

**KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT**

WETENSCHAPPELIJK RAPPORT

SCIENTIFIC REPORT

W.R. 83 - 3

N.J.Duijm

Model voor de stroming in een neutrale oppervlaktelaag
na een verandering in oppervlakte ruwheid.



De Bilt, 1983

Publikatienummer: K.N.M.I. W.R. 83-3 (FM)

Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut
Fysisch Meteorologisch Onderzoek
Postbus 201,
3730 AE DE BILT
Nederland

U.D.C.: 551.510.522 :
551.511.6 :
551.554

Model voor de stroming in een neutrale oppervlaktelaag na een verandering in oppervlakte ruwheid

K.N.M.I., De Bilt
september 1982

*
Nijs Jan Duijm

(Verslag "Praktisch werken" periode
14 juni-13 september 1982)

* Technische Hogeschool Delft.

Inhoudsopgave

1.	Lijst van gebruikte symbolen	2
	Samenvatting	4
2.	Inleiding	5
3.	De atmosferische grenslaag onder neutrale omstandigheden	7
3.1	De basis vergelijkingen	7
3.2	De flux-profiel relatie	13
3.3	De turbulente energiebalans	14
4.	De ruwheidsovergang	15
5.	Het model	18
5.1	De uitgangsvergelijkingen	18
5.2	De sluitingshypothese	19
5.3	Diskretisatie	21
5.4	De randvoorwaarden	23
6.	Resultaten	31
6.1	Vergelijking met enkele snelheidsprofielen	31
6.2	Vergelijking van enkele turbulentie grootheden	37
6.3	De afwijking in de flux-profiel relatie	43
7.	Het gedrag van de interne grenslaag	46
7.1	De flux-profiel relatie	46
7.2	Globale versus lokale ruwheidslengte	52
8.	Konklusies	55
9.	Nawoord	56
	Referenties	57
	Appendices	59

Lijst van gebruikte symbolen

Driedimensionale vergelijkingen zijn ter beperking van het aantal termen geschreven met index notatie en x_1, x_2, x_3 en U_1, U_2, U_3 als coördinaten resp. snelheidscomponenten. Er is gebruik gemaakt van de Einsteinsommatie konventie. Twee dimensionale vergelijkingen zijn in aansluiting op de in de meteorologie gebruikelijke notatie geschreven met een x- (horizontaal) en z-koordinaat (vertikaal). Symbolen met een streep erboven zijn tijdsgemiddelde en symbolen voorzien van het superscript + genormeerde grootheden met U_{*0} en z_0 als snelheids- en lengteschaal.

C_p	soortelijke warmte van lucht bij konstante druk
E	Turbulente kinetische energie, $E = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$
\underline{F}_u	vektor van een uitwendige kracht
f	coriolis parameter
g	versnelling van de zwaartekracht
h_{EL}	hoogte van de evenwichtslaag
h_{1BL}	" " " interne grenslaag
K	turbulente uitwisselingscoëfficiënt
K_m	" " " " van de schuifspanning: "eddy-viscosity" $K_m = \tau / \frac{\partial \overline{U}}{\partial z}$
l_m	mengweglengte schaal
L	Monin-Obukhov-lengte schaal
l	lengteschaal in verticale richting
L_h	" " " horizontale richting
m	ruwheidsovergang parameter: $m = \ln(z_{01}/z_0)$
P_r	produktie van turbulente kinetische energie
$P_t = P_o + P$	totale statische druk
P_o	hydrostatische evenwichtsdruk: $\frac{\partial P_o}{\partial z} = -g \cdot \rho$
$P = \overline{P} + p$	druk, resp. tijdsgemiddelde en fluktuierend deel van de druk
P_o	druk buitend de grenslaag
S_{ij}	afschuifsneldheid van de gemiddelde stroming: $S_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i})$
s_{ij}	turbulente afschuifsneldheid: $s_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$
t	tijd
$T = \overline{T} + \theta$	temperatuur, resp. tijdsgemiddelde en fluktuierende deel van de

	temperatuur
T_0	referentie temperatuur. T_0 is gelijk aan de potentiële temperatuur in een droge neutrale atmosfeer $\partial T_0 / \partial z = -g/C_p$
$\underline{U} = \overline{U} + \underline{u}$	snelheidsvektor, resp. tijdsgemiddelde en fluktuuerend deel van de snelheidsvektor.
$U = \overline{U} + u$	horizontale component van de snelheid (id)
$\frac{U}{g}$	geostrophische wind vektor
U_*	wandschuifspanningssnelheid
U_{*0}	stroomopwaartse, resp. globale wandschuif spanningssnelheid
V_i	snelheidsschaal in i-richting
$W = \overline{W} + w$	vertikale component van de snelheid (id)
z_0	stroomopwaartse, resp. globale ruwheidslengte
z_{0l}	stroomafwaartse (lokale) ruwheidslengte
z_b	menghoogte
α	evenredigheidsconstante $\alpha = \tau/E$
δ_{ij}	Kronecker-delta
Δ	grenslaaghoogte
ϵ	dissipatie van turbulente kinetische energie
γ	logaritmische coördinaat $\gamma = \ln z/z_0$
θ	middelingstijd
θ	fluktuuerend deel van de temperatuur
κ	Von Kármán konstante ($\kappa \sim 0.4$)
ν	kinematische viskositeit van lucht
ρ	soortelijke dichtheid
σ_u	standaarddeviatie $\sigma_u = \overline{uu}$
τ	turbulente afschuifspanning $\tau = -\overline{uw}$
τ_0	stroomopwaartse, resp. globale afschuifspanning
τ_l	lokale afschuifspanning
ϕ_m	flux-profiel relatie $\phi_m = \frac{\kappa z}{(\tau)^{1/2}} \frac{\partial U}{\partial z}$
ψ	breedtegraad
$\underline{\Omega}$	hoeksnelheidsvektor van de aarde.

1. Samenvatting

In dit verslag is een model beschreven waarmee in twee dimensies de stroming in de atmosferische oppervlaktelaag na een verandering in oppervlakteruwheid onder neutrale omstandigheden wordt nagebootst. Als sluitingshypothese is gebruik gemaakt van de vergelijking voor de turbulente kinetische energie als transportvergelijking voor de turbulente schuifspanning. Aandacht is geschonken aan de numerieke oplosmethode en de wijze waarop de randvoorwaarden kunnen worden opgelegd, met de nadruk op de ruw-glad overgang.

De berekende snelheidsprofielen zijn in overeenstemming met experimenten, evenals het gedrag van de flux-profiel relatie en, in iets mindere mate, de turbulente uitwisselingscoëfficiënt.

Het blijkt dat onder inhomogene omstandigheden de oppervlaktelaag is verstoord tot op ca. 40 à 50 m, en dat tot op die hoogte afwijkingen in de flux-profiel relatie optreden. Ondanks dat de evenwichtslaag sneller groeit dan de interne grenslaag zelf, waardoor het gestoorde gebied stroomafwaarts van een overgang in omvang afneemt, bereikt de laag die geheel aan het oppervlak is aangepast na 1 km nog slechts een hoogte van enkele meters.

2. Inleiding

In de meteorologie is men o.a. geïnteresseerd in de processen die zich afspelen in de eerste tientallen meters boven de grond, het gebied tussen de vrije atmosfeer en het aardoppervlak. Met name, de uitwisseling van impuls, vocht en warmte tussen lucht en aarde, zijn van belang voor de landbouw, de bestrijding van luchtverontreiniging en windenergie. Om enig inzicht in deze processen te verkrijgen zijn op het meetterrein van het KNMI te Cabauw, ongeveer 20 km zuidwest van Utrecht, de turbulente fluxen van impuls, vocht en temperatuur gemeten (Schotanus, 1982). Door verschillen in de begroeiing rondom de mast te Cabauw, vertonen de metingen daar verschillen met de gebruikelijke theorie van de atmosferische grenslaag.

De grenslaag theorie veronderstelt een volledig ontwikkelde stroming, die stroomafwaarts niet verandert, over een homogeen oppervlak, dat overal dezelfde weerstand op de stroming uitoefent. In de praktijk zal zich een dergelijke situatie boven land zelden voordoen. Door de afwisseling van weiland, bebossing en bebouwing is de weerstand die de stroming ondervindt van plaats tot plaats verschillend. Deze afzonderlijke elementen in het landschap hebben allen over een bepaalde afstand invloed op de verticale verdeling van luchtsnelheid, vochtigheidsgraad en temperatuur.

In dit verslag is een model beschreven waarmee de stroming wordt berekend na een abrupte verandering in oppervlakteruwheid in een lijn loodrecht op de hoofdstroomrichting, waarbij veronderstelt is dat de grenslaag neutraal is, d.w.z. dat de temperatuur met de hoogte adiabatisch afneemt. Door deze vereenvoudigingen is het te verwachten dat alleen kwalitatieve overeenkomsten met de metingen te Cabauw zullen worden gevonden; het model dient om de invloed van inhomogene oppervlakken op de grenslaag beter te begrijpen.

Eén van de afwijkingen van de theorie van homogene oppervlakken is dat de dimensieloze gradiënten van snelheid, temperatuur en vochtigheid niet meer gelijkvormig zijn, zoals voorspeld door de Monin-Obukhov gelijkvormigheids-theorie. Dit houdt ondermeer in dat er geen eenvoudig verband bestaat tussen de turbulente schuifspanning en de snelheidsgradiënt. Hierdoor is het gebruik van een turbulente uitwisselingscoëfficiënt, die zo'n eenvoudig verband veronderstelt, in het model niet bruikbaar. Gekozen is voor de sluitingshypothese zoals is voorgesteld door Bradshaw e.a. (1967) waarin de turbulente schuifspanning evenredig met de turbulente kinetische energie wordt verondersteld. De transportvergelijking voor de turbulente kinetische energie dient als

transportvergelijking voor de turbulente schuifspanning, terwijl de gebruikelijke lengteschaal voor de oppervlaktelaag, de afstand tot het oppervlak, is gehandhaafd. Dit in tegenstelling tot de meer ingewikkelde sluitingshypothese, waarbij een transportvergelijking voor zowel de schuifspanning als de lengteschaal wordt gebruikt. Tot dusverre geven experimenten onvoldoende aanleiding om een dergelijk complex model op te stellen.

3. De atmosferische grenslaag onder neutrale omstandigheden

3.1 De basisvergelijkingen

De verschijnselen die onderwerp van deze studie zijn, spelen zich af in de onderste laag van de atmosferische grenslaag, de oppervlaktelaag. In dit hoofdstuk volgt een beschrijving van de vergelijkingen die de stroming in de grenslaag en in de oppervlaktelaag beheersen en die de basis zijn van het opgestelde model.

Indien voor een fluidum, bijv. lucht, een konstante viskositeit $\eta = \nu \cdot \rho$ wordt verondersteld, dan kunnen de bewegingen van het fluidum beschreven worden met de continuïteitsvergelijking ("wet van behoud van massa"):

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

en de Navier-Stokes vergelijkingen ("wet van behoud van impuls"). Hierin is $P = P_t - P_o$ met P_t de volledige statische druk en P_o de druk in een referentie toestand die voldoet aan de hydrostatische voorwaarde $\partial P_o / \partial x_3 = -g\rho$. (Busch, 1973):

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{g(T - T_o)}{T_o} \delta_{3i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + F_{u,i} \quad (2)$$

In de atmosferische grenslaag bestaat de kracht \underline{F}_u uit de corioliskracht tengevolge van de draaiing van de aarde:

$$\underline{F} = -2(\underline{\Omega} \times \underline{U})$$

waarin $\underline{\Omega}$ de hoeksnelheidsvektor van de aarde is.

Onder neutrale omstandigheden is $T = T_o$, waarbij T_o adiabatisch met de hoogte afneemt:

$$\frac{dT_o}{dx_3} = -\frac{g}{C_p}$$

Met deze vereenvoudigingen reduceert (2) tot:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + F_{u,i} \quad (3)$$

Om een beschrijving te kunnen geven van de verschijnselen die het gevolg zijn van turbulentie in vergelijking met de gemiddelde hoofdstroming, wordt de z.g. Reynoldsprocedure op de vergelijkingen toegepast. Laat

$$U_i = \bar{U}_i + u_i \text{ met } \bar{U}_i = \frac{1}{\Theta} \int_t^{t+\Theta} U_i dt \text{ en } \bar{u}_i = 0$$

en analoog

$$P = \bar{P} + p.$$

We veronderstellen tevens dat de gemiddelde stroming stationair is, d.w.z. $\partial \bar{U}_i / \partial t = 0$.

Wanneer de voorgaande betrekkingen van U_i en P worden ingevuld in (1) en (3), waarna op deze vergelijkingen weer een tijdsmiddeling wordt toegepast, dan krijgen we de continuïteitsvergelijking voor de gemiddelde stroming

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{4}$$

en de Reynoldse impulsvergelijkingen:

$$\bar{U}_i \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) + F_{u,i} \tag{5}$$

We zijn geïnteresseerd in situaties waarbij ruwheidsovergangen optreden op enkele honderden meters vanaf de meetplaats. We kijken naar hoogten boven het aardoppervlak van de orde van 10 m. De verhouding tussen verticale en horizontale lengte schalen, $1/L_h$ zal klein zijn: we veronderstellen deze van de orde 10^{-2} in onderstaande analyse.

Als karakteristieke windsnelheid introduceren we de geostrophische wind \underline{U}_g . Dit is de wind boven in de grenslaag, waarbij de corioliskracht \underline{F}_u in evenwicht is met de drukterm in (5). Voor \underline{F}_u geldt dan:

$\|\underline{F}_u\| = f \cdot \|\underline{U}_g\|$ waarin f de coriolisparameter is: $f = \Omega \sin \phi$. Voor gematigde breedten is $f = 10^{-4}$ (Busch 1973, Schotanus 1982).

De karakteristieke snelheidsschaal voor de turbulentie kiezen we gelijk aan de schuifspanningsnelheid U_* . Uit experimenten blijkt dat

$$U_*/U_g = O(10^{-1}).$$

Passen we schaling toe op de continuïteitsvergelijking (4), dan vinden we:

$$\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{U_g}{L_h} : \frac{U_g}{L_h} : \frac{V_3}{1} \rightarrow V_3 = 0 \left(\frac{1U_g}{L_h} \right)$$

hierin is V_3 de snelheidschaal van de gemiddelde verticale snelheidskomponent.

Voor deze verticale komponent luidt de impulsvergelijking, met de daarbij horende orde van grootte schattingen:

$$\bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial x_2} + \bar{U}_3 \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial x_3} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial U_3}{\partial x_1} - \overline{u_1 u_3} \right)$$

$$\frac{U_g^2}{L_h^2} : \frac{U_g^2}{L_h^2} : \frac{U_g^2}{L_h^2} \quad ? \quad \frac{\nu U_g}{L_h^3} : \frac{U_*^2}{L_h^2}$$

$$1 : 1 : 1 \quad ? \quad \frac{\nu}{U_g L_h} : \frac{U_*^2 L_h}{U_g^2}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial x_2} - \overline{u_2 u_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial x_3} - \overline{u_3^2} \right) \quad + \quad F_{u,3}$$

$$\frac{\nu U_g}{L_h^3} : \frac{U_*^2}{L_h^2} \quad : \quad \frac{\nu U_g}{L_h^2} : \frac{U_*^2}{1} \quad : \quad f \cdot U_g$$

$$\frac{\nu}{U_g L_h} : \frac{U_*^2 L_h}{U_g^2} \quad : \quad \frac{\nu}{U_g} \frac{L_h}{1} : \frac{U_*^2 L_h^2}{U_g^2} \quad : \quad \frac{fL}{U_g}$$

de dimensieloze getallen hebben de volgende orde grootte:

$$U_*/U_g = 0(10^{-1})$$

$$1/L_h = 0(10^{-2})$$

$$\frac{\nu}{U_g L} = 0(10^{-8})$$

$$\frac{fL}{U_g} = 0(10^{-3}).$$

In de tweede regel onder de vergelijking zijn de termen dusdanig genormeerd,

dat de grootste term ($\partial/\partial x_3 \overline{u_3^2}$) van de orde 1 wordt. Alle kleinere termen worden verwaarloosd. De enige term die overblijft is $\frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_3^2}$. Aangezien de drukterm de enige term is die de gradiënt van de verticale fluktuaties in balans kan houden, handhaven we deze. We krijgen daarmee:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_3^2} = 0$$

en na integratie naar x_3

$$P_{\Delta}(x_1, x_2) = \overline{P}(x_1, x_2, x_3) + \rho \overline{u_3^2} \quad (6)$$

Hierin is P_{Δ} de druk buiten de grenslaag. Het blijkt dat de som van statische druk en turbulente druk $\rho \overline{u_3^2}$ konstant is in een doorsnede van de grenslaag.

Voor de impulsvergelijkingen in horizontale richting voeren we dezelfde orde schatting uit; met toepassing van (6) volgt voor de x_1 -richting:

$$\overline{U}_1 \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} + \overline{U}_2 \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} + \overline{U}_3 \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{\Delta}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} - \overline{u_1^2} \right)$$

$$\frac{U_g^2}{L_h} : \frac{U_g^2}{L_h} : \frac{U_g^2}{L_h} \quad ? \quad \nu \frac{U_g^2}{L_h^2} : \frac{U_*^2}{L_h}$$

$$1 : 1 : 1 \quad ? \quad \frac{\nu}{U_g L_h} : \frac{U_*^2}{U_g^2}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} - \overline{u_1 u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_3} - \overline{u_1 u_3} \right) + F_{u,i}$$

$$\frac{\nu U_g}{L_h^2} : \frac{U_*^2}{L_h} : \frac{\nu U_g}{L_h^2} : \frac{U_*^2}{l} : f U_g$$

$$\frac{\nu}{U_g l} : \frac{U_*^2}{U_g^2} : \frac{\nu L_h}{U_g l} : \frac{U_*^2 L_h}{U_g l} : \frac{fL}{U_g}$$

Als we ook hier termen tot de orde 1 samen met de drukterm handhaven, vinden we, samen met (6) de grenslaagbenadering (Hinze, 1975). De druk P_{Δ} wordt buiten de grenslaag opgelegd en vormt één van de randvoorwaarden van het

probleem:

$$\bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_\Delta}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_1 u_3} \quad (7)$$

Voor de x_2 -komponent vinden we op dezelfde wijze:

$$\bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_\Delta}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_2 u_3} \quad (8)$$

Als we de x_1 -as zó kiezen, dat deze samenvalt met de gemiddelde windrichting, dan blijft slechts een 2-dimensionaal probleem over. Het probleem is symmetrisch t.o.v. de hoofdstroomrichting, waardoor u_2 en u_3 ongekorreleerd zijn. ($\overline{u_2 u_3} = 0$).

We kunnen bovendien aannemen dat P_Δ konstant is: de atmosferische druk zal over de beschouwde afstand nauwelijks veranderen. Het volledige stelsel vergelijkingen is dan gereduceerd tot:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} (\overline{uw}) \quad (10)$$

Wanneer de grenslaag volledig ontwikkeld is, zodat de gemiddelde grootheden in x -richting niet meer veranderen dan zal volgens (9):

$$\bar{W}(z) = \text{konstant } \bar{W}(0) = 0$$

zodat uit (10) volgt:

$$-\overline{uw} = \text{konstant} = U_*^2 \quad (11)$$

waarin U_* de schuifspanningsnelheid wordt genoemd.

Al eerder is het onderste deelgebied van de grenslaag, de oppervlakte-laag genoemd. In de atmosfeer betekent dit een hoogte van enige tientallen meters ('s nachts) tot ca. 100 à 200 m (overdag). Boven deze oppervlaktelaag (in het buitengebied) is de voorgaande beschrijving, o.a. door de toenemende invloed van de corioliskracht, niet meer geldig.

De stroming in de oppervlaktelaag wordt volledig beïnvloed door de aanwezigheid van het oppervlak. Deze invloed kan in rekening gebracht worden

door de wandschuifspanning U_* en een ruwheidslengte z_0 , een parameter voor de ruwheid van het oppervlak. De snelheid U , moet dan een functie zijn van (U_*, z_0, ν, z) . Met dimensieanalyse leidt dit tot de universele wandwet (law of the wall):

$$U^+ = \frac{U}{U_*} \left(\frac{z U_*}{\nu}, \frac{z}{z_0} \right) \quad (12)$$

Zoals blijkt uit de benadering van de atmosferische oppervlaktelaag (10) speelt de viscositeit daarin geen enkele rol. Dit wordt veroorzaakt door het hoge Reynoldsgetal $\frac{U_* z}{\nu}$. Men spreekt wel van Reynolds onafhankelijkheid (Reynolds similarity, Wyngaard 1973) om aan te geven dat de schuifspanning die de stroming ondervindt, uitsluitend bestaat uit turbulente schuifspanning. De wandwet reduceert dan tot $U^+ = U^+(z/z_0)$.

Men kan in de oppervlaktelaag het snelheidsprofiel $\bar{U}(z)$ niet bepalen uit vergelijking (11) voor de schuifspanning; dit vormt het sluitingsprobleem dat is ontstaan door het gebruik van de Reynoldsprocedure. Er zijn onbekende termen $\overline{u_i u_j}$ geïntroduceerd zonder dat er meer vergelijkingen zijn bijgekomen. Om een verband te leggen tussen \overline{uw} en $\bar{U}(z)$ hebben we een sluitingshypothese nodig.

We kunnen de schuifspanning \overline{uw} opvatten als de impulsflux van de buitenstroming voor de wand. Eén van de manieren om het stelsel te sluiten is dan deze impulsflux evenredig te stellen met de gemiddelde windgradiënt:

$$\tau = - \overline{\rho uw} = K_m \frac{\partial \bar{U}}{\partial z}$$

Men kan de "eddy-viscosity" of turbulente uitwisselingscoëfficiënt K_m uitdrukken in gemiddelde grootheden, bijv. via de hypothesen van Prandtl en Von Kármán:

$$K_m = l_m^2 \left\| \frac{d\bar{U}}{dz} \right\|,$$

$$l_m = \kappa \frac{\left\| \frac{d\bar{U}}{dz} \right\|}{\left\| \frac{d^2 U}{dz^2} \right\|}$$

κ wordt de Von Kármán konstante genoemd en is experimenteel bepaald ($\kappa \sim 0,4$). Volgens de wandwet schaalt \bar{U} met U_* , zodat:

$$\frac{d\bar{U}}{dz} \sim \frac{U_*}{z}, \text{ en } \frac{d^2U}{dz^2} \sim \frac{U_*}{z^2}.$$

Dit levert op $l_m = \kappa z$, zodat:

$$-\overline{uw} = u_*^2 = \kappa^2 z^2 \left\| \frac{dU}{dz} \right\| \frac{dU}{dz} \rightarrow$$

$$\frac{d\bar{U}}{dz} = \frac{U_*}{\kappa z}, \text{ of } \frac{d\bar{U}}{d(z/z_0)} = \frac{U_*}{\kappa z/z_0} \rightarrow$$

$$U = \frac{U_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \quad (13)$$

De ruwheidslengte z_0 moet experimenteel bepaald worden en hangt af van de afmetingen en geometrie van de voorwerpen op het oppervlak die de ruwheid veroorzaken. z_0 varieert van minder dan een millimeter (water, asfalt) tot enkele tientallen centimeters (bos, boomsingels) of meer dan een meter (stedelijke bebouwing). (zie tabel 2, 6.7)

3.2. De flux-profiel relatie

Uit vergelijking (13) volgt:

$$\frac{\kappa z}{U_*} \cdot \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = 1$$

Voor niet-neutrale grenslagen, geldt volgens de Monin-Obukhov gelijkvormigheidstheorie de flux-profiel relatie:

$$\frac{\kappa z}{U_*} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = \phi_m(z/L) \quad (14)$$

waarin ϕ_m een universele functie is van de stabiliteitsparameter z/L . L , de Monin-Obukhov lengte, is gedefinieerd als

$$L = \frac{U_*^2 T_0}{g \kappa T_*} \text{ met } T_* = - \frac{\overline{\theta w}}{U_*}$$

De grenslaag is stabiel als $z/L > 0$

neutraal als $z/L = 0$ ($\phi_m = 1$)

en instabiel als $z/L < 0$.

Beschrijvingen van de functie ϕ_m zijn o.a. gegeven door Businger (1973) aan de hand van de Kansas-experimenten.

3.3. De turbulente energiebalans

De vergelijking voor de kinetische energie van de turbulente fluktuaties in neutrale grenslagen luidt (Tennekes en Lumley, 1972, blz. 63):

$$\bar{U}_j \frac{\partial E}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \overline{u_j p} + \overline{u_j E} \right) - \overline{u_i u_j} S_{ij} - 2 \nu \overline{s_{ij} s_{ij}} \quad (15)$$

$$\text{waarin } S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right), \quad s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Beschouwen we een stochastische stationaire, homogene stroming waarin alleen \bar{U}_i plaatsveranderlijk is.

Met $-\overline{u_i u_j} S_{ij} = P_r$ (produktie van turbulente kinetische energie) en $2 \nu \overline{s_{ij} s_{ij}} = \epsilon$ (dissipatie van turbulente kinetische energie door viskositeit) gaat (15) over in (Tennekes en Lumley, 1972, blz. 64):

$$P_r = \epsilon \quad (16)$$

In deze stroming is de produktie in evenwicht met de dissipatie van turbulente kinetische energie. Er treedt dan geen transport op van energie door het stromingsveld.

In tweedimensionale vorm en in grenslaagbenadering (afgeleiden naar z zijn veel groter dan afgeleiden naar x , zie 3.1.) en zonder rekening te houden met drukfluktuaties gaat de energievergelijking over in (Peterson, 1969, 1972):

$$\bar{U} \frac{\partial E}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial E}{\partial z} = - \frac{\partial \bar{wE}}{\partial z} + \tau \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} - \epsilon \quad (17)$$

Aangezien de grote wervels de hoeveelheid te dissiperen energie bepalen schaal ϵ op de snelheids- en lengteschaal van de grote wervels, hier resp. $U_* = (-\overline{uw})^{\frac{1}{2}}$ en $l_m = kz$: (Tennekes en Lumley, 1972, blz. 68) $\epsilon = A \cdot U_*^3 / l_m$.

Het is aannemelijk dat in de volledig ontwikkelde grenslaag, waarin de gemiddelde grootheden alleen van z afhangen, evenwicht tussen produktie en dissipatie bestaat:

$$\frac{\partial \overline{wE}}{\partial z} = 0 ,$$

$$\tau \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} = \epsilon$$

Uit dit laatste volgt samen met de schaling van ϵ

$$\frac{\partial U}{\partial z} = A \frac{U_*}{\kappa z} \quad (18)$$

wat met $A = 1$ overeenkomt met (13).

4. De ruwheidsovergang

De afleiding van het logaritmisch snelheidsprofiel betref een volledig ontwikkelde grenslaag over een homogeen oppervlak. Langs het aardoppervlak ondervindt de stroming echter verschillende ruwheden die voortkomen uit van plaats tot plaats verschillende begroeiing en bebouwing. Uit metingen en berekeningen blijkt dat het effect van de overgang van de ene ruwheid naar de ander nog ver stroomafwaarts aanzienlijke invloed heeft op de profielen van snelheid en schuifspanning.

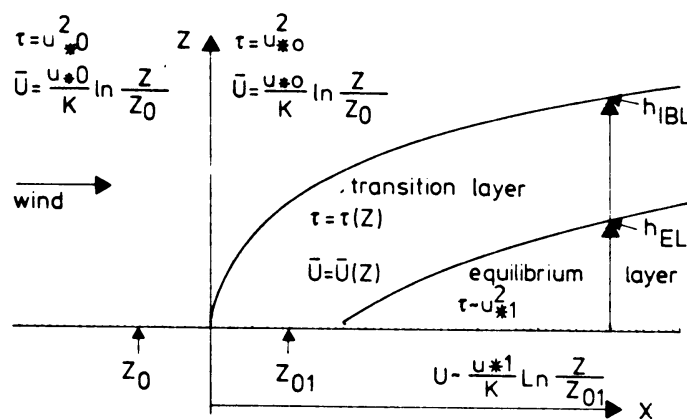


Fig. 1. Groei van een interne grenslaag (internal boundary layer, IBL) na een ruwheidsovergang.

De eenvoudigste vorm van een ruwheidsovergang is die waarbij een eerste homogeen terrein met ruwheidslengte z_0 , langs een rechte lijn dwars op de windrichting, overgaat in een tweede homogeen terrein met een andere ruwheidslengte z_{01} . Dit probleem is tweedimensionaal te beschrijven (zie fig. 1)

We nemen bovendien aan dat boven het stroomopwaartse oppervlak de grenslaag volledig is ontwikkeld, zodat daar het logaritmisch snelheidsprofiel geldig is:

$$\tau = \text{konstant} = \rho U_{*0}^2 \quad (11)$$

$$\bar{U} = \frac{U_{*0}}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \quad (13)$$

Na de overgang zal bij het oppervlak de schuifspanning veranderen waardoor versnelling (τ neemt af, ruw-glad overgang) of vertraging (τ neemt toe, glad-ruw overgang) van het snelheidsprofiel bij het oppervlak zal optreden. We zijn nu geïnteresseerd in de vorm van de snelheids- en schuifspanningsprofielen in de interne grenslaag en de snelheid waarmee de interne grenslaag stroomafwaarts groeit.

In een volledig ontwikkelde grenslaag wordt de stroming in een z -doorsnede bepaald door de ruwheidslengte z_0 en de wandafschuifnelheid U_* . z_0 is een geometrisch gegeven opgelegd door het oppervlak, U_* wordt bepaald door de hoofdstroming U_Δ buiten de grenslaag. We verwachten dat op enige afstand achter de overgang weer een gebied in de stroming ontstaat, waarin de stroming alleen bepaald wordt door de (lokale) ruwheidslengte z_{01} en de snelheid in de interne grenslaag op de bovengrens van het bedoelde gebied. Naar analogie van de volledig ontwikkelde grenslaag ligt het voor de hand om aan te nemen dat ook in dit gebied, althans bij benadering evenwicht aanwezig is, d.w.z. $P_r = \epsilon$. Hieruit volgt dat hier (bij benadering) weer een logaritmisch snelheidsprofiel en een konstante schuifspanning aanwezig is. Dit gebied zal de evenwichtslaag (Equilibrium Layer) worden genoemd.

Omdat zowel de interne grenslaag (Internal Boundary Layer, IBL) als de evenwichtslaag met de afstand x groeien, zal de snelheid op de bovengrens van de evenwichtslaag stroomafwaarts in geval van een ruw-glad overgang of een glad-ruw overgang resp. toe- of afnemen. Hierdoor verandert ook de schuifspanningssnelheid: τ en U_{*1} zijn in de evenwichtslaag x -afhankelijk en er is daarom slechts bij benadering sprake van evenwicht tussen produktie en dissipatie van turbulente energie.

Tussen de evenwichtslaag en het nog ongestoorde deel van de grenslaag boven de interne grenslaag waar de invloed van de ruwheidsovergang nog niet is doorgedrongen, vormt zich een overgangslaag (Transition Layer) waarin door transportprocessen een overgang plaatsvindt van U_{*0} op U_{*1} en van het stroomopwaartse logaritmisch snelheidsprofiel op het "lokale" profiel. Het verloop van het snelheids- en schuifspanningsprofiel in de overgangslaag is een van de thema's van dit onderzoek: de overgangslaag strekt zich in de praktijk uit over enkele tientallen meters hoogte.

In een aantal publikaties over interne grenslagen wordt vaak als identiteit $U_* = \sqrt{\tau/\rho}$ gebruikt. Naar mijn idee is de schuifspanningssnelheid een concept dat alleen betekenis heeft in de konstante spanningslaag in een volledig ontwikkelde grenslaag: In dat geval is U_* een van x en z onafhankelijke schalingsparameter. Daarom zal hier U_* alleen gebruikt worden voor konstante spanningslagen; in de stroomopwaartse oppervlaktelaag en de ongestoorde laag boven de interne grenslaag (U_{*0}) en in de evenwichtslaag (U_{*1}). In het overgangsgebied bestaat geen konstante schuifspanningssnelheid en zal $\sqrt{\tau}$ worden gebruikt.

5. Het model

5.1. De uitgangsvergelijkingen

De uitgangsvergelijkingen van het model worden gevormd door (9) en (10), de continuïteitsvergelijking en de bewegingsvergelijking in de volledig turbulente laag (zie 3.1.).

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (10)$$

Deze vergelijkingen kunnen dimensieloos gemaakt worden met de grootheden ρ , U_{*0} en z_0 op de volgende wijze:

$$U^+ = \frac{\bar{U}}{U_{*0}}, \quad W^+ = \frac{\bar{W}}{U_{*0}}$$

$$x^+ = \frac{x}{z_0}, \quad z^+ = \frac{z}{z_0}, \quad z_{01}^+ = \frac{z_{01}}{z_0}$$

$$\tau^+ = \frac{\tau}{\rho U_{*0}^2}, \quad U_{*01}^+ = \frac{U_{*01}}{U_{*0}} \text{ etc.}$$

Hiermee gaan (9) en (10) over in:

$$\frac{\partial U^+}{\partial x^+} + \frac{\partial W^+}{\partial z^+} = 0$$

$$U^+ \frac{\partial U^+}{\partial x^+} + W^+ \frac{\partial U^+}{\partial z^+} = \frac{\partial \tau^+}{\partial z^+}$$

Omdat de gradiënten bij het oppervlak veel groter zijn dan op grotere hoogte, is het handig om over te gaan op een logaritmische hoogtecoördinaat:

$$\eta = \ln z^+, \quad z^+ = e^\eta \rightarrow \frac{\partial}{\partial z^+} = e^{-\eta} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

De vergelijkingen luiden dan:

$$\frac{\partial U^+}{\partial x^+} + e^{-\eta} \frac{\partial W^+}{\partial \eta} = 0 \quad (19)$$

$$U^+ \frac{\partial U^+}{\partial x^+} + W^+ e^{-\eta} \frac{\partial U^+}{\partial \eta} = e^{-\eta} \frac{\partial \tau^+}{\partial \eta} \quad (20)$$

De beginvoorwaarde voor $x < 0$ wordt gevormd door de beschrijving van de volledig ontwikkelde grenslaag:

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln z^+ = \frac{\eta}{\kappa}$$

$$W^+ = 0 \quad (21)$$

$$\tau^+ = 1$$

Er wordt aangenomen dat de stroming zeer dicht bij het oppervlak in evenwicht is met de lokale ruwheid. De randvoorwaarden voor $x > 0$ laten zich dan formuleren als:

$$\lim_{z \rightarrow z_{01}} U^+(x, z) = \lim_{z \rightarrow z_{01}} \frac{U_{*1}^+(x)}{\kappa} \ln \frac{z}{z_{01}} = \lim_{z \rightarrow z_{01}} \frac{U_{*1}^+(x)}{\kappa} (\eta - m)$$

met $m = \ln \frac{z_{01}}{z_0}$

$$\lim_{z \rightarrow z_{01}} W^+ = 0 \quad (22)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_{01}} \tau^+(x, z) = U_{*1}^{+2}(x)$$

5.2. De sluitingshypothese

In een voorloper van het uiteindelijke model is de turbulente uitwisselingscoëfficiënt in de sluitingshypothese gebruikt:

$$\tau = K_m(x, z) \frac{\partial U}{\partial z}$$

K_m kan geschreven worden als het produkt van de lengteschaal κz en de snelheidsschaal $\sqrt{\tau}$:

$$K_m = \kappa z \sqrt{\tau}$$

zodat

$$\tau = (\kappa z \frac{\partial U}{\partial z})^2 \rightarrow \tau^+ = (\kappa \frac{\partial U^+}{\partial \eta})^2$$

Het is duidelijk dat dit model, waarin $\phi_m = \frac{\kappa z}{\sqrt{\tau}} \frac{\partial U}{\partial z}$ per definitie gelijk aan 1 is, onvoldoende is om de experimentele afwijkingen in de fluxprofiel relatie ($\phi_m \neq 1$) te reproduceren.

Het gebruikte rekenschema voor het uiteindelijke model is vrijwel gelijk aan de methode gebruikt door Peterson (1969, 1972). De sluitingshypothese daarin berust op het gebruik van de energievergelijking (18) als transportvergelijking voor τ .

Uit experimenten blijkt een sterke relatie tussen de turbulente schuifspanning $-\overline{u_i u_j}$ en de turbulente kinetische energie $E = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$. (Antonia en Luxton, 1972). Wij veronderstellen nu dat dit verband is te schrijven als (Bradshaw, 1967, Peterson 1969):

$$\tau = \alpha E \tag{23}$$

Volgens Rao e.a. (1974) varieert de konstante α van 0,16 tot 0,30. Peterson (1969, 1972) gebruikt 0,16. Uit onze berekeningen zal echter blijken dat een betere overeenkomst met experimenten verkregen wordt met $\alpha = 0.30$.

Vergelijking (17) is met (23) te schrijven als:

$$\overline{U} \frac{\partial \tau}{\partial x} + W \frac{\partial \tau}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial \overline{wE}}{\partial z} + \alpha \tau \frac{\partial U}{\partial z} - \alpha \epsilon$$

Het gebruik van de energievergelijking heeft echter wederom nieuwe onbekenden geïntroduceerd, de tripelkorrelatie \overline{wE} , en de dissipatie ϵ , waarvoor veronderstellingen gemaakt moeten worden. Als in paragraaf 3.3. kan ϵ worden geschaald met l_m en $\sqrt{\tau}$ (Peterson, 1969)

$$\epsilon = \frac{\tau^{3/2}}{\kappa z} \cdot$$

Volgens Bradshaw e.a. (1967) vindt transport van turbulente energie vooral plaats m.b.v. konvektie door grote wervels. Slechts bij zeer grote gradiënten staan zij het gebruik van diffusief-transport toe. In aansluiting op het model van Peterson (1969) is hier toch gekozen voor een gradiënt-diffusie transportmodel voor de term \overline{wE} . Deze aanname wordt onderbouwd door de resultaten van East en Sawyer (1980):

$$\overline{wE} = -K \frac{\partial E}{\partial z}$$

$$\overline{wE} = -K \frac{\partial E}{\partial z}$$

K wordt nu gelijk gesteld met de eddy-viscosity voor impuls K_m , d.w.z.:

$$K = \tau / \frac{\partial \overline{U}}{\partial z}$$

Hiermee kan de transportvergelijking in definitieve vorm geschreven worden als (Peterson, 1969, 1972):

$$\overline{U} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \overline{W} \frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau}{\partial \overline{U} / \partial z} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial z} \right) + \alpha \tau \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} - \alpha \frac{\tau \sqrt{\tau}}{\kappa z}$$

of, na transformatie naar η :

$$U^+ \frac{\partial \tau^+}{\partial x^+} + W^+ e^{-\eta} \frac{\partial \tau^+}{\partial \eta} = e^{-\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\tau^+}{\partial U^+ / \partial \eta} \cdot \frac{\partial \tau^+}{\partial \eta} \right) + \alpha e^{-\eta} \tau^+ \frac{\partial U^+}{\partial \eta} - \frac{\alpha e^{-\eta} (\tau^+)^{3/2}}{\kappa} \quad (24)$$

5.3. Diskretisatie

In deze en volgende paragrafen zal het probleem meer toegespitst worden op de ruw-glad overgang. De meeste analyses zijn ook voor de glad-ruw overgang geldig, maar in appendix C zullen de noodzakelijke aanpassingen in het model voor de glad-ruw overgang worden besproken.

Om de vergelijkingen op te lossen wordt in het stromingsveld vanaf $x = 0$ een puntrooster geplaatst, zie fig. 2.

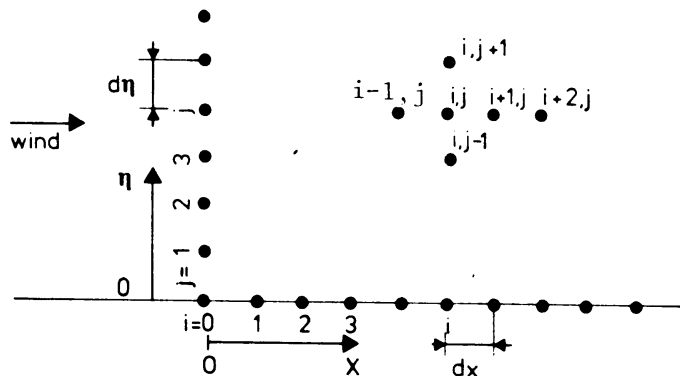


Fig. 2. Puntrooster voor een diskreet differentieschema in het stromingsveld.

Zo is U_{ij} de (dimensieloze) snelheid in x-richting op het roosterpunt met de coördinaten $x_i = i \cdot \Delta x$ en $\eta_j = j \cdot \Delta \eta$. Alle waarden U_{ij} , W_{ij} en τ_{ij} waarvan $i = k$ worden in vektoren geplaatst die de snelheden en schuifspanningen in een doorsnede ter plaatse $x_k = k \cdot \Delta x$ bevatten: $\underline{U}_k = (U_{k,0}, U_{k,1}, \dots, U_{k,j_{\max}})$ en analoog \underline{W}_k en $\underline{\tau}_k$.

De vergelijkingen (20) en (24) hebben een zodanige vorm dat zij in x-richting stap voor stap expliciet kunnen worden opgelost. Op deze manier is te schrijven:

a) $\underline{U}_{i+1} = \underline{f}(\underline{U}_i, \underline{W}_i, \underline{\tau}_i)$ waarin \underline{f} door (20) wordt bepaald;

b) $\underline{\tau}_{i+1} = \underline{g}(\underline{U}_i, \underline{W}_i, \underline{\tau}_i)$ waarin \underline{g} door (24) wordt bepaald.

\underline{W}_{i+1} kan worden opgelost door integratie van de continuïteitsvergelijking (19):

c) $\underline{W}_{i+1} = \underline{h}(\underline{U}_{i+1}, \underline{U}_i, \underline{W}_i)$.

ad. a). De bewegingsvergelijking in gediscrètiseerde vorm. I.v.m. de stabiliteit (zie appendix A) is voor de verticale advektieterm z.g. upwind differencing gebruikt. Dit houdt in dat de faktor f_τ of $f_u = 1$ als $W_{ij} < 0$ en f_τ of $f_u = 0$ als $W_{ij} > 0$. (Als geen upwind differencing werd toegepast zou $f_u = \frac{1}{2}$). Door de afgeleiden in vergelijking (20) als eindige differenties te schrijven krijgt men het schema:

$$U_{i,j} \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x} = - W_{i,j} \left(\frac{f_u (U_{i,j+1} - U_{i,j}) - (1-f_u)(U_{i,j} - U_{i,j-1})}{e^{\eta_j} \Delta \eta} \right) + \frac{\tau_{i,j+1} - \tau_{i,j-1}}{2 e^{\eta_j} \Delta \eta} \quad (25)$$

waaruit $U_{i+1,j}$ expliciet kan worden opgelost.

ad. b). De energievergelijking. Ook hier is in de advektieve term upwind differencing toegepast:

$$U_{i,j} \frac{\tau_{i+1,j} - \tau_{i,j}}{\Delta x} = - W_{i,j} \left(\frac{f_\tau (\tau_{i,j+1} - \tau_{i,j}) + (1-f_\tau)(\tau_{i,j} - \tau_{i,j-1})}{e^{\eta_j} \Delta \eta} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(\tau_{i,j} + \tau_{i,j+1})(\tau_{i,j+1} - \tau_{i,j})}{2(U_{i,j+1} - U_{i,j})} - \frac{(\tau_{i,j-1} + \tau_{i,j})(\tau_{i,j} - \tau_{i,j-1})}{2(U_{i,j} - U_{i,j-1})} \\
 & \qquad \qquad \qquad e^{\eta_j} \Delta \eta \\
 & + \alpha e^{-\eta_j} \tau_{i,j} \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2\Delta \eta} - \frac{\alpha e^{-\eta_j}}{\chi} (\tau_{i,j})^{3/2}
 \end{aligned} \tag{26}$$

ad. c) De continuïteitsvergelijking:

$$e^{-\eta_{j-\frac{1}{2}}} \frac{W_{i+1,j} - W_{i+1,j-1}}{\Delta \eta} = - \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j} + U_{i+1,j-1} - U_{i,j-1}}{2\Delta x} \tag{27}$$

met de randvoorwaarde $W_{i+1,0} = 0$.

5.4. De randvoorwaarden

Het rooster is in η -richting aan boven- en onderzijde begrensd. De bovenrand van het rooster wordt geacht gedurende de gehele berekening tot de nog ongestoorde, stroomopwaars bepaalde grenslaag te behoren. Door verschuiving van de stroomlijnen door de W^+ -komponent van de snelheid die fluidum toevoert naar de versnelde (ruw-glad overgang) of afvoert van de vertraagde (ruw-glad overgang) interne grenslaag, zal de snelheid op het bovenste roosterpunt j_{\max} stroomafwaarts resp. toe- of afnemen. Deze stroomlijn verschuiving is aangetoond in de windtunnelexperimenten van Antonia en Luxton (1972).

Omdat de schema's (25) en (26) niet toepasbaar zijn op de uiterste roosterpunten, wordt de snelheid U^+ in het bovenste roosterpunt bepaald door het toepassen van de vereenvoudigde bewegingsvergelijking:

$$\begin{aligned}
 & U^+ \frac{\partial U^+}{\partial x^+} + W^+ e^{-\eta} \frac{\partial U^+}{\partial \eta} = 0 \quad \text{waarvan de discretisatie luidt:} \\
 & \frac{(U_{i+1,j_{\max}} + U_{i+1,j_{\max}-1}) - (U_{i,j_{\max}} + U_{i,j_{\max}-1})}{2\Delta x} = \\
 & = - \frac{W_{i,j_{\max}} + W_{i,j_{\max}-1}}{U_{i,j_{\max}} + U_{i,j_{\max}-1}} (e^{-\eta_{j_{\max}-\frac{1}{2}}} \frac{U_{*0}}{\chi})
 \end{aligned} \tag{28}^*$$

met $U_{*0} = 1$ voor de ruw-glad overgang.

* Als men het rechterslid van (28) schrijft als:

$$- \frac{(W_{i,j_{\max}} + W_{i,j_{\max}-1})(U_{i,j_{\max}} - U_{i,j_{\max}-1})}{(U_{i,j_{\max}} + U_{i,j_{\max}-1}) e^{\eta_{j_{\max}-\frac{1}{2}}} \Delta \eta}$$

is men onafhankelijk van de beginvoorwaarde van U_{*0}^+ .

De berekening van τ^+ op het roosterpunt j_{\max} is simpel:

$$\tau_{i+1, j_{\max}} = \tau_{i+1, j_{\max}-1} \quad (29)$$

Het opleggen van de juiste voorwaarden aan de onderrand is veel lastiger. Zoals uit de stabiliteitsanalyse (appendix A) volgt, is de stabiliteit afhankelijk van de koördinaat η . Om de hoeveelheid rekentijd aanvaardbaar te houden, mag dx niet te klein zijn. Dit betekent echter dat voor η kleiner dan een zekere waarde $\eta_{j_{\min}}$, ($\eta_{j_{\min}}$ is afhankelijk van dx , zie tabel a1) instabiliteit zal optreden. Grootheden op roosterpunten die lager gelegen zijn dan dit minimum $\eta_{j_{\min}}$, kunnen niet met de schema's (25) en (26) worden berekend.

Voor deze roosterpunten zal een apart schema moeten worden opgesteld: Door aan te nemen dat de punten zich in de evenwichtslaag bevinden, kan men een konstante schuifspanning en een logaritmisch snelheidsprofiel opleggen, bepaald door de lokale z_{01} en U_{*1}^+ . (Deze aanname zal dicht achter de overgang, waar de interne grenslaaghoogte h_{IBL} van dezelfde orde van grootte als $z_{j_{\min}}$ is, niet juist zijn). De randvoorwaarden (22) zijn dan te schrijven als:

$$0 < j < j_{\min}: \quad U_{i,j} = \frac{U_{*1}^+}{\kappa} \ln \frac{z_j}{z_{01}} = \frac{U_{*1}^+}{\kappa} (\eta_j - m) \quad (30)$$

$$\tau_{i,j} = U_{*1}^{+2}$$

met $m = \ln \frac{z_{01}}{z_0}$ en U_{*1}^+ bepaald door:

$$U_{*1}^+ (x_i) = U_{i, j_{\min}} \frac{\kappa}{\eta_{j_{\min}}}$$

Dit schema is consistent met de randvoorwaarden geformuleerd in 5.1. en kontinu voor U^+ in het punt $j = j_{\min}$. Voor $i = 1$ wordt in het τ -profiel op j_{\min} een sprong aangebracht: er is geen reden dat $\tau_{i+1, j_{\min}}$ volgens (26) overeen zou komen met $\tau_{i+1, j_{\min}}$ volgens (30). Deze diskontinuiteit is aanleiding tot instabiliteiten die slechts na een groot aantal stappen uitdempen.

Om deze instabiliteiten te voorkomen is geprobeerd:

$$0 < j < j_{\min} \quad \tau_{i,j} = \tau_{i, j_{\min}} \quad (31)$$

Dit schema is niet meer in overeenstemming met (22), waarin verondersteld wordt dat in de evenwichtslaag $\tau^+ = U_*^{+2}$; $\tau_{i,jmin}$ en U_*^{+2} , naderen langzaam tot dezelfde waarde. De reden hiervan is dat de dikte van de evenwichtslaag erg klein is direkt achter de overgang. Het onderste roosterpunt behoort daarom zeer dicht bij de wand genomen te worden. Dit is om rekentechnische redenen (kleine $\Delta x \rightarrow$ veel rekentijd) minder wenselijk.

Het is duidelijk dat de voorgaande randvoorwaarden niet bevredigend zijn. Gezocht moet worden naar voorwaarden die

- a) consistent zijn met de theoretische randvoorwaarden (22)
- b) In alle stappen kontinu aansluiten op de profielen berekent met de schema's (25) en (26).

Reeds in hoofdstuk 4 werd opgemerkt dat in de evenwichtslaag, in tegenstelling tot in de volledig ontwikkelde grenslaag, U_* een functie van x zal zijn. In de grenslaagbenadering worden afgeleiden naar x evenwel verwaarloosd. In de onderstaande analyse zal nagegaan worden wat de invloed van de verandering van U_* op de profielen in de evenwichtslaag zal zijn.

Berekeningen rechtvaardigen dat we de verticale advektieterm verwaarlozen. Beschouw de bewegingsvergelijking:

$$U^+ \frac{\partial U^+}{\partial x^+} = \frac{\partial \tau^+}{\partial z^+} \quad (32)$$

Noem z_0 een schaal voor de z -koördinaten

$$z^+ = z/z_0 \leftrightarrow z = z^+ z_0$$

Noem L_h een schaal voor de x -koördinaten

$$\zeta = \frac{x}{L_h} \leftrightarrow x = L_h \zeta$$

zodat $z_0/L_h = \delta \ll 1$

Deze schaling houdt in, dat we op een afstand van de orde L_h vanaf de ruwheidsovergang kijken naar de stroming op een hoogte van de orde z_0 boven het oppervlak. We mogen verwachten dat hier, als $\delta \ll 1$ een evenwichtslaag aanwezig is.

Dit leidt met (32) tot:

$$\delta U^+ \frac{\partial U^+}{\partial \zeta} = \frac{\partial \tau^+}{\partial z^+}$$

Substitueer nu $\tau^+ = \tau^0 + \delta \tau^1$, $U^+ = U^0 + \delta U^1$, dan levert dit, met verwaarlozing

van termen van de orde van grootte van δ , (de 0-de orde benadering) de konstante spanningslaag op:

$$\frac{\partial \tau^0}{\partial z^+} = 0 \rightarrow \tau^0 = \text{konstant} \stackrel{\text{def}}{=} U_{*1}^{+2} \quad (33)$$

Voor de 1e orde benadering geldt echter:

$$U^0 \frac{\partial U^0}{\partial x^+} = \frac{\partial \tau^1}{\partial z^+} \quad (34)$$

De energievergelijking zonder konvektie luidt na schaling met δ :

$$\delta U^+ \frac{\partial \tau^+}{\partial z^+} = \alpha \left(\frac{\partial U^+}{\partial z^+} - \frac{\tau^+ 3/2}{\kappa z^+} \right) + \frac{\partial}{\partial z^+} \left(\frac{\tau^+}{\partial U^+ / \partial z^+} \cdot \frac{\partial \tau^+}{\partial z^+} \right)$$

Dit geeft in de 0^e orde benadering samen met (33)

$$\alpha \left(\tau^0 \frac{\partial U^0}{\partial z^+} - \frac{\tau^0 3/2}{\kappa z^+} \right) = 0 \quad (35)$$

$$\rightarrow U^0 = \frac{U_{*1}^+}{\kappa} \ln \frac{z}{z_{01}}$$

Hiermee wordt (34) na een transformatie naar $\eta^1 = (\eta - m) = \ln \frac{z}{z_{01}}$ (dus geschaald op de stroomafwaartse z_{01}):

$$\frac{U_{*1}^+}{\kappa^2} \eta^{12} \frac{dU_{*1}^+}{dx^+} = e^{-\eta} \frac{\partial \tau^1}{\partial \eta^1} \rightarrow$$

$$\tau^1 = \frac{U_{*1}^+}{\kappa^2} \frac{dU_{*1}^+}{dx^+} \{ e^{\eta} [(\eta - m)^2 - 2(\eta - m) + 2] - 2e^m \} = \frac{U_{*1}^+}{\kappa^2} \frac{dU_{*1}^+}{dx^+} g(\eta) \quad (36)$$

Analoog vinden we door het uitschrijven van de 1^o orde benadering voor de energievergelijking samen met (33) en (36) een uitdrukking voor U':

$$\frac{\partial U^1}{\partial \eta^1} = \frac{1}{2\kappa^3} \frac{dU_{*1}^+}{dx^+} \{ e^{\eta} [\eta^{12} - 2\eta^1 + 2] - 2e^m \} - \frac{1}{\alpha \kappa^2} \frac{dU_{*1}^+}{dx^+} \eta^{12} e^{\eta} \rightarrow$$

$$U^1 = \frac{dU_{*1}^+}{dx^+} \left[\frac{1}{2\kappa^3} \{ e^{\eta} [(\eta - m)^2 - 4(\eta - m) + 6] - 2e^m [\eta - m + 3] \} \right]$$

$$- \frac{1}{\alpha \kappa} \{ e^{\eta} [(\eta - m)^2 - 2(\eta - m) + 2] - 2e^m \} = \frac{dU_{*1}^+}{dx^+} \cdot f(\eta) \quad (37)$$

Met bovenstaande analyse is analytisch aan te tonen dat in deze "semi"-evenwichtslaag met x-afhankelijke schuifspanningssnelheid, afwijkingen in de flux-profiel relatie optreden:

$$\phi_m = \frac{\kappa z}{\sqrt{\tau}} \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\kappa}{\sqrt{\tau}} \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\kappa \left(\frac{\partial U^0}{\partial \eta} + \frac{\partial U^1}{\partial \eta} \right)}{(\tau^0 + \tau^1)^{\frac{1}{2}}}$$

Met de vereenvoudiging dat $\alpha \sim \kappa^2$ (hierdoor kunnen termen worden samengevoegd) blijkt dat

$$\phi_m = 1 - \frac{1}{\alpha} \frac{1}{U_{0*}} \frac{\partial U_*}{\partial x} e^{\eta} (\eta - m)^2$$

We kunnen nu met (33), (35), (36) en (37) voor τ en U in de evenwichtslaag schrijven:

$$\text{voor } 0 < j < j_{\min} \quad \tau_{i+1,j} = U_{*i+1}^2 + \frac{U_{*i+1}}{\kappa^2} \frac{dU_*^+}{dx^+} g(\eta_j)$$

$$U_{i+1,j} = \frac{U_{*i+1}}{\kappa} (\eta - m) + \frac{dU_*^+}{dx^+} f(\eta_j) \quad (38)$$

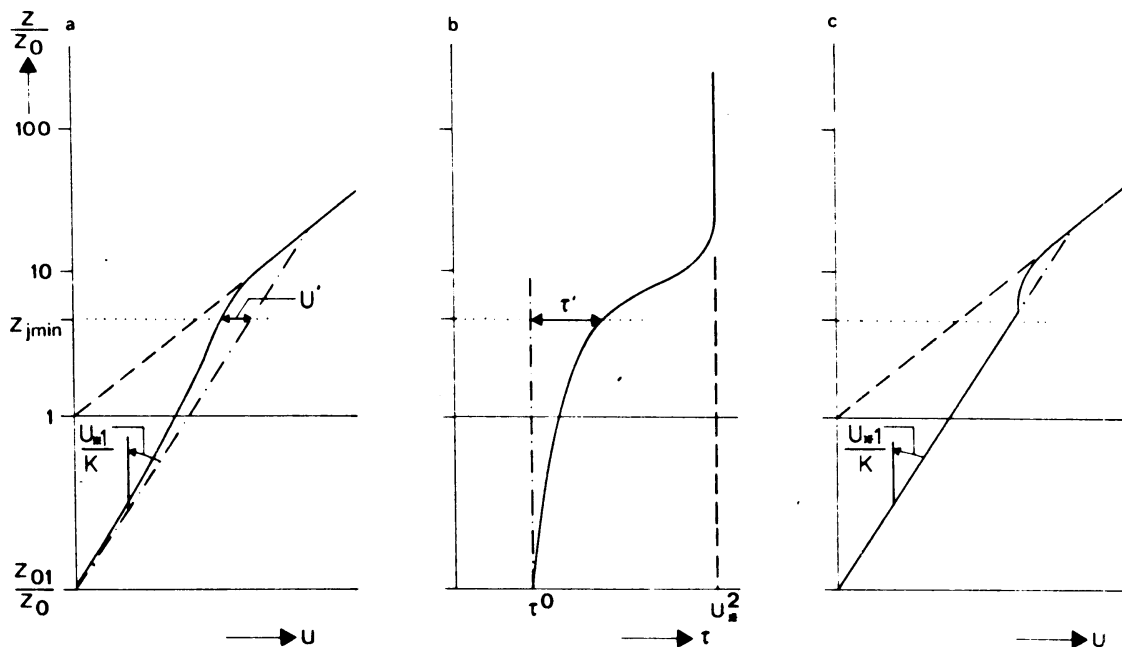


Fig. 3. Invloed van de 1^o orde benadering op de snelheids en schuifspanningsprofielen in de evenwichtslaag (a,b) in vergelijking met de oorspronkelijke randvoorwaarde (c).

Voor een ruw-glad overgang, $m < 0$, is f een negatieve, g een positieve functie, terwijl $\frac{dU_*^+}{dx^+} > 0$, zie fig. 3a, b. Deze uitkomst is in overeenstemming met de uitkomsten van het schema volgens (31). In die berekeningen vertoont het snelheidsprofiel een knik op het roosterpunt j_{\min} (fig. 3.c). Deze knik suggereert dat in de overgangslaag $\frac{\partial U}{\partial z} < \frac{U_{*1}}{\kappa z}$. In de 1^e orde benadering blijkt inderdaad dat de snelheidsgradiënt vanaf de waarde $U_{*1}/\kappa z$ voor $z = z_{01}$ afneemt tot in de overgangslaag.

Als we eisen dat de randvoorwaarde voldoet aan de 1^e orde benadering met (36) en (37) en bovendien in iedere stap de U en τ -profielen continu zijn op $j = j_{\min}$, dan vormen (38) en (39) samen alle voorwaarden:

$$U_{i+1, j_{\min}} = f_{j_{\min}}(U_{-1}, W_{-1}, \tau_{-1}) \text{ volgens (25)} \quad (39.1)$$

$$\tau_{i+1, j_{\min}} = g_{j_{\min}}(U_{-1}, W_{-1}, \tau_{-1}) \text{ volgens (26)} \quad (39.2)$$

$$U_{i+1, j_{\min}} = \frac{U_{*i+1}}{\kappa} (\eta_{j_{\min}})^{-m} + \frac{dU_*^+}{dx^+} f(\eta_{j_{\min}}) \quad (39.3)$$

$$\tau_{i+1, j_{\min}} = \tau_{i+1}^o + \frac{U_{*i+1}}{\kappa} \frac{dU_*^+}{dx^+} g(\eta_{j_{\min}}) \quad (39.4)$$

$$\tau_{i+1}^o = U_{*i+1}^2 \quad (39.5)$$

$$\frac{dU_*^+}{dx^+} = \frac{U_{*i+1} - U_{*i}}{\Delta x} \quad (39.6)$$

Wanneer uit een vorige stap U_{-1} , W_{-1} , τ_{-1} en U_{*i} bekend zijn, dan zijn er in (39) voor de 5 onbekende grootheden $U_{i+1, j_{\min}}$, $\tau_{i+1, j_{\min}}$, U_{*i+1} , τ_{i+1}^o en dU_*^+/dx^+ 6 voorwaarden geformuleerd, waarmee dit stelsel overbepaald is. Er zijn alleen oplossingen mogelijk als één van de 6 voorwaarden wordt genegeerd.

Behalve voorwaarde (39.1) en (39.2), die stellen dat op rij j_{\min} het model als geformuleerd in (25) en (26) gebruikt wordt, is ook voorwaarde (39.3) essentieel. Dit is de enige voorwaarde waarin de nieuwe ruwheidslengte z_{01} aan het model wordt opgelegd. De enige voorwaarden waarvan men kan overwegen ze te negeren zijn (39.4 t/m 6). In tabel 1 zijn de resultaten van de verschillende randvoorwaarde-schema's samengevat. Het is duidelijk dat het weglaten van de voorwaarden (39.4) of (39.5) leiden tot situaties analoog aan die, welke het gevolg zijn van resp. de schema's (30) en (31). Het negeren van voorwaarde (39.6) kan worden opgevat als het substitueren van een nieuwe parameter C in de vergelijkingen (39.3) en (39.4) voor de grootheid dU_*^+/dx^+ .

Tabel 1 Vergelijking van de verschillende randvoorwaarde-schema

Randvoorwaarde volgens schema	Stabiliteit	konsistentie met de theorie	programma
30	-	+	E7
31	+	τ_i^0 nadert langzaam tot U_{*1}^{+2}	
39 zonder voorwaarde 39.4	-	+	
39 zonder voorwaarde 39.5	+	τ_i^0 nadert langzaam tot U_{*1}^{+2}	E8
U profiel in 0 ^e orde benadering volgens (35)			
39 zonder voorwaarde 39.5	-	-	
U profiel in 1 ^e orde benadering volgens (38)			
$U_{*1} = \frac{U_{i,jmin} + U_{*i-1}/\Delta x \cdot f(\eta_{jmin})}{\frac{(\eta_{jmin} - m)}{k} + \frac{f(\eta_{jmin})}{\Delta x}}$			
39 zonder voorwaarde 39.6	+	C nadert tot dU_{*1}^+/dx^+	E9
U profiel in 0 ^e orde benadering		konsistent met (22)	
39 zonder voorwaarde 39.6	stabil indien	C nadert dU_{*1}^+/dx^+	E10
U profiel in 1 ^e orde benadering	C begrensd	konsistent met (22); U en τ in gelijke orde benaderd.	

Met gegeven $U_{i+1, jmin}$ en $\tau_{i+1, jmin}$ die volgen uit (39.1) en (39.2) kan men C en U_{*i+1} oplossen uit:

$$U_{i+1, jmin} = \frac{U_{*i+1}}{\kappa} (\eta_{jmin}^{-m}) + C f(\eta_{jmin})$$
$$\tau_{i+1, jmin} = U_{*i+1}^2 + \frac{U_{*i+1}}{\kappa^2} C g(\eta_{jmin}).$$

Dit leidt tot een kwadratische vergelijking in (bijvoorbeeld) U_{*i+1} , waarvan de positieve wortel als oplossing van U_{*i+1} kan worden geaccepteerd.

Het is gebleken dat na enkele stappen C van dezelfde orde van grootte is als $\frac{dU_*}{dx}$, waarna een langzame convergentie van beide grootheden volgt. Ten gevolge van de hoge waarden van C in de eerste stappen leidt het toepassen van de 1^e orde benadering voor het snelheidsprofiel tot instabiliteiten, zodat de 1^e orde benadering pas op het snelheidsprofiel wordt toegepast zodra C kleiner is dan een gekozen bovengrens. Een maximum C van 0,001 bleek goed te voldoen. (De 1^e orde benadering is wel direkt toepasbaar op het schuifspanningsprofiel).

Het model met deze laatste randvoorwaarde, die bovendien voldoet aan (22), is gebruikt ter vergelijking met enkele experimentele gegevens.

6. Resultaten

6.1. Vergelijking met enkele snelheidsprofielen

De resultaten van het model zijn eerst vergeleken met de experimenten die door Bradley (1968) zijn uitgevoerd. Bij deze experimenten is gebruik gemaakt van een aantal homogene oppervlakken met verschillende ruwheden, zodanig geplaatst dat de overgangen tijdens de metingen dwars op de windrichting waren. Deze welomschreven situatie maakt de experimenten geschikt om het model te toetsen. Helaas zijn alleen windprofielen en oppervlaktschuifspanningen gemeten, zodat de toegepaste hogere orde sluitingshypothese m.b.v. de energie vergelijking niet kan worden geverifieerd. De resultaten, verkregen met het 2^e orde model van Rao e.a. (1974) kan natuurlijk niet dienen als experimenteel verifikatie materiaal, maar zijn wel zinvol ter vergelijking.

De overeenkomsten met Bradley's metingen zijn goed (fig. 4, 5). Rao e.a. suggereren dat de door Bradley opgegeven ruwheidslengte voor het asfalt (0,002 cm) te hoog is, deze zou liggen tussen de 0,0002 cm en 0,002 cm. Onze berekeningen leiden tot $0,0004 < z_{01} < 0,002$ cm.

De undershoot van de schuifspanning met de daaropvolgende langzame toename, de basisveronderstelling voor de benaderingen uit de voorgaande paragraaf, zijn in overeenstemming met Bradley's resultaten (fig. 5).

De berekende snelheidsprofielen laten zien dat de gradiënt van het profiel $\partial U / \partial z$ vanaf de waarde U_{*1} / κ aan de wand, tot halverwege de overgangslaag afneemt. Deze uitkomsten zijn wel in overeenstemming met het model van Rao e.a., maar de meetpunten, zowel bij Bradley's experimenten als bij de nog te bespreken Cabauw-metingen, liggen alle boven de evenwichtslaag, zodat dit verschijnsel in de atmosferische grenslaag niet experimenteel is geverifieerd. Antonia en Luxton (1972) verrichtten metingen aan een ruwheidsovergang in een windtunnel. Bij deze experimenten is het bovengenoemde effect duidelijk herkenbaar, maar het is twijfelachtig of deze metingen representatief voor ons model zijn: Er wordt geen Reynolds-onafhankelijkheid (Wyngaard 1973, zie 3.1) in de oppervlaktelaag bereikt; de snelheidsprofielen blijven afhankelijk van de viskositeit. (het Reynoldsgetal $Re = U_{\Delta} \cdot \Delta / \nu$ is bij de experimenten van Antonia en Luxton veel kleiner dan bij de Cabauwmetingen: $5 \cdot 10^4$, terwijl te Cabauw $U_{200} \cdot \Delta / \nu \sim 3 \cdot 10^8$ voor een grenslaaghoogte Δ van ca. 500 m). De interne grenslaag in de windtunnel reikt tot aan 20% van de totale grenslaagdikte: een duidelijke konstante spanningslaag is niet te onderscheiden.

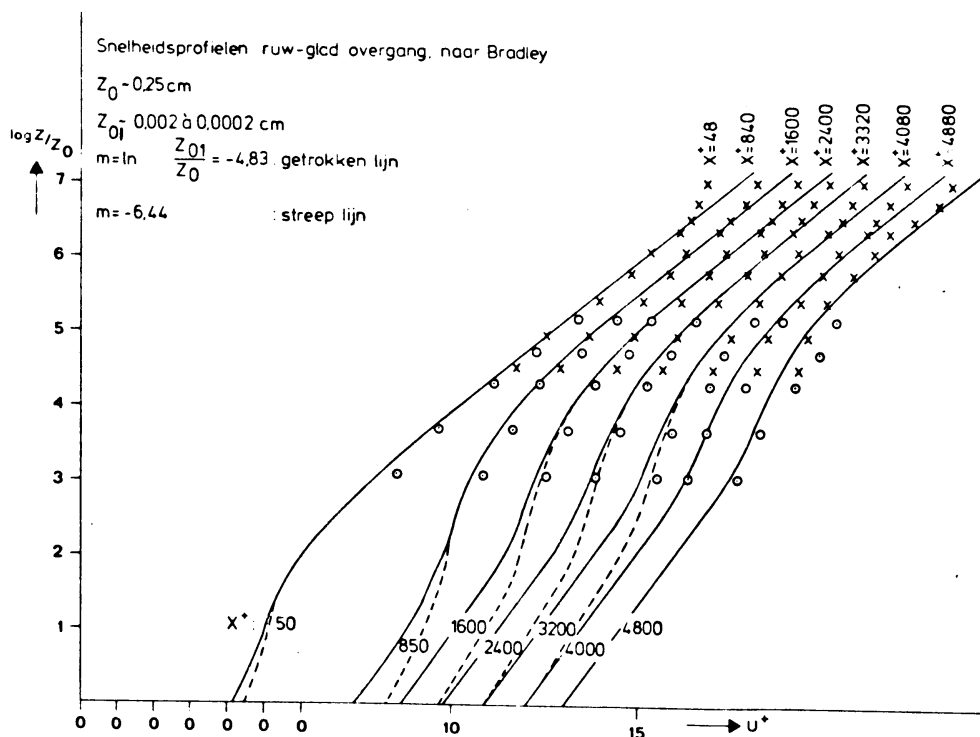


Fig. 4. Snelheidsprofielen voor een ruw-glad overgang. Experimenten van Bradley (1968) vergeleken met model-voorspellingen $z_0 = 0,25$ cm. De getrokken lijn geldt voor de ruwheidsovergang waarvoor $z_{01}/z_0 = 0,008$, de onderbroken lijn voor $z_{01}/z_0 = 0,0016$. Let op de verschuiving van de oorsprong.

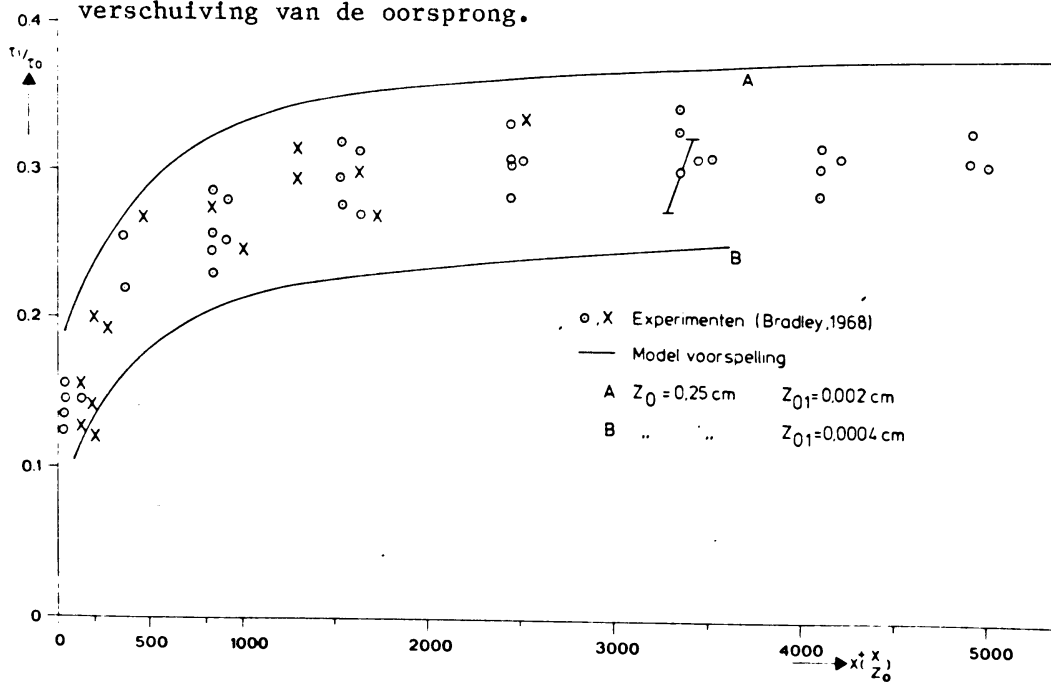


Fig. 5. Wandschuifspanningen naar experimenten van Bradley vergeleken met $(U_{*1})^2$ volgens de modelvoorspellingen. A: $z_{01}/z_0 = 0,008$; B : $z_{01}/z_0 = 0,0016$.

De experimenten van Antonia en Luxton rechtvaardigen wel de sluitingshypothese $\tau = \alpha E$. Bovendien zijn er ook afwijkingen van de flux-profielrelatie aangetoond.

Als tweede vergelijkingsmateriaal zijn windprofielen gebruikt, die over een periode van twee zomermaanden (mei en juni 1977) onder neutrale omstandigheden in Cabauw zijn gemeten (Beljaars, 1982). In fig. 6 is een overzicht van de omgeving van de mast gegeven.

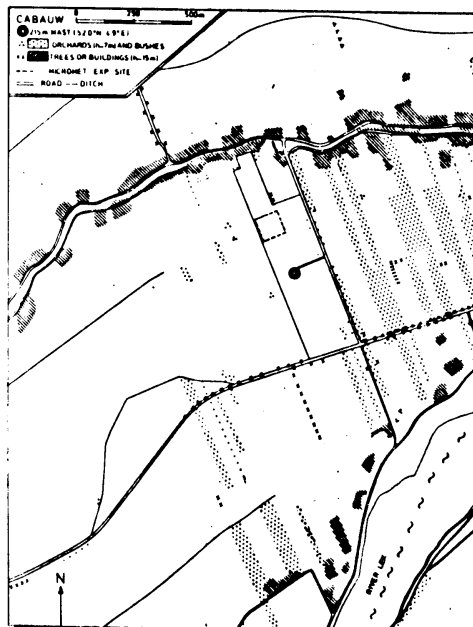


Fig. 6. Omgeving van het meetterrein in Cabauw.

De afstand vanaf de ruwheidsovergangen tot aan de mast zijn voor de belangrijkste windrichtingen globaal uit dit kaartje opgemeten, zie tabel 3. Voor een aantal windrichtingen is de voorstelling m.b.v. een ruwheidsovergang slechts beperkt geldig, omdat stroomopwaarts vaak sprake is van geïsoleerde obstakels.

Voor interpretatie van de profielen moet voor de beschrijving van de stroomopwaartse oppervlaktelaag een ruwheidshoogte z_0 aangenomen worden. Naar analogie met de modelaannamen, veronderstellen we dat deze oppervlaktelaag volledig ontwikkeld is. Nemen we bovendien nog aan dat ter plaatse van de meetmast tot op 200 m hoogte het stroomopwaartse logaritmische profiel geldig is, dan kunnen we het snelheidsprofiel schalen met een U_* die bepaald is uit:

$$U_{200} = \frac{U_*}{\kappa} \ln \frac{200}{z_0}.$$

Dit is alleen bruikbaar in neutrale gevallen en zal dan ook alleen toegepast worden op de neutrale profielen uit Beljaars (1982).

Voor de schatting van de ruwheidslengte z_0 is enerzijds gebruik gemaakt van een terrein klassifikatie naar Davenport (Wieringa, 1980), tabel 2, die een stroomopwaartse ruwheidslengte van 0,5 geeft.

Tabel 2.

Terrain classification adapted from Davenport (1960) in terms of aerodynamical roughness length z_0 .

Class	Short terrain description	z_0 (m)
1	Open sea, fetch at least 5 km	0.0002
2	Mud flats, snow; no vegetation, no obstacles	0.005
3	Open flat terrain; grass, few isolated obstacles	0.03
4	Low crops; occasional large obstacles, $x/h > 20$	0.10
5	High crops; scattered obstacles, $15 < z/h < 20$	0.25
6	Parkland, bushes; numerous obstacles, $x/h \approx 10$	0.5
7	Regular large obstacle coverage (suburb, forest)	(1.0)
8	City center with high and low rise buildings	??

Note: Here x is a typical upwind obstacle distance and h the height of the corresponding major obstacles.

In de tweede plaats zijn de ruwheidslengten gebruikt zoals die volgen uit de vlagmethode naar Wieringa (1976), zie tabel 3. Bij deze methode wordt verondersteld dat $U_{*0} = \sigma_u$ zodat:

$$U_{10m} = \sigma_{u,10m} \ln \frac{10}{z_0} \quad (40)$$

waaruit met gemeten U en σ_u op 10 m hoogte, z_0 kan worden bepaald (σ_u wordt gemeten m.b.v. windvlagen met een veel grotere dan de gemiddelde snelheid). Schotanus laat zien dat σ_u gemeten tot op lage hoogte (ca. 3 m) is op te vatten als een globale grootheid, d.w.z. nauwelijks beïnvloed wordt door de plaatselijke ruwheidslengte. Uit onze modelvoorspellingen blijkt het 10 m niveau binnen de interne grenslaag te liggen, de snelheid gemeten op 10 m hoogte wordt daardoor beïnvloed door de plaatselijke ruwheidslengte z_{01} (kan beschouwd worden als een "lokale" grootheid).

Voor stroomopwaartse ruwheidslengte van 0,2 tot 0,5 m blijkt de interne grenslaag, volgens ons model, binnen een afstand van resp. 45 tot 35 m tot

meer dan 10 m gegroeid te zijn. (De juistheid van het model is op deze korte afstanden na de overgang overigens twijfelachtig). Als de meetpositie zich in een gladder gebied bevindt dan de omgeving gemiddeld is, zoals te Cabauw voor de oostelijke en zuidelijke sectoren, dan zal de gemeten U_{10m} hoger zijn dan uit een extrapolatie van het profiel boven de interne grenslaag naar het 10 m nivo zou volgen. Hierdoor zal de globale ruwheid z_0 in (40) onderschat worden (Wieringa, 1981).

In fig. 7, 8 en 9 zijn de 2-maandelijkse gemiddelden en de modelvoorspellingen met verschillende stroomopwaarde ruwheden vergeleken (zie Beljaars 1982). Voor de lokale ruwheidslengte is 1 en 2 cm gebruikt. De op het oog beste overeenkomsten zijn in tabel 3 vermeld. Er is ook een globale ruwheidslengte berekend aan de hand van de profielen tussen 40 en 200 m. Hoewel de ruwheidslengten naar Wieringa iets aan de lage kant zijn (zoals te verwachten is) is de onderlinge overeenkomst uitstekend.

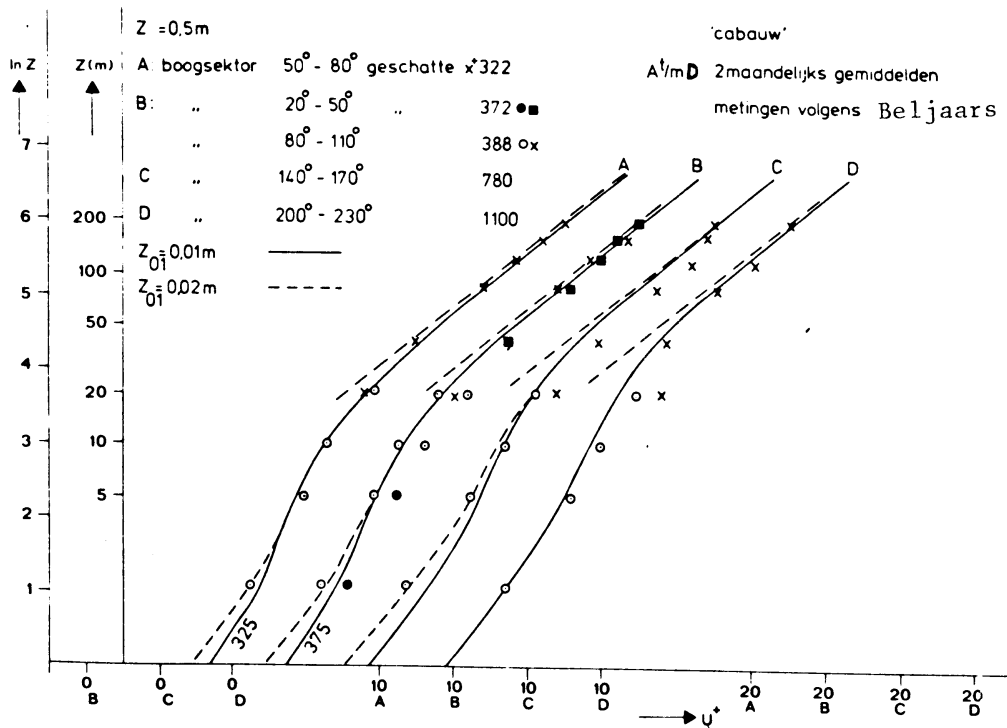


Fig. 7. Snelheidsprofielen, gemeten te Cabauw voor verschillende wind-richtingen (Let op de verschuiving van de oorsprong). De gegevens zijn geschaald met $z_0 = 0,5$ m. Getrokken lijnen geven de modelvoorspelling voor $z_{01}/z_0 = 0,02$; onderbroken lijnen voor $z_{01}/z_0 = 0,04$.

Tabel 3 Globale ruwheidslengten rondom Cabauw bepaald uit snelheidsprofielen en vlaagmethode van Wieringa

windrichting	geschatte afstand tot ruwheids- overgang (m)	aantal waarn. 5/6-1977	ruwheidshoogten (m) (globaal)		ruwheidshoogte (lokaal) beste fit met model
			vlaag- methode	profiel 40-200 m	
350- 20°	300		0.21	-	-
20- 50°	130	31	0.175	0.15-0.21	0.01
50- 80°	160	73	0.231	0.30-0.34	0.02
80-110°	190	20	0.245	0.28	0.02
110-140°	290	2	0.189	-	-
140-170°	370	7	0.19	0.12-0.21	0.02
170-200°	420	12	0.19	-	-
200-230°	550	71	0.17	0.14-0.18	0.01

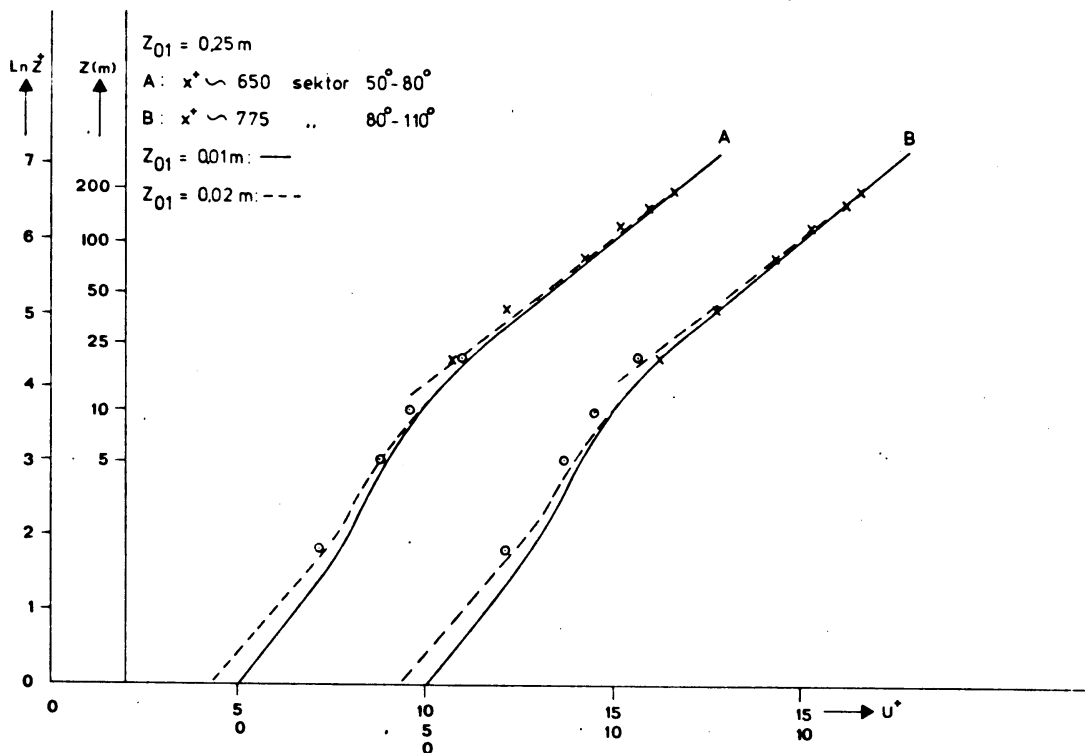


Fig. 8. Snelheidsprofielen, gemeten te Cabauw voor verschillende wind-richtingen (Let op de verschuiving van de oorsprong). De gegevens zijn geschaald met $z_0 = 2,5$ m (tabel 3, vlagmethode). Getrokken lijnen geven de modelvoorspelling voor $z_{01}/z_0 = 0,04$; onderbroken lijnen voor $z_{01}/z_0 = 0,08$.

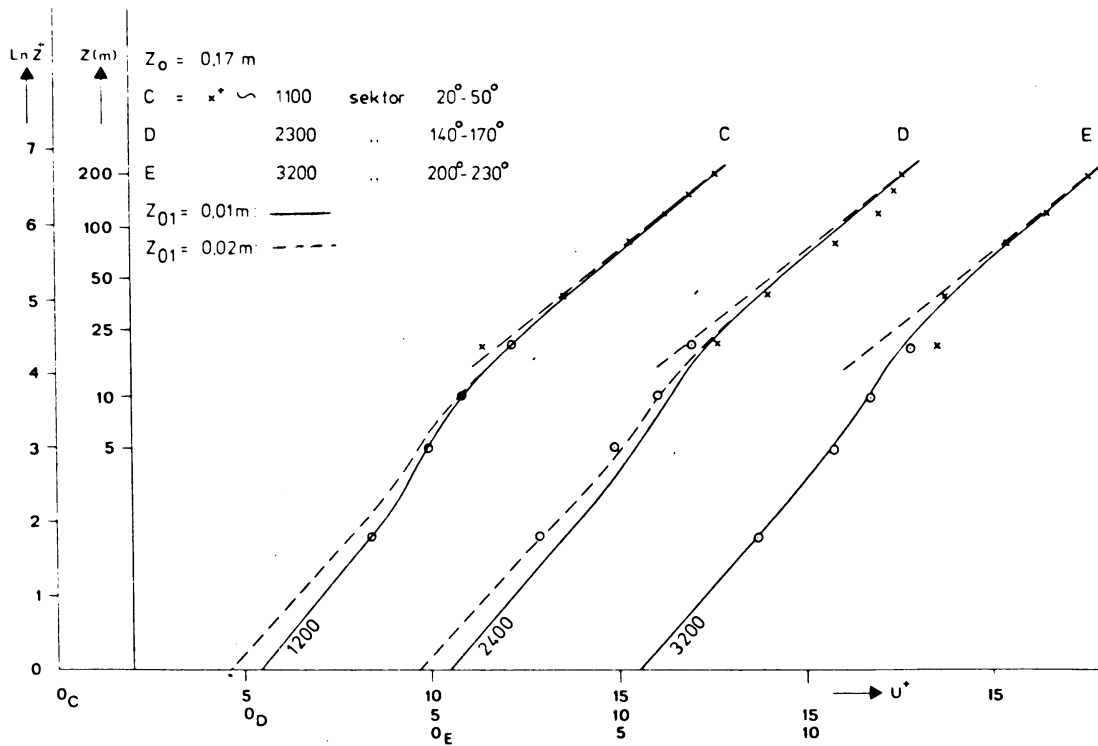


Fig. 9. Snelheidsprofielen, gemeten te Cabauw voor verschillende wind-richtingen (Let op de verschuiving van de oorsprong) De 2-maandelijke gemiddelden zijn geschaald met $z_0 = 0,17 \text{ m}$ (tabel 3, vlagmethode). Getrokken lijnen geven de modelvoorspellingen voor $z_{01}/z_0 = 0,06$, onderbroken lijnen voor $z_{01}/z_0 = 0,12$.

6.2 Vergelijking van enkele turbulentie-grootheden

Door Schotanus (1982) zijn te Cabauw experimenten verricht waarbij naast profielen van gemiddelde grootheden ook turbulentie op 3 en 20 m hoogte werd gemeten. Deze metingen hebben een groot aantal gegevens opgeleverd betreffende temperatuur en snelheidsvariantie onder verschillende omstandigheden.

Op het niveau van turbulente grootheden kan het model globaal getoetst worden aan deze metingen. Helaas zijn de metingen òf verricht onder niet-neutrale omstandigheden, òf betreffen ze de westsektor, waar geen uitgesproken ruwheidsovergang is vast te stellen. De enige windmetingen die bruikbaar lijken als vergelijkingsmateriaal zijn verricht op dag 183, met zuidwestelijke wind tussen 197 en 218°, en onder licht onstabiele omstandigheden: $-0,4 < z/L < -0,05$.

Met de vergelijkingen, die aan de hand van tabel 4 worden uitgevoerd, willen we in de eerste plaats de juistheid van het model nagaan; tevens dienen we ook nog de juiste stroomopwaartse ruwheidslengte vast te stellen.

Grootheden die zonder meer vergeleken kunnen worden zijn de verhouding van de schuifspanning op 3 m en 20 m en de flux-profiel relatie op 3 m (zie tabel 4). Omdat de modelvoorspellingen grootheden bepalen die geschaald zijn met de stroomopwaartse (globale) U_{*0} , zoals τ^+ en U^+ , zal voor de metingen deze schalingsgrootte U_{*0} bepaald moeten worden. Dit kan op een aantal verschillende manieren, waarvan de resultaten in tabel 4 zijn vermeld.

1) $U_* [\overline{uw}_{20}]$

Bij deze methode wordt U_* rechtstreeks berekend uit de gemeten schuifspanning op 20 m:

$$U_* = \frac{-\overline{uw}_{20}}{20}$$

Wil deze waarde overeenkomen met de stroomopwaartse U_{*0} , dan moet het 20 m nivo boven de interne grenslaag liggen. In dit geval is dit niet waar: $U_* [\overline{uw}_{20}]$ zal daarom lager zijn dan de werkelijke U_{*0} . Ook de schuifspanningsverdeling heeft op $U_* [\overline{uw}_{20}]$ echter invloed, zoals bij beoordeling van de verhouding $\overline{uw}_3 / \overline{uw}_{20}$ zal blijken.

Tabel 4. Vergelijking tussen de modelvoorspellingen en metingen te Cabauw. Meetdag 183 (1982); afstand tot ruwheidsovergang ca. 550 m. Toelichting in de tekst

Meetniveau	Waarnemingen, gemiddeld over meetdag 183 (1981)		modeluitkomst		
	3.55 m	22.5 m	$z_0 = 0,17$	0,25	0,50
$\frac{h_{IBL}}{uw} \text{ (m)}$			91.6	113	133
$\frac{uw}{uw^2} \text{ (m}^2/\text{s}^2)$					
$\frac{uw_3}{uw_{20}}$					
1 $U_* (uw_{20}) \text{ (m/s)}$	0.49	-0.082	0.68	0.64	0.56
2 $U_* (z_0 \text{ vlaag KKM})$	0.41				
3 $U_* (40 \text{ m wind})$	0.45		0.36	0.38	0.45
4 $U_* (\tau_{3m}/\tau^+)$			0.41	0.43	0.47
5 $U_* (\tau_{20m}/\tau^+)$			0.48	0.49	0.50
$\phi_m \text{ gemeten}$	0.62				
$\phi_m \text{ gestoord (0)}$	0.82		0.93	0.90	0.77

2) $U_*[z_0 \text{ vlaag, KKM}]$

Hier is U_* afgeleid uit de rechte die m.b.v. de kleinste kwadratenmethode (KKM) volgt uit het snelheidsprofiel tussen 3 m en 40 m en de ruwheidslengte volgens de vlaagmethode (hier: $z_0 \text{ vlaag} = 0,17 \text{ m}$, tabel 3)(cf. Nieuwstadt, 1978). Er is aangetoond dat met goede benadering geldt:

$$U_{10} = \frac{U_*[z_0 \text{ vlaag, KKM}]}{\kappa} \ln \frac{10}{z_0 \text{ vlaag}}$$

Zoals eerder is betoogd, ligt het 10 m nivo in de interne grenslaag, zodat U_{*0} , volgens deze methode, overschat wordt.

3) $U_*[40 \text{ m wind}]$

Als men aanneemt dat het 40 m nivo zich boven de interne grenslaag bevindt kan men voor de drie veronderstelde ruwheidslengten een U_* berekenen uit het logaritmisch profiel:

$$U_* = \frac{\kappa U_{40}}{\ln(40/z_0)}$$

met U_{40} de windsnelheid gemeten op 40 m hoogte. z_0 is achtereenvolgens 0,17, 0,25 en 0,50 m.

4) $U_*[\tau \text{ gemeten (3 m)}/\tau^+ \text{ berekend}]$ en

5) $U_*[\tau \text{ gemeten (20 m)}/\tau^+ \text{ berekend}]$

Het model voorspelt waarden voor de dimensieloze schuifspanning $\tau^+ = \tau/U_{*0}^2$. Indien de modelvoorspellingen en de metingen overeenkomen moet voor de schalingsgrootte U_{*0} gelden:

$$U_{*0}^2 = \frac{\tau \text{ gemeten}}{\tau^+ \text{ berekend}} = \frac{\overline{-uw}(z)}{\tau^+(z)}$$

Voor $z = 3 \text{ m}$ zowel als $z = 20 \text{ m}$ kan U_{*0} worden opgelost.

Om de juiste ruwheidslengte te vinden dienen we de resultaten 1) en 2) te vergelijken met 3), 4) en 5). Hierbij moeten echter de volgende kanttekeningen m.b.t. de betrouwbaarheid worden gemaakt:

- a) T.g.v. de gebleken grote verschillen in gemeten schuifspanning op 3 m en 20 m (zie tabel 4) is de vergelijkbaarheid van de resultaten 1), 4) en 5) aanvechtbaar.

b) Zoals reeds vermeld zal methode 2 met zekerheid te hoge resultaten opleveren.

Methode 3 lijkt ons de meest betrouwbare resultaten te geven: vergelijken we deze met de uitkomsten van de methoden 1) en 2), met inachtneming van bovenstaande kanttekeningen, dan lijkt een stroomopwaartse ruweheidslengte tussen de 0,25 en 0,50 m het best te voldoen.

In vergelijking tot de modelvoorspellingen is de gemeten ϕ_m te laag. Nu blijkt zelfs geringe instabiliteit op ϕ_m al een aanzienlijke invloed te hebben. Daarom is de gemeten flux-profiel relatie op 3 m (ϕ_m gemeten op 20 m heeft i.v.m. de meetnauwkeurigheid nauwelijks betekenis, Schotanus 1982) gecorrigeerd aan de hand van de flux-profiel relaties volgens Businger (1973, Schotanus 1982):

$$\phi_m(z/L) = (1 - 15 z/L)^{-1/4} \text{ voor } z/L < 0 \quad (41)$$

Deze relatie geldt voor de homogene oppervlaktelaag. Zoals blijkt uit de fig.10 is ϕ_m in het gestoorde geval kleiner.

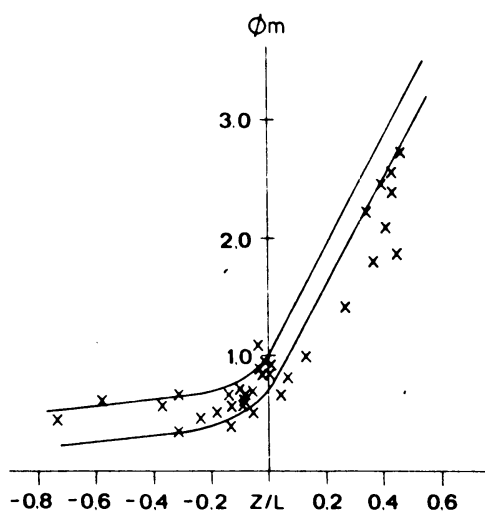


Fig. 10. ϕ_m als functie van z/L naar metingen door Schotanus (1982). De bovenste kromme geeft de relatie van Businger ongewijzigd weer, de onderste geeft deze relatie verschoven over $-0,32$.

We proberen nu uit de gemeten ϕ_m gestoord(z/L) een ϕ_m gestoord (0) van het neutrale geval te vinden. Daartoe nemen we aan dat in het gestoorde geval de functie (41) vermenigvuldigd kan worden met een konstante faktor. Deze faktor moet, wil de nieuwe functie óók gelden voor $z/L = 0$, ϕ_m gestoord (0) zijn:

$$\phi_m \text{ gestoord } (z/L) = \phi_m \text{ gestoord } (0) \cdot (1-15 z/L)^{\frac{1}{4}} \quad (42)$$

Als we nu de hieruit bepaalde ϕ_m gestoord (0) vergelijken met de modelvoorspellingen blijkt wederom de beste overeenkomst van een ruweidslengte tussen 0,25 m en 0,50 m.

De verhouding van de schuifspanningen $-\overline{uw}_{3m} / -\overline{uw}_{20m}$ is kleiner dan bij ieder van de modelvoorspellingen. Dit suggereert een globale ruweid groter dan 0,5 m.

Een mogelijke verklaring hiervoor zou kunnen zijn dat voor de betreffende zuidwestelijke sektor de inhomogeniteit eerder de vorm heeft van een enkele obstakelrij, een rij bomen van ca. 15 m hoogte, terwijl de boomgaarden van ca. 7 m hoogte in oostelijke richting meer wijzen op een ruweidsovergang. Beljaars (1982) toont aan dat na een obstakelrij tot ca. 33 maal de obstakelhoogte (hier ca. 500 m) het schuifspanningsprofiel aan de bovenzijde van de overgangslaag een maximum vertoont, veroorzaakt door het zog van de obstakelrij. Hierdoor worden de verschillen in het schuifspanningsprofiel groter.

Een zoggebied, een gebied achter een obstakel waar impuls wordt vernietigd ten gunste van turbulente schuifspanning, is in het model afwezig. Het opwekken van turbulentie en vernietiging van impuls wordt in het model uitsluitend veroorzaakt gedacht door elementen aan het oppervlak met lengteschalen in de orde van z_0 , zodat de stromingspatronen en zoggebieden rondom deze elementen niet afzonderlijk herkenbaar zijn boven, bijvoorbeeld, $5 \times z_0$.

Het is duidelijk dat oppervlakken met ruweidselementen veel groter dan z_0 , zoals in boomgaarden, altijd een zoggebied ontstaat, dus ook te Cabauw voor de oostelijke richting. Dit kan verklaren waarom de ruweidslengte volgens de vlagmethode ondanks gebruik van de lokale 10 m wind toch betrouwbaar zijn.

6.3. De afwijking in de flux-profiel relatie

In fig. 10 is ϕ_m als functie van z/L uitgezet:

$$\phi_m = \frac{\kappa z}{\sqrt{\tau}} \frac{\partial U}{\partial z} \quad (16)$$

De onderste kromme geeft de relatie van Businger (1973) bij een verschuiving over -0,32. Dit impliceert dat voor de gestoorde windrichtingen $\phi_m(0) = 0,68$. Met een gemiddelde afstand van 300 m tot de ruwheidsovergang in oostelijke richting en een lokale ruwheidshoogte $z_{01} = 0,01$ m geven modelvoorspellingen $\phi_m = 0,65$ en $0,63$ voor resp. $z_0 = 0,5$ en $0,25$ m.

Men kan de flux-profielrelatie ook schrijven met de "eddy-viscosity" K_m (4.1)

$$\phi_m = \frac{K_m}{\tau} \frac{\partial U}{\partial z} \quad (43)$$

waarin ϕ_m wegens de definitie van K_m gelijk moet zijn aan 1.

Beljaars (1982) suggereert dat de eddy-viscosity een globale grootheid is in de interne grenslaag. Dit betekent dat K_m ook in de interne grenslaag schaalt met U_{*0} :

$$K_m = \kappa U_{*0} z \quad (44)$$

Uit metingen blijkt dat $\phi_m = 1$ indien ϕ_m geschreven wordt als: (Schotanus, 1982)

$$\phi_m = C \cdot \frac{\kappa z}{\sqrt{\tau}} \frac{\partial U}{\partial z} \text{ met } C_{\text{gemeten}} = \frac{\overline{-uw}_{20}}{\overline{-uw}_3}$$

Volgens het voorgaande moet ook gelden

$$C = \frac{K_m}{\kappa z} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \quad (45)$$

In fig. 11 is te zien dat K , berekend als $\tau/\frac{\partial U}{\partial z}$, groter wordt dan $U_{*0} \cdot \kappa z$ in het bovenste deel van de overgangslaag, zodat de modelvoorspelling strijdig is met (44). Er is gekonstateerd dat $\frac{\overline{-uw}_{20}}{\overline{-uw}_3} > U_{*0 \text{ model}}/U_{*1 \text{ model}}$ (vergelijk tabel 4) waaruit eveneens volgt dat:

$$C > \frac{U_{*0 \text{ model}}}{\sqrt{\tau_{\text{model}}}} \rightarrow K_m > U_{*0 \text{ model}} \kappa z.$$

Schotanus (1982) leidt uit (43) en (44) af dat voor de afwijkende flux-profiel relatie geschreven kan worden:

$$\phi_m \text{ verstoord} = \frac{\sqrt{\tau}}{U_{*0}}$$

Omdat ϕ_m in het onderste deel van de overgangslaag terugkeert naar de evenwichtswaarde 1, is het wellicht zinvoller om het minimum van ϕ_m in een doorsnede te relateren aan de verhouding van U_* :

$$\phi_m \text{ min}(x) = C \frac{U_{*1}}{U_{*0}} .$$

C blijkt afhankelijk van x en m :

voor $m = -3,2$ varieert C tussen 0,9 en 1

voor $m = -6,4$ varieert C tussen 0,8 en 0,9.

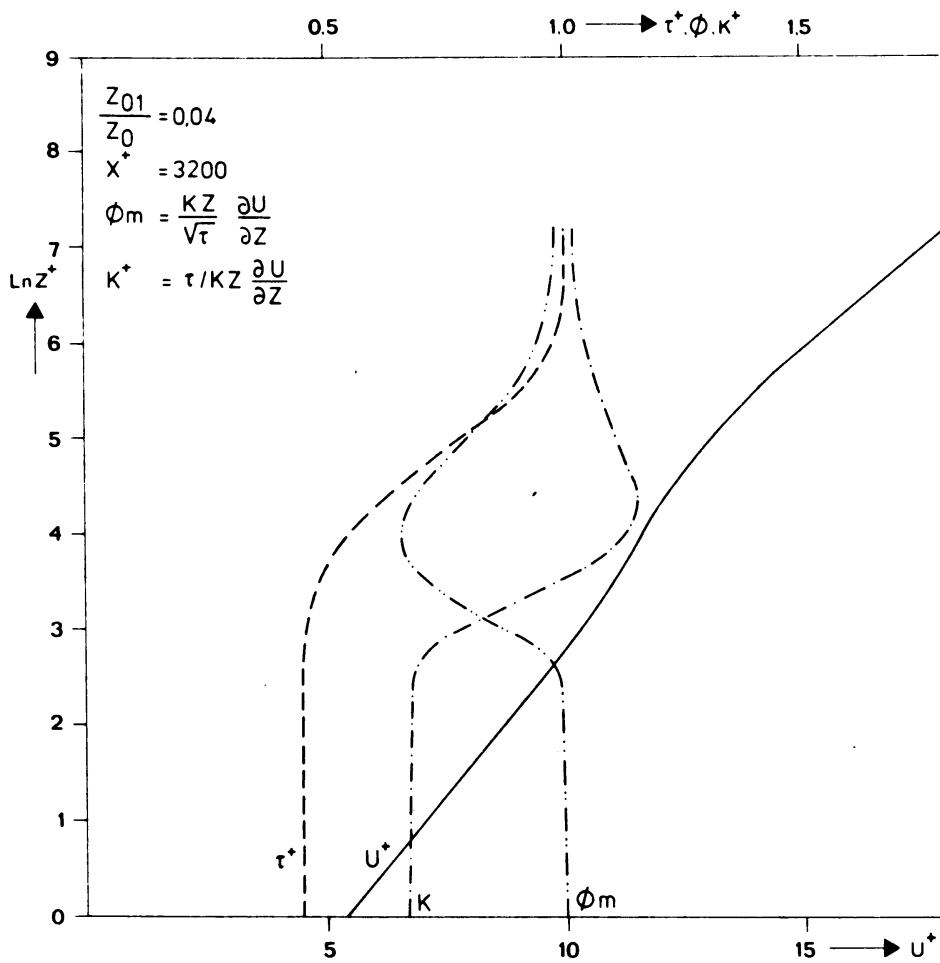


Fig. 11. Profielen van \bar{U}^+ , τ^+ , K en ϕ_m voor $x^+ = 3200$, $z_{01}^+ = 0,04$.

7. Het gedrag van de interne grenslaag

7.1. De flux-profiel relatie

In fig. 11 zijn in een doorsnede $U(z)$, $\tau(z)$, $K(z)$ en $\phi_m(z)$ getekend. Hieruit blijkt duidelijk de overgangslaag, de laag waarin de flux-profiel relaties niet geldig zijn.

Naar analogie van Rao e.a. (1974) is ϕ_m en $(\tau-1)/(U_{*1}^2-1)$ uitgezet tegen de fraktie van de grenslaaghoogte z/h_{IBL} (fig 12 t/m 17). Duidelijk blijkt dat op deze wijze ϕ_m en τ in het bovenste deel schalen met h_{IBL} . Met toenemende x verandert ϕ_m in het onderste deel. Dit leidt tot het idee dat ϕ_m ook schaalt met de evenwichtslaaghoogte h_{EL} , terwijl h_{EL} sneller toeneemt dan h_{IBL} , zie fig. 18 en 19.

In fig. 20 is de interne grenslaaghoogte h_{IBL} en de evenwichtslaag h_{EL} uitgezet. De interne grenslaaghoogte is gedefinieerd als de hoogte z waar $\tau(z)-\tau_{01} = C \tau_{01}$ met C 1% resp. 5%. Ook andere definities zijn bruikbaar (Peterson 1969, Rao e.a. 1974). Ter bepaling van de evenwichtslaaghoogte wordt de hoogte z gebruikt waar $\phi_m(z)-1 = C$ met wederom C resp. 1% en 5%.

Het blijkt nu dat $h_{IBL} = x^{0,71}$ wat redelijk in overeenstemming is met het model van Rao e.a. (1974). Bradley (1968) vindt $h_{IBL} = x^{0,80}$. Voor de evenwichtslaaghoogte geldt $h_{EL} = x^{0,91}$ met een gemiddelde hoogte/afstand verhouding van ca. 1/250 (Bradley vindt 1/200).

In het algemeen geldt in de interne grenslaag:

$$\phi_m = f\left(\frac{z_{01}}{z_0}, \frac{z}{z_0}, \frac{x}{z_0}\right) \quad (46)$$

Het lijkt mogelijk om met goede benadering te stellen (fig. 21):

$$\phi_m = f\left(\left(\frac{z_{01}}{z_0}\right)^2, \left(\frac{x}{z_0}\right)^{0,91}, \left(\frac{x}{z_0}\right)^{0,71}\right) \quad (47)$$

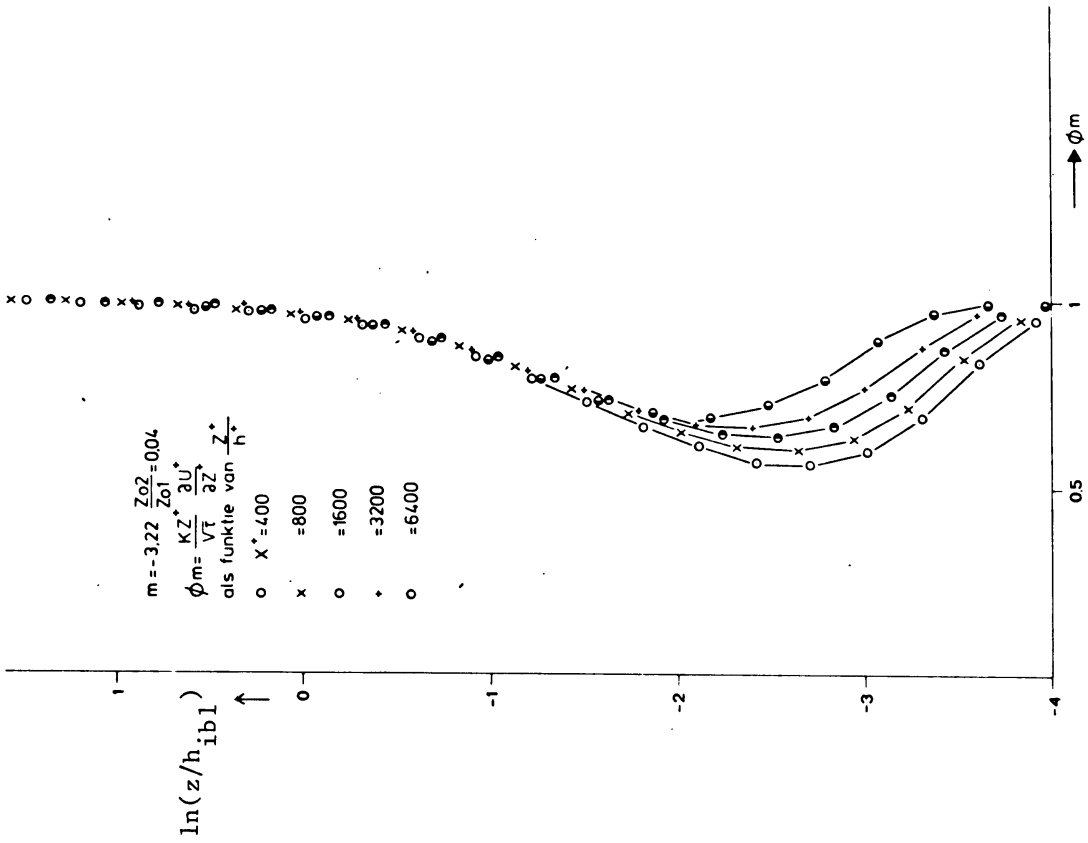


Fig. 13. ϕ_m als functie z^+/h_{iBL}^+ voor $z_{01}^+ = 0,04$.

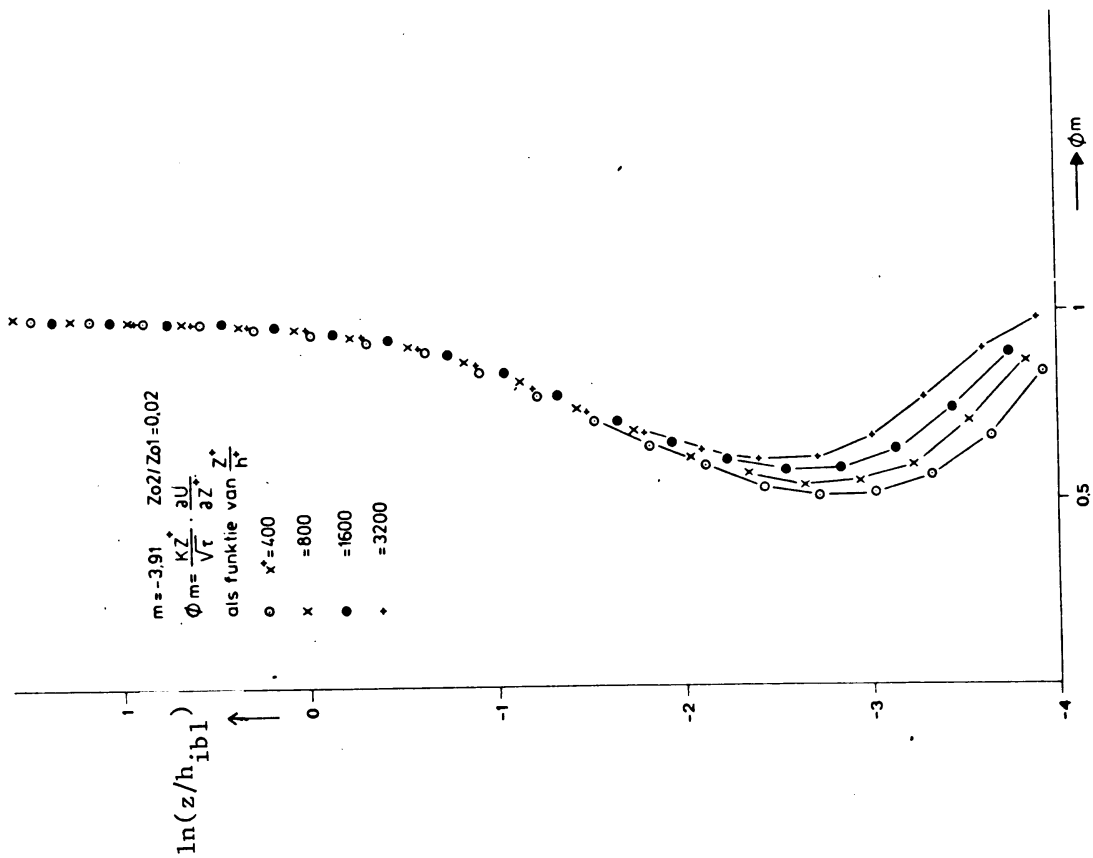


Fig. 12. ϕ_m als functie van z^+/h_{iBL}^+ voor $z_{01}^+ = 0,02$.

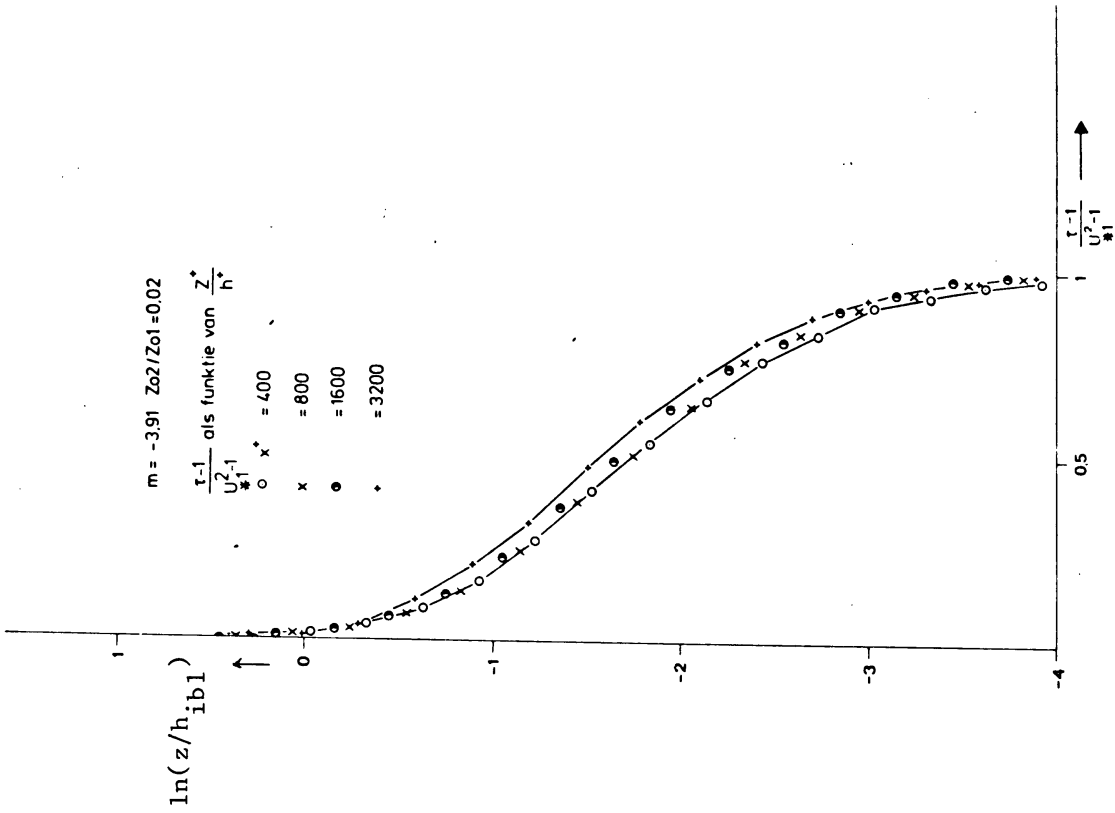


Fig. 15. $(\tau-1)/(U_{*1}^2-1)$ als functie van z^+/h_{IBL}^+ voor $z_{01}^+ = 0,02$.

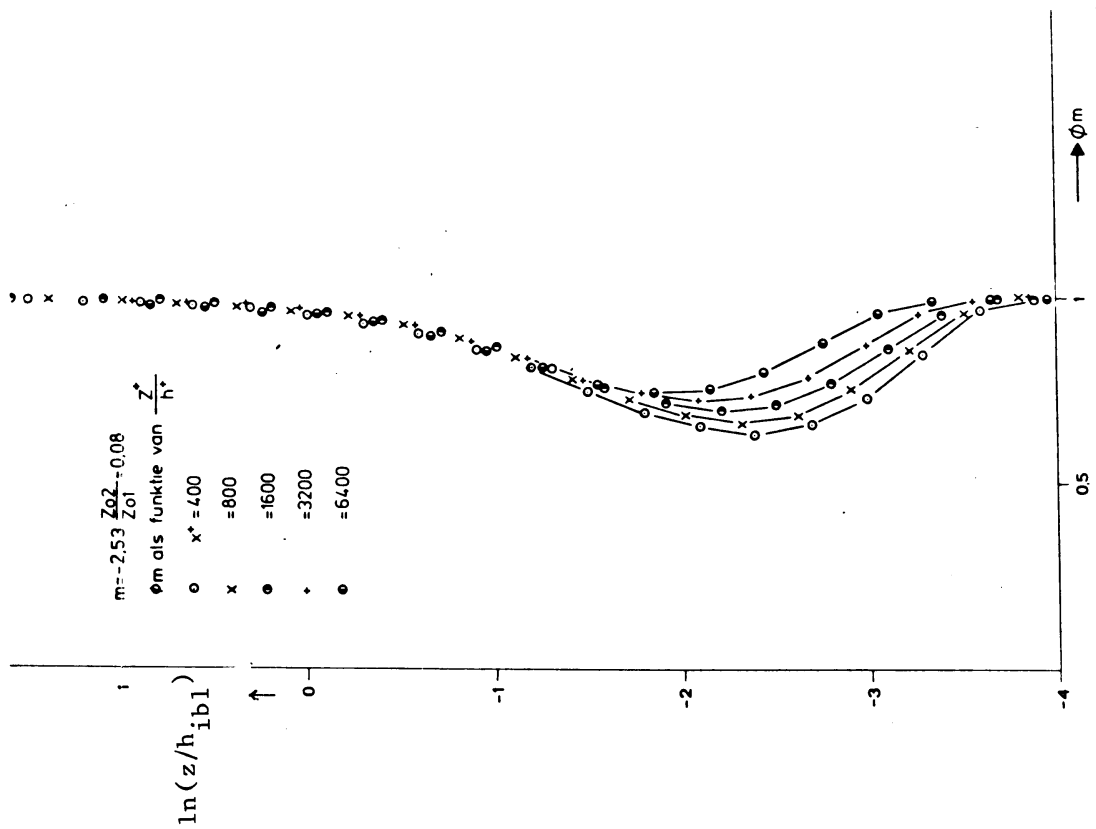
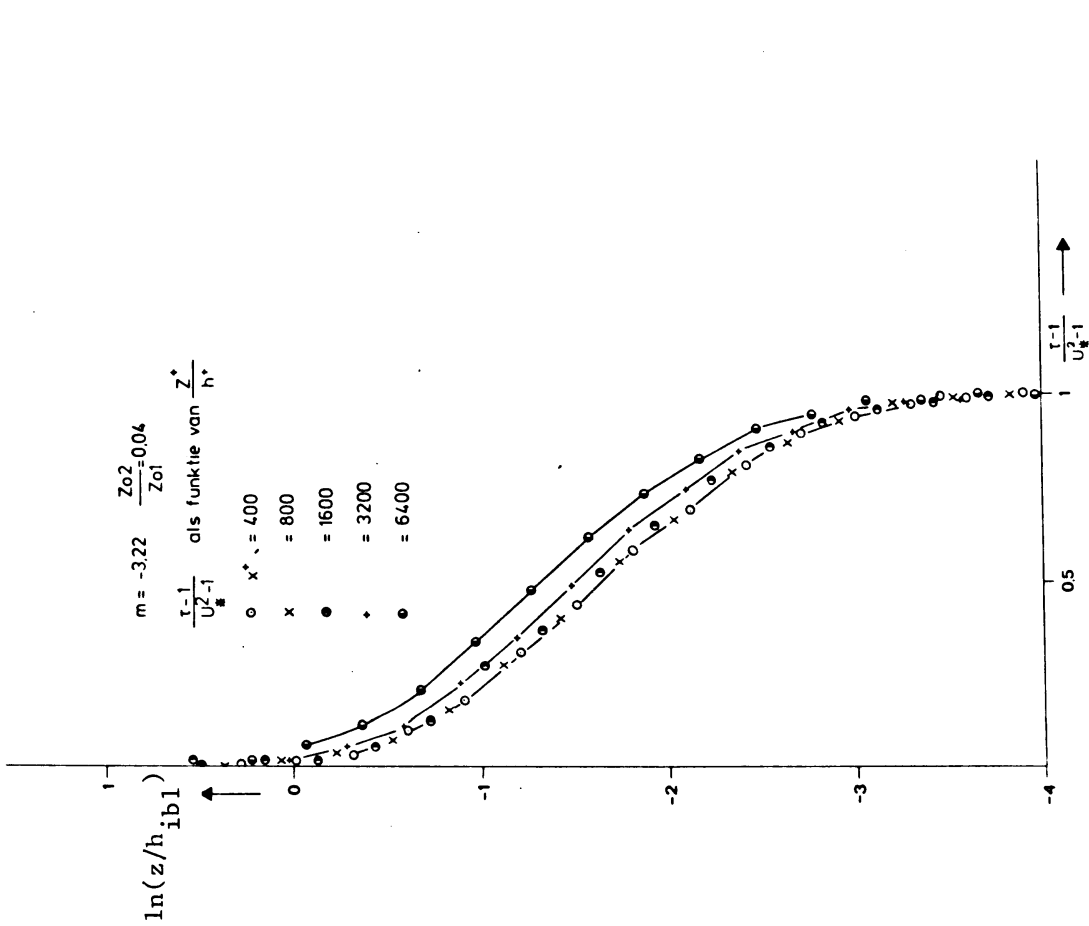
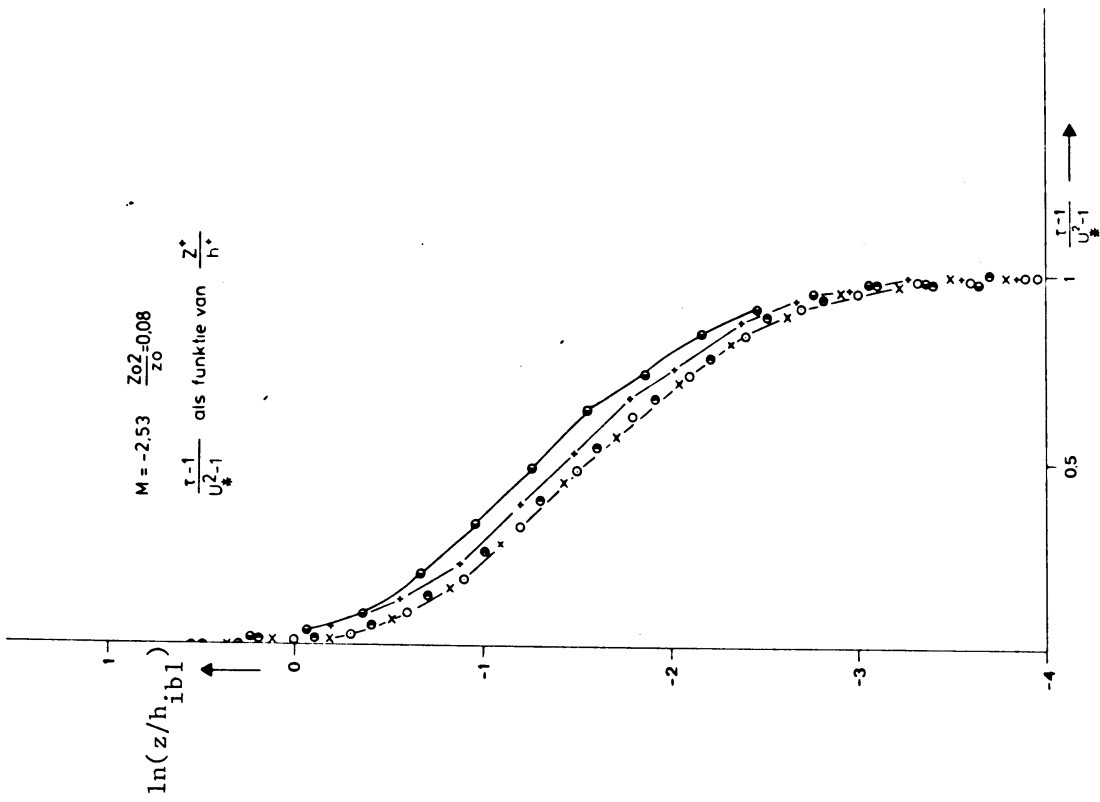


Fig. 14. ϕ_m als functie van z^+/h_{IBL}^+ voor $z_{01}^+ = 0,08$.



7. $(\tau-1)/(U_*^2-1)$ als functie van z^+/h_{IBL}^+ voor $z_{o1}^+ = 0,08$.

Fig. 16. $(\tau-1)(U_*^2-1)$ als functie van z^+/h_{IBL}^+ voor $z_{o1}^+ = 0,04$.

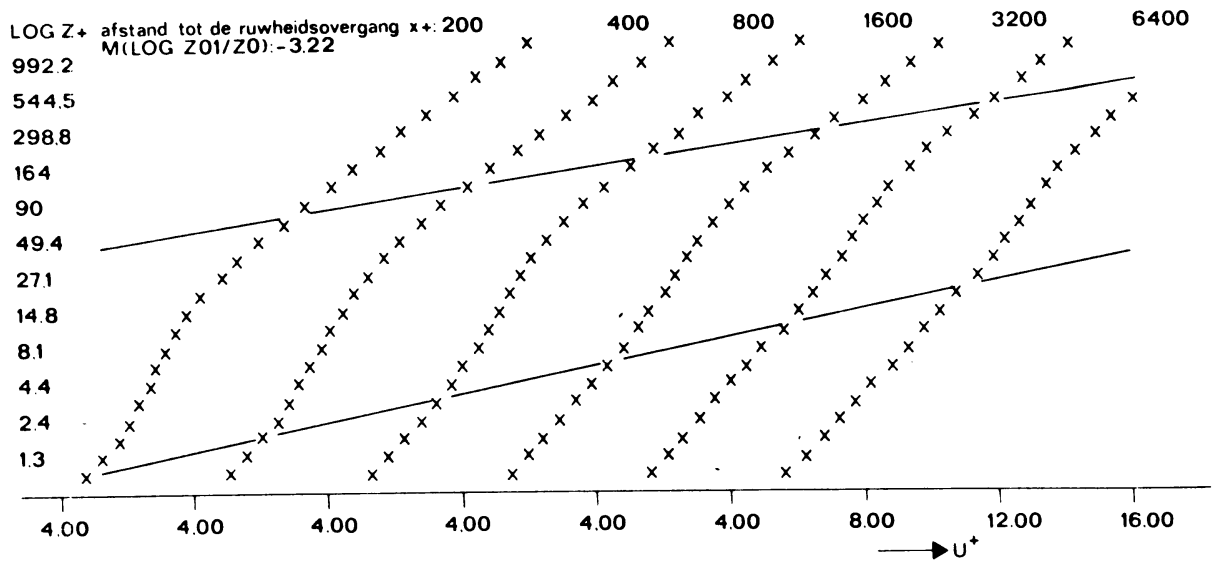


Fig. 18. Groei van de interne grenslaag en de evenwichtslaag zichtbaar aan de hand van opeenvolgende snelheidsprofielen. $z_{01}/z_0 + 0.04$.

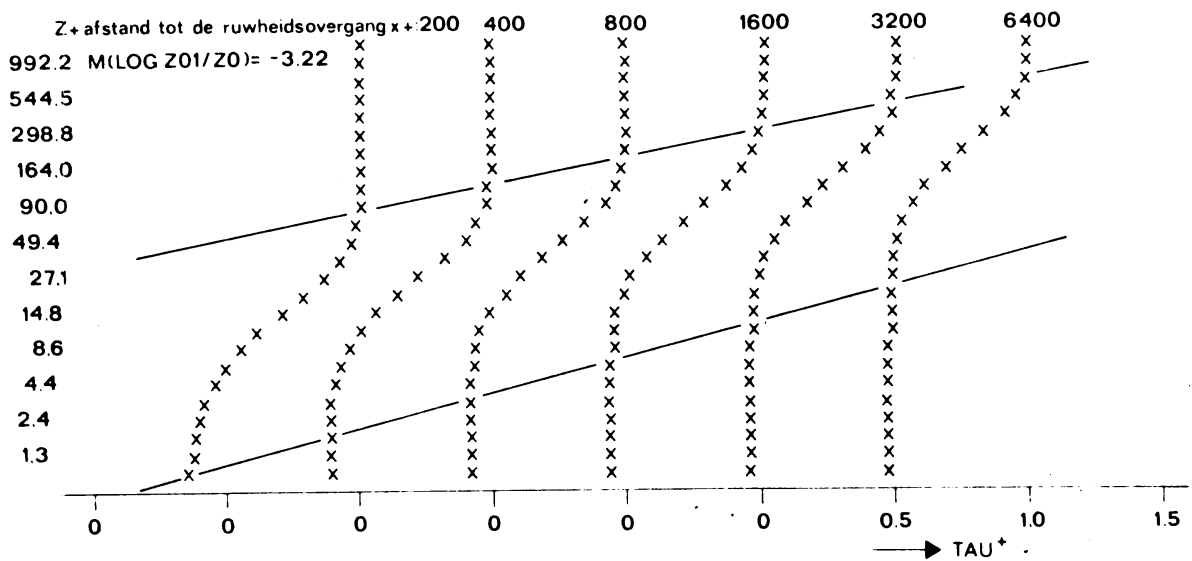


Fig. 19. Groei van de interne grenslaag en de evenwichtslaag zichtbaar aan de hand van opeenvolgende schuifspanningsprofielen. $z_{01}/z_0 = 0,04$.

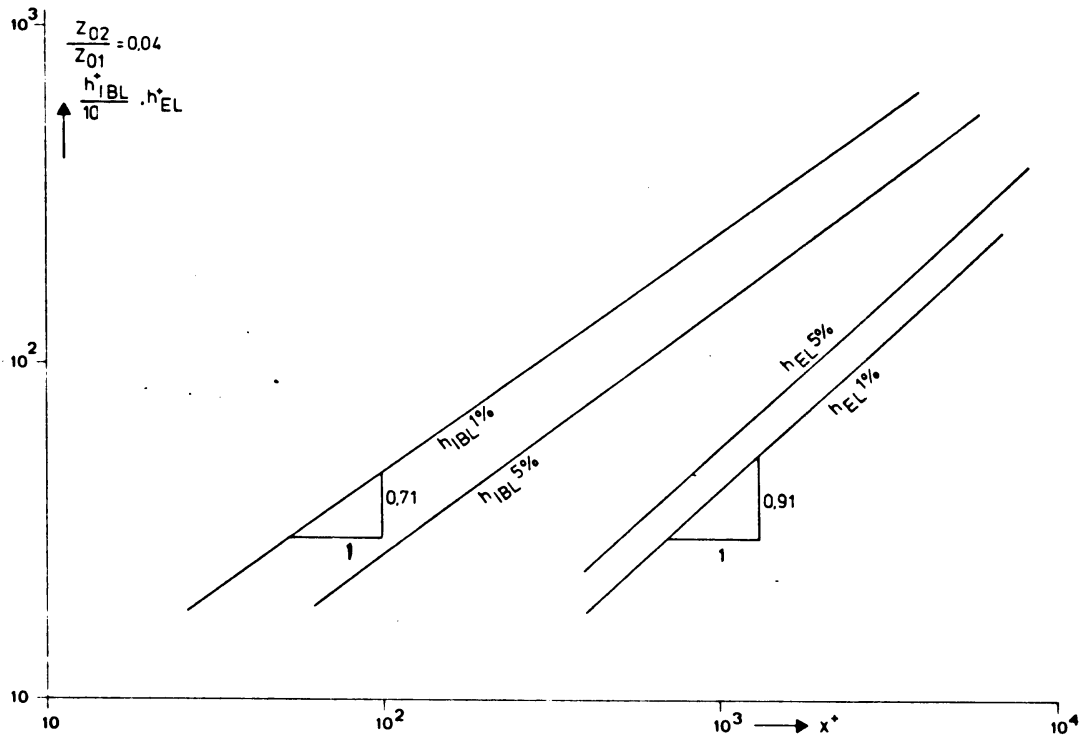


Fig. 20. Groei van de interne grenslaag en de evenwichtslaag, met 2 criteria n.l. $C = 1\%$ en $C = 5\%$. Voor definities van h_{IBL} en h_{EL} ; zie tekst.

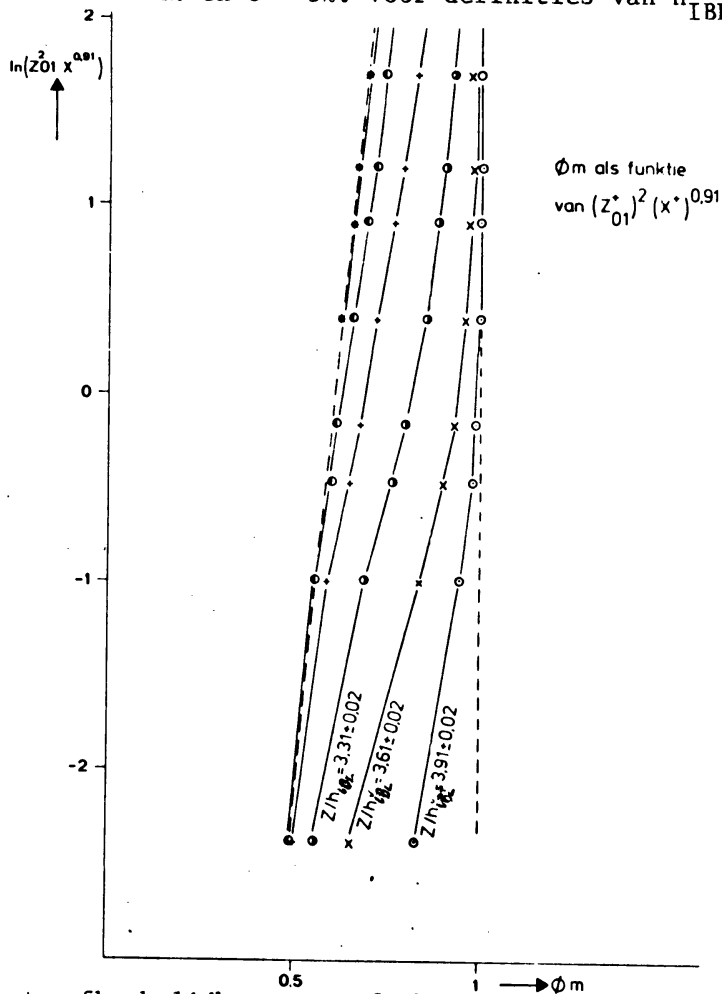


Fig. 21. ϕ_m afhankelijk van een functie van de schalingsparameters z_{01}/z_0 en h_{EL} : $\phi_m = f(z_{01}^{+2} \cdot x^{0.91})$ met z^+/h_{IBL}^+ als parameters, resp.: 3,91 (o); 3,61 (x); 3,31 (.) ; 3,01 (+); 2,71 (.), en 2.41 (*).

7.2. Globale versus lokale ruwheidslengte

In het model worden twee ruwheidshoogten gebruikt: één stroomopwaarts van de ruwheidsovergang en één stroomafwaarts. Hierbij is de stroming stroomopwaarts onverstoord; de profielen vertonen geen knik, de ruwheidshoogte is konstant voor de totale hoogte van de oppervlaktelaag.

In de atmosferische grenslaag zal zo'n situatie zich zelden voordoen. Obstakels en ruwheidsveranderingen zijn vele kilometers stroomafwaarts nog duidelijk in de profielen waarneembaar. Een lokale ruwheidshoogte geldt slechts voor een hoogte van $1/250$ van de afstand tot de laatste ruwheidsovergang (7.1).

Wat er gebeurt wanneer de stroming van een glad naar een ruw en vervolgens terug naar een glad oppervlak overgaat, is te zien in fig. 22 t/m 24. Voor het stroomopwaartse gladde oppervlak geldt:

$z = 0,01\text{m}$ $\tau = \tau_0$ en $U = \frac{U_{*0}}{\kappa z} \ln z/z_0$.

Op $x = 0$ verandert de ruwheid naar $0,25\text{ m}$, τ nadert na een overshoot de waarde $\tau_1 > \tau_0$. Er ontstaat een interne grenslaag en een evenwichtslaag en de verstoring plant zich stroomafwaarts in de hoogte voort.

Op $x/z_0 = 1150$ keert de ruwheidshoogte terug tot $0,01\text{ m}$. De "tweede" interne grenslaag groeit zeer snel; binnen $x = 50 z_0$ door de evenwichtslaag tot aan de ondergrens van de eerste overgangslaag. De interne grenslaag groeit langzamer dan de evenwichtslaag, daardoor neemt de maximale waarde van τ in een verticale doorsnede af, zodat de storing in het τ -profiel qua hoogte en grootte afneemt.

Het is nu in te zien dat op een bepaalde hoogte z_b (hier bijv. $\ln z/z_0 = 5$, d.w.z. $z_b \approx 40\text{ m}$) de verandering in τ nooit groter wordt dan 25%. Wanneer we nu een groot aantal van dit soort overgangen op onderling ongeveer gelijke afstand achter elkaar passeren, zullen telkens gedempte storingen met een afwijking $< 25\%$ tot boven z_b doordringen. Boven deze "menghoogte" z_b zal een vrijwel konstant schuifspanningsprofiel ontstaan, waarin de afzonderlijke bijdragen van de ruwheidsovergangen en obstakels niet meer zijn te onderscheiden (Wieringa, 1976). Dit profiel geeft ons een globale schuifspanningssnelheid U_* en een globale ruwheidshoogte z_0 , konstant over een groot gebied in vergelijking met de grootte van de afzonderlijke percelen (in Cabauw in de orde van 10 km). Onder de menghoogte z_b verandert het profiel met de lokale ruwheid, met dien verstande dat een evenwichtslaag na een homogeen terrein van ca. 1 km slechts een hoogte van enkele meters bereikt.

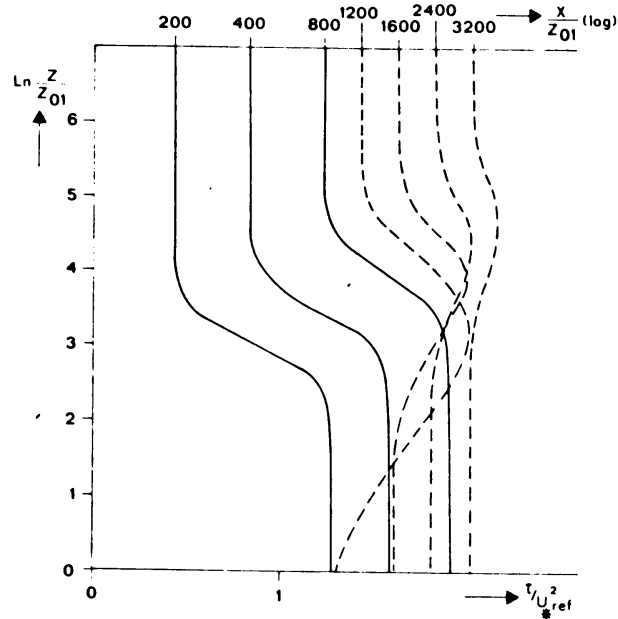


Fig. 22. Schuifspanningsprofielen na een glad-ruw overgang (getrokken lijnen) en daaropvolgende terugkeer naar een glad oppervlak (onderbroken lijnen). (Let op de verschuiving in de oorsprong). De oorsprong van x/z_{01} bevindt zich op de plaats van de glad-ruw overgang; de ruw-glad overgang ligt bij $z/z_{01} = 1150$. $z_0 = z_{02} = z_{01}/25$.

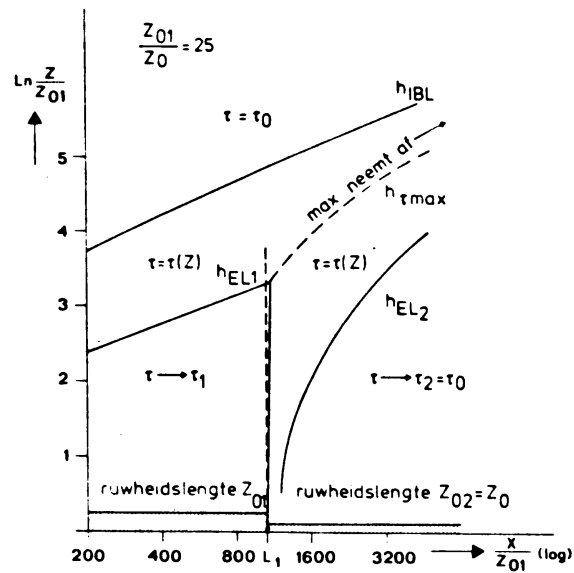


Fig. 23. Groei van de interne grenslaag en twee evenwichtslagen in de situatie van fig. 22.

z_b is afhankelijk van de onderlinge afstanden tussen de ruwheidsovergangen en obstakels en de grootte van de overgangen: Wieringa (1976) schat z_b op 260 m voor een gemiddeld terrein. Het gebied tussen de ca. 4 en 60 m vormt een overgangsgebied waarin zowel de globale als de elkaar opvolgende lokale ruwheid een rol speelt.

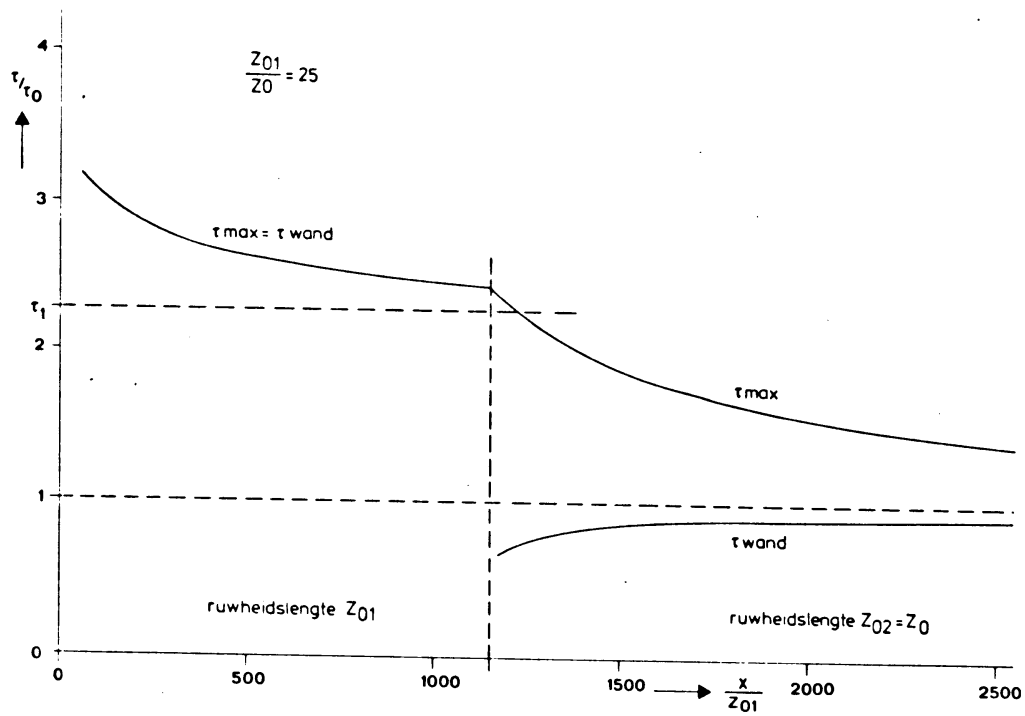


Fig. 24. Verloop van de wandschuifspanning en maximale schuifspanning in de situatie van fig. 22.

8. Konklusies

Het beschreven rekenmodel voor de stroming na de overgang van een ruw naar een glad oppervlak, geeft uitkomsten die in overeenstemming zijn met gemeten snelheidsprofielen. De berekende afwijkingen in de flux-profiel relatie komen ruwweg overeen met experimenten te Cabauw; de schuifspanningsverdeling is minder consistent met de metingen, mogelijk door het ontbreken van het effect van losstaande obstakels in het model. Verdere verifikatie, ook van de termen in de energie vergelijking, is raadzaam.

In vergelijking met een "sophisticated" 2^e orde model zoals gebruikt door Roa e.a. (1974), geeft dit model vergelijkbare resultaten. Zolang geen experimentele grond aanwezig is, voldoet de "evenwichts" lengteschaal $l_m = \kappa z$ ook in het overgangsgebied.

Zinvol zou uitbreiding van het model zijn voor niet neutrale situaties, eventueel het introduceren de invloed van losstaande obstakels in het model.

Het model bevestigt experimenten en eerdere modelvoorspellingen, dat de interne grenslaag over grote afstanden een rol speelt en dat de evenwichtslaag hiervan slechts een klein deel uitmaakt: in ca. 90 à 95% van de interne grenslaag is de flux-profiel relatie ongelijk aan 1 en afhankelijk van de interne grenslaaghoogte, de evenwichtslaaghoogte en de grootte van de ruwheidsovergang.

9. Nawoord

Tijdens de studie werktuigbouwkunde aan de TH Delft is in de doctoraal fase een stageperiode, het z.g. Praktisch Werken, vereist van ca. 10 à 12 weken. Het bleek mogelijk deze periode door te brengen bij het KNMI, om modelonderzoek te verrichten aan het "stap-in-ruwheid" probleem. Dit verslag bevat de resultaten van enkele werkzaamheden op dit terrein

Behalve gedetailleerde kennis omtrent het onderwerp, heeft deze periode mij vele positieve ervaringen opgeleverd dankzij de vriendschappelijke contacten met diverse medewerkers van de afdeling Fysische Meteorologie. Met name bedank ik Anton Beljaars voor zijn enthousiaste begeleiding.

Referenties

- Antonia, R.A., Luxton, R.E., 1972: The response of a turbulent boundary layer to a step change in surface roughness. Part 2. Rough-to-smooth. *J. Fluid Mech.*, 53, 737-757.
- Beljaars, A.C.M., 1982: The derivation of fluxes from profiles in perturbed areas. *Boundary Layer Meteorol.*, 24, (1982) pp 35-55.
- Bradley, E.F., 1968: A micrometeorological study of velocity profiles and surface drag in the region modified by a change in surface roughness. *Quart. J. R. Met. Soc.*, 94, 361-379.
- Bradshaw, P. Ferriss, D.H. Atwell, N.P., 1967: Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation. *J. Fluid Mech.*, 28, 593-616.
- Busch, N.E., 1973: On the mechanics of atmospheric turbulence. Workshop on Micro-meteorology (D.A. Haugen, ed), Am. Met. Soc., Boston, Mass. pp 1-65.
- Businger, J.A., 1973: Turbulent transfer in the atmospheric surface layer. Workshop on Micro-meteorology (D.A. Haugen, ed), Am. Met. Soc., Boston, Mass., 00 67-98.
- East, L.E., Sawyer, W.G., 1980: An investigation of the structure of equilibrium turbulent boundary layers. *Turbulent boundary layers, experiments, theory and modelling. AGARD Conference Proc. No. 271*, pp. 6:1-6:19.
- Hinze, J.O., 1975: *Turbulence*. McGraw Hill, New York.
- Nieuwstadt, F.T.M., 1978: The computation of the friction velocity u_* and the temperature scale T_* from temperature and wind velocity profiles by least square methods. *Boundary Layer Meteorol.*, 14, 235-246.
- Peterson, E.W., 1969: Modification of mean flow and turbulent energy by a change in surface roughness under conditions of neutral stability. *Quart. J. R. Met. Soc.*, 95, 561-575.
- " ,1972: Relative importance of terms in the turbulent-energy and momentum equations as applied to the problem of a surface roughness change. *J. Atmos. Sci.*, 29, 1470-11476.
- Rao, K.S., Wyngaard, J.C., Caté, O.R., 1974: The structure of the two-dimensional internal boundary layer over a sudden change of surface roughness. *J. Atmos. Sci.*, 31, 738-746.

- Richtmyer, R.D., Morton, K.W., 1967: Difference methodes for initial value problems. Interscience Publishers (John Wiley & Sons).
- Schotanus, P., 1982: Turbulente fluxen in homogene omstandigheden. KNMI Scientific Report 82-3.
- Tennekes, H., Lumley, J.L., 1972: A first course in turbulence. M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 300 pp.
- Wieringa, J., 1976: An objective exposure correction method for average wind speeds measured at a sheltered location. Quart. J. R. Met. Soc., 102, 241-253.
- " ,1980: Representativeness of wind observations at airports. Bull. Am. Meteor. soc., 61, 962-971.
- " ,1982: Estimation of mesocale and local-scale roughness for atmospheric transport modeling. Air pollution modeling and its application, Plenum, New York, USA, pp. 279-295.
- Wyngaard, J.C., 1973: On surface layer turbulence. Workshop on Micro-meteorology (D.A. Haugen, ed.), Am. Met. Soc., Boston, Mass., pp. 101-148.

Appendix A

Het is aan te tonen dat de partiële differentiaal vergelijking (PDV)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = a \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{met } a > 0$$

in de diskretisatie

$$\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x} = a \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta y} \quad (\text{upwind differencing})$$

stabiel is als geldt:

$$\|a \frac{\Delta x}{\Delta y}\| < 1 \quad (\text{a.1})$$

Ook is te bewijzen dat de PDV:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = a \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

met als diskretisatie

$$\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x} = a \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

stabiel is als

$$\|a \frac{\Delta x}{(\Delta y)^2}\| < \frac{1}{2} \quad (\text{a.2})$$

Deze stellingen zijn af te leiden door bij een oplossing U_0 een harmonische verstoring op te tellen en hiervan de amplitude versterking in één voorwaartse stap te berekenen:

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= U_0 + A e^{idy} \\ U_{i+1,j} &= U_0 + B e^{idy} \end{aligned} \quad (\text{a.3})$$

met als voorwaarde $\|A/B\| < 1$ voor stabiliteit (Richtmeijer en Morton, 1967).

Deze analyse kan eenvoudig op het eerste model, waarbij gebruik gemaakt is van de Boussinesq-hypothese, worden toegepast (6.2). Voor dit model luidt

de discretisatie voor $W_{i,j} < 0$ (vergl. (26)):

$$\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x} = \frac{e^{-\eta}}{U_{i,j}} \left[-W_{i,j} \frac{(U_{i,j+1} - U_{i,j})}{\Delta \eta} + \frac{\kappa^2 \left(\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta \eta} - \frac{U_{i,j} - U_{i,j+1}}{\Delta \eta} \right)}{\Delta \eta} \right] \quad (\text{a.4})$$

Na substitutie van (a.3) en $W_{i,j} = W_{o,j}$ in dit schema en linearisatie waarbij termen van de orde A^2 en kleiner worden verwaarloosd kan de ongestoorde oplossing van (a.4) worden afgetrokken. Er blijft dan over, met $U_{i,j}$ vervangen door $\frac{U_*}{\kappa} \eta_j$ en gedeeld door $A e^{id\eta_j}$

$$B/A = 1 + e^{-\eta} \frac{\kappa \eta_j}{U_* \eta} \left[-W_{o,j} \frac{e^{id\Delta\eta_j - 1}}{\Delta \eta} + 4 \frac{\kappa U_*}{(\Delta \eta)^2} (\cos \alpha \Delta \eta - 1) + \frac{W_{o,j}}{\frac{\eta}{n}} \right] \quad \begin{matrix} (1) & (2) & (3) \end{matrix}$$

Alleen dicht bij het oppervlak ($\eta \sim \delta \eta$) is term 3 van dezelfde orde als term 1. Met $W_{o,j} \sim -1$ (Een waarde die slechts tot in de 5^e à 10^e rekenstap na de overgang wordt bereikt) en $\Delta \eta = 0,3$ is term 2 een faktor 5 groter dan term 1. We nemen daarom aan dat de stabiliteit door term 2 bepaald wordt. Er moet dan gelden:

$$-1 < 1 + 4 e^{-\eta} \kappa^2 \frac{\Delta x}{\eta_j (\Delta \eta)^2} (\cos \alpha \Delta \eta - 1) < 1$$

Hieraan wordt voldaan als

$$8 e^{-\eta} \kappa^2 \frac{\Delta x}{\eta_j (\Delta \eta)^2} < 2 \rightarrow \text{ofwel:}$$

$$\| a \frac{\Delta x}{(\Delta \eta)^2} \| < \frac{1}{2} \text{ met } a = 2 e^{-\eta} \frac{\kappa^2}{\eta_j}$$

$$\rightarrow \Delta z < \frac{e^{\eta}}{3\kappa^2} \eta_j (\Delta \eta)^2 \quad (\text{a.5})$$

De stabiliteit blijkt afhankelijk te zijn van de η -koordinaat, zie tabel al.

Het definitieve model is gebaseerd op de twee vergelijking (20) en (24):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \underbrace{-\frac{W}{U} e^{-\eta} \frac{\partial U}{\partial \eta}}_{\text{konvektie 1}} + \underbrace{\frac{1}{U} e^{-\eta} \frac{\partial \tau}{\partial \eta}}_{\text{afschuifspanning 2}} \quad (\text{a.6})$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \underbrace{-\frac{W}{U} e^{-\eta} \frac{\partial \tau}{\partial \eta}}_{\text{konvektie 3}} + \underbrace{\frac{1}{U} e^{-\eta} \left(\frac{\tau}{\partial U / \partial \eta} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \right)}_{\text{diffusie 4}} + \underbrace{\frac{2}{U} e^{-\eta} \tau \frac{\partial U}{\partial \eta}}_{\text{produktie 5}} - \underbrace{\frac{\alpha}{U} e^{-\eta} \frac{\tau \sqrt{\tau}}{\kappa}}_{\text{dissipatie 6}} \quad (\text{a.7})$$

De termen 2 en 5 zijn "kruistermen" tussen de beide vergelijkingen, als beide vergelijkingen op zich zelf stabiel zijn, wordt aangenomen dat deze termen, evenals term 6 niet bijdragen tot instabiliteit.

In gediskretiseerde vorm is voor de termen 1 en 3 upwind differencing gebruikt. Het is aannemelijk, dat daarvoor, naar analogie van de analyse die tot (a.4) leidde, het criterium (a.1) als vuistregel kan dienen:

$$\|a \frac{\Delta x}{\Delta \eta}\| < 1 \text{ met } a = -\frac{W}{U} e^{-\eta}.$$

Hiermee volgt met $W = -1$ en $U = \frac{U_*}{\kappa} \eta_j$, $U_* \sim 1$:

$$\Delta x < \frac{1}{\kappa} \eta_j e^{\eta} \Delta \eta \quad (\text{a.8})$$

(zie tabel al).

We veronderstellen dat voor term 4 mag worden geschreven:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\tau}{\partial U / \partial \eta} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \right) \sim \frac{\tau}{\partial U / \partial \eta} \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial \eta^2} \right)$$

zodat (a.2) als vuistregel kan worden gebruikt:

$$\|a \frac{\Delta x}{(\Delta \eta)^2}\| < \frac{1}{2} \text{ met } a = \frac{\tau}{\partial U / \partial \eta} \cdot \frac{e^{-\eta}}{U} \quad (\text{a.9})$$

Indien $\tau = U_*^2$, $U = \frac{U_*}{\kappa} \eta_j$ geeft dit:

$$\Delta x < \frac{1}{2} \frac{\eta_j e^{\eta_j}}{\kappa^2} (\Delta \eta)^2 \quad (\text{a.10})$$

(zie tabel al).

Deze laatste voorwaarde blijkt aanvaardbare maxima voor Δx te geven onder

de gegeven omstandigheden ($\|W\| < 1$, $U_* < 1$), en indien de randvoorwaarde goed wordt opgelegd. (paragraaf 6.4). Instabiliteiten die voorkomen in de eerste stappen, wanneer (a.2) niet gebruikt mag worden en $\|W\| > 1$, tonen zich vooral in de diffusie-term.

Tabel a1, Stabiele maxima voor Δx voor $\Delta \eta = 0,3$.

jmin	η_{jmin}	Δx maximaal volgens stelling:		
		a5	a8	a10
0	0	0	0	0
1	0.3	0.05	0.3	0.10
2	0.6	0.15	0.8	0.30
3	0.9	0.31	1.66	0.62
4	1.2	0.56	2.98	1.12
5	1.5	0.94	5.04	1.88
6	1.8	1.53	8.17	3.06

Appendix B Het programma STEP/E10

In deze appendix wordt een korte beschrijving gegeven van het Algol programma zoals dat is geïmplementeerd op de Burroughs B6800 computer van het KNMI. Daartoe dient in de eerste plaats het structuur diagram (fig bl) waarvan de details in de listing zijn terug te vinden. Vervolgens is een lijst met de gebruikte identificers met hun betekenis bijgevoegd. Met deze lijst (tabel bl) en een overzicht van de noodzakelijke invoergegevens moet het mogelijk zijn het programma te gebruiken.

Het structuurdiagram bevat alle hoofdlijnen van het programma, m.u.v. de deklaratie en procedures. De kern van het programma wordt gevormd door de blokken 4, 5 en 6, waarvan de schema's beschreven zijn in hoofdstuk 6. Dankzij de expliciete differentieschema's zijn voor het oplossen van deze schema's geen matrix operaties noodzakelijk, wat het programma eenvoudig houdt.

Gedetailleerde informatie is te vinden in de listing. Overeenkomstige blokken met het structuurdiagram zijn aangegeven.

In de lijst met identificers (tabel bl) zijn in de kolom "beginwaarde" met haakjes die waarden aangegeven die met de data-file "IN" worden ingelezen. Waar mogelijk zijn de meest gebruikelijke waarden vermeld: indien men die waarden gebruikt zal het programma zonder twijfel foutloos werken.

Voor het opstarten van het programma STEP/E10 wordt gebruik gemaakt van Work Flow Language. Tussen de statements bevindt zich de data-file "IN", waardoor het veranderen van de invoergegevens snel kan geschieden. Deze data-file dient op de volgende manier te worden gebruikt:

```
in de eerste regel achtereenvolgens: IMAX, JMIN, DI, JMAX, IPRINT, ITEK.  
" " tweede " " " " : DX, DETA, Z01.  
" " derde " " " " : VERSNEL, VERVOLG (1 = TRUE, 0 = FALSE)  
" " vierde " " " " : VERSCHT, EPST.  
" " vijfde " " " " : FRAKTIE.
```

(voor een verklaring en enkele waarden: zie tabel bl).

De juiste waarden van DX, DETA, JMIN en DI zijn afhankelijk van de stabiliteit en zijn te bepalen aan de hand van tabel al (DETA = 0,3) of voorwaarde a = 10. Hierbij neme men jmin: JMIN-DI.

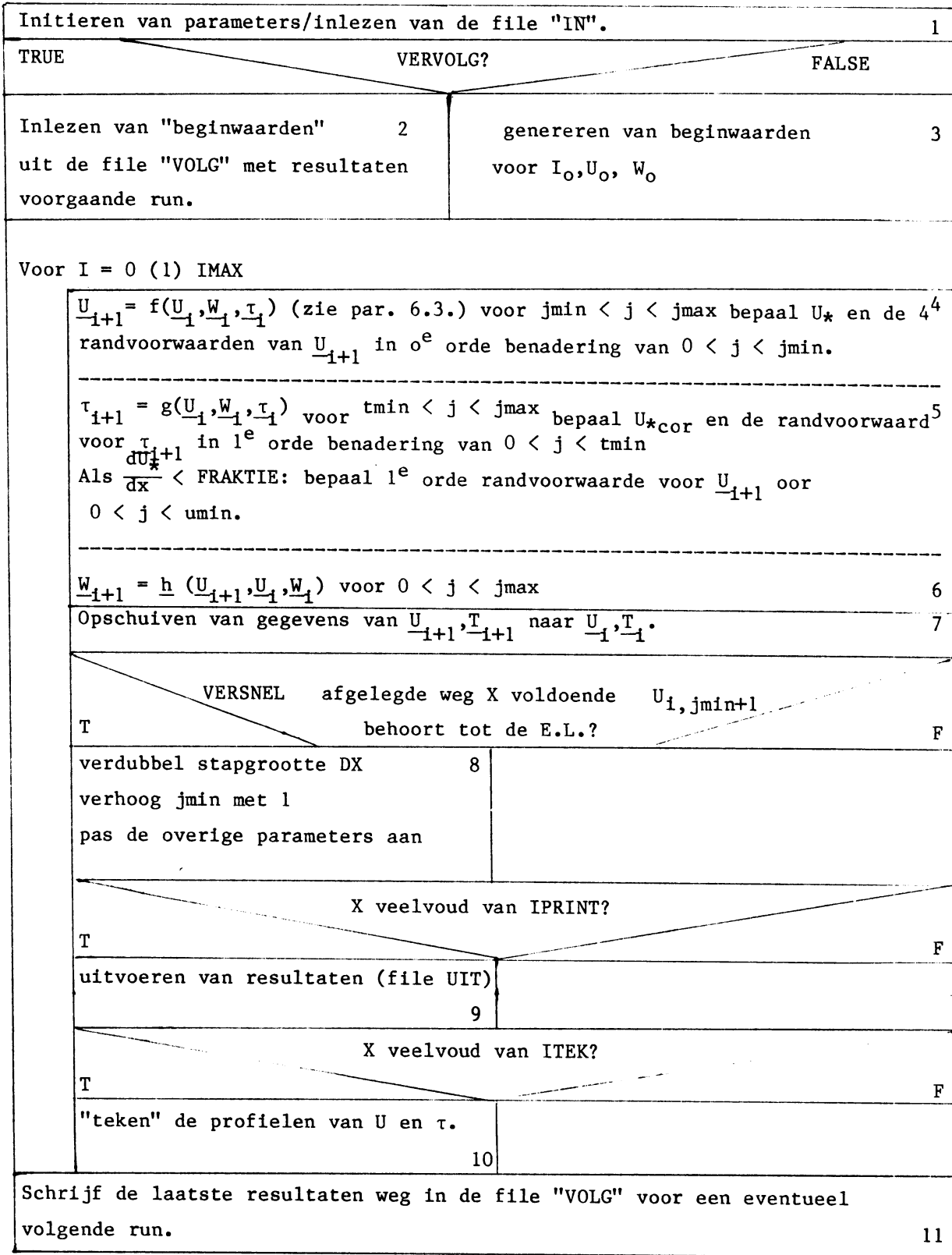
Men moet er rekening mee houden dat IPRINT en ITEK veelvoud van DX dienen te zijn. (Hierbij speelt ook de afrondingsfout van de computer een rol).

Men kan voor de interne file VOLG uiteraard meerdere externe files uit

een bibliotheek gebruiken. In het voorbeeld is dit de file met titel VOLGO. (Als men tijdens het programma een nieuwe file VOLG wil kreeëren moet het attribuut NEWFILE = FALSE worden weggelaten).

De programma's STEP/E7 t/m E10 zijn alle van dezelfde opzet: structuurdiagram bl is voor allen geldig. (voor STEP/E7 wordt geen WFL en data-file IN gebruikt). De onderlinge verschillen bestaan uit verschillen in de randvoorwaarde, zie tabel 1).

Fig. b1, Structuurdiagram.



Tabel b1, lijst met identifiers.

identifier	soort variabele	komt overeen met	beginwaarde	toelichting
X	real	X^+	0(resp.("VOLG"))	
DX	"	dx	(0,25)	
DETA	"	$d\eta$	(0,30)	
TTMIN	"	τ_{jmin}	-	
KA	"	κ	0,4	
Z01	"	z_{01}	()	In deze programma versie moet $z_{01} < 1$.
M	"	m	$\ln z_{01}$	
ALFA	"	α	0,30	
H	"	h_{IBL}	-	
HLOG	"	$\ln h_{IBL}$	-	
EPST	"	-	(0,01)	kriterium om h_{IBL} te bepalen (par. 8.1)
VERSCHT	"	-	(0,0001)	kriterium voor de stap- grootte verandering
USTI	"	U_{*i}	1	
USTP1	"	U_{i+1}	-	
USTCOR	"	U_{*i+1}	-	U_{*i+1} volgens 1 ^e orde benadering.
DUST/DX	"	C	-	$C = \frac{dU_{*}}{dx}$ volgens par. 6.4.
DUST1/DX	"	dU_{*}^{+}/dx^{+}	-	
FRAKTIE	"	-	(0,001)	kriterium voor het toe- passen van de 1 ^e orde benadering van U (par. 6.4)
F,F1,F3	"	(f_u, f_τ)	-	hulpmiddelen ter beperking van het rekenwerk.
VERSNEL	boolean	-	(1)	als VERSNEL = True wordt stapgrootte verandering toege-

VERVOLG	boolean	"	-	(0)	past. als VERVOLG = True rekent het programma voort op de resul- taten van de voorgaan- de run
I	integer	i		0	
IMAX	"		-	(4000)	aantal stappen: van 2- minuten procestijd is 4500 het maximum
J	"	j		0	
JMAX	"	jmax		(24)	maximaal 25
JMIN	"	jmin		(3)	minimaal 2
UMIN	"			=JMIN	jmin in het schema voor U_{-i+1}
TMIN	"			=JMIN-DI	jmin in het schema voor τ_{i+1}
DI	"			(1)	verschil tussen jmin en tmin
IPRINT	"			(25)	als X een veelvoud van IPRINT is, worden resultaten uitgevoerd
ITEK	"			(200)	als X een veelvoud van ITEK is, worden profielen "getekend".
UI	real ar- ray[0.25]	U_i		$\frac{\eta_j}{\kappa}$	
UIP1	"	U_{-i+1}		-	
WI	"	W_i		0	
TI	"	τ_i		1	
TIP1	"	τ_{-i+1}		-	
TIM	"				TIM[3]=(TI[3] +TI[3-1])/2
EXPETA	"	e^n		$e^{j \times d \eta}$	
EXETAM	"	$e^{n-\frac{1}{2}d\eta}$		$e^{(j-\frac{1}{2}) \cdot d\eta}$	
KONU	"				konvektie- term in U-

		vergl.	
AFS	real array[0.25]	schuifspanningsgrad. in U-vergl.	
KONT	real array(0.25)	konvektie-term in τ -vergl.	
DIF	"	difussieterm	
PROD	"	produktieterm	
DIS	"	dissipatie-term	
K	"	$K = \tau / \frac{\partial U}{\partial z}$	
FI	"	ϕ_m	
TAUR	"	$g(\eta_j)$	$g(\eta_j)$ opgeslagen in array, bepaald met procedure TAURAND
UR	"	$f(\eta_j)$	$f(\eta_j)$ opgeslagen in array bepaald met procedure URAND
TEKEN	procedure		"tekent" profielen op de regeldrukker
URAND	real procedure	$f(\eta)$	
TAURAND	"	$g(\eta)$	
files:			
UIT	printer		uitvoer van de verkregen resultaten op de regeldrukker
TEK	"		uitvoer van de tekeningen
IN	reader	externe file	data-file met de benodigde gegevens voor het opstarten,
VOLG	disk	indien VERVOLG = True dient VOLG te bestaan	aan het eind worden de laatste resultaten op VOLG weggeschreven. In

en gevuld zijn een volgende run kunnen
deze gegevens als be-
ginwaarde dienen.

STEP/E10 (L9/L3/82)

3:05 PM MONDAY, AUG

```

      SSFT LIST
      XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX STEP/E10 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
      X DIT PROGRAMMA BEREKENT HET SNELHEIDSVELD NA EEN RIJWEGS- X
      X OVERGANG. ER IS GEDRUK GEMAAKT VAN DE ENERGIEVERGELIJKING X
      X T.P.V. DE SHEAR-STRESS. 29-07-82 NIJS JAN DUIJM X
      Y M.B.V "VARIABELE" UPWIND DIFFERENCING X
      Y LAATSTE WIJZIGINGEN: 29-07-82 X
      XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
      BEGIN
      FILE UIT(KIND=PRINTER);
      FILE TEK(KIND=PRINTER);
      FILE IN(KIND=READER);
      FILE VOLG(KIND=DISK,MAXRECSIZE=26);
      REAL DELTA,X,DX,TU,TTMIN,KA,701,M,ALFA,HLOG,H,FPST,VERSCHT,
      USTI,USTIP1,USTCOP,DUST,DUST1;
      INTEGER I,J,JMIN,JMAX,IMAX,UMIN,UMIN,DI,IPRINT,ITEK;
      BOOLEAN VERSNEL,VERVOLG;
      PROCEDURE TEKEN(Z,Y1,X2,SCALE1,SCALE2,MAX);
      REAL SCALE1,SCALE2;
      INTEGER MAX;
      ARRAY Z[*],Y1[*],X2[*];
      BEGIN
      INTEGER I,N;
      ERCHIC ARRAY REGEL[0:132];
      WRITE(TEK,<"LOG Z+M, />");
      FOR I:=0 STEP 1 UNTIL MAX DO
      BEGIN
      REPLACE REGEL[I] BY " " FOR 132;
      REPLACE REGEL[0] BY Z[MAX-I] FOR 6 NUMERIC," -";
      N:= SCALE1*X1[IMAX-I];
      IF (N<124 AND N>=0) THEN REPLACE REGEL[N+8] BY "+";
      N:= SCALE2*Y2[IMAX-I];
      IF (N<124 AND N>=0) THEN REPLACE REGEL[N+8] BY "+";
      WRITE(TEK,132,REGEL);
      WRITE(TEK,<X7,"I">);
      END;
      WRITE(TEK,<X7,"I",4(24(" -"),"I")>);
      WRITE(TEK,<X7,F6.2,4(X19,F6.2),"-> +">
      ,U.0,25/SCALE1,51/SCALE1,75/SCALE1,100/SCALE1);
      WRITE(TEK,<X7,F6.2,4(X12,F6.2),"-> +">
      ,U.0,25/SCALE2,50/SCALE2,75/SCALE2,100/SCALE2);
      END;
      Y
      INITIEREN VAN DE PARAMETERS
      Y
      READ(IN,/,IMAX,JMIN,DI,JMAX,IPRINT,ITEK);
      READ(IN,/,DX,DELTA,701);
      READ(IN,/,VERSNEL,VERVOLG);
      READ(IN,/,VERSCHT,FPST);
      K:=.4;
      TMIN:=JMIN-DI;
      UMIN:=JMIN;
      X:=0;
      ALFA:=0.70;
      M:=LN(701);
      BEGIN
      REAL F,F1,F3,FRAYIE;
      ARRAY UI,WT,UIP1,TIM,EXPETA,EXETAM,TI,TIP1[0:25];
      REAL PROCEDURE URAND(J,DELTA,M,ALFA,KAPPA);
      INTEGER J;
      REAL DELTA,M,ALFA,KAPPA;
      BEGIN
      REAL ETA,EXPETA;
      ETA:=J*DELTA;
      EXPETA:=EXP(ETA);
      URAND:=- (EXPETA*((ETA-M)**2-2*(ETA-M)+2)-2*EXP(M))/ALFA/KAPPA+
      - (EXPETA*((ETA-M)**2-4*(ETA-M)+6)-2*EXP(M)*(ETA-M+3))/
      (2*KAPPA**3);
      END;
      REAL PROCEDURE TAURAND(J,DELTA,M);
      INTEGER J;
      REAL DELTA,M;
      BEGIN
      REAL ETA;
      ETA:=J*DELTA;
      TAURAND:=EXP(ETA)*((ETA-M)**2-2*(ETA-M)+2)-2*EXP(M);
      END;

```

Procedure TEKEN

"g(η)" "f(η)"

```

00001000
00001100
00001200
00001300
00001400
00001500
00001600
00001700
00001800
00001900
00002000
00002100
00002200
00002300
00002350
00002400
00002500
00002600
00002700
00002800
00002900
00003000
00003100
00003200
00003300
00003400
00003500
00003600
00003700
00003800
00003900
00004000
00004100
00004200
00004300
00004400
00004500
00004600
00004700
00004800
00004900
00005000
00005100
00005200
00005300
00005400
00005500
00005600
00005700
00005800
00005900
00006000
00006100
00006200
00006300
00006400
00006500
00006600
00006700
00006710
00006711
00006712
00006713
00006714
00006715
00006716
00006717
00006718
00006719
00006720
00006740
00006741
00006742
00006743
00006744
00006745
00006746
00006747

```

Uitvoer van begin voorwaarde en para meters

```

Z
Y
Y
GENEREREN VAN DE BEGINVOORWAARDEN
IF VERVOLG THEN
  BEGIN
    READ(VOLG,26,UI);
    READ(VOLG,26,TI);
    READ(VOLG,26,WI);
    READ(VOLG,26,USTI,DETA,JMIN,UMIN,TMIN,JMAX);
  END ELSE
  FOR J:=0 STEP 1 UNTIL JMAX DO
    BEGIN
      UI[J]:=J*DETA/YA;
      TI[J]:=1;
      WI[J]:=0;
      USTI:=1.0;
      MUST:=0;
    END;
  FOR J:=0 STEP 1 UNTIL JMAX DO
    BEGIN
      EXPETA[J]:=EXP(J*DETA);
      FYETAM[J]:=EXP((J-.5)*DETA);
    END;
  REWIND(VOLG);
  WRITE(UIT,
    < /, "      KA=" ,F6.2,
    "      ZU1=" ,F8.4, /,
    "      JMIN=" ,I4,
    "      JMAX=" ,I6, /,
    "      DETA=" ,F6.2,
    "      DX=" ,F6.2, /,
    "      M=" ,F6.2,
    "      ALFA=" ,F6.2, / / >,
    KA,ZU1,JMIN,JMAX,DETA,DX,M,ALFA);
  WRITE(UIT,<"ETA=" ,21F6.2>,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO J*DETA);
  IF JMAX>20 THEN
  WRITE(UIT,<"X1=" ,10F8.2>,FOR J:=21 STEP 1 UNTIL JMAX DO J*DETA);
  WRITE(UIT,<"Z=" ,21F6.1>,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO EXPETA[J]);
  IF JMAX>20 THEN
  WRITE(UIT,<"X2=" ,10F8.2, / >,FOR J:=21 STEP 1 UNTIL JMAX DO EXPETA[J]);
  READ(IN,/,FRAKTIF);
  FOR J:=0 STEP 1 UNTIL UMIN DO
    URE[J]:=URAND(J,DETA,M,ALFA,KA);
  FOR J:=0 STEP 1 UNTIL TMIN DO
    TAURE[J]:=TAURAND(J,DETA,M);
Y
Y
Y
VOORWAARTSE BEREKENING VAN U EN TAU
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL IMAX DO
  BEGIN
    X:=X+DX;
Y
Y
    BEREKENING VAN U(I+1)
    FOR J:=UMIN STEP 1 UNTIL JMAX-1 DO
      BEGIN
        IF WI[J]<0.0 THEN F1:=1.0 ELSE F1:=0.0;
        UPI[J]:=UI[J]+DX/UI[J]+
        ( (KONU[J]:=-WI[J]/(DETA*EXPETA[J])+
          (F1*(UI[J+1]-UI[J])+(1-F1)*(UI[J]-UI[J-1])))+
          (AFS[J]:=1/(DETA*EXPETA[J])+
            (TI[J+1]-TI[J-1])/2) );
      END;
    UPI[JMAX]:=UI[JMAX]+UI[JMAX-1]-UPI[JMAX-1]-
    2*(WI[JMAX]+WI[JMAX-1])/
    (UJ[JMAX]+UI[JMAX-1])*DX/(FYETAM[JMAX]*KA);
Y
Y
    RANDVOORWAARDE VOOR U
    USTIPI:=YA/(UMIN*DETA-M)*UPI[UMIN];
    FOR J:=0 STEP 1 UNTIL UMIN-1 DO
      UPI[J]:=USTIPI+(J*DETA-M)/YA;

```

```

00006800
00006900
00007000
00007100
00007200
00007300
00007400
00007500
00007600
00007700
00007800
00007900
00008000
00008100
00008200
00008300
00008400
00008500
00008600
00008700
00008800
00008900
00009000
00009100
00009200
00009300
00009400
00009500
00009600
00009700
00009800
00009900
00010000
00010100
00010200
00010300
00010400
00010500
00010600
00010700
00010800
00010900
00011000
00011100
00011200
00011300
00011400
00011500
00011600
00011700
00011800
00011900
00012000
00012100
00012200
00012300
00012400
00012500
00012600
00012700
00012800
00012900
00013000
00013100
00013200
00013300

```

2

3

4

```

BEKVENING VAN TAU
FOR J:= 1 STEP 1 UNTIL JMAX DO
  TIM[J]:=(TIC[J]+TIC[J-1])/2;
FOR J:=TMIN STEP 1 UNTIL JMAX-1 DO
  BEGIN
    IF WIC[J]<0 THEN F3:=1 ELSE F3:=0;
    TIP1[J]:=TIC[J]+DX/UI[J]*
      ( (KONT[J]:=-WIC[J]/(DETA*EXPETA[J])*
        (F3*(TIC[J+1]-TIC[J])+(1-F3)*(TIC[J]-TIC[J-1])))+
        (DTF[J]:=1/(DETA*EXPETA[J])*
          (TIM[J+1]*(TIC[J+1]-TIC[J])/(UI[J+1]-UI[J])-
            TIM[J]*(TIC[J]-TIC[J-1])/(UI[J]-UI[J-1])))+
        (PROO[J]:=ALFA/(DETA*EXPETA[J])*
          (TIC[J]+(UI[J+1]-UI[J-1])/2)-
          (DIS[J]:=ALFA/(EXPETA[J]*KA)*
            TIF[J]*SQRT(TIC[J])) ) );
    END;
  TIP1[JMAX]:=TIP1[JMAX-1];
  END;

PANDVOORWAARDEN
F1:=KA**2+UR[UMIN]/TAUR[TMIN];
USTCOR:=(UIP1[UMIN]+SQRT((UIP1[UMIN]**2-4*F1*TIP1[TMIN]*
  ((UMIN*DETA-M)/KA-F1)))/2)/((UMIN*DETA-M)/KA-F1);
DUST:=KA**2/TAUR[TMIN]/USTCOR*(TIP1[TMIN]-USTCOR**2)+DX;
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL TMIN DO
  TIP1[J]:=(USTCOR/KA**2)*DUST/DX*TAUR[J]+USTCOR**2;
IF DUST/DX<FRAKTIE THEN
  FOR J:=1 STEP 1 UNTIL UMIN-1 DO
    UIP1[J]:=USTCOR/KA*(J*DETA-M)+DUST/DX*UR[J];
  END;

BEREKENING VAN W(I+1)
WIC[0]:=(...);
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL JMAX DO
  WIF[J]:=WIC[J-1]-EXPETA[J]*
    (UIP1[J]-UI[J]+UIP1[J-1]-UIF[J-1])*DETA/(DX+2);
  END;

DUST1:=USTCOR-UST1;
UST1:=USTCOR;
FOR J:=0 STEP 1 UNTIL JMAX DO
  BEGIN
    UIF[J]:=UIP1[J];
    TIC[J]:=TIP1[J];
  END;

VERGROTING VAN DE STAPGROOTTE
IF (VERSNEEL AND (X>100*EXPETA[UMIN] AND ABS(UI[UMIN+1]-
  (UST1*((UMIN+1)*DETA-M)/KA))<VERSCHT)) THEN
  BEGIN
    JMIN:=JMIN+1;
    TMIN:=JMIN-0;
    UMIN:=JMIN;
    UR[UMIN]:=URAND(UMIN,DETA,M,ALFA,KA);
    TAUR[TMIN]:=TAURAND(TMIN,DETA,M);
    KONT[UMIN-1]:=100;
    AFS[UMIN-1]:=100;
    KONT[TMIN-1]:=100;
    DTF[TMIN-1]:=100;
    PROO[TMIN-1]:=100;
    DIFT[TMIN-1]:=100;
    DX:=2*DX;
    IF ((X DIV DX)*DX) NEQ X THEN
      X:=X+DX/2;
    IPRINT:=I+1;
    ITEX:=I+1;
    WRITE(UIT,</,"NIEUWE STAPGROOTTE DX=",F6.2," I=",I6,
      " JMIN=",I6,>/,>,DX,I,JMIN);
  END;

```

5

6

7

8

```

00014200
00014300
00014400
00014500
00014600
00014700
00014800
00014900
00015000
00015100
00015200
00015300
00015400
00015500
00015600
00015700
00015800
00015900
00016000
00016100
00016200
00016300
00016325
00016350
00016375
00016500
00016600
00016900
00017000
00017100
00017200
00017225
00017250
00017275
00017300
00017350
00017400
00017450
00017500
00017550
00017600
00017700
00017800
00017900
00018000
00018100
00018200
00018300
00018400
00018500
00018600
00018700
00018800
00018900
00019000
00019100
00019125
00019150
00019200
00019300
00019400
00019500
00019600
00019700
00019800
00019900
00020000
00020100
00020200
00020300
00020400
00020500

```

```

END;
IF ((IPRINT*(X DIV IPRINT)=X) OR (I<=5)) THEN
  BEGIN
    FOR J:=1 STEP 1 UNTIL JMAX-1 DO
      IF (ABS(TI[J]-TI[JMAX])>EPST AND ABS(TI[J]-TI[JMAX])<EPST)
      THEN
        HLOG:=(J-1)*DETA+(ABS(TI[J]-TI[JMAX])-EPST)*DETA/
          (ABS(TI[J]-TI[JMAX]));
        H:= EXP(HLOG);
        WRITE(UIT,</,"X=" ,F8.2,X5,"I=" ,I7,X5,"U=" ,F6.4,X5,"U+COR=" ,
          F8.4,X5,"DU=" ,F8.6,X5,"DU+1=" ,F8.6,X5,"HOOGTE" ,FP.2>
          ,X,I,USTIP1,USTCOR,DUST/DY,DUST1/DY,H);
        WRITE(UIT,<MU: " ,21F6.2> ,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO
          UI[J]);
        IF JMAX>20 THEN
          WRITE(UIT,<X30,10F8.2> ,FOR J:=21 STEP 1 UNTIL JMAX DO UI[J]);
          WRITE(UIT,<MU: " ,21F6.2> ,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO
            WI[J]);
        IF JMAX>20 THEN
          WRITE(UIT,<X30,10F8.2> ,FOR J:=21 STEP 1 UNTIL JMAX DO WI[J]);
          WRITE(UIT,<TAU: " ,21F6.2> ,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO
            TI[J]);
        IF JMAX>20 THEN
          WRITE(UIT,<X30,10F8.2> ,FOR J:=21 STEP 1 UNTIL JMAX DO TI[J]);
          WRITE(UIT,<KONU: " ,21F6.3> ,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO
            KONU[J]);
          WRITE(UIT,<AFS: " ,21F6.3> ,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO
            AFS[J];
          WRITE(UIT,<KONT: " ,21F6.3> ,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO
            KONT[J];
          WRITE(UIT,<DIFF: " ,21F6.3> ,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO
            DIF[J];
          WRITE(UIT,<PROD: " ,21F6.3> ,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO
            PROD[J];
          WRITE(UIT,<DISS: " ,21F6.3> ,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO
            DIS[J];
  
```

```

END;
IF (ITEK*(X DIV ITEK)=X) THEN
  BEGIN
    FI[ ]:=KA/SQRT(TI[ ])+(UI[1]-UI[0])/DETA;
    FOR J:=1 STEP 1 UNTIL JMAX-1 DO
      FI[J]:=KA/SQRT(TI[J])+(UI[J+1]-UI[J])/2/DETA;
      FI[JMAX]:=KA/SQRT(TI[JMAX])+(UI[JMAX]-UI[JMAX-1])/DETA;
      KI[ ]:=TI[ ]/KA/((UI[1]-UI[0])/DETA);
      FOR J:=1 STEP 1 UNTIL JMAX-1 DO
        KI[J]:=TI[J]/KA/((UI[J+1]-UI[J])/2/DETA);
        KI[JMAX]:=TI[JMAX]/KA/((UI[JMAX]-UI[JMAX-1])/DETA);
      WRITE(UIT,</,"KI: " ,21F6.3> ,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO
        KI[J]);
      IF JMAX>20 THEN
        WRITE(UIT,<X30,10F8.3> ,FOR J:=21 STEP 1 UNTIL JMAX DO KI[J]);
        WRITE(UIT,</,"K: " ,21F6.3> ,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO
          K[J]);
      IF JMAX>20 THEN
        WRITE(UIT,<X30,10F8.3> ,FOR J:=21 STEP 1 UNTIL JMAX DO K[J]);
        TEKEN(EXPETA,UI,TI,6.25,50.0,JMAX);
        WRITE(TEK,<X70,"----> U+,TAU+ " ,//
          ,"SNELHEIDSPROFIEL (+) EN AFSCHUIFSPANNING "
          ,"(+ ) NA EEN RUWHEIDSOVERGANG" ,/
          ,"AFSTAND TOT DE RUWHEIDSOVERGANG X+ : " ,F8.2,/
          ,"M (LOG Z01/Z0) : " ,F8.2> ,X,M);
        WRITE(TEK[SKIP 1]);
  
```

```

END;
WRITE(VOLG,26,UI);
WRITE(VOLG,26,FI);
WRITE(VOLG,26,WI);
WRITE(VOLG,*,X,USTI,DETA,JMIN,UMIN,TMIN,JMAX);
LOCK(VOLG,CRUNCH)
END;
END.

```

```

UUU2U5UU
00020600
00020700
00020800
00020900
00021000
00021100
00021200
00021300
00021400
00021500
00021550
00021600
00021700
00021800
00021900
00022000
00022100
00022200
00022300
00022400
00022500
00022600
00022700
00022800
00022900
00023000
00023100
00023200
00023300
00023400
00023500
00023600
00023700
00023800
00023900
00024000
00024100
00024200
00024300
00024400
00024500
00024600
00024700
00024800
00024900
00025000
00025100
00025200
00025300
00025400
00025500
00025600
00025700
00025800

```

9

10

11

Appendix C Aanpassing van het programma aan de glad-ruw-overgang (STEP/E11)

Bij het oorspronkelijke programma STEP/E10 wordt het nulpunt van het stroomopwaartse logaritmische snelheidsprofiel gebruikt als oorsprong van het gediscretiseerde rooster. Als $z_{01} < 1$ komt het nulpunt van het profiel stroomafwaarts onder de rand van het rooster te liggen, hierbij treden geen complicaties op.

Als $z_{01} > 1$ zal dit nulpunt echter boven de onderrand van het rooster komen te liggen waardoor de situatie tussen dit punt en de onderrand niet gedefinieerd is (o.a. een negatieve snelheid).

Dit is te voorkomen door a) het gehele rooster op te schuiven, wat bereikt kan worden door j vanaf een hogere waarde dan 1 te laten lopen of door b) te schalen op de lokale ruwheid z_{01} . De eerste procedure is het elegantst (de schaling blijft in beide gevallen hetzelfde) maar vereist de meeste ingrepen.

Wanneer men op z_{01} gaat schalen is het voldoende om een z_0 op te geven (i.p.v. z_{01}) en de beginvoorwaarde te wijzigen.

Daartoe wordt de tweede regel van de data-file "IN" (zie appendix B) verandert in achtereenvolgens: dx , $d\eta$, U_{*1} , z_0 , z_{01} (met Z_0 een nieuwe identifier van z_0). Schaalt men op z_{01} , dan wordt daarvoor uiteraard 1 ingelezen (noodzakelijk is dit niet, alleen moet $z_{01} < 1$). Aan z_0 en U_{*1} zijn geen voorwaarden opgelegd.

De beginvoorwaarde luidt nu:

$$\text{voor } 0 < j < j_{\max} \quad \begin{aligned} U_{i,j} &= \frac{U_{*1}}{\kappa} (j \cdot d\eta - \ln z_0) \\ \tau_{i,j} &= U_{*1}^2 \end{aligned}$$

Deze term $\ln z_0$ neemt de plaats in van de parameter m in de schema's. Omdat bij schaling op z_{01} $m = \ln z_{01}$ gelijk 0 wordt, behoeven deze schema's niet te worden gewijzigd. Slechts bij de uitvoerprocedures, daar waar m staat voor de grootte en richting van de ruwheidsovergang dient m te worden vervangen door

$$\ln \frac{z_{01}}{z_0}$$

Hiermee blijft de ingreep in STEP/E10 beperkt tot de regels (zie de listing in appendix C):

2300 (deklaratie van Z0)
5500 (inlezen z_0 en U_{*1})
8000,
8100 (begin voorwaarde)
10000,
24800 (vervangen van m in de uitvoerprocedures).

In deze vorm is het programma gebruikt voor de afwisselende ruwheid (paragraaf 8.2, fig. 20, 21, 22).