

# KONINKLIJK NEDERLANDS METEOROLOGISCH INSTITUUT

WETENSCHAPPELIJK RAPPORT  
SCIENTIFIC REPORT

W. R. 80 - 7

H. H. Peeck

Theoretisch onderzoek van een methode voor het numeriek berekenen van lange golven in ondiep water en vergelijking van de numerieke met de overeenkomstige analytische resultaten.



---

De Bilt 1980

Publikatienummer: K. N. M. I. W. R. 80 - 7 (MBW)

Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut,  
Machinale Bewerking Waarnemingen,  
Postbus 201,  
3730 AE De Bilt,  
Nederland.

U. D. C. : 551.46.072:518 :  
551.466.61

## Inhoud

### Summary

1. Inleiding
  2. Beschrijving van de stappen voor de opbouw van een hydrodynamisch computerprogramma
  3. Formulering van het begin- en randwaarde probleem
  4. Overzicht van de belangrijkste methoden voor het berekenen van lange golven in ondiep water
  5. Afleiding van het discreet analogon volgens Leendertse
  6. Convergentieonderzoek voor een rechthoekig bassin
  7. Invloed van de grootte van tijdstap en roosterafstand op de benaderde oplossing
  8. Convergentieonderzoek voor een trapeziumvormig bassin
  9. Verbetering van de oorspronkelijke randvoorwaarden
  10. Appendix
  11. Lijst van gebruikte symbolen
  12. Literatuur
- Figuren

## Summary

In this report we study a finite-difference method for computing long waves in shallow water. We are particularly interested in the treatment of the lateral boundaries in a semi-implicit non-linear method (Leendertse 1967).

The investigation is theoretical because an application is made of a simplified (linear) version of the method to simple situations. Also because of the comparison of the numerical results with the analytic solution of the continuous problem.

After an introductory chapter an accurate description is given of the steps that have to be taken in order to come to a computer programme based on a physical situation.

This is important for a correct interpretation of the numerical results.

In chapter 3 we deduce, following the lines of chapter 2, a hydrodynamic initial-boundary-value problem, which is analytically solvable.

Chapter 4 gives an outline of the most important methods for computing long waves in shallow water.

We introduce the concept of the 2-stage method (2FM) because Leendertse alternately uses two different sets of difference equations. An essential part of the 2FM is the use of a multi-staggered grid. This consists of three subgrids, namely one for the distances between water level and reference plane and two for the components of the stream velocity in the horizontal plane.

Chapter 5 describes the discretisation of the problem of chapter 3 to the 2FM.

In chapter 6 convergence is proven for application of the 2FM to a rectangular basin.

In the next chapter the growth of errors due to discretisation is evaluated.

By the prescribed treatment of the lateral boundaries in the 2FM, a coastline which is not parallel to the X- or Y-axis is replaced by a "stair-step" boundary in the discretised problem. This results in the X- or Y-component of the current for points on a "oblique" boundary being zero, which contrasts with the physical situation and can give rise to great errors, as shown in chapter 8.

In chapter 9 it is proposed how to change the 2FM in order to be applicable to a non-rectangular basin.

From the experiments it appears that by changing the treatment of the lateral boundaries a considerably better agreement is indeed obtained between the calculated and corresponding values of the analytic solution.

## 1. Inleiding

De vergelijkingen van Navier-Stokes vormen met de zgn. continuïteitsvergelijking een stelsel vergelijkingen, welke aangevuld met begin- en randvoorwaarden een hydrodynamisch probleem volledig beschrijven. Deze partiële differentiaalvergelijkingen zijn echter over het algemeen niet analytisch oplosbaar.

Voorbeelden van hydrodynamische problemen zijn het berekenen van het getij, stormvloed, waterkwaliteit of reststromen in de Noordzee.

Voor het benaderd oplossen van deze problemen wordt gebruik gemaakt van de computer. De verschillende computerprogramma's onderscheiden zich in de mate waarin de differentiaalvergelijkingen vereenvoudigd zijn en in de wijze van discretiseren van het gebied en de differentiaalvergelijkingen. We zullen ons bij dit onderzoek beperken tot de programma's die gebaseerd zijn op de langs de vertikaal geïntegreerde differentiaalvergelijkingen. Methoden uit deze klasse zijn ontworpen en beschreven door Hansen (1956), Fischer (1959), Van der Houwen (1966), Leendertse (1967) en Heaps (1969). Hoofdstuk 4 geeft een overzicht van deze methoden.

Na een algemeen begin zullen we ons beperken tot een vereenvoudiging (2FM) van de methode volgens Leendertse. Aan het slot van hoofdstuk 9 zullen we nagaan in hoeverre de gevonden resultaten gelden voor de niet-vereenvoudigde methode.

De benaderingen die nodig zijn voor de formulering van het discrete probleem, zijn er de oorzaak van dat de oplossing van het discrete probleem afwijkt van de analytische oplossing. Het is gebruikelijk de juiste werking van een computerprogramma te verifiëren door de uitkomsten van de berekeningen te vergelijken met (herleide) metingen. Hierdoor wordt uiteraard geen inzicht verkregen in de oorsprong van de optredende afwijkingen. Doel van ons onderzoek is inzicht te krijgen in de grootte van de fouten die het gevolg zijn van de discretisatie van de vergelijkingen. Hierbij is het van belang te beschikken over een probleem dat analytisch oplosbaar is.

We kunnen dan nagaan hoe groot de fouten zijn, die het gevolg zijn van toepassing van de randvoorwaarden van de 2FM op een scheve kustlijn.

Daar het begrip "numeriek model" in de literatuur in vele betekenissen wordt gebruikt zullen we het hier niet gebruiken. In plaats daarvan geven we de voorkeur aan het woord methode, discreet analogon en (hydrodynamisch) computerprogramma voor resp. de wijze van discretiseren van de differentiaalvergelijkingen, het gediscretiseerde probleem en het programma voor het berekenen van waterstanden en stromen in een bepaald gebied.

Het onderzoek was een onderdeel van mijn afstudeerfase aan de Rijks Universiteit te Utrecht. Ik dank mijn afstudeerhoogleraar Prof. Dr. A. van der Sluis voor zijn supervisie. De afleiding van de exacte oplossing is voorgesteld door Dr. L.C. Heijboer, die tevens het manuscript kritisch doorlas.

2. Beschrijving van de stappen voor de opbouw van een hydrodynamisch computerprogramma.

We zullen eerst een beschrijving geven van de stappen, die nodig zijn voor de opbouw van een hydrodynamisch computerprogramma. Door deze stappen nauwkeurig te beschrijven wordt de mogelijkheid geschapen om de verschillende benaderingen, die in voornoemd programma zijn toegepast, successievelijk te onderzoeken.

Fysische situatie

Elk hydrodynamisch computerprogramma gaat uit van een fysische situatie. Onder de fysische situatie verstaan we een stukje van onze planeet dat met water bedekt is en alle krachten die op dat water werken.

Fysisch model

Aan de hand van de fysische situatie leiden we het fysisch model af. Dit is een voldoende nauwkeurige beschrijving van een hydrodynamisch verschijnsel in een bepaald gebied. In hoeverre een beschrijving voldoende is, valt onder de werkzaamheden van fysici, i.h.b. oceanografen. In het fysisch model wordt vastgelegd welke krachten wij bij de berekening van het verschijnsel in beschouwing willen nemen en vindt een schematisatie van diepte en gebied plaats. M.b.t. de krachten valt te denken aan de zwaartekracht, Coriolis-kracht, meteorologische krachten zoals wind en luchtdruk, en krachten t.g.v. viscositeit en dichtheidsverschillen.

Mathematisch-fysisch model

Voorname beschrijving kunnen we vervolgens samenvatten in formules en voorwaarden. We krijgen dan het mathematisch-fysisch model.

Begin- en randwaarde probleem

Het mathematisch-fysisch model wordt doorgaans nog verder vereenvoudigd door bijv. linearisatie, integratie langs de vertikaal, en verdere schematisatie van diepte en topografie. Het model dat we krijgen na de vereenvoudigingen noemen we begin- en randwaarde probleem (brp).

Met analytische middelen en fysisch inzicht kan nagegaan worden op welke wijze de oplossing van het brp samenhangt met die van het mathematisch-fysisch model. Het brp is meestal niet analytisch oplosbaar. Voor het bepalen van een numerieke benadering van de oplossing discretiseren we het brp.



### Discreet analogon

Het gediscretiseerde brp noemen we het discreet analogon. Uitgaande van het discreet analogon kunnen we een hydrodynamisch computerprogramma schrijven.

Vanuit één en hetzelfde mathematisch-fysisch model kunnen verschillende brp's afgeleid worden en bij elke brp is meer dan één bijbehorend discreet analogon mogelijk. Voor een schematische weergave van deze boomstructuur, zie figuur 1.

Consequenties van voornoemde opbouw zijn:

- 1e. splitsing van het probleem naar verschillende disciplines met eigen verantwoordelijkheden, vocabulair en beoordeling van de resultaten.
- 2e. vastliggende betrekkingen tussen de verschillende stadia.

Dit onderzoek zal i.h.b. ingaan op de betrekking tussen de oplossing van een brp, die we de "exacte oplossing" zullen noemen, en de oplossing van een discreet analogon, die we de "benaderde oplossing" zullen noemen. In figuur 1 is dit schematisch aangegeven met een stippellijn. Wanneer een brp analytisch oplosbaar is, kunnen benaderde oplossingen rechtstreeks vergeleken worden met de bijbehorende exacte oplossing. Ten behoeve van ons onderzoek hebben wij inderdaad een analytisch exact of asymptotisch oplosbaar brp gekozen. Inschakelverschijnselen zullen we buiten beschouwing laten, daar deze in ons geval verwaarloosbaar zijn, zoals aan het slot van hoofdstuk 6 zal blijken.

### 3. Formulering van het begin- en randwaarde probleem.

We zullen nu in overeenstemming met de opzet van het vorige hoofdstuk een brp afleiden, dat analytisch oplosbaar is en waar we de 2FM op zullen toe-  
passen.

#### Fysische situatie

Voor ons onderzoek willen we onze aandacht richten op het Zuidelijk gedeelte van de Noordzee als fysische situatie. Bij de keuze van de afmetingen is dan ook gestreefd naar enige overeenkomst met de afmetingen van dit gedeelte van de Noordzee.

#### Fysisch model

Ons fysisch model is een overal even diep kanaal met rechte, maar niet noodzakelijk evenwijdige oevers, gevuld met een homogene, non-visceuze, incompressibele vloeistof, dat aan één zijde open is.

Zij  $\alpha$  de hoek die de oevers met elkaar maken. We veronderstellen een trillingsbron op het snijpunt van het verlengde van de oevers aanwezig (in het geval van  $\alpha = 0$  in het oneindige), die sinusvormige lange golven het kanaal instuurt met een maximale amplitude van 1 meter in het punt (0,0). De periode van de lange golven komt ongeveer overeen met de periode van het M2-getij nl. 12 uur.

Zij het water op het tijdstip  $t = 0$  geheel in rust en 20 meter diep. Omdat onze aandacht vooral uitgaat naar de invloed van de randvoorwaarden, verwaarlozen we de Coriolis-kracht, wind en luchtdrukinvloeden, alle verticale snelheden (behalve in de continuïteitsvergelijking) en versnellingen met uitzondering van de versnelling van de zwaartekracht en de kromming van de aarde. We veronderstellen dat wijziging van de waterstand geen invloed heeft op de afmetingen van het wateroppervlak. Tot zover de beschrijving van het fysisch model.

#### Mathematisch-fysisch model

Het mathematisch-fysisch model bestaat uit een gebied in het eerste kwadrant in een rechtsdraaiend cartesisch assenstelsel, waarvan de afmetingen overeenkomen met die van het kanaal in het fysisch model, en gesitueerd als in figuur 2 aangegeven, waarbij het X-Y vlak samenvalt met het ongestoorde wateroppervlak. Het gebied bestaat uit een binnengebied en randen.

We onderscheiden open en gesloten randen. Op een open rand is de waterhoogte als functie van de tijd voorgeschreven. Waterhoogten worden bepaald met een functie  $Z = Z(x, y, t)$  t.o.v. het X - Y vlak. Op een gesloten rand is de normaal component van de stroomvector 0. De rand langs de Y-as is open.

Zij  $\vec{S} = \vec{S}(x, y, z, t) = (u, v, w)^T$  de stroomvector met componenten evenwijdig resp. X-, Y- en Z - as, dan luiden de vergelijkingen van Navier-Stokes, componentsgewijs:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = F_x \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = F_y \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = F_z \quad (3.3)$$

hierin is:

p de druk

$\rho$  de dichtheid van het water.

$F_x, F_y, F_z$  de componenten van de uitwendige kracht.

Voor een incompressibel medium levert de continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

Beginvoorwaarde is  $\vec{S}(x, y, z, 0) = 0 \quad (3.5)$

Zij  $\vec{k} = (k_1, k_2)^T$  een vector evenwijdig aan de kust in positieve zin, dan luidt de voorwaarde voor een gesloten rand:

$$k_2 u - k_1 v = 0 \quad (3.6)$$

Voor de open randpunten nemen we aan dat voor  $t - x/\sqrt{gH} \geq 0$

in het geval van  $\alpha = 0$  :  $Z(0, y, t) = \sin \omega(t - x/\sqrt{gH})$

in het geval van  $\alpha \neq 0$  :

$$Z(0, y, t) = \sqrt{r_0/r} \cdot \sin \omega(t - (r - r_0)/\sqrt{gH}) \quad (3.7)$$

met  $r$  de afstand van het punt  $(0, y)$  tot de bron

$r_0$  de afstand van het punt  $(0,0)$  tot de bron

$\omega = 2\pi/\text{periode} = 2\pi/42000 \text{ (s}^{-1}\text{)}$

$H$  = diepte (m)

$g$  = zwaartekracht parameter.

Begin- en randwaarde probleem

Vanuit dit mathematisch-fysisch model zullen we in navolging van Leendertse (1967) een brp afleiden door integratie langs de vertikaal, verwaarlozing van de kwadratische termen die door deze integratie ontstaan, substitutie van de dynamische randvoorwaarden en verwaarlozing van de bodemwrijving en de advectieve termen. Voor de invloed van de verwaarlozing van voornoemde kwadratische termen zie Brettschneider (1967) en Sündermann (1966). Na linearisering komen we tot het volgende brp( $\alpha$ ), met  $\alpha$  de hoek, waaronder de lange zijden elkaar in hun verlengde snijden. Zij

$$D_0 = \{(x,y) | 0 < x < a, 0 < y < b + xt \tan \alpha\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$D_1 = \{(0,y) | 0 < y < b\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$D_2 = \{(x,0) | 0 \leq x \leq a\} \cup \{(a,y) | 0 \leq y \leq b + at \tan \alpha\}$$

$$\cup \{(x, b + xt \tan \alpha) | 0 \leq x \leq a\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$D = D_0 \cup D_1 \cup D_2$$

$$I = [t_0, t_e]$$

$t_0 = 0(1/\omega)$ , zodanig dat we interschakel verschijnselen buiten beschouwing kunnen laten,

$t_e = 2a/\sqrt{gH}$ , zodanig dat er geen reflecties optreden tegen de gesloten rand, evenwijdig aan de Y-as.

Dan luiden de differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + H \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0 \tag{3.10}$$

met  $U = U(x,y,t) = \int_{-H}^Z u(x,y,i,t) di$

$$V = V(x,y,t) = \int_{-H}^Z v(x,y,i,t) di$$

De beginvoorwaarden zijn:

$$U(x,y,0) = V(x,y,0) = Z(x,y,0) = 0 \quad (3.11)$$

Voor de open rand nemen we aan dat voor  $t - (r-r_0)/\sqrt{gH} \geq 0$

$$Z(0,y,t) = \sqrt{r_0/r} \sin \omega \{t - (r-r_0)/\sqrt{gH}\} \quad (3.12)$$

Voor de gesloten rand geldt de voorwaarde:

$$k_2 U(x,y,t) - k_1 V(x,y,t) = 0 \quad (3.13)$$

Voor  $\alpha = 0$  luidt de exacte oplossing van (3.8) t/m (3.13)

voor  $t > t_0$ ,  $x < t_0/\sqrt{gH}$  :

$$Z(x,y,t) = \sin \omega (t-x/\sqrt{gH}) \quad (3.14)$$

$$U(x,y,t) = \sqrt{g/H} \cdot Z(x,y,t) \quad (3.15)$$

$$V(x,y,t) = 0 \quad (3.16)$$

Voor  $\alpha \neq 0$  bepalen we de exacte oplossing door de uitbreiding van golven in 2-ruimtelijke dimensies vanuit een puntvormige bron te beschouwen. Op grond van fysische overwegingen mogen we wegens het ontbreken van bodemwrijving concluderen dat de periode van de golven niet verandert. De vraag is hoe de amplitude met de plaats verandert. In Kronig (1954, blz. 177) wordt dit probleem opgelost voor 3-ruimtelijke dimensies.

In ons geval vinden we geheel analoog aan voornoemde afleiding dat de amplitude ongeveer omgekeerd evenredig is met  $\sqrt{r}$ .

Daar de golven in ons brp geen invloed ondervinden van de randen en (voor grote  $r$ ) amplitude en periode bekend zijn, luidt de asymptotische oplossing van (3.8) t/m (3.13) voor  $\alpha \neq 0$ ,  $t > t_0$  en  $r-r_0 < t_0 \sqrt{gH}$  :

$$Z(x,y,t) = \sqrt{r_0/r} \cdot \sin \omega \{t - (r-r_0)/\sqrt{gH}\} \quad (3.17)$$

$$U(x,y,t) = \sqrt{g/H} \cdot Z(x,y,t) \cdot \cos \beta \quad (3.18)$$

$$V(x,y,t) = \sqrt{g/H} \cdot Z(x,y,t) \cdot \sin \beta \quad (3.19)$$

met als  $(x_b, y_b)$  de coördinaten van de bron zijn:

$$r_o = \sqrt{x_b^2 + y_b^2}$$

$$r = \sqrt{(y-y_b)^2 + (x-x_b)^2}$$

$$\cos \beta = (x-x_b)/r \text{ en } \sin \beta = (y-y_b)/r.$$

We zullen nu nagaan in hoeverre (3.17) t/m (3.19) afwijkt van de analytisch exacte oplossing van brp ( $\alpha$ ),  $\alpha \neq 0$ . Hiertoe elimineren we eerst U en V uit (3.8) t/m (3.10). We krijgen dan:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - gH \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.20)$$

Overgang op poolcoördinaten  $(r, \psi)$  levert

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - gH \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial Z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} \right) = 0 \quad (3.21)$$

We stellen dat de oplossing uitsluitend van  $r$  afhangt. (3.21) wordt dan

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - gH \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial Z}{\partial r} \right) \right) = 0 \quad (3.22)$$

We gaan over op dimensieloze variabelen  $Z', t'$  en  $r'$  volgens:

$$\begin{aligned} Z' &= Z/L \\ t' &= t\sqrt{gH}/L \\ r' &= r/L \end{aligned} \quad (3.23)$$

met L een lengte.

(3.23) wordt dan

$$\frac{\partial^2 Z'}{\partial t'^2} - \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial Z'}{\partial r'} \right) = 0 \quad (3.24)$$

De oplossing van (3.24) voor een uitgaande lopende golf luidt (Landau, blz. 269):

$$Z' = \operatorname{Re} \{Ae^{it'} H_0^{(1)}(r')\} \quad (3.25)$$

met  $H_0^{(1)}$  een Hankelfunctie van de eerste soort van de orde nul,  
 $A = A_r + iA_i \in \mathbb{C}$ .

We kunnen nu A bepalen door vergelijking van (3.25) met (3.12), bijvoorbeeld in het punt  $r_0$ . Uitschrijven van (3.25) levert

$$Z' = A_r \cos(t')J_0(r') + A_r \sin(t')Y_0(r') + A_i \sin(t')J_0(r') + A_i \cos(t')Y_0(r') \quad (3.26)$$

Na substitutie van de juiste waarden voor  $J_0(r'_0)$  en  $Y_0(r'_0)$  vinden we dat

$$A_r = 0.000035 \text{ en } A_i = -0.000021 \quad (3.27)$$

Substitutie van (3.27) in (3.25) levert de analytisch exacte oplossing van (3.8) t/m (3.13) voor  $t \geq t_0$  en  $r_0 \leq r < t \sqrt{gH}$ .

Uit de berekeningen blijkt dat het verschil van voornoemde oplossing met (3.17) voor de Z-waarden in de eerste 30 roosterpunten in het bassin vanaf de open rand minder dan 1 cm. bedraagt. Dit verschil is zeer klein t.o.v. de amplitude van de lopende ondiep-water golf welke op de rand 1 m. bedraagt. Later zal blijken dat de fouten in de benaderde oplossing t.g.v. de randvoorwaarden veel groter dan 1 cm. zijn.

In het vervolg zullen we wegens de overeenkomst van (3.17) t/m (3.19) met (3.14) t/m (3.16) en de eenvoudiger berekenbaarheid, (3.17) t/m (3.19) beschouwen als de exacte oplossing van  $\operatorname{brp}(\alpha)$ ,  $\alpha \neq 0$ .

4. Overzicht van de belangrijkste methoden voor het berekenen van lange golven in ondiep water

Voor het numeriek oplossen van een brp, discretiseren we eerst m.b.t. de ruimtelijke variabelen. Hiertoe overdekken we gebied  $D$  uniform met een rooster  $D_Z^h$  met maaswijdte  $h$ , zodat  $b/h = p$  met  $p$  geheel.

Zij  $(x_j, y_k) \in D_Z^h$  met  $x_j = jh$ ,  $y_k = kh - \frac{1}{2}h$  (zie figuur 3).

Zij  $\overline{\Phi}_Z^h$  de verzameling van roosterfuncties op  $D_Z^h$ . Voor  $Z^h \in \overline{\Phi}_Z^h$  geven we met  $Z_{j,k}$  de waarde van  $Z^h$  in het punt  $(x_j, y_k)$  aan.

Naast het rooster  $D_Z^h$  beschouwen we ook nog rooster  $D_U^h = \{(x_{j+\delta_1}, y_{k+\delta_2})\}$  en  $D_V^h = \{(x_{j+\epsilon_1}, y_{k+\epsilon_2})\}$  met  $\delta_1, \delta_2, \epsilon_1, \epsilon_2 = 0$  of  $\frac{1}{2}$ , met de bijbehorende verzamelingen roosterfuncties resp.  $\overline{\Phi}_U^h$  en  $\overline{\Phi}_V^h$ .

Met  $U_{j+\delta_1, k+\delta_2}$  geven we dan de waarde van  $U^h \in \overline{\Phi}_U^h$  in het punt  $(x_{j+\delta_1}, y_{k+\delta_2})$  aan en met  $V_{j+\epsilon_1, k+\epsilon_2}$  de waarde van  $V^h \in \overline{\Phi}_V^h$  in het punt  $(x_{j+\epsilon_1}, y_{k+\epsilon_2})$ .

Vervolgens discretiseren we naar  $t$ . Hiertoe overdekken we  $I$  uniform met een rooster  $I^\tau$  met tijdstap  $\tau$ , zodat  $t_e/\tau = q$  met  $q$  geheel.

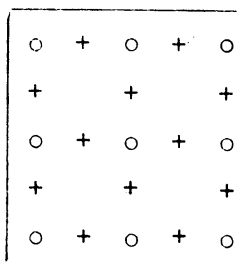
Zij  $t_n \in I^\tau$  met  $t_n = n\tau$ ,  $0 \leq n \leq q$ . Zij  $\overline{\Phi}_Z^{h\tau}$  de verzameling van roosterfuncties op  $D_Z^h \times I^\tau$ . Voor  $Z^{h\tau} \in \overline{\Phi}_Z^{h\tau}$  geven we met  $Z_{j,k}^n$  de waarde van  $Z^{h\tau}$  in het punt

$(x_j, y_k, t_n)$  aan. Op overeenkomstig wijze definiëren we

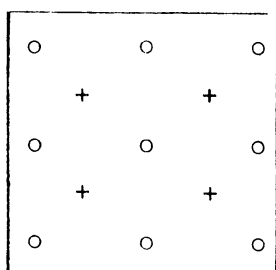
$\overline{\Phi}_U^{h\tau}$ ,  $U_{j+\delta_1, k+\delta_2}^h$ ,  $\overline{\Phi}_V^{h\tau}$  en  $V_{j+\epsilon_1, k+\epsilon_2}^n$ .



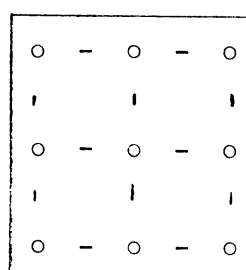
De drie meest voorkomende ruimtelijke roosters zijn:



rooster A



rooster B



rooster C

hierin is

o een Z-punt

| een V-punt

- een U-punt

Een hier niet afgebeeld rooster, waarbij de variabelen in dezelfde punten zijn gedefinieerd, wordt uitsluitend gebruikt voor experimentele programma's (Geerts 1976) om snel en eenvoudig wijzigingen in een programma te kunnen aanbrengen.

Rooster A past bij  $(\delta_1, \delta_2) = (\frac{1}{2}, 0)$  of  $(0, \frac{1}{2})$ ,  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (\frac{1}{2}, 0)$  of  $(0, \frac{1}{2})$ . Dit werd vroeger gebruikt voor het HN-Verfahren (Hansen 1956).

Rooster B,  $(\delta_1, \delta_2) = (\epsilon_1, \epsilon_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  wordt gebruikt in het MC-model (Van der Houwen 1966) en in de methode beschreven door Heaps (Heaps 1969). Het verschil tussen de methode volgens Heaps en het MC-model zit o.a. in de behandeling van de randpunten.

Wanneer we uitgaan van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen kunnen zich volgens Röber (1970) problemen voordoen bij gebruik van de roosters A en B wegens het naast elkaar optreden van onafhankelijke oplossingen in gedeelten van de roosters.

Rooster C,  $(\delta_1, \delta_2) = (\frac{1}{2}, 0)$ ,  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, \frac{1}{2})$  wordt behalve in de 2FM (Leendertse 1967) ook gebruikt in het HN-Verfahren sinds de publikatie van Fischer (1959). Van laatstgenoemd rekenprogramma zijn vele experimenten beschreven.

Behalve door discretisatie van het gebied verschillen de methoden door de vorm van de wrijvingsterm (lineair of kwadratisch) en door de wijze van discretisatie van de differentiaalvergelijkingen. Voor een analyse van de problemen, die samenhangen met de keuze van het rooster en de gekozen differentie vergelijkingen, zie Arakawa en Messinger (1977).

We definiëren nog

$$(\delta_x U)_{j,k}^n = \begin{cases} (U_{j+\delta_1, k+\delta_2}^n + U_{j+\delta_1, k-1+\delta_2}^n - U_{j-1+\delta_1, k+\delta_2}^n - U_{j-1+\delta_1, k-1+\delta_2}^n) / 2h & \text{als } \delta_1 = \frac{1}{2}, \delta_2 = \frac{1}{2} \\ (U_{j+\delta_1, k}^n - U_{j-1+\delta_1, k}^n) / h & \text{als } \delta_1 = \frac{1}{2}, \delta_2 = 0 \\ (U_{j+1, k}^n - U_{j-1, k}^n) / 2h & \text{als } \delta_1 = \delta_2 = 0 \end{cases}$$

en  $\delta_y V$ ,  $\delta_x Z$  en  $\delta_y Z$  op overeenkomstige wijze.

De volgende drie formules leveren dan door keuze van  $\theta_z$ ,  $\theta_u$  en  $\theta_v$  een groot aantal verschillende stelsels differentievergelijkingen:

$$Z_{j,k}^{n+1} - Z_{j,k}^n = -\tau H \left\{ \theta_z \left[ (\delta_x U)_{j,k}^{n+1} + (\delta_y V)_{j,k}^{n+1} \right] + (1-\theta_z) \left[ (\delta_x U)_{j,k}^n + (\delta_y V)_{j,k}^n \right] \right\}$$

$$U_{j,k}^{n+1} - U_{j,k}^n = -\tau g \left\{ \theta_u (\delta_x Z)_{j,k}^{n+1} + (1-\theta_u) (\delta_x Z)_{j,k}^n \right\}$$

$$V_{j,k}^{n+1} - V_{j,k}^n = -\tau g \left\{ \theta_v (\delta_y Z)_{j,k}^{n+1} + (1-\theta_v) (\delta_y Z)_{j,k}^n \right\}$$

$$0 \leq \theta_z, \theta_u, \theta_v \leq 1$$

We onderscheiden de volgende combinaties van  $\theta_u$ ,  $\theta_v$  en  $\theta_z$ :

1e.  $\theta_u = \theta_v = \theta_z = 0$  expliciet schema, backward in time

2e.  $\theta_u \neq 0, \theta_v \neq 0, \theta_z \neq 0$  impliciet schema, forward in time.

de overige combinaties heten semi-impliciet.

3e.  $\theta_u = \theta_v = \theta_z = \frac{1}{2}$  trapezium schema, central in time.

Voor het MC-model, HN-Verfahren en de methode Heaps geldt dat

$$\theta_u = \theta_v = 0 \quad \text{en} \quad \theta_z = 1.$$

Een groot nadeel van expliciete schema's t.o.v. impliciete is dat bij expliciete schema's de tijdstap aan (in de praktijk nogal rigoreuze) beperkingen is onderworpen wil men numerieke instabiliteit vermijden. Daar staat tegenover dat bij impliciete schema's, als N het aantal inwendige Z-punten is, we 3N vergelijkingen moeten oplossen. Voor grote N is dit over het algemeen onuitvoerbaar. Voor een Noordzee-model met een roosterafstand van 42 km. bedraagt N ongeveer 300.

De 2FM onderscheidt zich van alle andere methoden door twee verschillende stelsels differentievergelijkingen om en om te gebruiken. De 2FM vormt daarom een uitzondering op voornoemde algemene schrijfwijze:

$$Z_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} - Z_{j,k}^n = -\frac{\tau}{2H} \{ (\delta_x U)_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + (\delta_y V)_{j,k}^n \}$$

$$U_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} - U_{j,k}^n = -\frac{\tau}{2E} (\delta_x Z)_{j,k}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$V_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} - V_{j,k}^n = -\frac{\tau}{2E} (\delta_y Z)_{j,k}^n$$

$$Z_{j,k}^{n+1} - Z_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{\tau}{2H} \{ (\delta_x U)_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + (\delta_y V)_{j,k}^{n+1} \}$$

$$U_{j,k}^{n+1} - U_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{\tau}{2E} (\delta_x Z)_{j,k}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$V_{j,k}^{n+1} - V_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{\tau}{2E} (\delta_y Z)_{j,k}^{n+1}$$

De 2FM heeft het voordeel van een impliciete methode, aan de tijdstap worden door convergentiecriteria geen beperkingen opgelegd, zonder dat een stelsel vergelijkingen opgelost moet worden, dat  $3x$  zo groot is als het aantal inwendige Z-punten.

5. Afleiding van het discreet analogon volgens Leendertse

In het vervolg zullen wij ons beperken tot een vereenvoudigde (lineaire) versie van de semi-impliciete niet-lineaire methode, die ontwikkeld is door Leendertse. Deze verschilt van de andere methoden i.h.b. door het feit, dat het discretiseren naar  $t$  in twee fasen gebeurt, n.l. van  $t \rightarrow t+\tau/2$  en van  $t+\tau/2 \rightarrow t+\tau$ . We zullen dan ook spreken van de 2-fasen methode (2FM). Voor de differentievergelijkingen zullen we een notatie gebruiken, waarin de verschuiving van het U-, V- en Z-rooster t.o.v. elkaar verwerkt zit. Tussen haakjes achter de functienaam staat het tijdniveau in tijdstappen t.o.v.  $t=n\Delta t$ . Hoewel het hier uiteraard roosterfuncties betreffen, zullen we in het vervolg de bovenindices ht weglaten.

Zij  $Z(0)=Z_{j,k}^n = Z(j\Delta x, k\Delta y, n\Delta t)$  dan is

$$U(0)=U_{j+\frac{1}{2},k}^n, \quad V(0)=V_{j,k+\frac{1}{2}}^n, \quad Z(+1)=Z_{j,k}^{n+1}$$

$$U_{-0}(0)=U_{j-\frac{1}{2},k}^n, \quad Z_{+0}(+\frac{1}{2})=Z_{j+1,k}^{n+\frac{1}{2}}, \quad V_{+-}(0)=V_{j+1,k-\frac{1}{2}}^n$$

of in een figuur voor het tijdsniveau  $t=(n+\frac{1}{2})\Delta t$ :

$$\begin{array}{cc} | & V(+\frac{1}{2}) & & | & V_{+0}(+\frac{1}{2}) \\ - & U_{-0}(+\frac{1}{2}) & \circ & Z(+\frac{1}{2}) & - & U(+\frac{1}{2}) & \circ & Z_{+0}(+\frac{1}{2}) \\ | & V_{0-}(+\frac{1}{2}) & & | & V_{+-}(+\frac{1}{2}) \end{array}$$

dan luiden de differentievergelijkingen:

$$U(+\frac{1}{2})=U(0) - g\tau/2h \{Z_{+0}(+\frac{1}{2}) - Z(+\frac{1}{2})\} \quad (5.1)$$

$$V(+\frac{1}{2})=V(0) - g\tau/2h \{Z_{0+}(0) - Z(0)\} \quad (5.2)$$

$$Z(+\frac{1}{2})=Z(0) - H\tau/2h \{U(+\frac{1}{2})-U_{-0}(+\frac{1}{2}) + V(0) - V_{0-}(0)\} \quad (5.3)$$

$$U(+1)=U(+\frac{1}{2}) - g\tau/2h \{Z_{+0}(+\frac{1}{2}) - Z(+\frac{1}{2})\} \quad (5.4)$$

$$V(+1)=V(+\frac{1}{2}) - g\tau/2h \{Z_{0+}(+1) - Z(+1)\} \quad (5.5)$$

$$Z(+1)=Z(+\frac{1}{2}) - H\tau/2h \{U(+\frac{1}{2})-U_{-0}(+\frac{1}{2}) + V(+1) - V_{0-}(+1)\} \quad (5.6)$$

Voor  $t=0$  geldt

$$Z = U = V = 0$$

Uit de keuze voor het Z-rooster volgt dat de open rand bestaat uit Z-punten. De functiewaarden in deze punten worden gegeven door (3.12). Gesloten randen moeten in de 2FM zo goed mogelijk benaderd worden door lijnstukken evenwijdig aan de X- of Y-as door een U- of een V-punt. Aan voorwaarde (3.13) wordt voldaan door de stroompunten op zo'n rand nul te stellen. Figuur 3 toont de ligging van de roosters van  $\text{brp}(\alpha)$  met  $\alpha=15^\circ$ .

Voor een gehele tijdstap hebben (5.1) t/m (5.6) tot resultaat de volgende betrekkingen:

$$\begin{aligned} Z(+1) + H\tau/2h \{V(+1) - V_{o-}(+1) + U(+1) - U_{o-}(+1)\} \\ = Z(0) - H\tau/2h \{V(0) - V_{o-}(0) + U(0) - U_{o-}(0)\} \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$V(+1) + g\tau/2h \{Z_{o+}(+1) - Z(+1)\} = V(0) - g\tau/2h \{Z_{o+}(0) - Z(0)\} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} U(+1) + g\tau/2h \{Z_{+o}(+1) - Z(+1)\} + Hg\tau^2/4h^2 \{V_{+o}(+1) - V_{+-}(+1) - V(+1) + V_{o-}(+1)\} \\ = U(0) - g\tau/2h \{Z_{+o}(0) - Z(0)\} + Hg\tau^2/4h^2 \{V_{+o}(0) - V_{+-}(0) - V(0) + V_{o-}(0)\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Deze vergelijkingen moet men door  $\tau$  delen om ze op de differentiaalvergelijkingen te laten lijken. Voor een ruimtelijke afbeelding van deze formules, zie de figuren 4a, 4b en 4c.

## 6. Convergentieonderzoek voor een rechthoekig bassin

In dit hoofdstuk onderzoeken we of de 2FM, toegepast op een rechthoekig bassin (brp (0)) convergent is. We spreken van convergentie indien voor  $t \in (0, t_e]$  en voor zekere norm geldt dat

$$\lim_{h, \tau \rightarrow 0} \|\phi_1^{t/\tau} - \phi_1^{*t/\tau}\| = 0$$

$t/\tau$  geheel

Voor  $h \rightarrow 0$  nadert het aantal roosterpunten evenredig met  $1/h^2$  naar  $\infty$ .

We zullen daarom gebruik maken van de volgende norm:

$$\|\cdot\|_{\#} = h \|\cdot\|_2$$

We bepalen eerst de lokale discretisatiefout. Hierbij maken we gebruik van de Taylor-ontwikkeling. Zij  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , een functie waarvan de partiële afgeleiden t/m de 4e orde begrensd zijn, dan luidt de Taylor-ontwikkeling:

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a,b) + \frac{1}{1!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a,b) + \frac{1}{2!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a,b) \\ &+ \frac{1}{3!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(a,b) + \frac{1}{4!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 f(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) \end{aligned} \quad (6.1)$$

met  $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1$ .

We delen (5.8) t/m (5.10) door  $\tau$ .

Dit levert

$$\{Z(+1)-Z(0)\}/\tau + H/2h \{V(+1)+V(0)-V_{o-}(+1)-V_{o-}(0)+U(+1)+U(0) - U_{o-}(+1)-U_{o-}(0)\} = 0 \quad (6.2)$$

$$\{U(+1)-U(0)\}/\tau + g/2h \{Z_{+o}(+1)+Z_{+o}(0)-Z(+1)-Z(0)\} + Hg\tau/4h^2 \{V_{+o}(+1)-V_{+o}(0)-V_{+-}(+1)+V_{+-}(0)-V(+1)+V(0)+V_{o-}(+1)-V_{o-}(0)\} = 0 \quad (6.3)$$

$$\{V(+1)-V(0)\}/\tau + g/2h \{Z_{o+}(+1)+Z_{o+}(0)-Z(+1)-Z(0)\} = 0 \quad (6.4)$$

Zij  $U^*(x,y,t)$ ,  $V^*(x,y,t)$  en  $Z^*(x,y,t)$  de oplossing van brp(0). We veronderstellen dat  $U^*$ ,  $V^*$  en  $Z^* \in C^4$ . We substitueren  $U^*$ ,  $V^*$  en  $Z^*$  in (6.2) t/m (6.4) en bepalen dan de Taylor-ontwikkeling van (6.2) t/m (6.4), in resp.  $(j\Delta x, k\Delta y, (n+\frac{1}{2})\Delta t)$ ,  $((j+\frac{1}{2})\Delta x, k\Delta y, (n+\frac{1}{2})\Delta t)$  en  $(j\Delta x, (k+\frac{1}{2})\Delta y, (n+\frac{1}{2})\Delta t)$ .

We vinden nu de volgende lokale discretisatiefout  $\epsilon^n = (\epsilon_1^n, \epsilon_2^n, \epsilon_3^n)^T$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_1^n &= -\tau^2 \{Z_{ttt}^*/24 + H/8(U_{ttx}^* + V_{tty}^*)\} - \frac{h^2 H}{24} (U_{xxx}^* + V_{yyy}^*) + O(\tau^4) + O(h^4) \\ \epsilon_2^n &= -\tau^2 \{U_{ttt}^*/24 + g/8 Z_{ttx}^* - gH/4 V_{txy}^*\} - h^2 g Z_{xxx}^*/24 + O(\tau^4) + O(h^4) \\ \epsilon_3^n &= -\tau^2 \{V_{ttt}^*/24 + g/8 Z_{tty}^*\} - h^2 g Z_{yyy}^*/24 + O(\tau^4) + O(h^4) \end{aligned} \quad (6.5)$$

We bepalen vervolgens de matrix behorende bij ons discreet analogon.

Hiertoe herschrijven we (5.1) t/m (5.6) als volgt:

$$Z'(+\frac{1}{2}) + d\{U(+\frac{1}{2})-U_{o-}(+\frac{1}{2})\} = Z'(0) - d\{V(0) - V_{o-}(0)\} \quad (6.6)$$

$$U(+\frac{1}{2}) + d\{Z'_{+o}(+\frac{1}{2})-Z'(+\frac{1}{2})\} = U(0) \quad (6.7)$$

$$V(+\frac{1}{2}) = V(0) - d\{Z'_{o+}(0) - Z'(0)\} \quad (6.8)$$







Stellen we vervolgens  $A = I + \tilde{A}$  en  $B = I + \tilde{B}$  dan geldt dat

$$(I + \tilde{B}) \phi_1^{n+\frac{1}{2}} = (I + \tilde{A}) \phi_1^n + d\psi_1^{n+\frac{1}{2}} \quad (6.12)$$

$$(I - \tilde{A}) \phi_1^{n+1} = (I - \tilde{B}) \phi_1^{n+\frac{1}{2}} + d\psi_1^{n+\frac{1}{2}} \quad (6.13)$$

Substitutie van  $I\phi_1^{n+\frac{1}{2}}$  uit (6.12) in (6.13) levert

$$(I - \tilde{A}) \phi_1^{n+1} - (I + \tilde{A}) \phi_1^n = -2\tilde{B}\phi_1^{n+\frac{1}{2}} + 2d\psi_1^{n+\frac{1}{2}} \quad (6.14)$$

Substitutie van  $\tilde{B}\phi_1^{n+\frac{1}{2}}$  uit (6.12) in (6.13) levert

$$(I - \tilde{A})\phi_1^{n+1} + (I + \tilde{A})\phi_1^n = 2\phi_1^{n+\frac{1}{2}} \quad (6.15)$$

We kunnen nu  $\phi_1^{n+\frac{1}{2}}$  uit (6.14) elimineren. We vinden dan

$$(I - \tilde{A})\phi_1^{n+1} - (I + \tilde{A})\phi_1^n = -B\{(I - \tilde{A})\phi_1^{n+1} + (I + \tilde{A})\phi_1^n\} + 2d\psi_1^{n+\frac{1}{2}} \quad (6.16)$$

en hieruit volgt dat

$$(I + \tilde{B})(I - \tilde{A})\phi_1^{n+1} = (I - \tilde{B})(I + \tilde{A})\phi_1^n + 2d\psi_1^{n+\frac{1}{2}} \quad (6.17)$$

Daar het halve tijdniveau op dezelfde wijze uit de vergelijkingen (6.12) en (6.13) geëlimineerd is als uit (5.1) t/m (5.6), zijn we er zeker van dat (6.17) slechts in schrijfwijze verschilt van (5.8) t/m (5.10). Hierbij hebben wij aangenomen dat (5.8) t/m (5.10) gelden voor alle inwendige roosterpunten m.u.v. de U-punten langs de open rand.

$$\begin{array}{ll} \text{Er geldt} & 1e \text{ PAP} = I - \tilde{A} \\ & 2e \text{ P} = P^{-1} \end{array} \quad (6.18)$$

Stellen we  $Q = PA^{-1}PB^{-1}PBPA$  dan wordt (6.17):

$$\phi_1^{n+1} = Q\phi_1^n + 2PA^{-1}PB^{-1}d\psi_1^{n+\frac{1}{2}} \quad (6.19)$$

Voor de berekening van de norm van  $Q^n$  zullen we eerst de 2-norm gebruiken.

$$\begin{aligned} \|Q^n\|_2 &= \|PA^{-1} PB^{-1} PBPAPA^{-1} \dots PBPAPA^{-1}\|_2 \\ &\leq \|A^{-1}\|_2 \|B^{-1}PB\|_2^n \|APA^{-1}\|_2^{n-1} \|A\|_2 \end{aligned} \quad (6.20)$$

wegens  $\|P\|_2 = 1$  (6.21)

$\tilde{A}$  is een anti-symmetrische matrix dus normaal, en hieruit volgt dat A normaal is.

Bewijs:

$\tilde{A}$  normaal, dus unitair diagonaliseerbaar, d.w.z. } unitaire\* matrix U  
zodat  $U\tilde{A}U^H = D_{\tilde{A}}$

dus

$$U(I+\tilde{A})U^H = UIU^H + U\tilde{A}U^H = I+D_{\tilde{A}} = D$$

met

$$\begin{aligned} d_{ij} &= 1+d_{\tilde{A}ii} && \text{voor } i=j \\ &= 0 && \text{voor } i \neq j \end{aligned}$$

Omdat de eigenwaarden van  $\tilde{A}$  zuiver-imaginair zijn zien we dat de eigenwaarden van A in absolute waarde minstens 1 zijn en dus dat de absolute waarde van de absoluut grootste eigenwaarde van  $A^{-1}$  hoogstens 1 is. Wegens de normaliteit van  $A^{-1}$  geldt dat

$$\|A^{-1}\|_2 \leq 1 \quad (6.22)$$

Geheel analoog aan het bewijs dat A normaal is, kunnen we ook bewijzen dat  $(I-\tilde{A})(I+\tilde{A})^{-1}$  normaal is.

$$P \text{ unitair dus } \|APA^{-1}\|_2 = \|PAPA^{-1}\|_2$$

Hieruit volgt dat

$$\|APA^{-1}\|_2 = \|PAPA^{-1}\|_2 = \|(I-\tilde{A})(I+\tilde{A})^{-1}\|_2 = \rho \{(I-\tilde{A})(I+\tilde{A})^{-1}\}$$

---

\*  $U^H = U^{-1}$

Zij  $\alpha_i$  de absolute waarde van een eigenwaarde van  $\tilde{A}$  dan

$$d_{ii} = \frac{1-i\alpha_i}{1+i\alpha_i} \quad \text{en} \quad |d_{ii}| = 1$$

dus geldt dat  $\|APA^{-1}\|_2 = 1$  (6.23)

Geheel analoog geldt dat B normaal is en dat

$$\|B^{-1}\|_2 \leq 1 \quad \text{en} \quad \|B^{-1}PB\|_2 = 1$$
 (6.24)

Toepassing van de stelling van Gershgorin op A levert

$$\|A\|_2 \leq 1+2d$$
 (6.25)

en dit is begrensd als  $\tau/h$  begrensd is.

Stellen we  $C_0 = \|A\|_2$  dan levert substitutie van (7.28) t/m (7.32) in (7.27) dat

$$\|Q^n\|_2 < C_0$$
 (6.26)

Voor de exacte oplossing  $\phi_1^{*n}$  geldt, als nog  $\psi_1^{*n}$  de vector der exacte waarden op de open rand voorstelt,

$$\phi_1^{*n} = Q\phi_1^{*n} + 2PA^{-1}PB^{-1}d\psi_1^{*n+\frac{1}{2}} + PA^{-1}PB^{-1}\tau\epsilon^n$$
 (6.27)

Zij  $e^n = \phi_1^n - \phi_1^{*n}$  dan vinden we uit (6.19) en (6.27) dat

$$e^{n+1} = Qe^n + PA^{-1}PB^{-1}\tau\epsilon^n$$
 (6.28)

Hieruit volgt dat

$$\|e^n\|_2 \leq \text{Max}_{0 \leq k \leq n} \|Q^k\|_2 \|A^{-1}\|_2 \|B^{-1}\|_2 \sum_{l=0}^{n-1} \|\tau\epsilon^l\|_2$$

Gebruikmakend van (6.22), (6.24) en (6.26) en  $n = t_e/\tau$  vinden we

$$\|e^n\|_2 \leq C_0 \max_{0 \leq l \leq n-1} \|\epsilon^l\|_2 \quad (6.29)$$

Omdat  $\tau/h$  begrensd moet zijn, mogen we stellen dat  $\tau \leq M_0 h$ ,  $M_0 > 0$  dus

$$\epsilon_i^1 = O(h^2) \text{ voor } h, \tau \rightarrow 0$$

$$i=1,2,3 \quad 0 \leq l \leq n-1.$$

Er geldt voor  $0 \leq l \leq n-1$  dat

$$\|\epsilon^l\|_2 \leq \sqrt{3 \cdot \frac{ab}{h^2} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{D_0^h} (\epsilon_i^1)^2} = O(h) \quad (6.30)$$

Er geldt

$$\|\phi_1^n - \phi_1^{*n}\|_{**} = \|e^n\|_{**} = h \|e^n\|_2 = O(h^2) \text{ voor } h, \tau \rightarrow 0$$

$\tau/h$  begrensd

wegens (6.29) en (6.30), waarmee convergentie bewezen is, en in de gekozen norm, van de orde 2 is.

In dit hoofdstuk zijn wij uitgegaan van een rechthoekig bassin. In de appendix zullen we aantonen dat ook voor gebieden van willekeurige vorm geldt, dat de norm van de  $n^e$  macht van een met  $Q$  overeenkomende matrix begrensd is.

Dat de 2FM, toegepast op een rechthoekig bassin convergent is, wordt door experimenten bevestigd. Hiervoor gaan we uit van een rooster dat bestaat uit 345 (69x5) inwendige Z-punten.

De waarden van de parameters zijn als volgt:

$$\begin{aligned} g &= 9.80 \text{ ms}^{-2} \\ H &= 20 \text{ m} \\ \Delta s &= 42000 \text{ m} \\ \text{periode invoer} &= 42000 \text{ s} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Voor de resultaten van toepassing van de 2FM op  $brp(0)$  zie figuur 6.

In de rechter bovenhoek staat op de bovenste regel:

$\alpha$  = de hoek van het brp en vervolgens de diepte, daaronder welke functie-waarden afgebeeld zijn en daaronder tenslotte  $T_{fig}$  is het begin tijdstip van de grafiek. Op de abcis, verdeeld in tijdstappen, staat tevens de grootte van de gebruikte tijdstap ( $\Delta t$ ) vermeld.

Uit figuur 6 blijkt dat de berekende golf en de theoretische golf nauwelijks verschillen. Uit de resultaten blijkt tevens dat de inschakelverschijnselen reeds bij de berekening van de tweede golf verwaarloosbaar zijn. De kromme voor  $\Delta t=500$  s blijkt voor het grootste gedeelte tussen de twee voornoemde krommen in te liggen. De voortplantingssnelheid van de berekende golf ( $c^*$ ) is iets lager dan die van de theoretische golf ( $c$ ) nl.  $(c^*/c) \cdot 100 = 98.8$ , in het geval  $\Delta t=500$  s  $99.3$ . De krommen in de overige Z-punten hebben dezelfde vorm en een faseverschil, recht evenredig met de X-coördinaat.

7. Invloed van de grootte van tijdstap en roosterafstand op de benaderde oplossing

Behalve onderzoek van de convergentie is het van belang na te gaan in hoeverre de benaderde oplossing voor zekere  $h$  en  $\tau$  afwijkt van de exacte oplossing.

Zij  $brp(0)$  een ruwe benadering van het getij in de Noordzee. Uitgaande van een roosterafstand van 42 km ligt de Hollandse kust op ongeveer 20 roosterafstanden van de open rand in het Noorden. Met een loopsnelheid van 50.4 km per uur heeft een getijgolf voor deze afstand  $16\frac{2}{3}$  uur dus 40 tijdstappen van  $\tau=1500s$  nodig. Voor een schatting van de globale discretisatiefout in de benaderde oplossing na 40 tijdstappen gaan we uit van de lokale discretisatiefout volgens (6.5).

Wegens  $brp(0)$  zijn de functiewaarden onafhankelijk van de  $Y$ -coördinaat en  $V=0$ . We zullen daarom het probleem beschouwen in één ruimtelijke dimensie, zie figuur 7.

Zij 
$$Z'_j{}^n = \sqrt{g/H} Z_j^n$$

$$\phi^n = (Z'_1{}^n, Z'_2{}^n, \dots, Z'_N{}^n, U_{\frac{1}{2}}^n, \dots, U_{N-\frac{1}{2}}^n)^T$$

$$\psi_j^n = \begin{cases} 0 & \text{als } j \neq N+1 \\ Z'_0{}^n & \text{als } j = N+1 \end{cases} \quad (7.1)$$

en

$$R = \begin{pmatrix} 0 & S \\ -S^H & 0 \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad S = \begin{pmatrix} -1 & +1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & +1 \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$R$  een  $2N \times 2N$  matrix en  $S$  een  $N \times N$  matrix, dan geldt volgens de 2FM dat

$$\left(I + \frac{\tau c R}{2h}\right) \phi^{n+1} = \left(I - \frac{\tau c R}{2h}\right) \phi^n + \frac{\tau c}{2h} (\psi^{n+1} - \psi^n) \quad (7.2)$$

met  $c = \sqrt{gH}$

Zij  $\tilde{\epsilon}_1^n$  de lokale discretisatiefout-vector, die volgt uit (6.5) na nummering volgens  $\phi^n$ . Voor de exacte oplossing  $\phi^{*n} = (Z_1^{*n}, \dots, U_{N-\frac{1}{2}}^{*n})^T$  geldt, als nog  $\psi^{*n}$  de vector der exacte waarden op de open rand voorstelt,

$$\begin{aligned} \left(I + \frac{\tau c R}{2h}\right) \phi^{*n+1} &= \left(I - \frac{\tau c R}{2h}\right) \phi^{*n} + \tau \tilde{\epsilon}^n + \frac{\tau c}{2h} (\psi^{*n+1} - \psi^{*n}) \\ \phi^{*n+1} &= \left(I + \frac{\tau c R}{2h}\right)^{-1} \left(I - \frac{\tau c R}{2h}\right) \phi^{*n} + \left(I + \frac{\tau c R}{2h}\right)^{-1} \tau \left(\tilde{\epsilon}^n + \frac{c}{2h} (\psi^{*n+1} - \psi^{*n})\right) \end{aligned} \quad (7.3)$$

Zij  $e^n = \phi^n - \phi^{*n}$  dan volgt uit (7.2) en (7.3) dat

$$e^{n+1} = \left(I + \frac{\tau c R}{2h}\right)^{-1} \left(I - \frac{\tau c R}{2h}\right) e^n + \left(I + \frac{\tau c R}{2h}\right)^{-1} \tau \tilde{\epsilon}^n \quad (7.4)$$

waaruit volgt dat

$$\|e^{n+1}\| \leq \max_{0 \leq k \leq n+1} \left\| \left[ \left(I + \frac{\tau c R}{2h}\right)^{-1} \left(I - \frac{\tau c R}{2h}\right) \right]^k \right\| \cdot \left\| \left(I + \frac{\tau c R}{2h}\right)^{-1} \sum_{i=0}^n \tau \tilde{\epsilon}^i \right\| \quad (7.5)$$

R is anti-symmetrisch dus

$$1e. \quad \left\| \left[ \left(I + \frac{\tau c R}{2h}\right)^{-1} \left(I - \frac{\tau c R}{2h}\right) \right]^k \right\|_2 = 1 \quad (7.6)$$

$$2e. \quad \left\| \left(I + \frac{\tau c R}{2h}\right)^{-1} \right\|_2 < 1$$

Wegens (7.6) zullen we verder gebruik maken van de 2-norm.

Substitutie van (7.6) in (7.5) levert

$$\|e^{n+1}\|_2 \leq \tau \sum_{i=0}^n \|\tilde{\epsilon}^i\|_2 \quad (7.7)$$

Met (3.14) t/m (3.16) en de grootte van de parameters volgens (6.31) vinden we na enig rekenwerk dat

$$\|e^{40}\|_2 \leq 0.39 \quad (7.8)$$



Uit de experimenten volgt dat  $\|e^{40}\|_2 = 0.27$ , wat geheel voldoet aan de verwachtingen. Uit de experimenten blijkt tevens dat het maximale verschil tussen de berekende waterstand voor  $x = 20h$  en de overeenkomstige waarde volgens de exacte oplossing 0.13 m bedraagt. Ook dit resultaat is in overeenstemming met (7.8). Overigens moeten we opmerken dat een absolute fout van 13 cm aan de hoge kant is voor praktische toepassing van de methode. Nadere analyse van de globale discretisatiefout toont, dat deze het gevolg is van een fase-verschuiving. De fout in de amplitude voor  $x = 20h$  is kleiner dan 2 cm, hetgeen in de praktijk verwaarloosbaar is.

Gaan we na hoe de fasesnelheid weergegeven wordt. We zullen dit onderzoeken in één ruimtelijke dimensie. We gaan uit van de volgende vergelijking

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (7.9)$$

met

$$\phi = (U, \sqrt{g/H} Z)^T \quad \text{en} \quad c = \sqrt{gH}$$

We beschouwen golven van de gedaante

$$\phi(x,t) = \text{Re}(\theta(t)e^{ikx}) \quad (7.10)$$

Substitutie van (7.10) in (7.9) levert een voorwaarde voor  $\theta$  nl.:

$$\frac{d\theta}{dt} + ikc\theta = 0 \quad (7.11)$$

met als oplossing  $\theta(\tau) = \theta(0)e^{-ikc\tau}$

hierin is  $\theta(0)$  de startwaarde van de amplitude.

De gezochte oplossing luidt dus

$$\phi(x,t) = \text{Re}(\theta(0)e^{ik(x-ct)}) \quad (7.12)$$

waaruit volgt dat de golven een constante fasesnelheid  $c$  hebben langs de X-as.

We gaan (7.9) uitsluitend ruimtelijk discretiseren overeenkomstig de 2FM:

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial t} + c \frac{\phi_{j+\frac{1}{2}} - \phi_{j-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} = 0 \quad (7.13)$$

waarin  $\Delta x = \frac{1}{2}h$ .

We doen dit, om na te gaan hoe groot de fout in de fasesnelheid is, die het gevolg is van de discretisatie in de ruimtelijke dimensie.

Substitutie van  $\phi_j(t) = \text{Re}(\theta(t)e^{ikj\Delta x})$  in (7.9) levert nu de voorwaarde:

$$\frac{d\theta}{dt} + ikc\left(\frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}\right)\theta = 0 \quad (7.14)$$

Zij  $c^* = c \cdot \sin(k\Delta x)/k\Delta x$  de fasesnelheid volgens (7.14) en  $c^{**}$  de fasesnelheid bepaald uit experimenten met de 2FM. Wanneer we uitgaan van de grootte van de parameters, zoals aangegeven in (6.31) dan is  $k\Delta x = \pi/14$ , en vinden we dat  $c^{**} = 0.988c$  en  $c^* = 0.993c$  voor  $\Delta t = 1500s$ . Voor andere waarden van  $k\Delta x$  vinden we de volgende fasesnelheden in procenten van  $c$ :

$\Delta t = 1500s$			$\Delta t = 500s$		
$k\Delta x$	$c^{**}$	$c^*$	$k\Delta x$	$c^{**}$	$c^*$
$\pi/28$	99.6	99.8			
$\pi/14$	98.8	99.3	$\pi/14$	99.2	99.3
$\pi/7$	95.0	96.7			

We zien hieruit, dat als we de roosterafstand t.o.v.(6.31) halveren een belangrijke verbetering van de berekende fasesnelheid wordt verkregen.

De vertraging in de fasesnelheid is eenvoudig te verhelpen door te werken met een vervangende diepte. Zij  $H_v^*$  en  $H_v^{**}$ , de vervangende diepte voor resp. uitsluitend ruimtelijke discretisatie en totale discretisatie. Uit  $c^{**} = 0.988c$  en  $c = \sqrt{gH}$  volgt dat  $H_v^{**} = 20.5$  m. Toepassing van deze vervangende diepte levert de juiste fasesnelheid, zie figuur 8.

We zullen nu een formule afleiden voor de vervangende diepte als functie van H.

Er geldt dat

$$\begin{aligned}c^* &= c \cdot \sin k\Delta x/k\Delta x \\ &= c \{ 1 - (k\Delta x)^2/6 + O((k\Delta x)^4) \} \\ &= c \{ 1 - (\frac{2\pi}{T\sqrt{gH}})^2 (\frac{h}{2})^2/6 + O((k\Delta x)^4) \} \\ &= c \{ 1 - \frac{\pi^2 h^2}{T^2 gH} /6 + O((k\Delta x)^4) \} \end{aligned} \tag{7.15}$$

Voor de vervangende diepte geldt dat

$$c^* = \sqrt{gH} \tag{7.16}$$

Verwaarlozen we de restterm dan volgt uit (7.15) en (7.16) dat

$$\sqrt{gH} = \sqrt{gH_v^*} \left( 1 - \frac{\pi^2 h^2}{T^2 gH6} \right)$$

dus

$$H_v^* \approx H + \frac{1}{3} \left( \frac{h}{T} \right)^2 \tag{7.17}$$

Substitutie van  $H=20$ ,  $h=42000$  en  $T=42000$  levert dat

$$H_v^* = 20\frac{1}{3} \text{ m.}$$

De resultaten van berekeningen met een vervangende diepte wekken de indruk alsof we door wijziging van de diepte de globale discretisatiefout van de methode gedecimeerd hebben. Deze indruk is onjuist. Het rekenen met een vervangende diepte levert een berekende golf, waarvan de fasesnelheid overeenkomt met die van een golf volgens de exacte oplossing van ons oorspronkelijke probleem. Door gebruik te maken van een vervangende diepte lossen we een ander probleem op. Uit voorstaande analyse blijkt dit geen bezwaar te zijn, integendeel.

## 8. Convergentieonderzoek voor een trapeziumvormig bassin

Bij de opbouw van het discrete analogon van  $\text{brp}(\alpha)$   $\alpha \neq 0$  volgens de 2FM, kunnen we de scheve gesloten rand slechts weergeven met een soort van trap, zie figuur 3. Hierbij wordt de absolute waarde van de X- of Y-component van de stroom\* nul gesteld, hetgeen in strijd is met de fysische situatie. In het geval van  $h \rightarrow 0$  betekent dit, dat zelfs de stroom\* in absolute waarde nul gesteld wordt. Dat randwaarde-probleem heeft in het algemeen geen oplossing.

We kunnen een getrapte rand beschouwen als een ruwe benadering voor de scheve rand en voor  $h \rightarrow 0$  de traprede onveranderd laten. In dit geval lossen we echter een ander probleem op. In hoeverre de exacte oplossing van laatstgenoemd probleem overeenkomt met de exacte oplossing van  $\text{brp}(\alpha)$  is langs analytische weg uiterst moeilijk na te gaan. Om te bepalen in hoeverre de benaderde oplossing overeenkomt met de analytische (asympt.) oplossing van ons oorspronkelijk probleem (met  $h=42000$  m) beschouwen we de volgende experimenten.

Hierbij gaan we in de eerste plaats uit van de functiewaarden van U, V en Z voor zekere t volgens de exacte oplossing, stel  $t=60000$ s. De figuren 9a en 9b laten het verloop van de waterstand zien volgens de exacte oplossing (linkerzijde) met daarnaast het verschil van de berekende waterstand minus de overeenkomstige waterstand volgens de exacte oplossing. We maken bij deze berekeningen gebruik van de vervangende diepte voor het één-dimensionale geval als schatting voor de vervangende diepte in het twee-dimensionale geval. Het nul stellen van de X-component van de stroom in een hoekpunt, bijvoorbeeld het punt  $(1\frac{1}{2}, 6)$  is aanleiding tot grote fouten in het naastgelegen Z-punt  $(2, 6)$ . We zien hier duidelijk, dat de 2FM toegepast op  $\text{brp}(\alpha)$ ,  $\alpha=15^\circ$  niet voldoet.

---

\* langs de rand

Behalve uitgaan van de exacte oplossing voor een vrij grote  $t$ , kunnen we overeenkomstig voorwaarde (3.11) ook uitgaan van  $U=V=Z=0$  voor  $t=0$ .

Deze uitgangssituatie heeft voor de experimenten echter het bezwaar, dat wij de eerste golf (of golven) niet kunnen gebruiken voor vergelijking, daar deze zich theoretisch niet eenvoudig laat (laten) beschrijven.

Figuur 10 toont de krommen met het verloop van de berekende waterstand in het punt (4.6) volgens beide voornoemde uitgangspunten en volgens de exacte oplossing voor één en dezelfde periode. Uit deze figuur blijkt dat de afwijkingen van de berekende waterstanden t.o.v. de overeenkomstige waterstanden volgens de exacte oplossing aanzienlijk zijn.

In de bovenste helft van de figuren 11a en 11b staan de waterstanden volgens de exacte oplossing voor  $t=100500$  resp.  $103500$ . In de onderste helft van voornoemde figuren staat het verschil van de berekende waterstanden (met vervangende diepte) minus de overeenkomstige waterstanden volgens de exacte oplossing. We zien dat de grootste fout in een hoekpunt optreedt, maar ook dat de fouten zich door het gehele gebied voortplanten. In figuur 12a staan de positieve extremen volgens de exacte oplossing, en in 12b staan de verschillen van de berekende positieve extremen, in het geval van toepassing van de 2FM op  $brp(15)$  met dieptecorrectie, minus de overeenkomstige waarden volgens de exacte oplossing.

Om na te gaan wat de 2FM voor  $brp(15)$  nu wel uitrekent, zouden we een experiment kunnen doen, waarbij de "treehoogte" gehandhaafd blijft, maar de roosterafstand  $h' = \frac{h}{5}$  en de tijdstap  $\tau' = \frac{\tau}{3}$  is. Hiervan is echter wegens het grote geheugengebruik en de lange verwerkingstijd afgezien.

Voor  $\alpha=45^\circ$  kunnen we voorwaarde (3.13) opnemen in de differentievergelijkingen wegens

$$\sin(45)U_{-0}(\cdot) = \cos(45).V(\cdot)$$

dus dat  $U_{-0}(\cdot) = V(\cdot)$  (8.1)

Substitutie van (8.1) in resp. (5.3) en (5.6), waarbij we even voortij gaan aan de verschillen in t levert:

$$Z(+\frac{1}{2})=Z(0) - \frac{H\tau}{2h} \{U(+\frac{1}{2})-V_{o-}(0)\} \quad (8.2)$$

$$Z(+1)=Z(+\frac{1}{2}) - \frac{H\tau}{2h} \{U(+\frac{1}{2})-V_{o-}(+1)\} \quad (8.3)$$

Zij (5.1), (5.2), (5.4) en (5.5) ongewijzigd als resp. (8.4), (8.5), (8.6) en (8.7). Vergelijken we nu de differentievergelijkingen van de 2FM dus met  $U_{-o}(\cdot)=V(\cdot)=0$  voor stroompunten op de rand met (8.2) t/m (8.7), dan zijn deze stelsels identiek. Om te bepalen hoe groot de fout in t nu is die we gemaakt hebben, beschouwen we (5.8) t/m (5.10), dus de vergelijkingen na eliminatie van de halve tijdstap. Substitueren we (8.1) in (5.10), nu zonder een fout te maken, dan wordt dat

$$Z(+1) + \frac{H\tau}{2h} \{-V_{o-}(+1)+U(+1)\} = Z(0) - \frac{H\tau}{2h} \{-V_{o-}(0)+U(0)\} \quad (8.8)$$

(5.8) en (5.9) blijven ongewijzigd, stel resp. (8.9) en (8.10).

Vergelijken we nu de differentievergelijkingen van de 2FM, dus met  $U_{-o}(\cdot)=V(\cdot)=0$  met (8.8) t/m (8.10), dan vinden we dat (5.8) en (5.9) geheel overeenstemmen maar dat (5.10) een term  $\tau^2 gH/4h^2 \cdot V_{+o}(+1)$  in het linker- en een term  $\tau^2 gH/4h^2 \cdot V_{+o}(0)$  in het rechterlid mist t.o.v. (8.8). Daar bij de gebruikte parameters  $\tau^2 gH/4h^2 \approx 0.08$  is, en  $V_{+o}(+1)$  en  $V_{+o}(0)$  weinig zullen verschillen, lijkt het of de 2FM voor brp(45) goede resultaten levert.

Uit de afleidingen in hoofdstuk 7 bleken de overige eigenschappen onafhankelijk van  $\alpha$ . Uit experimenten blijkt echter dat de fouten voor brp(45) van dezelfde grootte zijn, als die voor brp(15); vergelijk hiervoor figuur 13a, 13b met figuur 11a, 11b. In figuren staan in de onderste helft de berekende waarden minus de overeenkomstige waarden van de exacte oplossing.

Uit een vergelijking van de benaderde golf met de exacte golf blijkt dat door de getrapte rand de stroom langs de rand een  $\sqrt{2} \times$  langere weg moet afleggen. Uitgaande van de gegevens volgens (6.31) geeft dit aanleiding tot een faseverschil van ongeveer  $6^\circ$ . Door het rekenen in twee-fasen ontstaat er echter nog een additioneel faseverschil van ongeveer  $12^\circ$  tussen een Z-punt in de hoek  $(Z_{x,y}^n)$  en het daar onderliggende Z-punt  $(Z_{x,y-1}^n)$ . Dit is als volgt in te zien.

Na uitvoering van

1e. impliciete stap (1e fase) geldt  $Z_{x,y-1}^{n+\frac{1}{2}} = f(Z_{x-1, y-1}^{n+\frac{1}{2}}),$

2e. impliciete stap (2e fase) geldt  $Z_{x,y-1}^{n+1} = f(Z_{x-1, y-1}^{n+\frac{1}{2}}),$

3e. impliciete stap (1e fase) geldt  $Z_{x,y-1}^{n+1\frac{1}{2}} = f(Z_{x-1,y-1}^{n+1\frac{1}{2}}).$

Vóór de 4e impliciete stap (2e fase) bestaat er tussen

$Z_{x,y}^{n+1\frac{1}{2}}$  en  $Z_{x,y-1}^{n+1\frac{1}{2}}$  een verschil in waterstand wat overeenkomt met het

verschil  $Z_{x-1,y-1}^{n+1\frac{1}{2}}$  en  $Z_{x-1,y-1}^{n+1}.$

Uitgaande van (6.31) komt dit overeen met een faseverschil van ongeveer  $12^\circ.$  Voornoemde faseverschillen geven aanleiding tot grote waterstandschommelingen in de Z-punten aan de scheve rand.

9. Verbetering van de oorspronkelijke randvoorwaarden

Samenvattend blijkt de 2FM bij toepassing op  $\text{brp}(0)$ , tweede orde nauwkeurig en voor ruime grenzen van  $h$  en  $\tau$  convergent te zijn. Tevens blijkt door een eenvoudige ingreep het verschil in loopsnelheid tussen de ware en de berekende golf en daardoor de globale discretisatiefout verwaarloosbaar klein te kunnen worden. We zullen daarom proberen de fout in de randvoorwaarden bij  $\text{brp}(\alpha)$  op te heffen.

Enerzijds moet gelden dat

$$k_2 U = k_1 V \text{ voor alle punten } D_2 \quad (9.1)$$

anderzijds moet de waarde van de functies op de randpunten op het nieuwe tijdniveau, voorzover mogelijk bekend zijn, wegens het impliciete karakter van  $U$  en  $V$  tijdens de eerste resp. tweede fase. Omdat  $U$  en  $V$  niet op eenzelfde plaats gedefinieerd zijn, stellen we dat  $U$  en  $V$  aan (9.1) voldoen, indien geldt dat

$$(V_{j,k+\frac{1}{2}}^n + V_{j,k-\frac{1}{2}}^n) / (U_{j+\frac{1}{2},k}^n + U_{j-\frac{1}{2},k}^n) = \text{tg}(\alpha)$$

voor  $j, k$  geheel,  $\alpha \neq 0$

$(j, k)$  gelegen op afstand  $h/2$  van de rand.

We onderscheiden twee gevallen:

$$\begin{array}{ll} \text{brp}(\alpha) \text{ met} & 1e \quad 0 < \alpha \leq 45^\circ \\ & 2e \quad 45 < \alpha < 90^\circ \end{array}$$

In ons probleem heeft de configuratie maar één scheve rand, maar uiteraard kunnen in meer gecompliceerde gebieden beide gevallen tegelijkertijd voorkomen.

$$1e \quad 0 < \alpha \leq 45^\circ.$$

Voor een gedeelte van het rooster van  $\text{brp}(15)$  zie figuur 14.

We willen de functiewaarden op de rand een halve tijdstap vooruit berekenen.

Voor de eerste fase levert toepassing van (3.8) op het punt  $(2\frac{1}{2}, 6)$ :

$$U_{2\frac{1}{2},6}^{n+\frac{1}{2}} = U_{2\frac{1}{2},6}^n - \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_{2\frac{1}{2},6}^n + O(\tau^2) \quad (9.2)$$

$\left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_{2\frac{1}{2},6}^n$  benaderen we met Taylor-ontwikkeling:

$$\left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_{2\frac{1}{2},6}^n = \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_{3\frac{1}{2},5}^n - h \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right)_{3\frac{1}{2},5}^n + h \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} \right)_{3\frac{1}{2},5}^n + O(h^2)$$



$$= \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{3\frac{1}{2},5}^n + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{3\frac{1}{2},6}^n - \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{3\frac{1}{2},4}^n - \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{4\frac{1}{2},5}^n + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{2\frac{1}{2},5}^n \right\} + o(h^2) \quad (9.3)$$

Er geldt dat  $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{j+\frac{1}{2},k}^n = 1/h(Z_{j+1,k}^n - Z_{j,k}^n) + o(h^2)$  (9.4)

Door substitutie van (9.4) in (9.3) bepalen we nu  $U_{2\frac{1}{2},6}^{n+\frac{1}{2}}$ , en op dezelfde wijze de overige  $U_{D_2}$ .

De verschillende  $V^{n+\frac{1}{2}}$ 's op de rand volgen uit (9.1):

$$V_{j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = -V_{j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \text{tga}(\alpha(U_{j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} + U_{j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}})) \quad (9.5)$$

Voor het berekenen van de inwendige punten gebruiken we de nieuwe randpunten.

Voor de tweede fase stellen we  $V_{j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} = V_{j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  (9.6)

omdat er geen reden is om aan te nemen dat extrapolatie betere resultaten zou leveren.

Tevens vervangen we in de tweede fase  $U_{j+\frac{1}{2},k}^{n+1}$  door de inmiddels bekende waarde van  $U_{j+\frac{1}{2},k-1}^{n+1}$

$$2e \quad 45 < \alpha < 90^\circ.$$

Het berekenen van de randpunten voor een halve tijdstap vooruit gaat geheel analoog aan het eerste geval na verwisseling van U en V, en de eerste fase met de tweede fase.

Dit is nu het eenvoudigste recept om de behandeling van de randen te verbeteren. We zullen nu nagaan in hoeverre de eigenschappen van de 2FM behouden zijn. Hierbij vergelijken we de oorspronkelijke methode met de verbeterde. Allereerst merken we op, dat in de verbeterde methode wel aan voorwaarde (3.13) voldaan is. Tevens dat gedurende de eerste fase er nu een goede benadering van de randwaarden wordt verkregen.

De benadering voor de V-randpunten gedurende de tweede fase is minder goed. Echter wegens  $0 < \alpha < 45^\circ$  zullen deze waarden belangrijk kleiner zijn dan de U-waarden en daardoor zal de absolute fout toch gering zijn.

De figuren 15a, 15b en 16 tonen een overzicht van de resultaten van toepassing van de verbeterde methode op  $\text{brp}(15)$ . In de figuren 15a en 15b kunnen we vergelijken het verschil van de berekende waterstanden volgens de oorspronkelijke methode minus de overeenkomstige waarden volgens de exacte oplossing, met het verschil van de berekende waterstanden volgens de verbeterde methode minus weer de overeenkomstige waarden volgens de exacte oplossing. Uit deze figuren blijkt duidelijk in welke mate de methode verbeterd is. Uit de onderste helft van figuur 15b blijkt dat de maximale absolute fout met de verbeterde methode 7 cm bedraagt. Ook op andere tijdstippen is dit de grootste waarde. De amplitudes van figuur 12a in aanmerking genomen (70 - 100 cm.) en dat er sprake zal zijn van enige faseverschil leidt tot de conclusie dat deze fout bijzonder klein is.

Figuur 16 bevat het verschil tussen de berekende maximale positieve uitwijking volgens de verbeterde methode minus de overeenkomstige waarden volgens de exacte oplossing. Deze laatste staan in figuur 12a.

Ook uit vergelijking van figuur 16 met figuur 12b blijkt de verbetering van de rekenresultaten.

De oorspronkelijke methode (Leendertse 1967) verschilt van de 2FM door zijn niet-lineariteit en termen voor wrijvings- en Corioliskracht. Hierdoor zijn eerder gevonden resultaten van het convergentieonderzoek niet zonder meer van toepassing op de oorspronkelijke methode. De voorgeschreven randbehandeling komt echter geheel met die van de 2FM overeen. Teneinde de fouten, die daar het gevolg van zijn te elimineren, dient ook de oorspronkelijke methode met een analoge verbetering van de randvoorwaarden te worden uitgebreid.







met

$$G_{n_1} = \begin{pmatrix} d & -d & \circ \\ & & \\ \circ & & \\ & & d & -d \end{pmatrix}$$

$n_1 \times n_1 - 1$  matrix

$$F_{n_1} = \begin{pmatrix} +d & -d & \circ \\ & & \\ \circ & & \\ & & -d & +d \end{pmatrix}$$

$n_1 \times n_1$  matrix

Nu geldt dat als  $A' = I + \tilde{A}'$  en  $B' = I + \tilde{B}'$ , dat  $\tilde{A}'$  en  $\tilde{B}'$  weer anti-symmetrisch zijn, en tevens dat de afleiding in hoofdstuk 6 van (6.18)t/m (6.26) ook geldt voor:

$$Q' = P'A'^{-1}B'P'B'^{-1}A'$$

zij  $C_1 = \|A'\|_2$  dan geldt dat  $\|Q'^n\|_2 < C_1$  als  $\tau/h$  begrensd is.

Het is eenvoudig na te gaan dat spiegeling van de middelste rij Z-punten (zie figuur 18) een overeenkomstig resultaat oplevert.

De figuren 17 en 18 bevatten alle mogelijkheden voor een Z-punt m.b.t. de overige inwendige punten in zijn directe omgeving. We mogen dan ook concluderen dat ook voor  $M > 3$  geldt dat als

$$\eta_2^{n+1} = Q_2 \eta_2^n$$

met  $\eta_2$  de vector van alle inwendige roosterpunten en geldt dat

$$\|Q_2^n\| < C_2$$

als  $\tau/h$  begrensd en  $C_2$  een nader te bepalen constante is.

11. Lijst van gebruikte symbolen

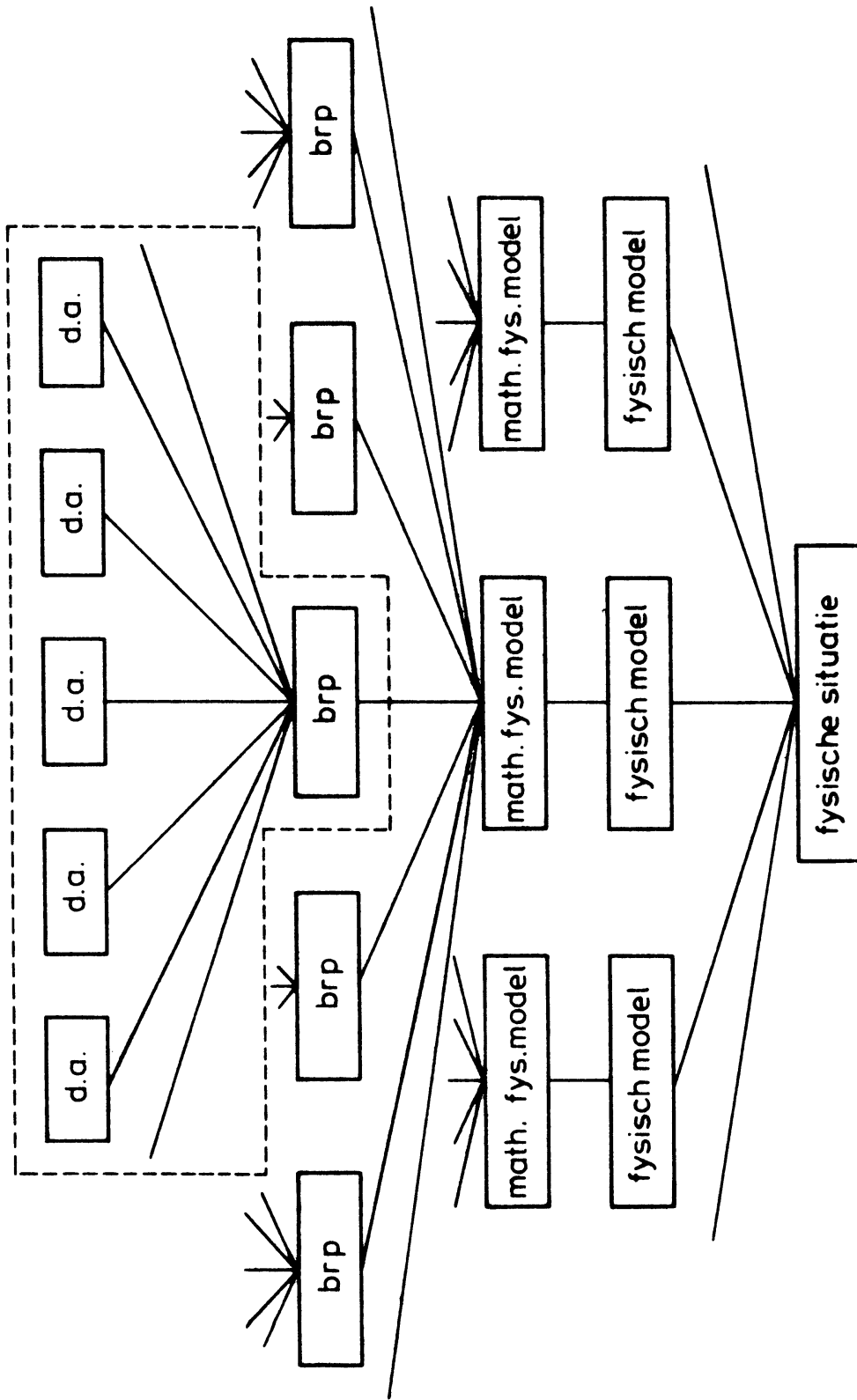
$a$	lengte bassin langs de X-as
$b$	kleinste breedte bassin
$c, c^*, c^{**}$	fase-snelheid
$d, q$	constante
$d_{ii}$	matrix-element
$e^n$	globale discretisatiefout
$g$	gravitatie constante
$h$	roosterafstand
$i, j, k, l$	teller
$\vec{k}$	vector met elementen $k_1$ en $k_2$
$m, n$	geheel getal
$p$	druk
$r, r_o$	afstand
$\vec{s}$	stroomvector
$t$	tijd
$t_o, t_e$	tijdstip
$u, v, w$	snelheidscomponent i/d resp. X-, Y- en Z-richting
$x, y, z$	plaats coördinaat
$x_b, y_b$	coördinaten bron
$A, B, P, Q, Q_1, Q_2$	matrix
$\tilde{A}, \tilde{B}$	matrix
$A_r, A_i$	constante
$C_o, C_1, C_2$	constante
$D_o$	open gebied
$D_1, D_2, D$	gebied
$D_U^h, D_V^h, D_Z^h$	U, V en Z-rooster
$F_x, F_y, F_z$	uitwendige kracht i/d resp. X-, Y- en Z-richting
$H$	diepte
$H_v, H_v^*, H_v^{**}$	vervangende diepte
$I$	gesloten niet-negatief interval
$I_N, F_N, E_N, G_N$	$N \times N$ matrix
$I^T$	tijddiscretisatie

$L$	lengte
$H_0^{(1)}, J_0, Y_0$	resp. Hankel, Bessel en Weber functies v/d eerste orde
$M_2$	harmonische getijcomponent
$M_0$	constante
$M, N$	aantal roosterpunten i/d X-resp. Y-richting
$R, S$	matrix
$U, V$	component v/d gemiddelde stroom i/d X- resp. Y-richting
$U^h, V^h, Z^h$	roosterfunctie
$U_x$	partiële afgeleide
$U^*, V^*, Z^*$	exacte oplossing
$Z$	afwijking v/h ongestoorde wateroppervlak
$Z(0), Z_{+0}(0)$	notatie voor Z-punt
$Z_{j,k}^n$	idem
$\alpha, \beta, \gamma$	hoek
$\partial_x, \partial_y$	differentie-operator
$\delta_1, \delta_2, \epsilon_1, \epsilon_2$	constante
$\epsilon^n$	lokale discretisatiefout met componenten $\epsilon_1^n, \epsilon_2^n, \epsilon_3^n$
$\tilde{\epsilon}^n$	idem
$\rho$	dichtheid
$\tau$	tijdstap
$\phi$	functie
$\omega$	hoeksnelheid
$\phi_1^n, \psi_1^n, \psi_1^n, \eta_1, \eta_2$	vector
$\ \cdot\ _x, \ \cdot\ _2$	norm
$(\cdot, \cdot)^T, F^H$	getransponeerde vector resp. matrix
$\mathbb{R}^2$	2-dimensionale reële ruimte
$\Delta x, \Delta y, \Delta s$	roosterafstand
$\Delta t$	tijdstap
$\theta_u, \theta_v, \theta_z$	constante
$\theta(t)$	functie
$\Phi, \Phi_Z, \Phi_U, \Phi_V$	deelruimte
$\alpha_{i,\rho}$	eigenwaarde
$\phi^{*n}$	exacte oplossingsfunctie
$Z', t', r'$	dimensieloze variabelen

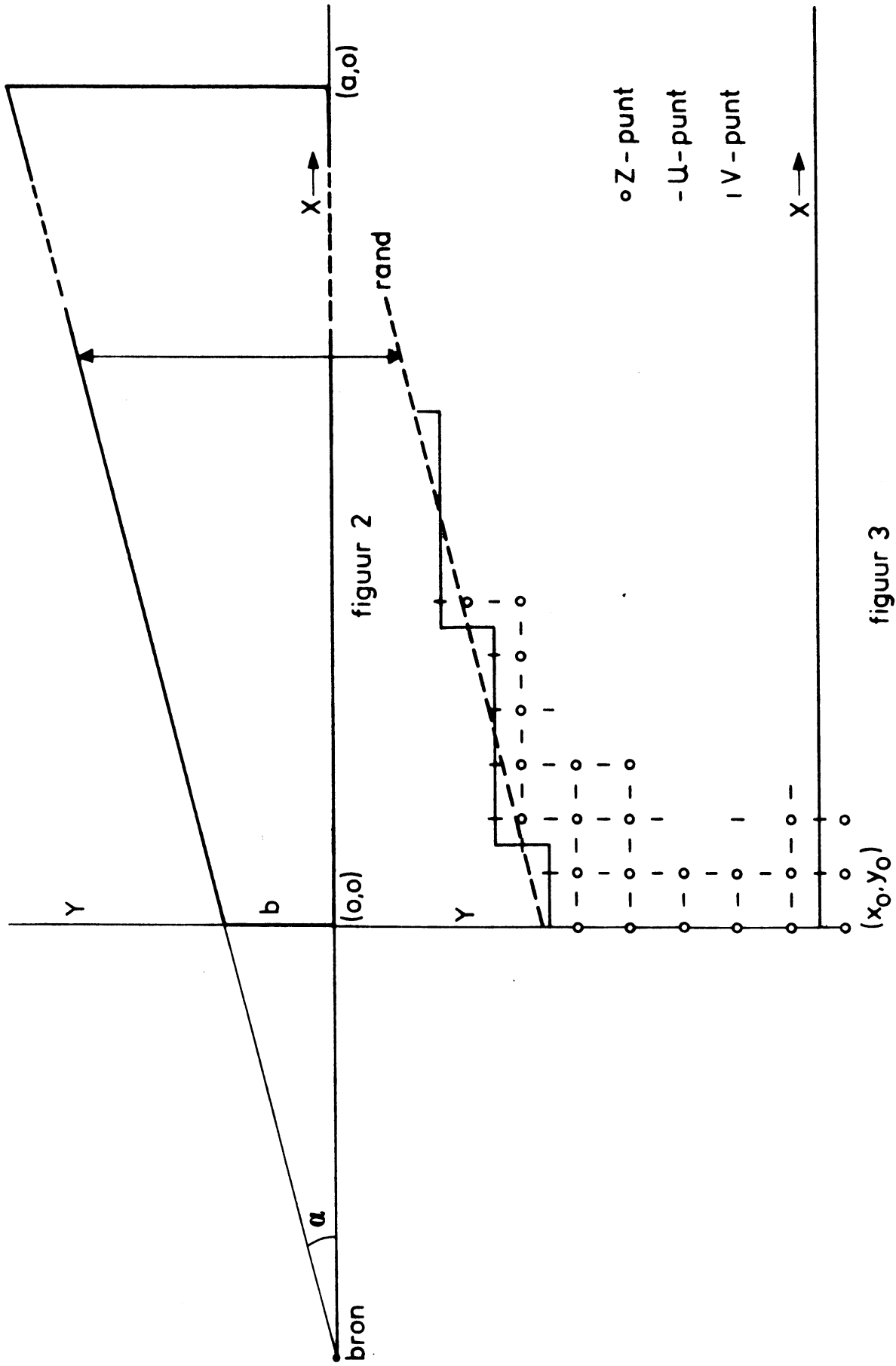


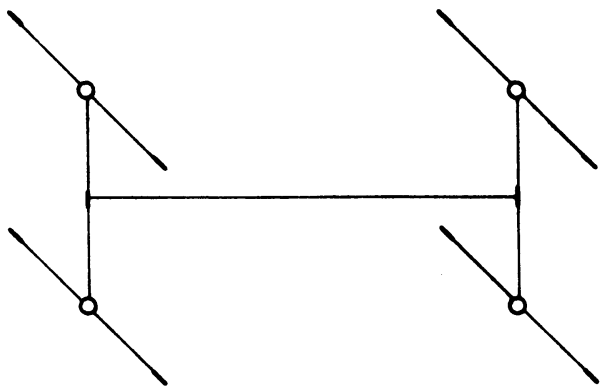
12. Literatuur

- Arakawa, A. en Mesinger, F. 1976 - Numerical methods used in atmospheric models. WMO-ICSU Joint Organizing Committee, GARP Publications Series No. 17.
- Brettscheider, G. 1967 - Anwendung des hydrodynamisch numerisch Verfahren zur Ermittlung der M2-Mitschwingungszeit der Nordsee. Mitteilungen des Instituts für Meereskunde der Universität Hamburg No. VII, Hamburg
- Fischer, G. 1959 - Ein numerisches Verfahren zur Errechnung von Windstau und Gezeiten in Randmeeren. Tellus Volume 11, 60-76.
- Geerts, J.H. 1976 - Onderzoek naar enkele eigenschappen van een expliciet differentiesysteem voor het oplossen van de ondiepwater-vergelijkingen. Rijkswaterstaat publicatie No. 74576.
- Godunov, S.K. en Ryabenkii, V.S. 1964 - Theory of Difference Schemes - North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Hansen, W. 1956 - Theorie zur Errechnung des Wasserstandes und den Strömungen in Randmeeren nebst Anwendungen, Tellus Volume 8, 287-300.
- Heaps, N.S. 1969 - A two-dimensional numerical sea-model. Philos. Trans. of the Royal Society of London, Ser. A. vol. 265.
- Houwen, P.J. van der, 1966 - On the stability of a difference scheme for the North Sea problem. Rep. Tw. 100, Mathematisch Centrum, Amsterdam.
- Kronig, R. 1954. Leerboek der Natuurkunde. Scheltema en Holkema, Amsterdam.
- Landau, L.D. en Lifshitz, E.M. 1959 - Fluid Mechanics. Pergamon Press, Oxford.
- Leendertse, J.J. 1967 - Aspects of a computational model for long-period water-wave propagation. RM-5294-PR, Rand Corporation, Santa Monica, California.
- Röber, K. 1970 - Analytische und numerische Lösungen für Mitschwingungszeiten in einem Rechteckbecken konstanter Tiefe unter Berücksichtigung von Boden Reibung, Corioliskraft und horizontalen Austausch. Mitteilungen des Instituts für Meereskunde der Universität Hamburg nr. XVI Hamburg.
- Sündermann, J. 1966 - Ein Vergleich zwischen der analytischen und der numerischen Berechnung winderzeugter Strömungen und Wasserstände in einem Modellmeer mit Anwendungen auf die Nordsee. Mitteilungen des Instituts für Meereskunde der Universität Hamburg nr. IV, Hamburg.

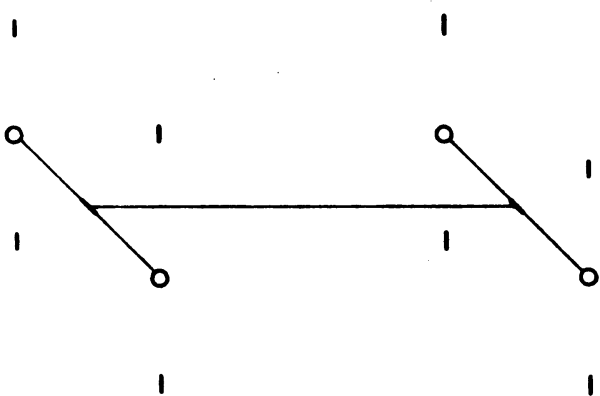


figuur 1

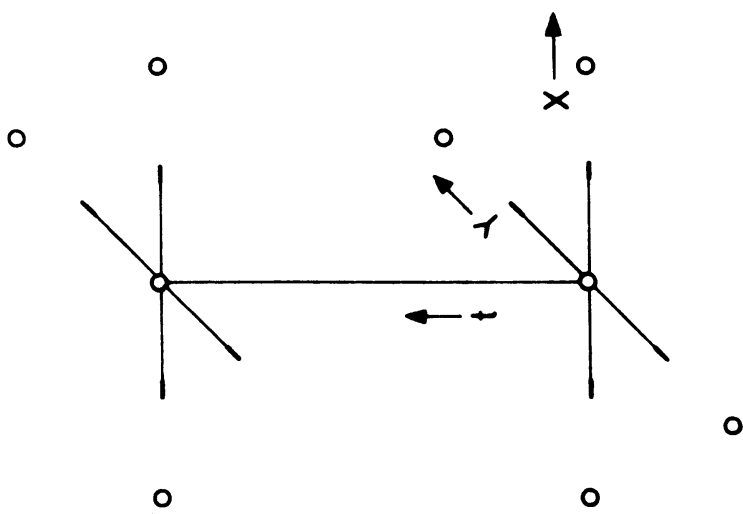




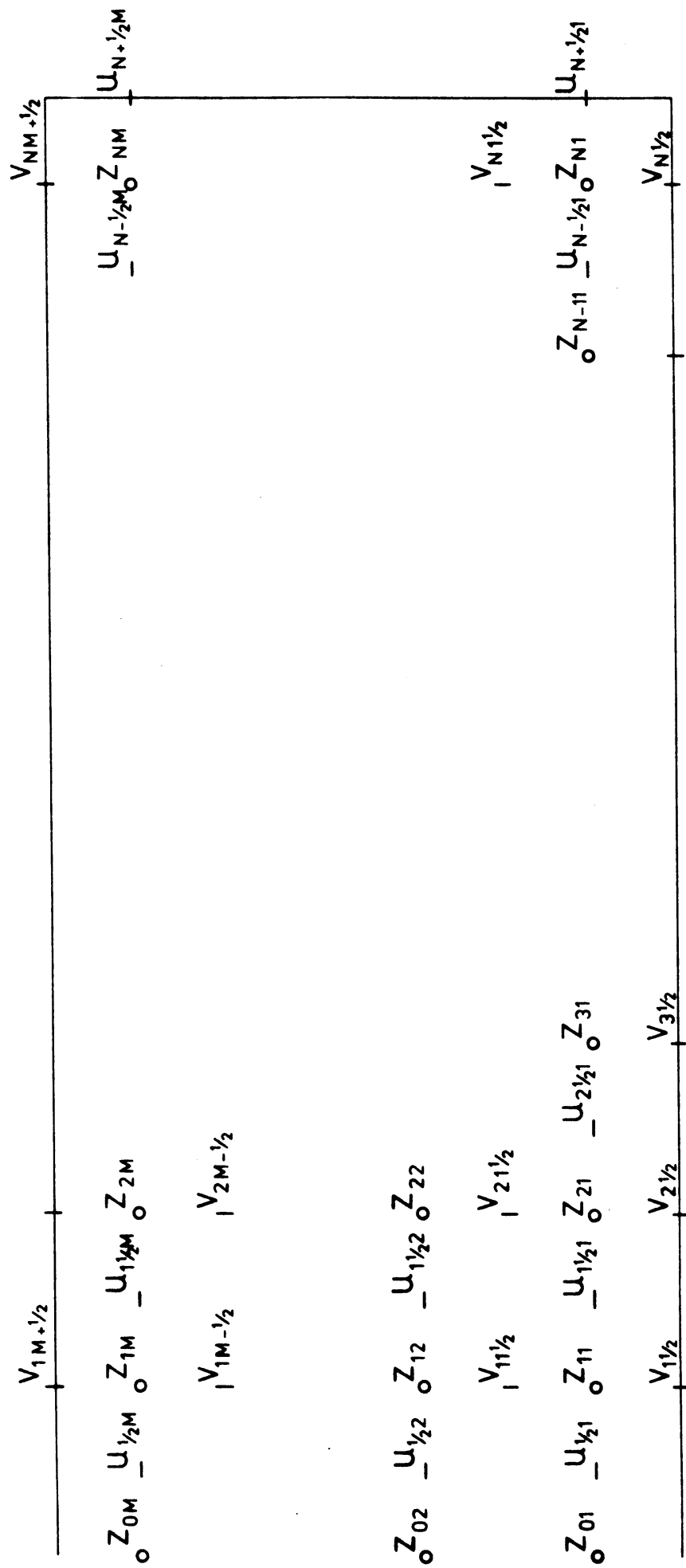
figuur 4c



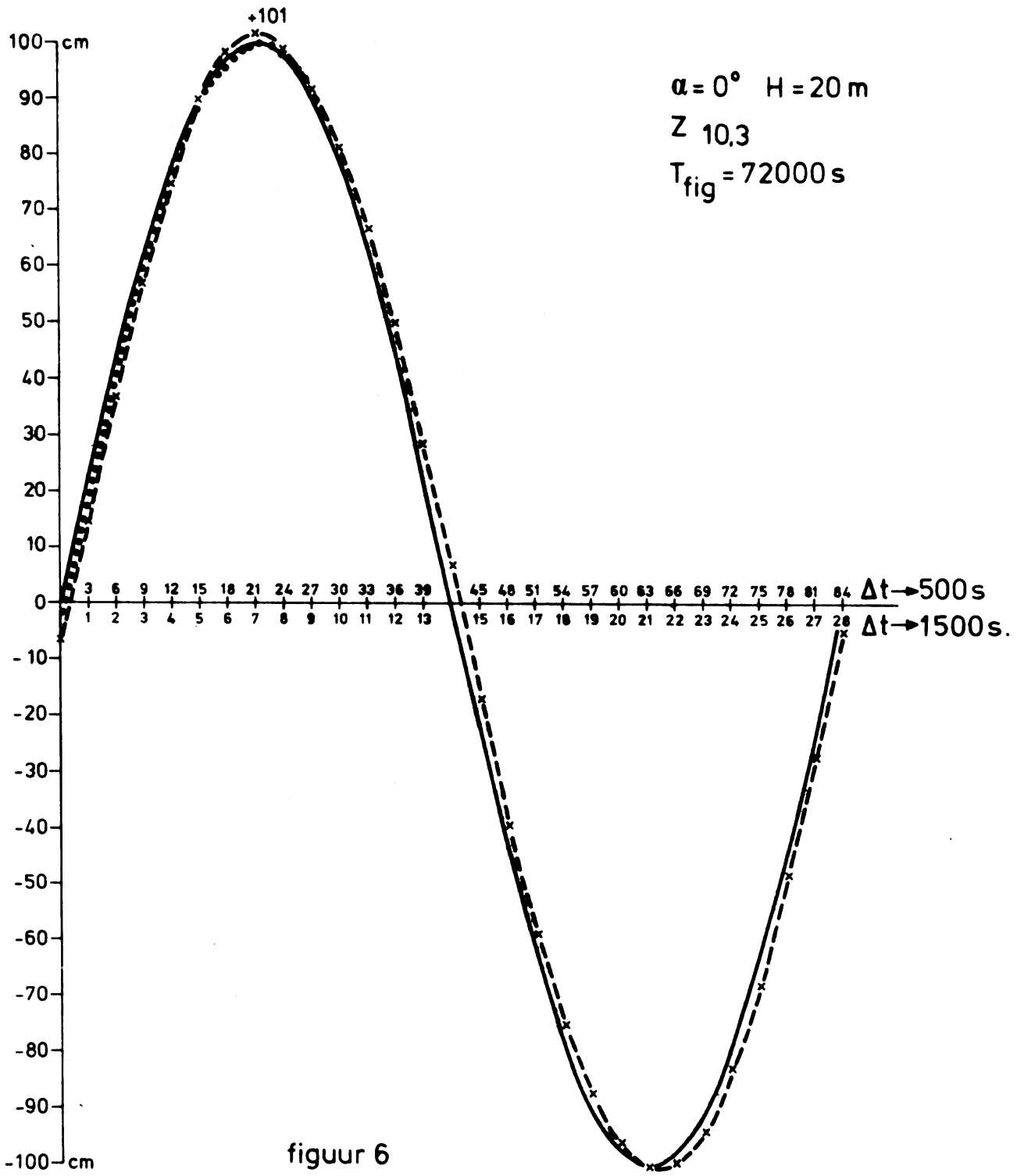
figuur 4b



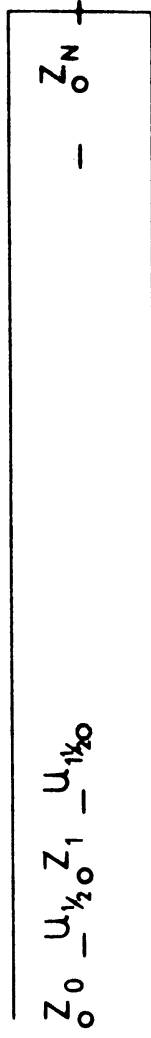
figuur 4a



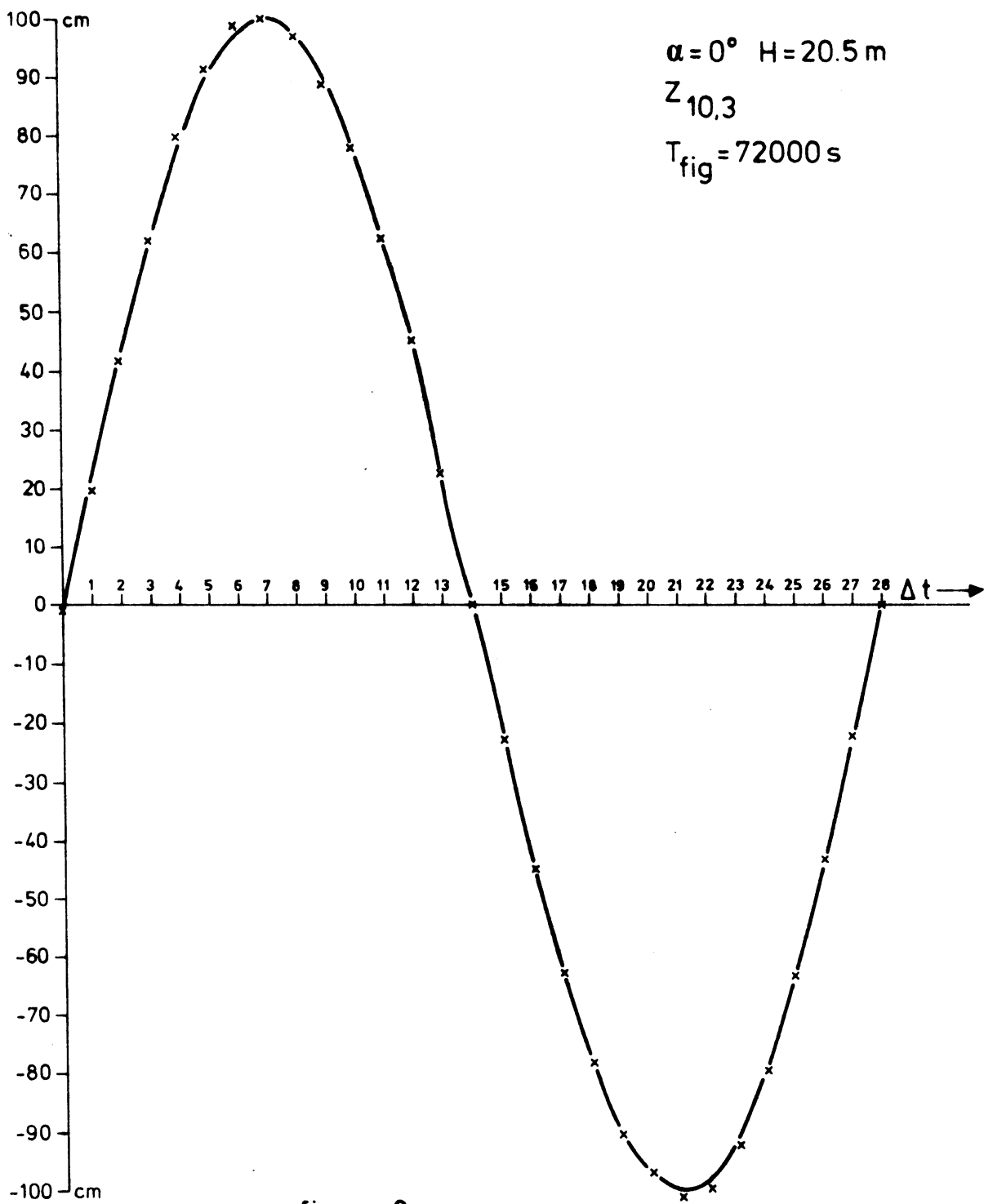
figuur 5



- exacte oplossing
- x-----x-----x  $\Delta t = 1500$  sec.
- .....  $\Delta t = 500$  sec. (gedeeltelijk)



figuur 7



figuur 8

————— exacte oplossing  
 x x x x benaderende oplossing





waterstanden (cm) exacte oplossing

verschil waterstanden (cm)

t = 69000 s

7								-81 -60
6								-7 -45 -73 -87 -84 -66
5	78	43	2	-37	-69	-86	-86	-70
4	83	50	10	-31	-64	-84	-87	-73
3	87	56	15	-26	-61	-83	-88	-76
2	89	59	19	-23	-58	-81	-88	-77
1	90	61	21	-21	-57	-81	-88	-78

								20 14
								-47 2 10 4 12 12
0	22	-7	9	1	-4	2	4	
0	11	6	7	-1	-3	0	-1	
0	3	6	5	2	1	0	-1	
0	2	4	4	3	1	0	-1	
0	2	4	4	3	2	0	-1	

y/x	0	1	2	3	4	5	6	7
-----	---	---	---	---	---	---	---	---

	0	1	2	3	4	5	6	7
--	---	---	---	---	---	---	---	---

t = 72000 s

								-86 -80
								35 -6 -43 -71 -85 -83
96	76	43	3	-36	-67	-84	-85	
91	81	50	10	-30	-63	-82	-86	
95	85	55	15	-25	-60	-81	-86	
100	87	58	19	-22	-57	-80	-86	
100	88	59	21	-21	-56	-79	-86	

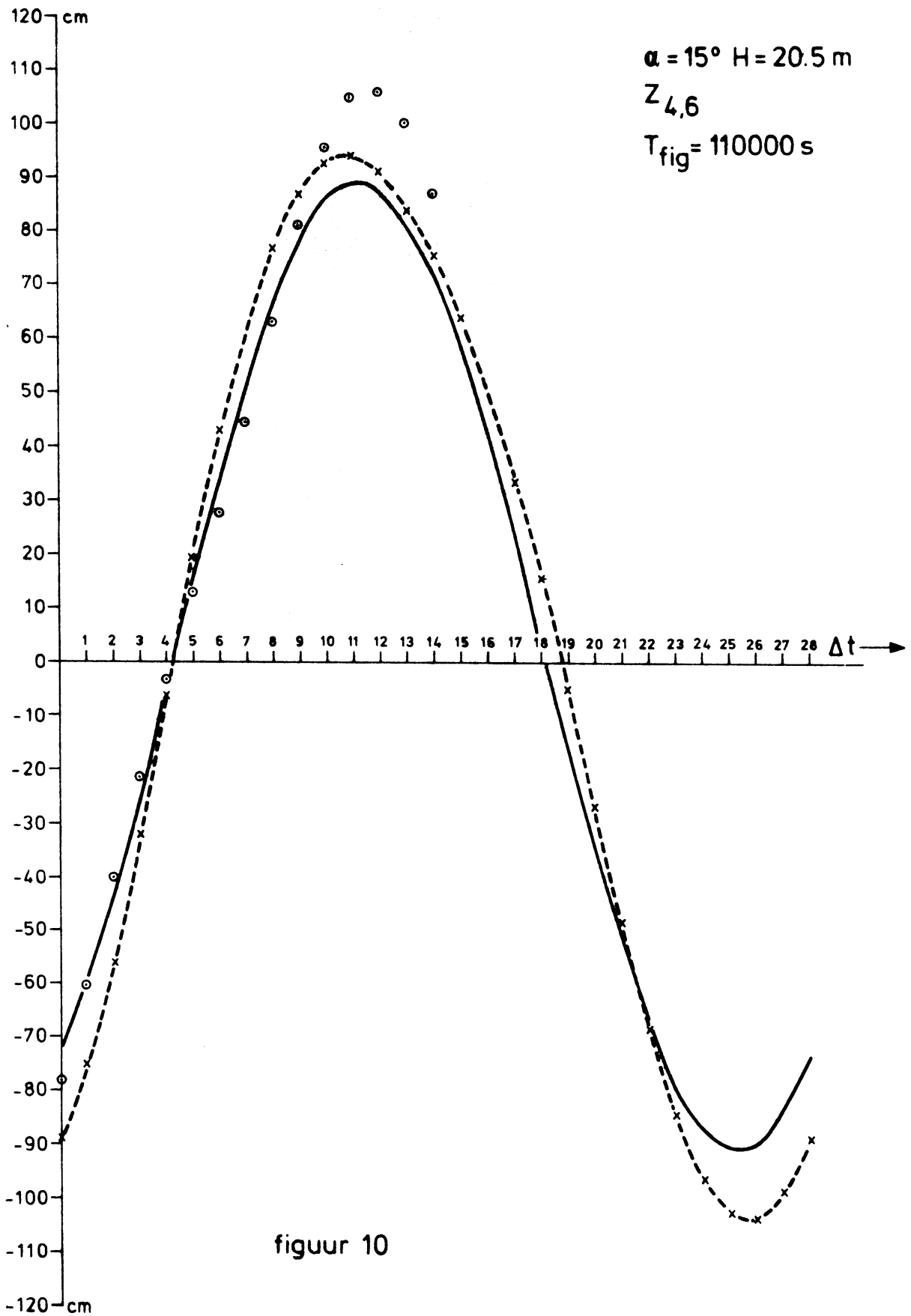
								-5 -3
								-45 -27 14 23 9 7
0	-2	-22	-11	13	12	7	8	
0	10	-4	3	5	1	0	3	
0	8	3	5	2	0	0	0	
0	3	3	4	2	1	0	-1	
0	2	3	3	3	2	0	-1	

t = 75000 s

								-74 -85
								69 35 -4 -42 -70 -84
96	95	75	43	4	-35	-65	-82	
94	96	80	49	10	-29	-61	-81	
93	97	83	54	15	-25	-58	-79	
91	98	85	57	18	-22	-56	-78	
90	98	86	58	20	-20	-55	-78	

								-26 -23
								-22 -19 -2 18 0 -11
0	-24	-17	-22	3	22	11	1	
0	-16	-11	-11	8	14	7	5	
0	1	-1	-1	4	4	1	1	
0	4	2	2	2	1	0	0	
0	2	2	2	2	0	0	0	

figuur 9<sup>b</sup>

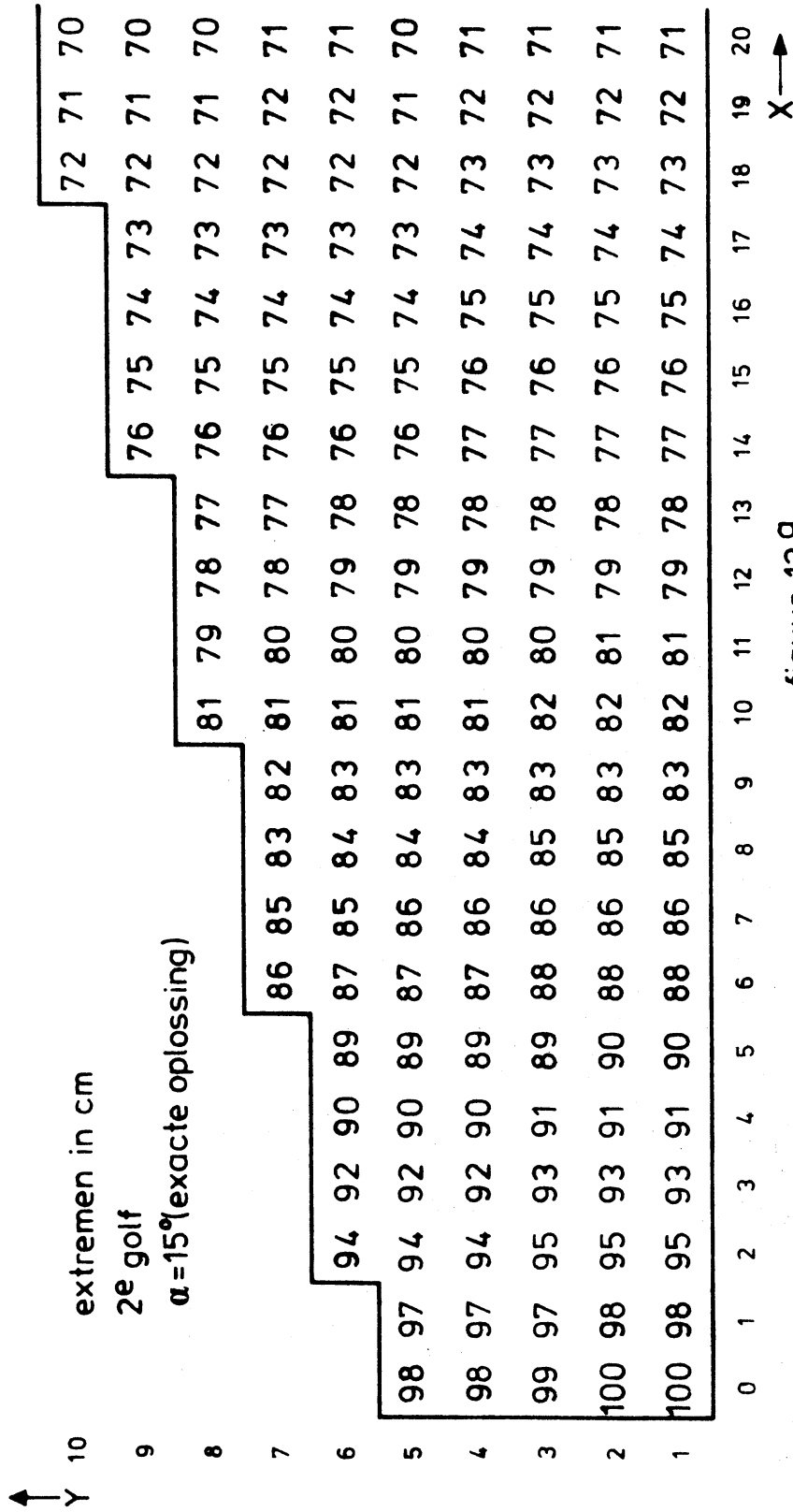


figuur 10

- exacte oplossing
- x - - - - x - - - - x - - - - x - - - - x  $z = u = v = 0$  voor  $t = 0$
- o o o o o vanuit theoretisch startveld op  $t = 60000$





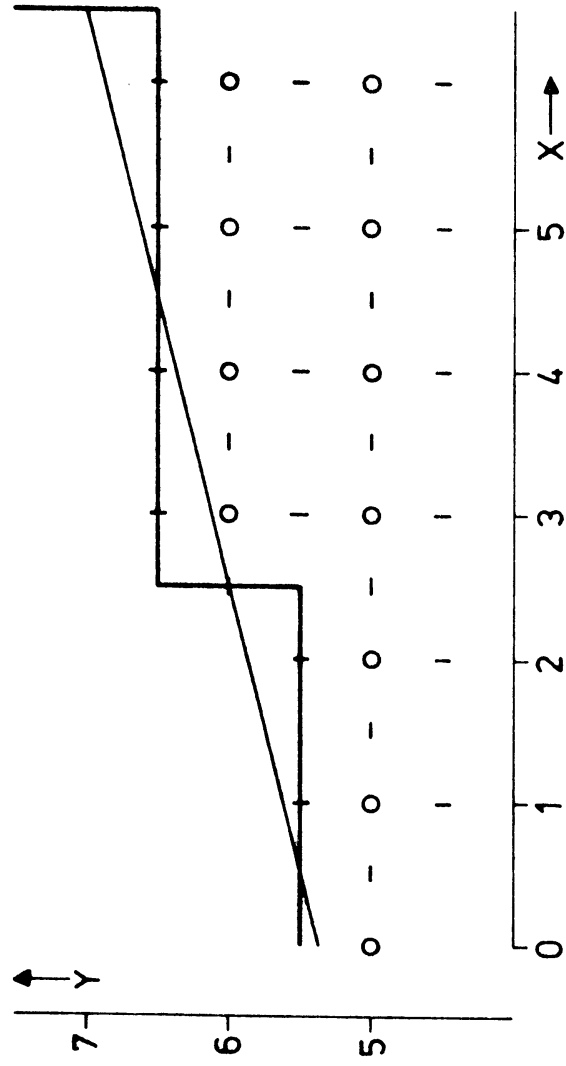


figuur 12 a





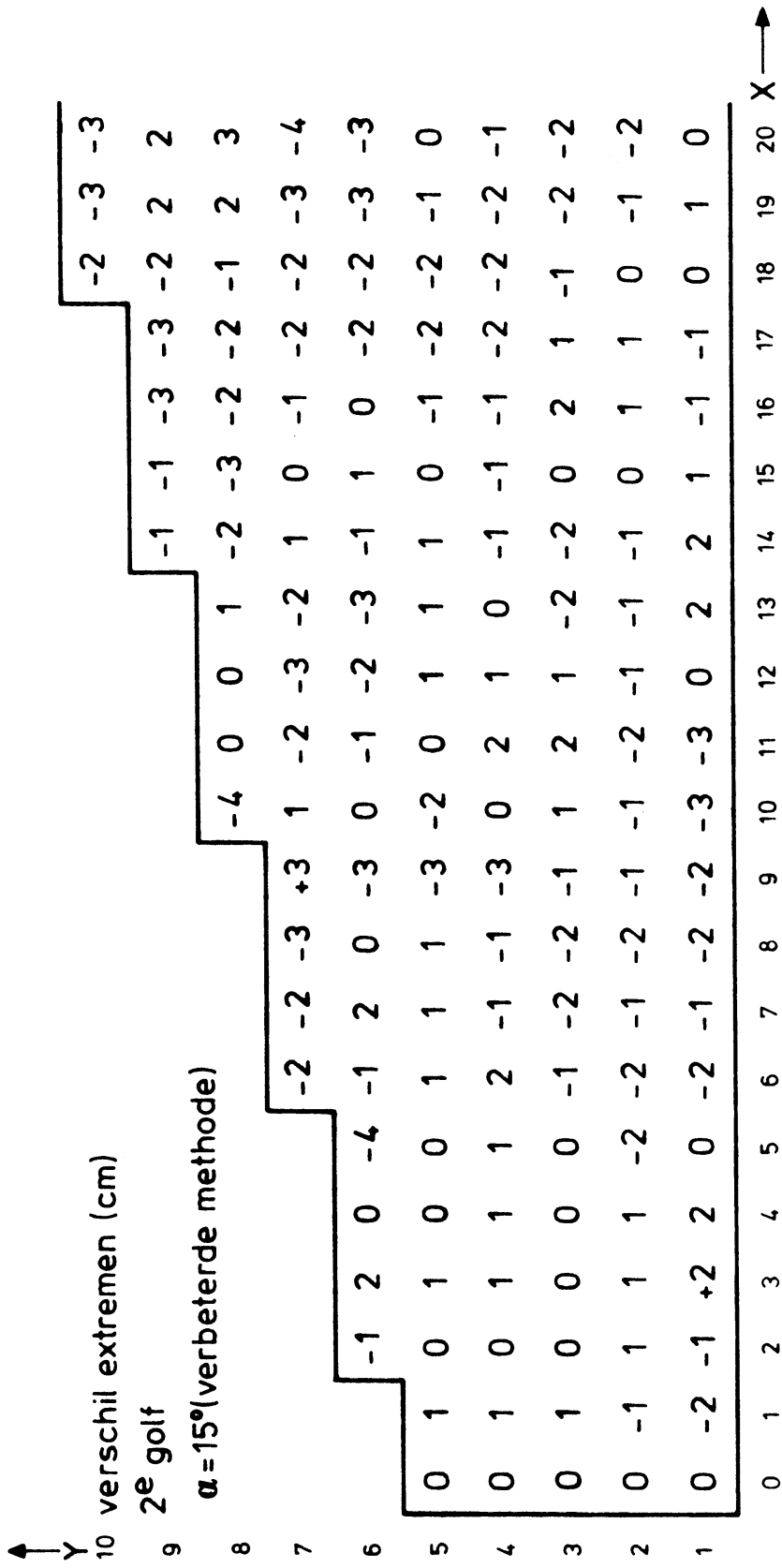




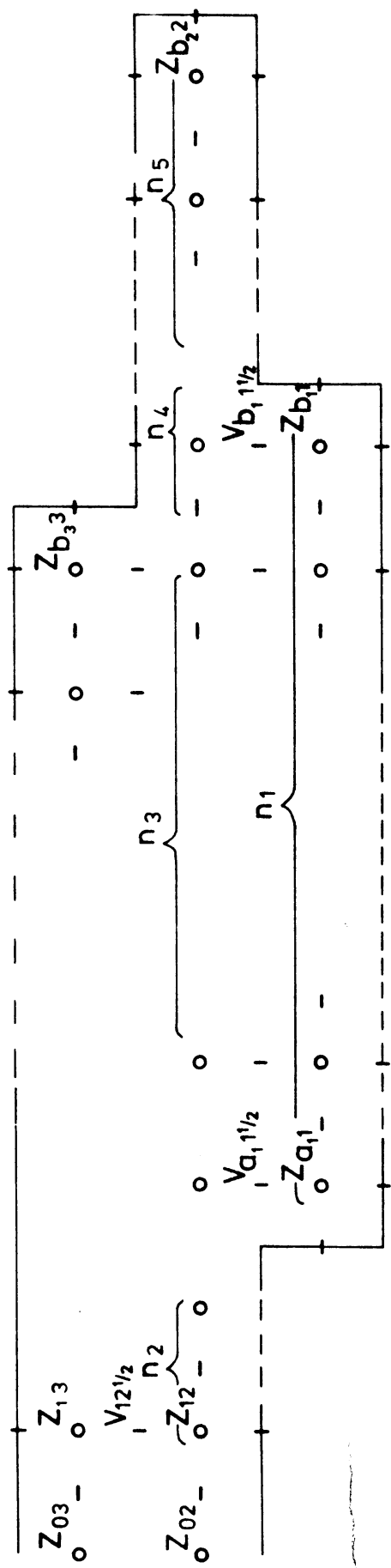
figuur 14



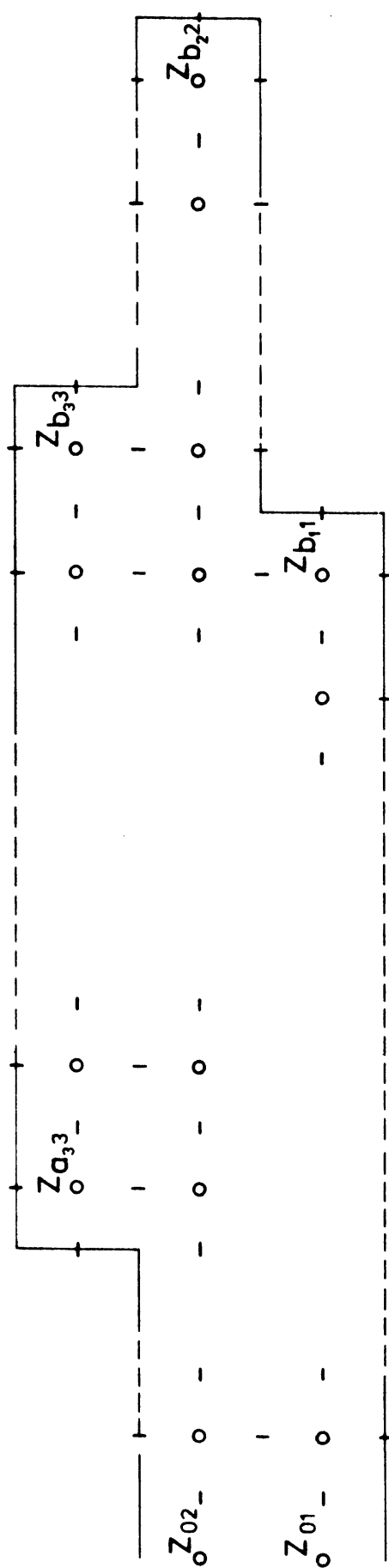




figuur 16



figuur 17



figuur 18