterpunten

De differentiequotiënten zijn zó genomen dat de grootheden voor  $i+1$  alléén afhangen van hun waarden voor  $i$ . Dit heet een expliciet schema en voorkomt dat een gekoppeld stelsel onbekenden moet worden opgelost.

Definieer:

$$S = \alpha E^+ \tag{3.2.5}$$

$$V = \sqrt{\alpha E^+} \tag{3.2.6}$$

We vullen de neutrale relaties:  $1e_j = \kappa$  en  $1/L^+ = 0$  in en gebruiken de impulsbalans (3.2.2) om  $U_{i+1,j}^+$  te bepalen. Daarna de continuïteitsvergelijking voor  $W_{i+1,j}^+$ . Verder de energievergelijking, na vermenigvuldiging met  $\alpha$ , om  $S_{i+1,j}^+$  te vinden en tenslotte geeft de sluitingshypothese (3.2.3) ons  $\tau_{i+1,j-1/2}^+$ .

Deze vergelijkingen vormen de kern van de programma-reeks STEP/J. De programma's bevatten verder het genereren van de beginvoorwaarden en uitvoerprocedures om in tabellen de resultaten af te drukken en om een schets van het  $\tau^+$ - en  $U^+$ -profiel te maken. Zie voor de listing en een beschrijving appendix C.

### 3.3. Resultaten

#### Vergelijking met experimenten van Bradley

We kunnen onze modeluitkomsten vergelijken met het experimentele materiaal vergaard door Bradley [6]. Deze legde betonijzermatten (een vlechtwerk met hierop vertikaal staande pennen) op een asfalt landingsbaan en heeft de schuifspanning (met een weerstandplateau) en gemiddelde snelheidsprofielen (met cup-anemometers) gemeten op verschillende afstanden van de ruwheidssprong.

#### 3.3.1 Ontwikkeling van de oppervlakteschuifspanning met de stroomafwaartse afstand.

Figuur 3.2 toont  $\tau_w^+$  als functie van  $x^+$ . Aangezien er nogal wat onzekerheid is over de waarde van de ruwheidswaarde van het asfalt,  $z_{01}$ , berekenen we  $\tau_w^+(x^+)$  voor de minimum en maximum schattingen van  $z_{01}$ . Voor  $\alpha$  is gekozen  $\alpha = 0,30$ . Dit komt overeen met Duijm.

We zien in figuur 3.2 dat de schuifspanning direct na de ruwheidssprong erg klein is, maar zeer snel (in enkele rekenstappen) toeneemt, om na een lokaal maximum weer snel te dalen naar een lokaal minimum. Hierna neemt  $\tau^+$  heel langzaam toe. Aanvankelijk is de berekende schuifspanning hoger dan de metingen van Bradley, na circa  $x^+ = 500$  aanzienlijk lager. De overeenkomst met dit experiment is slecht: zowel de hoogte als de vorm van onze curves passen niet bij de metingen.

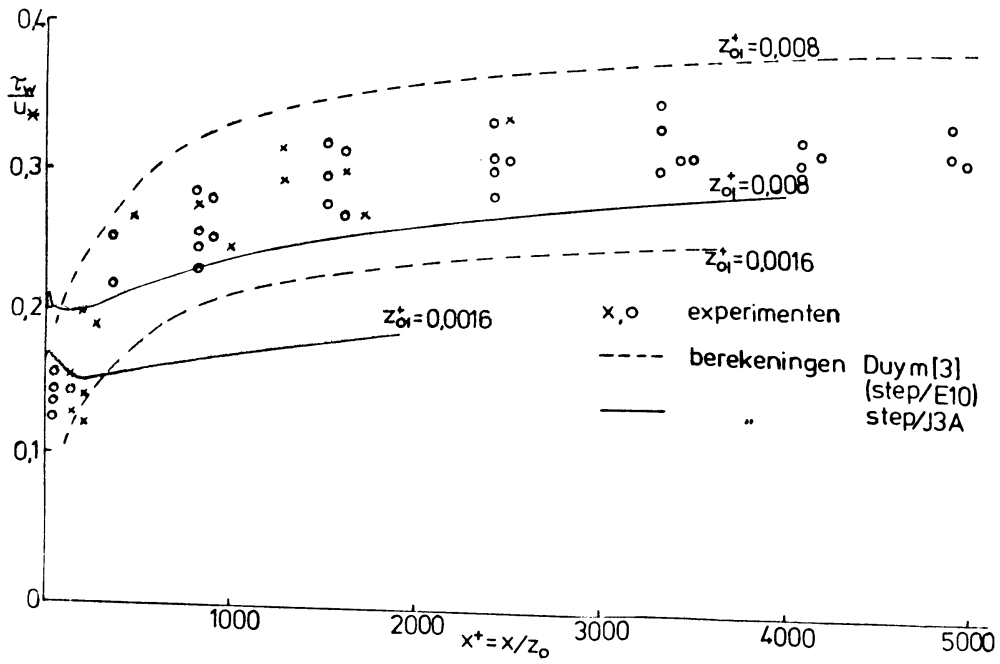


Fig. 3.2 Modelberekeningen van de oppervlakteschuifspanning met ons model en dat van Duym [3] in vergelijking met experimentele resultaten van Bradley [6].

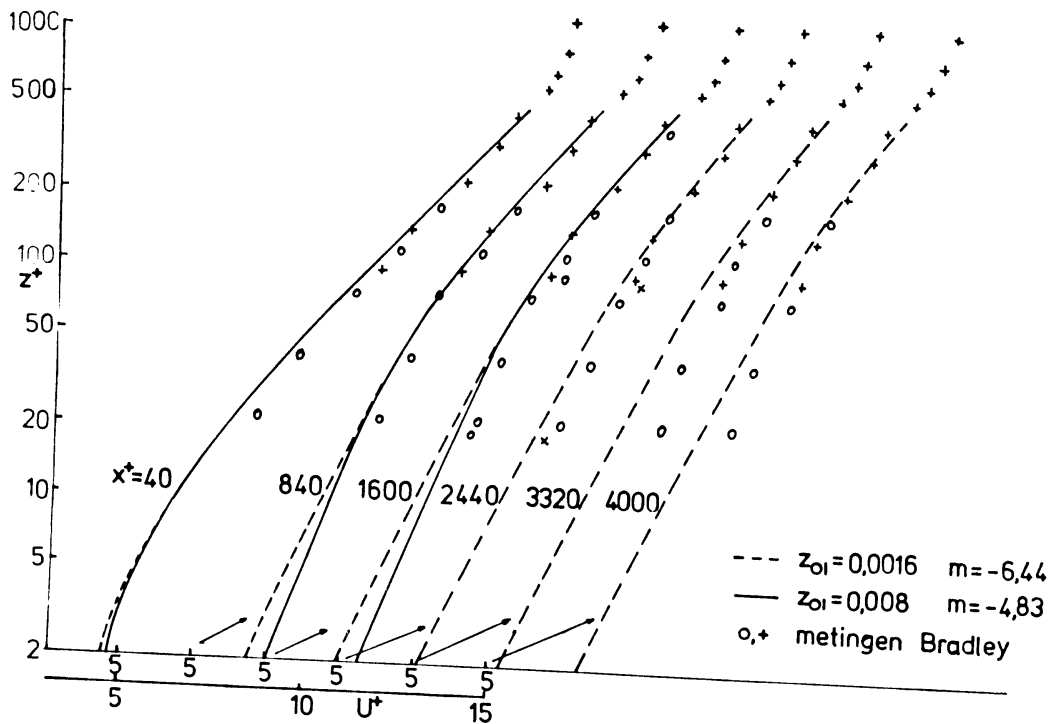


Fig. 3.3 De ontwikkeling van het gemiddelde snelheidsprofiel berekend met STEP/J3A in vergelijking met Bradley [6].



### 3.3.2 Ontwikkeling van het gemiddelde snelheidsprofiel.

Figuur 3.3 toont het snelheidsprofiel op diverse afstanden na de sprong. De modelvoorspellingen passen het best bij de metingen als voor  $z_{01}^+ = 0,0016$  gekozen wordt. Dat wil zeggen dat de ruwheidshoogte van het asfalt  $z_{01} = 0,0004$  cm bedraagt.

Door de logaritmische schaal is de afleesnauwkeurigheid gering. De metingen zijn alle erg hoog: het onderste meetpunt bevindt zich op  $z^+ = 22$  (Bij een glad-ruw-overgang is dit onder de toppen van de verticale pennen.). Voor kleine  $x^+$  is  $z^+ = 22$  boven de interne grenslaag, voor grote  $x^+$  zitten we in de bovenrand van de overgangslaag. De metingen geven te weinig gegevens over de interne grenslaag om een goede toetsing van het model mogelijk te maken.

#### 4. HET MODEL MET BUOYANCY-TERM EN VASTE LENGTESCHAAL

##### 4.1 Samenvatting van de ontwikkeling

Het neutrale model werd uitgebreid met de buoyancy-term (2.3.9). Het bleek dat met  $l = \kappa z$  (2.4.5d) onder homogene omstandigheden ( $z_{01}^+ = 1$ ) het rechterlid van de energiebalans ongelijk nul is. Hierdoor treden veranderingen in de schuifspanning op, wat op zijn beurt het snelheidsprofiel wijzigt. Dit is een gevolg van het feit, dat de evenwichtsprofielen, die gebruikt zijn als beginvoorwaarden, niet passen bij de sluitingshypothese.

Opdat het rechterlid van de energiebalans nul is, moet  $l$  zorgvuldig worden gekozen. Graag hadden we  $l$  exact bepaald uit de eis dat het rechterlid van de energiebalans (2.3.8) nul moet zijn. Helaas is dit door de diffusie-term een zeer lastige 2e orde differentiaalvergelijking voor  $l$ . Door de diffusie-term nul te stellen (hoewel deze alleen voor kleine  $\frac{z}{L}$  klein is t.o.v. productie en dissipatie) hielden we een algebraïsche vergelijking over. M.b.v. storingsberekening kregen we een nog betere benadering, zie hfst. 4.2.

De bovenrandvoorwaarde voor  $E^+$  (2.4.21) bleek niet te voldoen. Voor dit probleem is een bevredigende oplossing ontwikkeld. In hfst. 4.3 bespreken we dit probleem.

De met dit model verkregen resultaten worden vergeleken met de metingen van Bradley en experimenten met de KNMI meteomast te Cabauw.

##### 4.2 De lengteschaal

Boven een homogeen oppervlak wijzigt de stroming zich stroomafwaarts uiteraard niet, we hebben bij de beginwaarden immers evenwicht verondersteld. Derhalve:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0, \text{ waarin } G \text{ een willekeurige grootte is.} \quad (4.2.1)$$

Uit de continuïteitsvergelijking (2.3.1) en de impulsbalans (2.3.2) volgt hiermee:

$$W(x, z) = 0 \quad (4.2.2) \text{ en } \tau(x, z) = u_*^2 \quad (4.2.3)$$

Als we verder in  $\frac{\kappa z}{u_*} \frac{\partial U}{\partial z} = \phi$  voor  $\phi$  een empirisch bekende functie kiezen, blijft het volgende van de energiebalans (2.3.13) over:

$$0 = 1 \sqrt{\alpha E} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - \frac{u_*^3}{\kappa L} - \frac{(\alpha E)^{3/2}}{1} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ 1 \sqrt{\alpha E} \frac{\partial E}{\partial z} \right\} \quad (4.2.4)$$

Met behulp van de sluitingshypothese (2.3.4) is hieruit E te elimineren. We krijgen zo een voorwaarde waaraan 1 moet voldoen, wil de stroming in evenwicht zijn:

$$\phi^4 - \frac{z}{L} \phi^3 - \left( \frac{\kappa z}{1} \right)^4 + \frac{\kappa^2}{\alpha} z \phi^3 \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{z}{\phi} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left( \frac{\kappa z u_*}{1 \phi} \right)^2 \right\} \right\} = 0 \quad (4.2.5)$$

Door de diffusieterm is dit een zeer vervelende, niet-lineaire, 2e orde D.V. We kunnen een eerste orde schatting van 1 maken door deze diffusieterm te verwaarlozen:

$$1 = \frac{\kappa z}{\left( \phi^4 - \frac{z}{L} \phi^3 \right)^{\frac{1}{4}}} \quad (4.2.6)$$

Deze schatting substitueren we in de diffusieterm van (4.2.5). In de overige termen vatten we 1 als onbekende op.

Zo verkrijgen we:

$$1 = \frac{\kappa z}{\left\{ \phi^4 + z \phi^3 \left( \frac{-1}{L} + \frac{\kappa^2}{\alpha} \text{diff} \right) \right\}^{\frac{1}{4}}} \quad (4.2.7)$$

$$\text{waarin: } \text{diff} = -\frac{L}{2A} + z \left\{ \frac{-B^2}{4 \phi A^3} + \frac{15 \phi^3 (8 L + 45 z \phi^4)}{32 L^3 \cdot A} \right\} \quad (4.2.7a)$$

$$\text{met: } A = \sqrt{\left( 1 - \frac{z}{L \phi} \right)} \quad (4.2.7b)$$

$$B = \frac{15 z \phi^4 - 4L}{4 L^2 \phi} \quad (4.2.7c)$$

Deze methode heet "storingsrekening" en levert nauwkeurige resultaten wanneer de aanvankelijk verwaarloosde en daarna gecorrigeerde term klein is t.o.v. de overige termen. Dit is in ons geval twijfelachtig.

De programma's STEP/B werken met de tweede-orde lengteschaal (4.2.7).

### 4.3 De bovenrandvoorwaarde

Boven de interne grenslaag is voor neutrale gevallen de energie konstant met de hoogte. Als bovenrandvoorwaarde is dan de energie gelijk te kiezen aan die in het één-na hoogste roosterpunt.

Deze randvoorwaarde voldoet niet voor een instabiele atmosfeer, omdat in het algemeen (zoals boven homogeen terrein) de energie toeneemt met de hoogte t.g.v. de turbulentie-productie door buoyancy. De meest plausibele randvoorwaarde is dat de energietoename aan de bovenrand constant blijft. De energie zelf kan veranderen door stroomlijnverplaatsing t.g.v. versnelling in de interne grenslaag.

Deze gradiënt werd eerst benaderd door lineaire extrapolatie vanuit de één na en twee-na hoogste roosterpunten. Dit bleek niet te voldoen.

Een goede keuze is de toename gelijk te nemen aan de toename in de beginvoorwaarde:

$$\sqrt{\alpha E_{i+1, j_{\max}}^+} = \sqrt{\alpha E_{i+1, j_{\max}-1}^+} + \{ \sqrt{\alpha E_{0, j_{\max}}^+} - \sqrt{\alpha E_{0, j_{\max}-1}^+} \} \quad (4.3.1)$$

### 4.4 Vergelijking van resultaten met experimenten van Bradley.

Evenals bij het neutrale model vergelijken we de uitkomsten van STEP/B met de metingen gedaan door Bradley [6]. Zie hfst. 3.3 voor een beschrijving van deze experimenten. In tegenstelling tot Duijm [3] is nu  $\alpha = 0,20$  gekozen. Dit komt beter overeen met waarden gehaald uit experimentele gegevens (zie hfst. 2.3.2) dan de waarde  $\alpha = 0,30$  gehanteerd door Duijm en ook door ons in STEP/J.

#### 4.4.1 Stroomafwaartse ontwikkeling van de wandschuifspanning.

Het interessantste verschijnsel is de ontwikkeling na de ruwheidssprong van de schuifspanning op het oppervlak. De voorspelling door STEP/B wordt in figuur 4.1 getoond. De resultaten vertonen dezelfde trend als die van STEP/J: direct na de sprong een onverklaarbare kronkel, daarna eerst nog even een hogere, vervolgens een veel lagere waarde dan de metingen. Kortom: de voorspelling verloopt vlakker dan de meetresultaten.

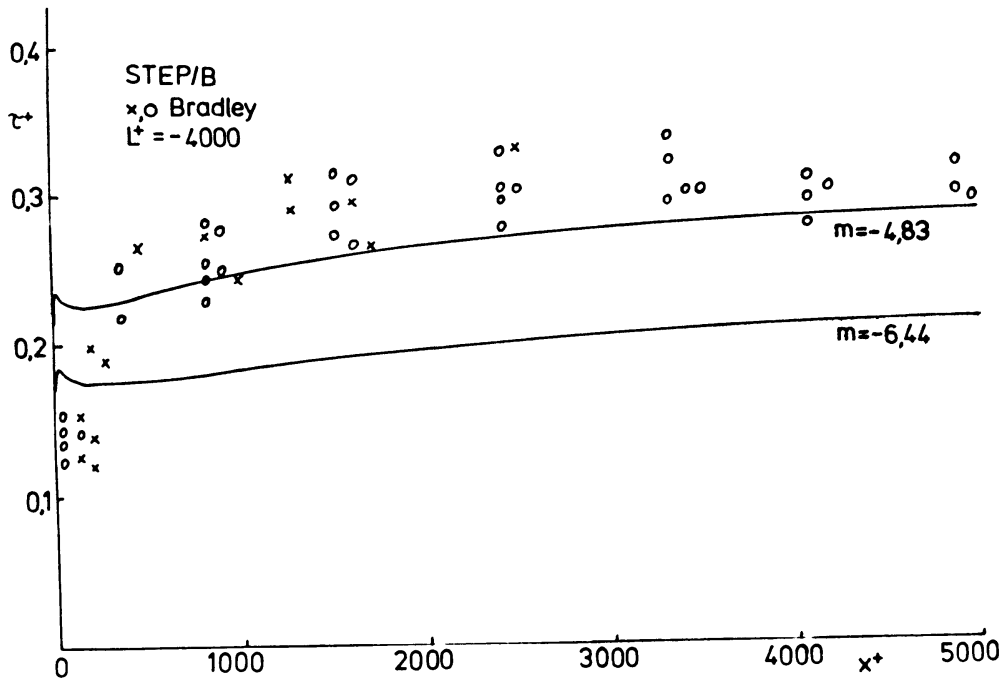


Fig. 4.1 Berekende oppervlakteschuifspanning (STEP/B) voor  $L = -10$  m ( $L^+ = -4000$ ) in vergelijking met Bradley [5].

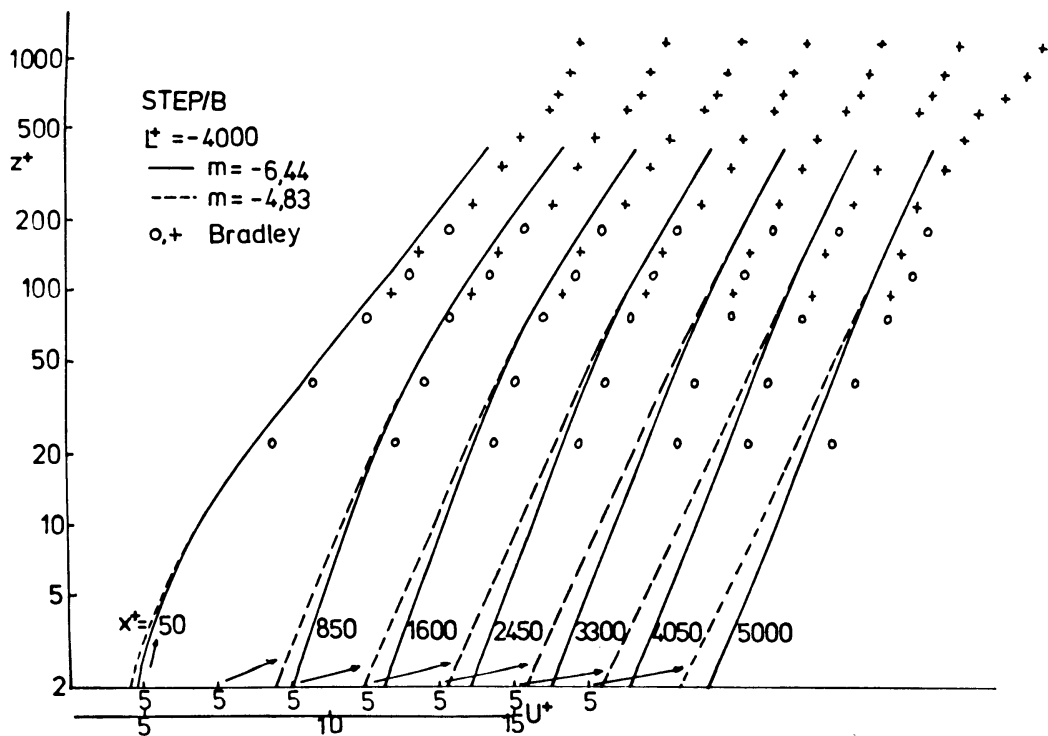


Fig. 4.2 De ontwikkeling van het gemiddelde snelheidsprofiel met STEP/B en  $L^+ = -4000$ .

Wel liggen deze waarden hoger dan die van STEP/J. Hoewel we dit effect eerst toeschreven aan het niet-neutraal zijn van de atmosfeer, bleek later dat dit aan de gewijzigde  $\alpha$  te wijten was (van  $\alpha = 0,3$  naar  $\alpha = 0,2$ ).

We vermoedden dat de kronkel aan het begin veroorzaakt zou worden door numerieke instabiliteit t.g.v. een te grote stapgrootte  $\Delta x$ . Deze is gehalveerd en door vijf gedeeld: dit gaf exact gelijke figuren (van  $\Delta x = 0,5$  naar  $\Delta x = 0,25$  en  $\Delta x = 0,10$ ).

De voorspelling gebaseerd op  $m = -4,83$  ( $z_{01}^+ = 0,008$ ) geeft de best gelijkende resultaten. Over het algemeen is de overeenkomst tussen de metingen en de modeluitkomsten slecht.

#### 4.4.2 Ontwikkeling van het gemiddelde snelheidsprofiel.

Ook waren we nieuwsgierig welke  $U^+$ -profielen door STEP/B voorspeld zouden worden. Deze profielen ziet  $U$  voor  $z^+ = 50, 850, 1600, 2450, 3300, 4050$  en  $4800$  in figuur 4.2. Voor de geschaalde Monin-Obukhovlengte is gekozen:  $L^+ = -4000$  ( $z_0 = 0,0025$  m, dus  $L = -10$  m). We zien dat boven  $z^+ = 100$ , dus  $\frac{z}{L} = \frac{1}{40}$ , de profielen duidelijk afwijken van de metingen, die zó geschaald zijn dat ze op  $z^+ = 450$  gelijk zijn aan het logaritmische snelheidsprofiel. Kennelijk heeft de buoyancy al zeer snel (immers  $\frac{z}{L} = 0,025$ ) een redelijke invloed. De curves wijken aanzienlijk af van die in figuur 3.2, waar de voorspellingen boven  $z^+ = 100$  redelijk samenvallen met de metingen. Aangezien die resultaten niet alleen op neutrale omstandigheden gebaseerd zijn, maar ook een afwijkende  $\alpha$  gebruiken, genereren we met STEP/B ook nog eens resultaten voor een zeer grote waarde van  $L$ , d.w.z. voor vrijwel neutrale omstandigheden. Verder zien we dat de voorspellingen voor  $m = -6,44$  het beste passen bij de metingen.

In figuur 4.3 worden de modeluitkomsten van STEP/B voor  $L = -10^5$ ,  $L^+ = -4 \cdot 10^7$  getoond. Uit figuur 3.2 en 4.2 blijkt dat de modeluitkomsten voor de grote ruwheidssprong ( $m = -6,44$ ) het beste bij de metingen passen, daarom kiezen we nu ook  $m = -6,44$ . Verder is  $\alpha = 0,20$ . We zien dat de resultaten van STEP/B, voor deze zeer grote  $L^+$ , gelijk zijn aan de resultaten van STEP/J. Kennelijk heeft  $\alpha$  geen invloed op het gemiddelde snelheidsprofiel. Vergelijking van figuur 4.3 met figuur 4.2 leert dat de buoyancy al snel een merkbare invloed op het snelheidsprofiel heeft. Voor kleine  $z^+$  vallen de curves samen.

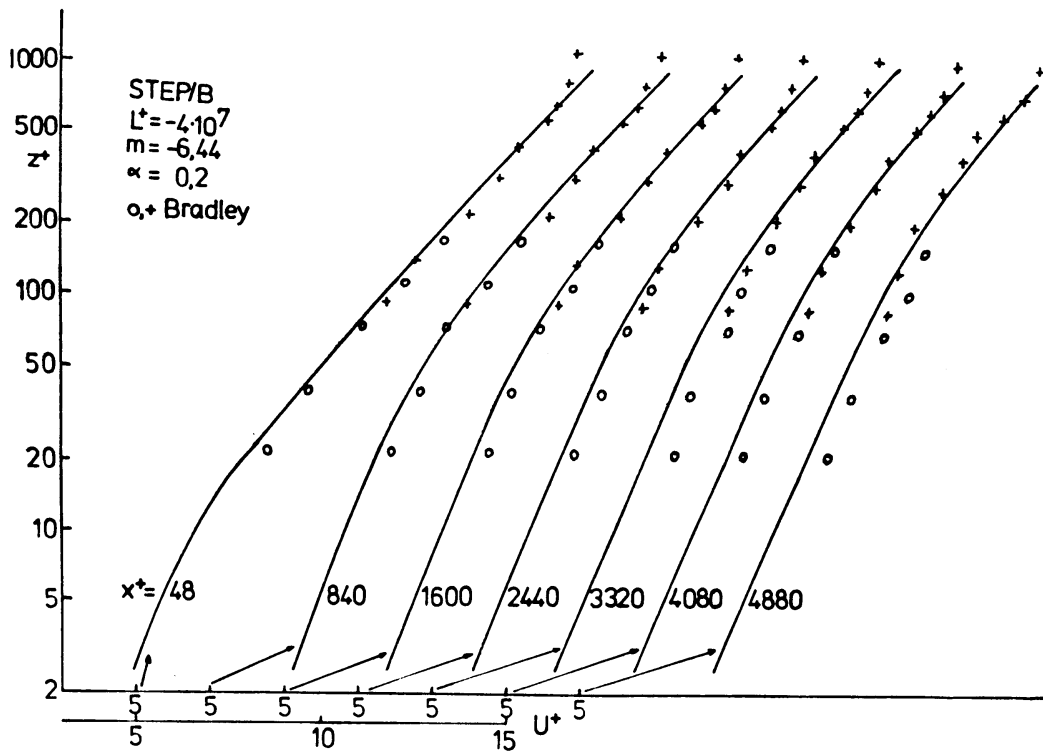


Fig. 4.3 De ontwikkeling van het gemiddelde snelheidsprofiel met STEP/B en  $L^+ = -4 \cdot 10^7$ .

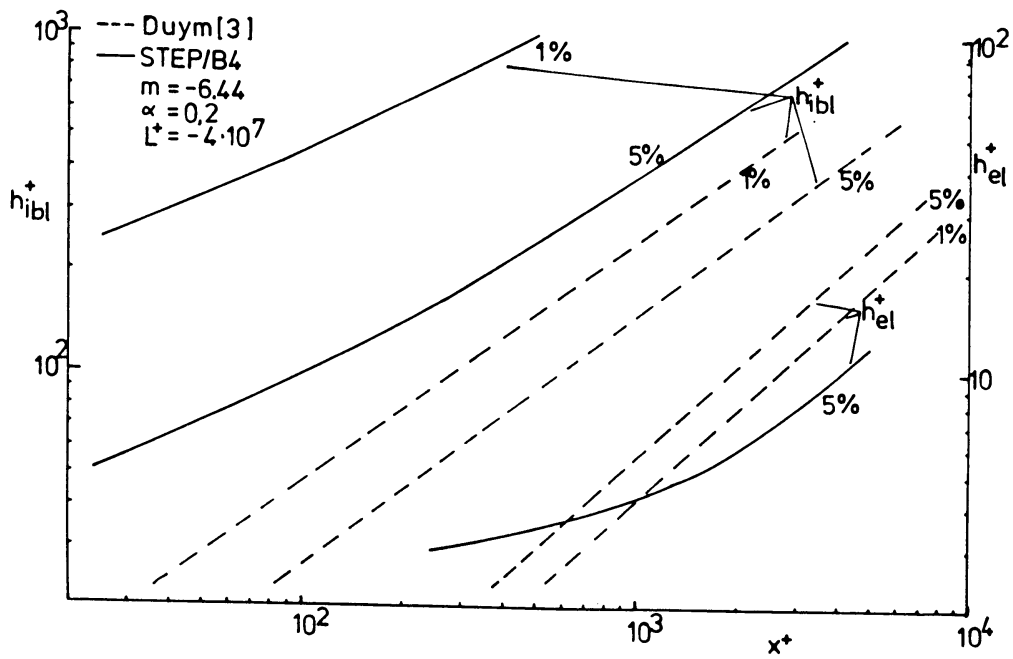


Fig. 4.4 De groei van de interne grenslaag en van de evenwichtslaag.

#### 4.4.3 Groei van de interne grenslaag.

Voor de experimentele bepaling van de schalingsgrootheden, zoals  $u_*$ , is het belangrijk te weten hoe de dikte van de interne grenslaag (de evenwichtslaag en de overgangslaag) zich ontwikkelt. Als we  $u_*$  voor een glad weiland willen meten, maar dit weiland is omgeven door ruw terrein, b.v. bomen of huizen, dan moeten we m.n. de hoogte van de evenwichtslaag kennen. Hier heerst namelijk de schuifspanning behorende bij de ruwheid van het weiland.

Figuur 4.4 toont hoe de interne grenslaaghoogte en die van de evenwichtslaag groeien met de afstand na de ruwheidssprong. Let erop dat links de schaal voor de interne grenslaaghoogte staat en rechts de afwijkende, schaal voor de evenwichtslaag. De interne grenslaag wordt begrensd door het niveau waar de schuifspanning tot op een kleine fractie (1% of 5%), na, genaderd is tot  $\tau^+ = 1$ , de waarde in het ongestoorde gebied. De evenwichtslaag wordt begrensd door het niveau waar de schuifspanning slechts een fractie (5%) hoger is dan de waarde aan het oppervlak.

In figuur 4.4 zijn tevens de resultaten van Duijm [3] aangegeven (de onderbroken lijn). We zien dat model STEP/B een zeer snelle groei van de interne grenslaag voorspelt, veel sneller dan Duijm's model STEP/E. De evenwichtslaag groeit erg traag. B.V. voor  $x^+ = 2000$  geldt  $h_{EL} = 6$  d.w.z. als  $z_0 = 0,25$ , dan is 500 m na de ruwheidssprong de evenwichtslaag nog maar 1,5 m hoog!

In tegenstelling tot Duijm's resultaten is het verband in figuur 4.4, een dubbellogaritmisch diagram, niet rechtlijnig. D.w.z. dat er tussen  $h$  en  $x$  geen "macht-verband" bestaat:  $h^+ = C \cdot x^{+n}$ , met  $n = \text{constant} = \text{helling van grafiek}$ .

#### 4.5 Resultaten met parameters van Cabauw situatie

Schotanus heeft op 2 juli 1981, meetdag 183, metingen gedaan bij de KNMI meteomast te Cabauw. Er stond een zuid-zuid-westelijke wind en de omstandigheden waren licht onstabiel, zie tabel 4.1.



Tabel 4.1 Parameters meetdag 183 (2-7-81)

dagnr	tijd (GMT)	windrichting	ruwheden		Monin-Obukhov in m
			$z_0$	$z_{01}$ in m	
183I	9.00-11.20	206°	0,17	0,01	-135
183II	11.30-14.30	195°	0,17	0,01	-208

Het is interessant om de modeluitkomsten voor de, deze dag geldende, parameters te bekijken.

Figuur 4.5 toont de geografische situatie te Cabauw. De twee geldende windrichtingen zijn ingetekend. We zien dat op ongeveer 500 meter stroomopwaarts van de mast zich wat bossages en een rij bomen (langs een weg) bevinden. De ruwheidslengte  $z_0$  van dit stroomopwaartse terrein is volgens de vlaagmethode van Wieringa [7] ongeveer:  $z_0 = 0,17$  m. De ruwheid van een egaal, typisch Hollands, weiland zoals tussen mast en de bossages, is:  $z_{01} = 0,01$  m. De ruwheidssprong bedraagt derhalve:  $m = \ln z_{01}^+ = \ln 0,06 = -2,81$ .

Figuur 4.6 toont welke  $\phi^-$ ,  $U^+$ ,  $\tau^+$  en  $K^D$ -profielen model STEP/B voorspelt op  $x = 500$  m na een ruwheidssprong met  $m = -2,81$ . Als Monin-Obukhov-lengte is gekozen:  $L = -150$  m. Op 3,55 meter hoogte ( $z^+ = \frac{3,55}{0,17} = 20,9$ ) geldt:  $\phi = 0,87$  (4.7.1) Dit is zeer matig in overeenstemming met de gemeten waarde,  $\phi = 0,6$ . (Zie Beljaars [5], figuur 5 "Dimensionless wind shear at 3,5 m height multiplied by the function velocity ratio at 22, 5 m and 3,5 m).

Verder zegt zo'n plaatje niet veel: het gaat om de afwijking t.o.v. de homogene situatie. Daarom worden de curves voor het homogene geval naast die voor een ruwheidssprong in één figuur gepresenteerd: figuur 4.7. We zien dat  $\phi$  tussen  $z^+ = 10$  en  $z^+ = 500$  aanzienlijk lager is voor het inhomogene geval. Dit gebied vormt de overgangslaag. Verder is te zien dat  $\tau^+$  niet precies identiek 1 is voor het homogene geval. Dit komt door de lengteschaal-problematiek. De afwijking is klein.

Tenslotte laten we in figuur 4.8 de resultaten zien voor  $L = -100$  m en  $L = -200$  m. Tevens zijn de curves van figuur 4.6 ( $L = -150$  m), gestippeld, ingetekend.

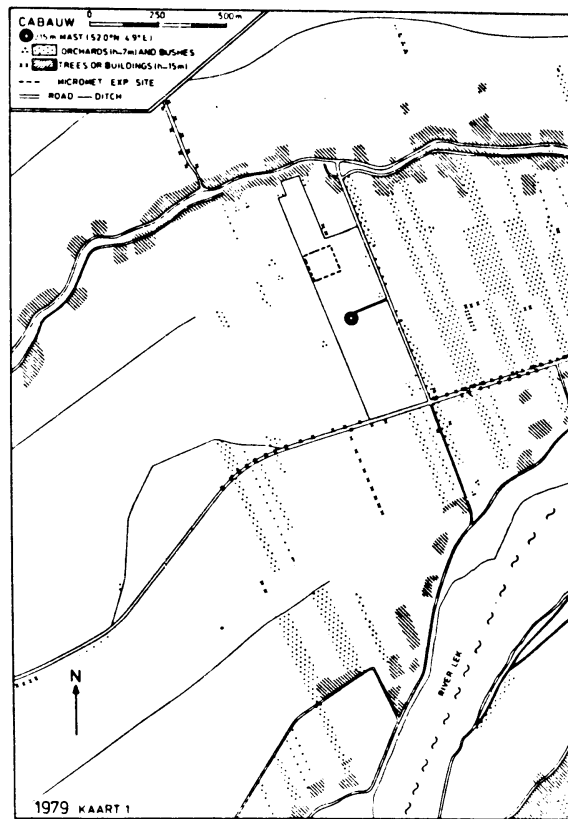


Fig. 4.5 Het meetterrein in Cabauw met windrichtingen op meetdag 183.

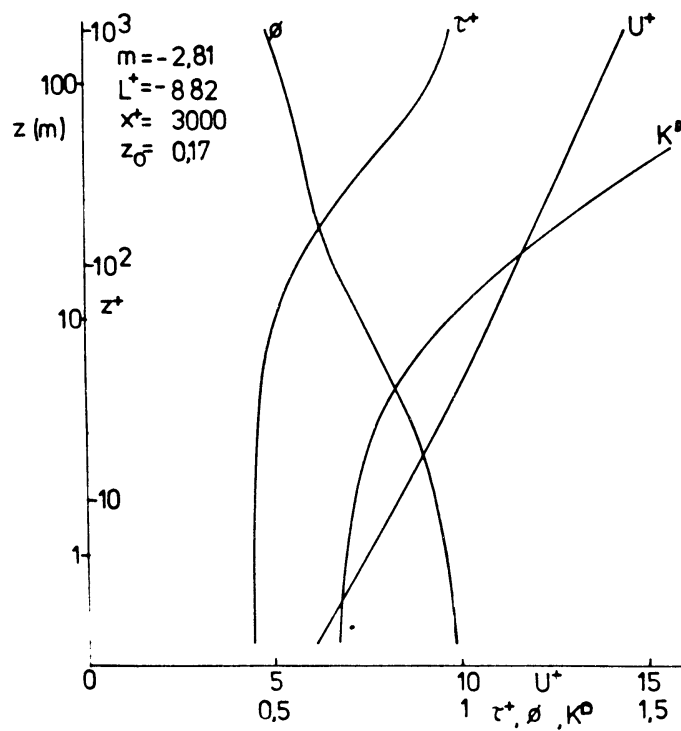


Fig. 4.6 Dimensieloze shear, schuifspanning, windsnelheid en turbulente viscositeit als functie van  $z^+$ .

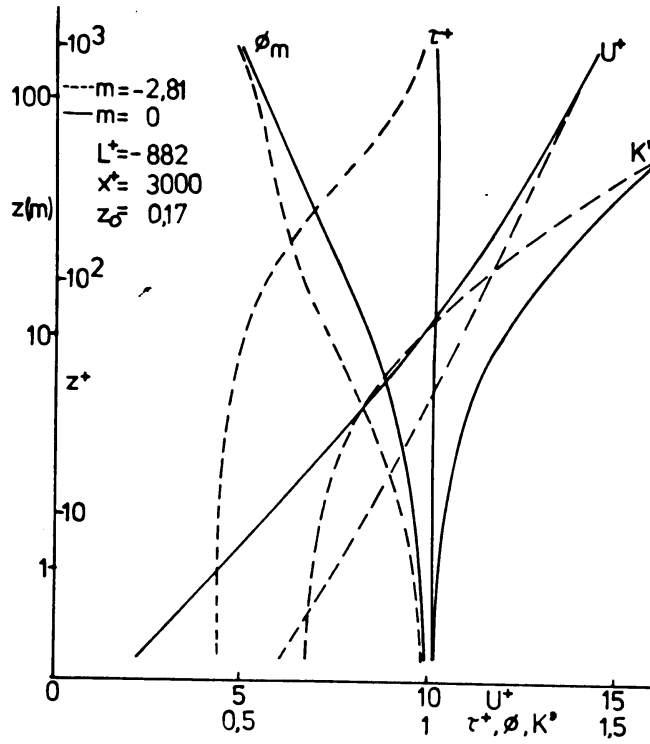


Fig. 4.7 Dezelfde grootheden als in 4.6 maar nu vergeleken met de waarden voor homogeen terrein.

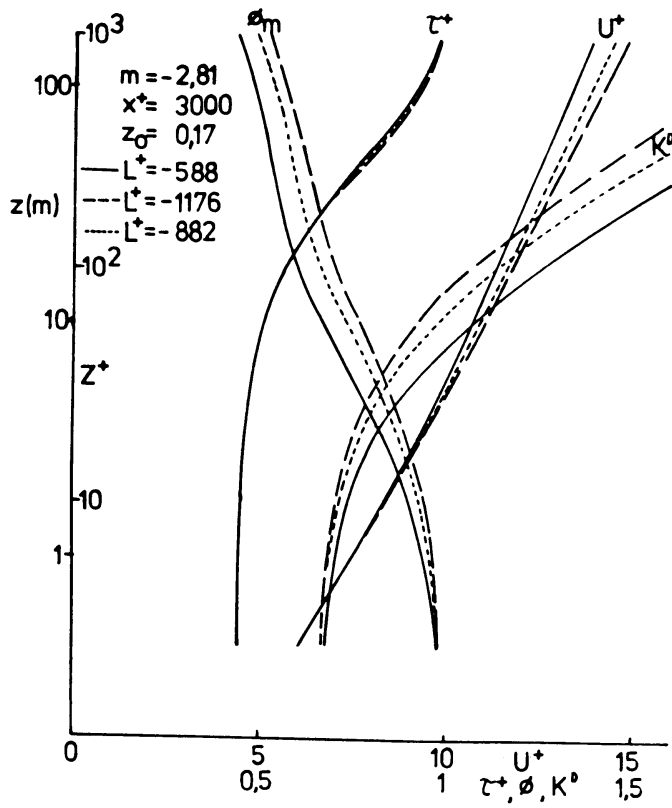


Fig. 4.8 Grootheden als in Fig.4.6 voor diverse waarden van L.

#### 4.6 Conclusie

Het computerprogramma STEP/B4 gebaseerd op dit model blijkt zonder problemen, zoals numerieke instabiliteit, te werken. Het kiezen van de lengteschaal is door de buoyancy-effecten niet eenvoudig, maar dit is uiteindelijk bevredigend opgelost. Helaas kunnen we niet zonder meer tevreden zijn met de resultaten. De stroomafwaartse ontwikkeling van de wandschuifspanning vertoont een merkwaardige beginkronkel en verloopt te vlak. Ook wijkt de dimensieloze shear voor het inhomogene terrein veel minder af dan metingen met de Cabauw mast aangeven.

Kennelijk is ons model niet geavanceerd genoeg om de waargenomen verschijnselen te verklaren. De turbulente uitwisselingscoëfficiënt  $v_T$  in (2.3.3) bestaat uit een lengteschaal en een snelheidsschaal, zie (2.3.4). De snelheidsschaal is in het huidige model een vrije, variabele, grootte, waar we een vergelijking voor hebben. De volgende uitbreiding bestaat uit een vergelijking voor de lengteschaal. Deze is dan niet meer constant in x-richting.

## 5. HET TWEEDE-ORDE MODEL

### 5.1 De lengteschaalvergelijking

In tweede-orde modellen is niet alleen de snelheidsschaal maar ook de lengteschaal in de turbulente viscositeit een variabele. De lengteschaal wordt bepaald m.b.v. de dissipatievergelijking. Een van de centrale aannames in het vakgebied der turbulentie is namelijk:

$$\epsilon = \frac{\bar{u}^3}{\lambda} \quad (5.1.1)$$

waarin:  $\bar{u}$  de snelheidsschaal van de grote wervels en  $\lambda$  de lengteschaal van de grote wervels is.

Deze aanname is gebaseerd op het idee dat de grote wervels verantwoordelijk zijn voor het energieverlies van de stroming. De grote wervels "tappen" kinetische energie (van de orde  $\bar{u}^2$  af uit de hoofdstroom en "geven" deze in hun eigen tijdschaal  $\lambda/\bar{u}$  door naar kleinere structuren. Zo wordt per tijdseenheid het vermogen  $\bar{u}^3/\lambda$  doorgegeven naar steeds kleinere structuren, waarin de plaatselijke snelheidsgradiënten tenslotte zo groot worden dat de viscositeit van het fluïdum kan toeslaan en de kinetische energie omzet in warmte.

De grote wervels zorgen tevens voor het leeuwendeel van het turbulente transport, waaronder het impulstransport  $-\overline{uw}$ . Daarom kunnen we voor  $\bar{u}$  en  $\lambda$  respectievelijk nemen  $(\alpha E)^{\frac{1}{2}}$  en 1. Nu is uit (5.1.1) onze lengteschaal op te lossen:

$$1 = \frac{(\alpha E)^{3/2}}{\epsilon} \quad (5.1.2)$$

Voor de dissipatie hebben we een vergelijking (zie Launder [8]):

$$U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + W \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = C_{\epsilon 1} \cdot 1 \cdot (\alpha E)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\epsilon}{E} \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - C_{\epsilon 2} \cdot \frac{\epsilon^2}{E} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1(\alpha E)^{\frac{1}{2}}}{C_{\kappa \epsilon}} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right\} \quad (5.1.3)$$

Hierin zijn  $C_{\epsilon 1}$ ,  $C_{\epsilon 2}$  en  $C_{\kappa \epsilon}$  nog te kiezen konstanten.

Deze vergelijking bevat geen nieuwe onbekenden, zodat deze (5.1.3) samen met (2.3.1), (2.3.2), (2.3.4), (2.3.13) en (5.1.2) een gesloten stelsel vormt,

waaruit  $U$ ,  $W$ ,  $(\alpha E)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\epsilon$ ,  $l$  en  $\tau$  zijn te bepalen.

## 5.2 De rand- en beginvoorwaarden

Analoog aan de energie kiezen we als voorwaarde aan de benedenrand voor de dissipatie:

$$\epsilon_{i+1,j}^+ = \epsilon_{i+1,j_{\min}}^+ \cdot e^{\eta_{j_{\min}} - \eta_j}, \text{ voor } j < j_{\min} \quad (5.2.1)$$

Voor de bovenrand, analoog aan (4.3.1):

$$\epsilon_{i+1,j_{\max}}^+ = \epsilon_{i+1,j_{\max}-1}^+ + (\epsilon_{0,j_{\max}}^+ - \epsilon_{0,j_{\max}-1}^+) \quad (5.2.2)$$

Verder kiezen we als beginwaarden:

a)  $l$  volgens tweede-orde relaties (4.2.7) (5.2.3)

b)  $\sqrt{\alpha E} = \frac{\kappa z u_*}{l\phi}$  of  $\sqrt{\alpha E}^+ = \frac{\kappa}{le \cdot \phi}$  (5.2.4)

c)  $\epsilon^+ = \frac{(\alpha E^+)^{3/2}}{\epsilon^\eta \cdot le}$  (5.2.5)

d)  $\phi$  volgens de Businger relatie (2.4.3)

## 5.3 Het kiezen van de constanten $C_{\epsilon 1}$ , $C_{\epsilon 2}$ en $C_{\kappa \epsilon}$

Allereerst eisen we dat onder neutrale omstandigheden (zoals dichtbij het oppervlak) het model als uitkomst het logaritmisch profiel oplevert. Bovendien moet voor homogene stroming het rechterlid van de dissipatievergelijking (5.1.3) identiek nul zijn.

Hieruit volgt

$$C_{\epsilon 1} = C_{\epsilon 2} - \frac{\kappa^2}{\alpha C_{\kappa \epsilon}} \quad (5.3.1)$$

De eerste uitkomsten van dit model (genoemd: STEP/D) geven boven homogeen terrein (ruwheidssprong  $m = 0$  ofwel  $z_0/z_{01} = 1$ ) toch een veranderende

stroming te zien. Het model heeft de beginwaarden kennelijk niet als oplossing. We proberen dit wel te bereiken door  $C_{\epsilon 2}$  en  $C_{\kappa \epsilon}$  slim te kiezen.

Voorwaarde voor een niet-veranderende stroming is dat de rechterleden van de impuls-, energie- en dissipatie-vergelijkingen (2.3.2), (2.3.13) en (5.1.3) identiek nul zijn. De eerste twee voorwaarden leveren samen met de sluitings-hypothese (2.3.4) en de definitie van de dimensieloze afschuiving (1.1.1) de eerste- en tweede-orde relaties voor de lengteschaal op (zie hfst. 4.2):

$$1 = \frac{\kappa z}{\phi A^{\frac{1}{4}}} \quad (5.3.2)$$

met  $A = (1 - \frac{z}{L} \cdot \frac{1}{\phi})$  als 1e-orde benadering (5.3.2a)

of  $A = \{1 + \frac{z}{\phi} (\frac{-1}{L} + \frac{\kappa^2}{\alpha} \cdot \text{diff})\}$  als 2e-orde benadering (5.3.2b)

(diff. volgens (4.2.7 a, b en c).

Met deze betrekkingen voor de lengteschaal en (5.1.2) is uit de derde eis (rechterlid dissipatie-vergelijking) een verband tussen de drie constantes af te leiden. M.b.v. (5.3.1) is hieruit  $C_{\epsilon 1}$  te elimineren:

$$\alpha \frac{\phi^2 A^{\frac{1}{2}}}{\kappa^2 z^2} \{C_{\epsilon 2}(1-A) - \frac{\kappa^2}{\alpha C_{\kappa \epsilon}}\} + \frac{1}{C_{\kappa \epsilon}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{z}{\phi} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{A\phi}{z} \right) \right\} = 0 \quad (5.3.3)$$

Als we voor A de tweede-orde relatie (5.3.2b) invullen wordt de dissipatie-diffusie term buitengewoon complex. Daarom nemen we voor A op deze plaats de eerste-orde benadering (5.3.2a). Na enig rekenwerk leiden we af:

$$C_{\kappa \epsilon} = \frac{\frac{\kappa^2}{\alpha} \left\{ \phi^2 \left(1 - \frac{z}{L\phi}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{15}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{z}{L}\right)^2 \phi^8 - 1 \right\}}{\phi \cdot \frac{z}{L} \cdot \left(1 - \frac{z}{L\phi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot C_{\epsilon 2}} \quad (5.3.4)$$

waarin:  $\phi = \left(1 - 15 \frac{z}{L}\right)^{-\frac{1}{4}}$  (2.4.3)

In de literatuur is men redelijk éénstemmig wat betreft  $C_{\epsilon 2}$ , deze wordt steeds ongeveer  $C_{\kappa \epsilon} = 2$  gekozen.

Met (5.3.1) en (5.3.4) is voor een bepaalde  $\frac{z}{L}$  nu de optimale  $C_{\kappa \epsilon}$  en  $C_{\epsilon 1}$  te kiezen, zie tabel 5.1.

Tabel 5.1 De waarden van de constanten in de dissipatievergelijking voor enkele waarden van  $z^+$ . De dimensieloze Monin-Obukhovlengte is:  $L^+ = -882$ . Gekozen is:  $C_{\epsilon 2} = 2$ .

$z^+$	$\frac{z^+}{L^+}$	$\phi$	$C_{\kappa\epsilon}$	$C_{\epsilon 1}$
4,5	-0,005	0,98	2,8	1,7
20	-0,023	0,93	2,7	1,7
90	-0,10	0,79	2,0	1,6
200	-0,23	0,69	1,33	1,4
400	-0,46	0,60	0,8	1,0
1800	-2,05	0,42	0,15	-3,2

#### 5.4 Enkele inleidende resultaten

Ondanks de twee relaties (5.3.1) en (5.3.4) is de keuze van de constanten niet evident. Voor de bepaling van  $C_{\kappa\epsilon}$  m.b.v. (5.3.4) kunnen we nog vrij een hoogte  $z$  kiezen. Het midden van ons rekengebied lijkt een plausibele keuze. Aan de onderrand zullen niet gauw problemen optreden, hiervoor zorgt voorwaarde (5.3.1). Voor grote  $z$  kunnen misschien problemen ontstaan, mogelijk dat de waarde van  $z$  aan de bovenrand een betere keuze is.

We hebben verschillende waarden van  $C_{\kappa\epsilon}$  met bijbehorende  $C_{\epsilon 1}$  in het programma geprobeerd voor een ruwheidssprong met  $m = 0$ , ofwel  $z_{01} = z_0$  (d.w.z. homogeen terrein). De resultaten waren het beste voor niet te grote  $C_{\kappa\epsilon}$ :  $C_{\kappa\epsilon} = 1$  of  $1,33$  gaven duidelijk betere resultaten dan  $C_{\kappa\epsilon} = 2$ . De waarde  $C_{\kappa\epsilon} = 1$  hoort bij  $z^+ = 300$ ,  $C_{\kappa\epsilon} = 1,33$  bij  $z^+ = 200$  en  $C_{\kappa\epsilon} = 2$  bij  $z^+ = 90$  ( $L^+ = -882$ ). Er ontstaan problemen aan de bovenrand; hier was vaak  $\tau^+ \neq 1$ , stroomafwaarts breidde dit zich naar beneden uit. Voor zeer grote  $x$  ontstaan golven in het  $\tau^+$ -profiel. Deze moeilijkheden zijn te verminderen door aan de bovenrand de energie een vaste waarde te geven. Zo'n randvoorwaarde zal echter bij een eindige sprong problemen veroorzaken.

De resultaten verbeteren ook door het rekengebied minder hoog te kiezen. Het model werkt kennelijk alleen voor hoogstens licht-onstabiele weersomstandigheden, wat een ernstige beperking van het model is. Het is aan te bevelen het rekengebied niet hoger te kiezen dan strikt noodzakelijk.



### 5.5 Conclusies en aanbevelingen voor verder onderzoek

De eerste twee modellen STEP/J en STEP/B werken zonder problemen, maar de resultaten wijken naar onze mening te veel af van diverse experimenten. Het laatste en geavanceerdste model werkt nog niet: STEP/D is nog niet te gebruiken voor het ruwheidsovergangsprobleem.

Uit de resultaten van de eerste versies van STEP/D kunnen we zien dat zich hoofdzakelijk aan de bovenrand problemen voordoen. Het lijkt mij verstandig nu eerst aandacht te besteden aan de bovenrandvoorwaarde voor de energie en de dissipatie. We hebben de moeilijkheden (afwijking in  $\tau^+$ -profiel) bestreden door de energie-randvoorwaarde te wijzigen (nl. een vaste waarde aan de bovenrand), maar het is ook mogelijk dat de problemen door de dissipatie worden veroorzaakt.

De lastigste hindernis bij het opstellen van STEP/B en STEP/D is de differentiaalvergelijking (4.3.7) voor de lengteschaal 1. We hebben voor 1 eerst een benadering gevonden door de term met afgeleiden van 1 (de diffusie term) nul te stellen. Dit is slechts voor erg kleine waarden van  $\frac{z}{L}$  te rechtvaardigen; meestal is deze verwaarlozing onterecht. De tweede-orde correctie m.b.v. storingsrekening geeft geen spectaculaire verbetering. Eigenlijk is het noodzakelijk de differentiaalvergelijking (4.3.7) op te lossen. Het liefst analytisch, eventueel een benaderende functie (omdat we bij de  $C_{\kappa\epsilon}$ -bepaling de lengteschaal verwerken).

Enkele resultaten met de STEP/D programma's zijn zeer bemoedigend: voor  $C_{\kappa\epsilon} = 1$  en een niet te hoog rekengebied ( $z^+ = 403$ ) geven, zelfs voor stroomafwaarts een vrijwel constante  $\tau^+ = 1,06$ . Voor zeer grote  $L^+$  blijft  $\tau^+$  netjes in de buurt van 1 (0,996 voor  $x^+ = 35000$ ). Kortom: het ziet er naar uit dat STEP/D dichtbij het stadium is om gebruikt te kunnen worden.

## 6. SAMENVATTING

Uit experimenten met de KNMI-meteomast te Caauw zijn boven inhomogeen terrein afwijkingen in de flux-profiel relaties gebleken. Ter verklaring van deze verschijnselen wordt een model opgesteld voor de ontwikkeling van de interne grenslaag na een plotselinge ruwheidsovergang. Hierbij dienen de verschijnselen ook voor onstabiele atmosferische omstandigheden beschreven te worden.

Als sluitingshypothese voor de impulsbalans wordt gekozen voor een aanpak met turbulente viscositeit  $\nu_t = \hat{u} \cdot l$ , waarin de snelheidsschaal  $\hat{u}$  verkregen wordt uit het turbulente-energiebudget en de lengteschaal  $l$  alleen een functie van de hoogte is. Aan deze lengteschaal moeten voorwaarden worden opgelegd opdat de beginvoorwaarden (hiervoor worden de Businger relaties gekozen) passen bij het aldus gesloten model.

De door het model voorspelde ontwikkeling van de wandschuifspanning wijkt duidelijk af van metingen door Bradley. Zijn metingen betreffende de ontwikkeling van het gemiddelde snelheidsprofiel zijn te beperkt om een toetsing mogelijk te maken.

Verder zijn de berekende afwijkingen in de dimensieloze afschuiving aanzienlijk minder dan de Cabauw-experimenten aangeven.

Het model voorspelt een snelle groei echter uiterst traag. De ontwikkeling kan niet met een machtsverband  $h = x^n$  beschreven worden.

Tot slot wordt het model uitgebreid met een lengteschaalvergelijking. Hierbij doet zich het probleem voor dat de gebruikte beginvoorwaarden niet als evenwichtoplossing passen bij de toegepaste sluitingshypothese.

## NAWOORD

De technische wetenschap, en zeker het vakgebied werktuigbouwkunde, is nauw verbonden met de praktijk. Hoewel een deel van het onderzoek aan de Technische Hogeschool Delft uit louter wetenschappelijke nieuwsgierigheid wordt bedreven, staat bij het leeuwendeel één of andere toepassing voor ogen. In de opleiding kijken studenten regelmatig buiten de deuren van de TH hoe bedrijven en instellingen met technische onderwerpen bezig zijn. De werkbezoeken georganiseerd door het Bureau Praktisch Werken vormen daar een goede gelegenheid voor evenals de excursies van de werktuigkundige studievereniging "Leeghwater".

Kijken is echter niet hetzelfde als doen, daarom is het beslist de moeite waard tijdens de opleiding een paar keer in een bedrijf of instelling aan een technisch probleem te werken.

Zoals het wijn goed doet zo nu en dan overgeschonken te worden in een nieuw vat, zo doet het (aanstaande) academici goed zo nu en dan van werkplaats en onderwerp te veranderen. Mijn drie maanden durend uitstapje naar het Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut is erg nuttig geweest. Ik heb met veel plezier bij de afdeling Fysische Meteorologie gewerkt aan een grenslaagprobleem. Ik wil het KNMI en in het bijzonder de hoofdafdeling Wetenschappelijk Onderzoek hartelijk bedanken voor de prettige werksfeer en voor alles wat ik van verschillende onderwerpen geleerd heb. Speciaal Anton Beljaars ben ik dank verschuldigd voor zijn grondige en stimulerende begeleiding.

Literatuur

1. BUSINGER, J.A. e.a., Fluxprofile relationships in the atmospheric surface layer, J. Atmos. Sci, 28, p 181-189, 1971.
2. SCHOTANUS, P., Turbulence fluxen in inhomogene omstandigheden, KNMI WR 82-3, De Bilt, 1982.
3. DULJM, N.J., Model voor de stroming in een neutrale oppervlaktelaag na een verandering in oppervlakte ruwheid, KNMI WR-83-3, De Bilt, 1983.
4. PETERSON, E.W., Modification of mean flow and turbulent energy by a change in surface roughness under conditions of neutral stability, in: Quart. J. R. Met. Soc., 95, p 561-575, 1969.
5. BELJAARS, A.C.M., e.a., Surface layer similarity under non-linear uniform fetch conditions, ingestuurd naar JAM.
6. BRADLEY, E.F., A micrometeorological study of velocity profiles and surface drag in the region modified by a change in surface roughness, Quart. J. R. Met. Soc., 94, p 361-379, 1968.
7. WIERINGA, J., Estimation of mesoscale and local-scale roughness for atmospheric transport modeling. Air Pollution Modelling and its application, Plenum, New York, p 279-295, 1981.
8. LAUNDER, B.E., Progress in the modelling of turbulent transport, Von Karman Institute, Lecture series 76, Prediction Methods for Turbulent Flows (1975).

APPENDIX A

HET BEPALEN VAN  $u_*$  IN DE PRAKTIJK

1) Er geldt:  $u_* = C \sigma_u$

De constante C wordt bepaald in een experiment met snelle instrumenten (trivanen of sonisch anemometers) of via de schuifkracht op een plateau

$$\rightarrow u_* = \sqrt{-\overline{uw}}$$

$$\sigma_u \text{ en } \sqrt{-\overline{uw}} \text{ gemeten } \rightarrow C = \frac{\sqrt{-\overline{uw}}}{\sigma_u}$$

2) Wacht een geval met harde wind boven het te beschouwen terrein af.

$\rightarrow u_*$  is dan groot  $\rightarrow L \sim u_*^3 \uparrow \infty \rightarrow$  neutraal, dus:

$$U = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \text{ waaruit volgt: } \ln \frac{10 \text{ m}}{z_0} = \frac{\kappa U_{10 \text{ m}}}{C \sigma_u}$$

3) Voortaan:  $u_* = \frac{\kappa U_{10 \text{ m}}}{\ln \frac{10}{z_0}}$

APPENDIX B

De basisvergelijkingen

De wetenschappelijke discipline die we voor ons probleem nodig hebben is de stromingsleer: de wetenschap die de toekomstige toestand van een stromingsveld wil voorspellen uit de kennis van de begintoestand en de voorwaarden aan de begrenzingsen van het beschouwde stromingsveld. Onder "de toestand" verstaan we de (thermodynamische) druk  $p$ , de temperatuur  $T$ , de snelheid  $\underline{\tilde{u}}$  (een driedimensionale vector) en de dichtheid  $\rho$ . Deze discipline heeft hiervoor basisvergelijkingen ontwikkeld. Deze zijn op zeer algemene fysische principes gebaseerd. Die principes zijn gestyleerde - d.w.z. ver uitgeplozen en zéér kort samengevatte - beschrijvingen van hardnekkige ervaringen uit het dagelijks leven en hierop geïnspireerde experimenten. De ervaring leerde dat, op een bepaalde manier beschouwd, steeds dezelfde verschijnselen optreden, wat ons verleide die principes algemene geldigheid toe te dichten.

De principes die de stromingsleer (tenminste het gedeelte dat wij nu nodig hebben) gebruikt zijn: behoud van massa, impuls en energie. Hieruit worden de algemene basisvergelijkingen voor de stromingsleer afgeleid, zie elk leerboek stromingsleer, b.v. Ooms [B1]:

massabalans of continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{\tilde{u}}) = 0$$

impulsbalans voor  $x_i$ -richting ( $i = 1,2,3$ ):

$$\rho \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial (\eta - \chi \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k})}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \right\} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) \right) + \rho F_i$$

waarin:  $\mu$  = viscositeit  
 $\chi$  = volume viscositeit  
 $F_i$  = uitwendige kracht per volume-eenheid

Deze vergelijking geldt als ons referentiesysteem een inertiaalsysteem is; in niet-inertiaalsystemen treden schijnkrachten die we eventueel in  $F_i$  onderbrengen.

energiebalans:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{e}) = - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \tilde{e} u_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\rho + \chi \frac{\partial \tilde{u}_b}{\partial x_k} \right).$$

$$\tilde{u}_i \sigma_{bi} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left\{ \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) \delta_{bi} \right\} \tilde{u}_i \right)$$

$\tilde{e}$  = totale energie: kinetische energie en inwendige energie (warmte).

Uit deze vijf basisvergelijkingen zijn, samen met de toestandsvergelijking  $f(p, \rho, T) = 0$  van het stromende medium (het zgn. fluïdum) theoretisch de zes onbekende toestandsgrootheden ( $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  en de drie snelheidscomponenten  $\tilde{u}_i$ ) op te lossen.

Helaas, dit is gemakkelijker gezegd dan gedaan. Eén van de ellendigste verschijnselen is het feit dat de meeste stromingen turbulent zijn, d.w.z. dat de fluïdumdeeltjes zeer wanordelijke, in tijd en ruimte sterk variërende, bewegingen uitvoeren. De stromingsleer tracht dit te ondervangen door de gemiddelde stroming te beschouwen, de zgn. Reynoldse middelingsprocedure. Zie Tennekes en Lumley [B2]. De vergelijkingen voor de gemiddelde grootheden in een onsamendrukbare ( $\rho = \text{constant}$ ) stroming luiden:

Kontinuiteitsvergelijking:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

Impulsbalans:

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \overline{u_i u_j} + F_i$$

of, in de richtingen:

$$x\text{-ri } U \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u^2} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{uv} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{uw} + F_x$$

$$y\text{-ri } U \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \overline{uv} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v^2} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{vw} + F_y$$

$$z\text{-ri } U \frac{\partial W}{\partial x} + v \frac{\partial W}{\partial y} + w \frac{\partial W}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \overline{uw} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{vw} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w^2} + F_z$$

De gemiddelde grootheden zijn stochastische gemiddelden, ook wel ensemble gemiddelde of verwachtingswaarde genoemd. Het experimenteel bepalen van de kansverdeling in elk punt en op elk tijdstip is ondoenlijk, echter als het proces zogenaamd "ergodisch" is, mogen we middeling over het ensemble domein vervangen door middeling over het tijdsdomein. We nemen, zonder bewijs, aan dat stochastisch stationaire stromingen (d.w.z. dat de statistische eigenschappen constant zijn in de tijd) ergodisch zijn.

Vervelend is nu dat bij de middeling van de impulsbalansen er termen van gecorreleerde snelheidsfluctuaties ontstaan. Deze termen leveren het leeuwendeel van het impulstransport: ze gedragen zich dus als addionele spanningen. Dit zijn de Reynoldsspanningen. Ook in de energiebalans ontstaan extra transporttermen. We hebben dus voor zes gemiddelde grootheden nu zes vergelijkingen waarvan enkele nieuwe onbekenden bevatten. We hebben dus nu te weinig vergelijkingen. Door inventieve aannames en experimentele gegevens over turbulentie moet het stelsel gesloten worden met extra vergelijkingen. Hiervan ziet U voorbeelden in hfst. 2.3.2 en hfst. 2.3.4.

Ons ruwheidsovergangprobleem is twee-dimensionaal doordat de ruwheids- overgang loodrecht op de windrichting staat. In de basisvergelijkingen zijn de



afgeleiden naar  $y$  nul, evenals  $\overline{uv}$  en  $\overline{vw}$ , we houden over:

kontinuiteitsvergelijking:  $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$

impulsbalans in  $x$ -richting:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u^2} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{uw} + F_x$$

De termen  $\frac{\partial}{\partial x} \overline{u^2}$ ,  $\nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  en  $F_x$  zijn klein in onze situatie.

De term  $\frac{\partial P}{\partial x}$  heeft dichtbij de ruweheidssprong een "uitsmerend", afvlakkend effect. Op grotere afstand, waarin wij geïnteresseerd zijn, heeft deze term geen invloed. Zo blijft over van de impulsbalans:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{uw} \right)$$

### Literatuur

B1 OOMS, G., Collegedictaat stromingsleer voortgezette cursus A, TH Delft 1979.

B2 TENNEKES, H. en J.L. LUMLEY, A first course in turbulence, The MIT Press, Cambridge, 1972.

APPENDIX C

```

%SET LIST
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX STEP/J3A XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
X  DIT PROGRAMMA BEREKENT HET SNELHEIDSVELD NA EEN RUWHEIDS- X
X  OVERGANG. ER IS GEBRUIK GEMAAKT VAN DE ENERGIEVERGELIJKING X
X  EN EEN LENGTESCHAAL T.R.V. DE SCHUIFSPANNING X
X  M.R.V "VARIABLE" UPWIND DIFFERENCING X
X  "VERVOLG" MOGELIJK X
X  27-9-1982 JAN VAN DER STEEG X
X  LAATSTE WIJZIGING: 29-9 16:50 UUR E
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
BEGIN

FILE UIT(KIND=PRINTER);

FILE TEK(KIND=PRINTER);

FILE VOLG(KIND=DISK,MAXRECSIZE=25);

REAL DETA,X,DX,USTP,KA,ZU1,M,ETAJ*MIN,ALFA;
INTEGER I,J,JMIN,JMAX,IMAX,UMIN,TMIN;
BOOLEAN VERVOLG;
PROCEDURE TEKEN(Z,X1,X2,SCALE1,SCALE2,MAX);
REAL SCALE1,SCALE2;
INTEGER MAX;
ARRAY Z[*],X1[*],X2[*];
BEGIN
  INTEGER I,N;

  ERDIC ARRAY REGEL[0:131];
  WRITE(TEK,<"LOG Z+",/>);
  FOR I:=0 STEP 1 UNTIL MAX DO
  BEGIN
    REPLACE REGEL[0] BY " " FOR 132;
    REPLACE REGEL[0] BY Z[MAX-I] FOR 6 NUMERIC," -";
    N:= SCALE1*X1[MAX-I];
    REPLACE REGEL[N+8] BY "+";
    N:= SCALE2*X2[MAX-I];
    REPLACE REGEL[N+8] BY "+";
    WRITE(TEK,132,REGEL);
    WRITE(TEK,<X7,"I">);
  END;
  WRITE(TEK,<X7,"I",4(24("-"),"I")>);
  WRITE(TEK,<X7,F6.2,4(X19,F6.2),"-> +">
    ,J,J,25/SCALE1,50/SCALE1,75/SCALE1,100/SCALE1);
  WRITE(TEK,<X7,F6.2,4(X19,F6.2),"-> +">
    ,J,J,25/SCALE2,50/SCALE2,75/SCALE2,100/SCALE2);
END;

X
X  INITIEREN VAN DE PARAMETERS
X
TMAX:=2000;
Z01:=1;
VERVOLG:=FALSE;
KA:=0.4;
JMIN:=7;

```

```

00001000
00001100
00001200
00001300
00001400
00001500
00001600
00001700
00001800
00001900
00002000
1 00002100
DATA
00002200
DATA
00002300
DATA
00002400
00002500
00002600
00002700
00002800
00002900
00003000
00003100
00003200
TEKEN IS
2 00003300
00003400
00003500
00003600
3 00003700
00003800
00003900
00004000
00004100
00004200
00004300
00004400
00004500
3 00004600
00004700
00004800
00004900
00005000
00005100
TEKEN(004)
2 00005200
00005300
00005400
00005500
00005600
00005700
00005800
00005900

```

```

TMIN:=JMIN-1;
UMIN:=JMIN;
JMAX:=24;
IMAX:=3200;
DETA:=0.3;
DX:=0.50;
ALFA:=0.30;
M:=LN(701);
ETAJMIN:=JMIN*DETA;
BEGIN
  REAL F1,F3;

  ARRAY UI,WI,UIP1,EXPETA,EXETAM,TI,SI,SIP1,VICO:24];
  ARRAY KONU,AFS,KONT,DIF,PROD,DISC:24];
  GENEREREN VAN DE BEGINVOORWAARDEN

  IF VERVOLG THEN
    BEGIN
      READ(VOLG,25,SI);
      READ(VOLG,25,TI);
      READ(VOLG,25,UI);
      READ(VOLG,25,VI);
      READ(VOLG,25,WI);
      READ(VOLG,*,X, USTR,DETA,JMIN,JMIN,TMIN,JMAX);
    END
  ELSE
    FOR J:=0 STEP 1 UNTIL JMAX DO
      BEGIN
        UI[J]:=J*DETA/KA;
        SIC[J]:=1.0;
        VIC[J]:=1.0;
        TII[J]:=1;
        WIC[J]:=0;
      END;
    FOR J:=0 STEP 1 UNTIL JMAX DO
      BEGIN
        EXPETA[J]:=EXP(J*DETA);
        EXETAM[J]:=EXP((J-.5)*DETA);
      END;
    REWIND(VOLG);
    WRITE(UIT,
      < /, "STEP/JJA", /,
      " KA=", F6.2,
      " Z01=", F8.4, /,
      " JMIN=", I6,
      " JMAX=", I6, /,
      " DETA=", F6.2,
      " DX=", F6.2, /,
      " M=", F6.2,
      " ALFA=", F6.2, / / >,
      KA,Z01,JMIN,JMAX,DETA,DX,M,ALFA);
    WRITE(UIT, "<"ETA= ",21F6.2>," FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO J*DETA);
    WRITE(UIT, "<"Z= ",21F6.1, />," FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO
      EXPETA[J]);
  X
  X VOORWAARTSE BEREKENING VAN U EN TAU
  X
  FOR I:=1+X/DX STEP 1 UNTIL IMAX+X/DX DO
  BEGIN
  X
  X BEREKENING VAN U(I+1)
  X
  FOR J:=UMIN STEP 1 UNTIL JMAX-1 DO
  BEGIN
    IF WIC[J]<0.0 THEN F1:=1.0 ELSE F1:= 0.0;

```

% M = . . . . .

```

00006000
00006100
00006200
00006300
00006400
00006500
00006600
00006700
00006800
00006900
2 00007000
B.0001 IS
00007100
00007200
00007300
00007400
00007500
00007600
00007700
3 00007800
00007900
00008000
00008100
00008200
00008300
00008400
3 00008500
00008600
00008700
3 00008800
00008900
00009000
00009100
00009200
00009300
3 00009400
00009500
3 00009600
00009700
00009800
3 00009900
00010000
00010100
00010200
00010300
00010400
00010500
00010600
00010700
00010800
00010900
00011000
00011100
00011200
00011300
00011400
00011500
00011600
00011700
00011800
3 00011900
00012000
00012100
00012200
00012300
4 00012400

```

```

      UIP1[J]:=UI[J]+ DX/UI[J]*
      ( (KONU[J]:=-W[J]/(DETA*EXPETA[J])*
        (F1*(UI[J+1]-UI[J])+(1-F1)*(UI[J]-UI[J-1])))+
        (AFS[J]:=1/(DETA*EXPETA[J])*
          (TI[J+1]-TI[J])) );
      END;
      UIP1[JMAX]:=UI[JMAX]+UI[JMAX-1]-UIP1[JMAX-1]-
      2*(W[JMAX]+W[JMAX-1])/
      (UI[JMAX]+UI[JMAX-1])*DX/(EXETAM[JMAX]*KA);
X
X RANDVOORWAARDE VOOR U
X
      USTR:=UIP1[UMIN]*KA/((UMIN)*DETA-M);
      FOR J:=0 STEP 1 UNTIL UMIN-1 DO
      UIP1[J]:=USTR*(J*DETA-M)/KA;
X
X BEREKENING VAN DE ENERGIE SIP1
X
      FOR J:=TMIN STEP 1 UNTIL JMAX-1 DO
      BEGIN
      IF W[J]<0.0 THEN F3:=1.0 ELSE F3:=0.0;
      KONTE[J]:=-W[J]/(EXPETA[J]*DETA)*(F3*(SI[J+1]-SI[J])+
      (1-F3)*(SI[J]-SI[J-1]));
      PROD[J]:=ALFA*VI[J]*KA/EXPETA[J]*((UI[J+1]-UI[J-1])/2/DETA)**2;
      DIF[J]:=KA/(2*EXPETA[J]*DETA**2)*
      ((VI[J+1]+VI[J])*(SI[J+1]-SI[J])-
      (VI[J]+VI[J-1])*(SI[J]-SI[J-1]));
      DISC[J]:=ALFA/KA/EXPETA[J]*SI[J]*VI[J];
      SIP1[J]:=SI[J]+DX/UI[J]*(KONTE[J]+PROD[J]+DIF[J]-DISC[J]);
      END;
      SIP1[JMAX]:=SIP1[JMAX-1];
X
X RANDVOORWAARDE VOOR S
X
      FOR J:=0 STEP 1 UNTIL TMIN-1 DO
      SIP1[J]:=SIP1[TMIN];
X
X BEREKENING VAN W(I+1)
X
      W[0]:=0.0;
      FOR J:=1 STEP 1 UNTIL JMAX DO
      W[J]:=W[J-1]-EXETAM[J]*
      (UIP1[J]-UI[J]+UIP1[J-1]-UI[J-1])*DETA/(DX*?);
X
      TI[0]:=TI[1];
X OPSCHUIVEN VAN UI EN SI, VI ZIJN WAARDE TOEKENNEN
X
      FOR J:=0 STEP 1 UNTIL JMAX DO
      BEGIN
      UI[J]:=UIP1[J];
      SI[J]:=SIP1[J];
      VI[J]:=SQRT(SIP1[J]);
      END;
X
X BEREKENING VAN SCHUIFSPANNING, LET OP: TI[J] IS: TI(J-.5)
X
      FOR J:=1 STEP 1 UNTIL JMAX DO
      TI[J]:=KA*(VI[J]+VI[J-1])/2*(UI[J]-UI[J-1])/DETA;
      TIC[0]:=TI[1];
X
X UITVOEROPDRACHTEN
X
      IF ((40*((I+DX) DIV 40)= I+DX) OR (I<= 5)) THEN
      BEGIN
      WRITE(UIT,</, "X=", F8.2, X5, "I=", I7, X5, "U*=", F6.2, X5, "U*TAU=",
      F6.2>, I+DX, I, USTR, SQRT(TI[U]));

```

```

00012500
00012600
00012700
00012800
00012900
00013000
4 00013100
00013200
00013300
00013400
00013500
00013600
00013700
00013800
00013900
00014000
00014100
00014200
00014300
00014400
4 00014500
00014600
00014700
00014800
00014900
00015000
00015100
00015200
00015300
00015400
4 00015500
00015600
00015700
00015800
00015900
00016000
00016100
00016200
00016300
00016400
00016500
00016600
00016700
00016800
00016900
00017000
00017100
00017200
00017300
4 00017400
00017500
00017600
00017700
4 00017800
00017900
00018000
00018100
00018200
00018300
00018400
00018500
00018600
00018700
4 00018800
00018900
00019000

```

```
WRITE(UIT,<"U: ",21F6.2>,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO      00019100
  UI[J]);                                                    00019200
WRITE(UIT,<"W: ",21F6.2>,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO      00019300
  WI[J]);                                                    00019400
WRITE(UIT,<"TAU: ",21F6.3>,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO    00019500
  TI[J]);                                                    00019600
WRITE(UIT,<"KONU:",21F6.3>,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO    00019700
  KONUE[J]);                                                00019800
WRITE(UIT,<"AFS: ",21F6.3>,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO    00019900
  AFSE[J]);                                                00020000
WRITE(UIT,<"KONT:",21F6.3>,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO    00020100
  KONTE[J]);                                                00020200
WRITE(UIT,<"DIFF:",21F6.3>,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO    00020300
  DIFE[J]);                                                00020400
WRITE(UIT,<"PROD:",21F6.3>,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO    00020500
  PRODE[J]);                                               00020600
WRITE(UIT,<"DISS:",21F6.3>,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO    00020700
  DISE[J]);                                               00020800
WRITE(UIT,<"PHIE:",21F6.3>,FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 21 DO    00020900
  KA/SQRT(TI[J])*(UI[J]-UI[J-1])/DETA);                    00021000
END;                                                         00021100
IF 200*(I DIV 200) = I THEN                                  4 00021200
BEGIN                                                        00021300
  TEKEN(EXPETA,UI,TI,6.25,50.0,JMAX);                        4 00021400
  WRITE(TEK,<"----> U+,TAU+",//                               00021500
    ,"SNELHEIDSPROFIEL (+) EN AFSCHUIFSPANNING =           00021600
    ,"(+) NA EEN RUWHEIDSOVERGANG",/                        00021700
    ,"AFSTAND TOT DE RUWHEIDSOVERGANG X+ : ",F9.2,/        00021800
    ,"M (LOG Z01/Z0 )                                     : ",F9.2> 00021900
    ,I*DX,M);                                               00022000
  WRITE(TEK(SKIP 1));
END;
END;
X:=I*DX;
WRITE(VOLG,25,SI);
WRITE(VOLG,25,TI);
WRITE(VOLG,25,UI);
WRITE(VOLG,25,VI);
WRITE(VOLG,25,WI);
WRITE(VOLG,*,X,WSTR,DETA,JMIN,JMIN,TMIN,JMAX);
LOCK(VOLG,CRUNCH);
END;
END.
DATA
00022100
00022200
4 00022300
3 00022400
00022500
00022600
00022700
00022800
00022900
00023000
00023100
00023200
B.0001(0000)
2 00023300
P.0000(0003)
```