KONINKLIJK NEDERLANDS METEOROLOGISCH INSTITUUT

WETENSCHAPPELIJK RAPPORT

SCIENTIFIC REPORT

W.R. 79-12

A.W. den Exter Blokland

Een baroklien vierlagen-model met gefilterde vergelijkingen.

De Bilt, 1979

Publikatienummer: K. N. M. I. W.R. 79-12 (MO)

Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut,
Meteorologisch Onderzoek,
Postbus 201,
3730 AE De Bilt,
Nederland.

U.D.C.: 551.509.313

INHOUD

SUMMARY

This report describes the design of a simple four-level baroclinic quasi-geostrophic model with filtered equations. The model has been in operational use at the Royal Netherlands Meteorological Institute since the end of 1978; it replaces a three-level model of a similar construction.

The basic equations are presented in 2.1. They are the vorticity equation, the thermodynamic equation (in the form which describes thickness changes), the equation of continuity, the hydrostatic equation and the equation of state.

In 2.2, the vorticity equation is applied on 300, 500, 850 and 1000 mbar. The thermodynamic equation is integrated between those levels. For the time being, the humidity term is put equal to zero; thus, the so-called dry model is constructed. Seven equations result in which the four tendencies of the stream functions and the four horizontal divergences on the selected levels of 300 etc. mbar together with integrals of the vertical velocity appear as unknown. For practical purposes the equations are recombined by mutual subtraction, so that the tendencies of the thicknesses become unknowns. The divergences and the vertical velocity have to be eliminated, which will be done with the help of the equation of continuity.

In 2.3, a parameterization of the divergence along the vertical is performed. This is done with data of the so-called reference atmosphere, which has been introduced by HEIJBOER. Use is made of the from 0 to 1000 mbar integrated equation of continuity with the vertical velocity put equal to zero at the boundaries. Doing so, the divergence is expressed as a function of the pressure and the divergences at 300, 500, 850 and 1000 mbar. Moreover, the integrated equation of continuity yields a relation between the above-mentioned four divergences, which is necessary to close the system of equations.

In 2.4, the integrals of the vertical velocity are expressed into the divergences, using the parameterization as presented in 2.3.

In 2.5, the stability parameter is determined.

Finally, in 2.6, the elimination of the divergences is carried out and the four prognostic equations, with the four tendencies as unknowns, are derived. The variation of the CORIOLIS parameter over the globe is taken into account.

The model which has been described so far does not include any physical or dynamical refinements. In 3.1-3.7 the inclusion of horizontal diffusion, surface friction, orography, a CRESSMAN correction term, released latent heat and the linear balance equation is discussed. Im 3.8 a complete set of equations is presented, in 3.9 the method of deriving the field at the next time-step is briefly described, in 3.10 the computation of an integral of the vertical velocity is shown.

In 4 the parameters of the model which is presently in operational use are given.

-o-o-o-

1. INLEIDING

In dit verslag wordt een eenvoudig baroklien vierlagen-model met gefilterde vergelijkingen besproken. Dit model wordt sinds eind 1978 door het KNMI gebruikt; het is in hoofdzaak een uitbreiding van het voordien gebruikte drielagen-model.

In 2.1 worden de vergelijkingen, waarop het model is gebaseerd, ingevoerd. Deze vergelijkingen zijn: de vorticiteitsvergelijking, de thermodynamische vergelijking, omgezet in de vorm welke dikteveranderingen beschrijft, de continuïteitsvergelijking, de hydrostatische grondvergelijking en de gaswet. Het model is quasi-geostrofisch.

In 2.2 wordt de vorticiteitsvergelijking toegepast op de niveaus 300, 500, 850 en 1000 mbar en wordt de thermodynamische vergelijking dienovereenkomstig geïntegreerd. Zodoende ontstaan er zeven vergelijkingen, die impliciet de tendensen van de geopotentiële hoogte van 500 mbar en de geopotentiële dikten 300-500, 500-850 en 850-1000 mbar als vier onbekenden bevatten. In deze vergelijkingen staan verder nog de divergenties op de genoemde niveaus en de vertikale snelheid ω ; deze grootheden moeten uiteraard worden geëlimineerd.

De eliminatie wordt in 2.3 ingeleid met een parameterisatie van de divergentie langs de vertikaal.

In 2.4 wordt vervolgens de integraal van ω uitgedrukt in divergenties.

In 2.5 wordt de stabiliteitsparameter vastgesteld.

Tenslotte wordt in 2.6 de eliminatie uitgevoerd, zodat vier prognostische vergelijkingen worden verkregen met de vier genoemde tendensen als onbekenden.

Het aldus verkregen model bevat geen wrijving, diffusie, topografie en behandeling van de vochtigheid. In 3 worden deze onderdelen op een betrekkelijk eenvoudige manier ingevoegd, samen met de CRESSMAN-term en de met de lineaire balansvergelijking afgeleide stroomfunctie. In 4 wordt het operationele model kort beschreven.

Het is de bedoeling in dit verslag het huidige vierlagen-model te bespreken zonder al te diep op de achtergrond in te gaan. Het plan bestaat dit in volgende publikaties te doen.

2. AFLEIDING VAN DE VOORSPELVERGELIJKINGEN

2.1 Overzicht van de formules

De berekeningen worden uitgevoerd op een in stereografische projectie rechthoekig rooster en met de onafhankelijke variabelen x, y, p en t in S.I.-eenheden; dus de eenheid van druk is 0,01 mbar. Zie voor de betekenis van de symbolen de lijst op blz. 45.

Er wordt uitgegaan van

de vorticiteitsvergelijking:

$$\dot{\zeta} + \mathbb{V}.m\nabla(\zeta+f) + f_1 D = 0 \tag{1}$$

de thermodynamische vergelijking:

$$\frac{\partial g\dot{z}}{\partial p} + \mathbb{V}.m\nabla\frac{\partial gz}{\partial p} + \sigma\omega = \frac{-R}{pc_p} \cdot \frac{dQ}{dt} \tag{2}$$

en de continuïteitsvergelijking:

$$D + \frac{\partial\omega}{\partial p} = 0 \tag{3}$$

(2) is afgeleid uit de thermodynamische vergelijking in de oorspronkelijke gedaante: *)

$$\dot{T} + \mathbb{V}.\ m\nabla T + \omega\left(\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{1}{\rho c_p}\right) = \frac{dQ}{dt}/c_p ,$$

de hydrostatische grondwet:

$$\frac{\partial gz}{\partial p} = \frac{-1}{\rho}$$

en de gaswet:

$$p = \rho RT.$$

Definieer een functie ψ als volgt:

$$\psi = \frac{gz}{f_1} , \tag{4}$$

---

*) De formules worden uiteraard behandeld in de bekende leerboeken zoals [2] en [3], zie voor het onderstaande in het bijzonder BOUMAN-SCHMIDT [7], blz. 35 en 36.

waarbij f_1 een constante waarde van de CORIOLIS-parameter is; bijvoorbeeld die in het roosterpunt, waarvoor de berekening wordt uitgevoerd. De functie ψ wordt gekozen als stroomfunctie; de tweedimensionale divergentievrije wind wordt dus:

$$\mathbb{V} = \vec{k} \times \frac{gm}{f_1} \nabla z = \vec{k} \times m\nabla\psi \qquad (f_1 \text{ en } g \text{ zijn constant})$$

en de vertikale component van de relatieve vorticiteit:

$$\zeta = \frac{gm^2}{f_1} \nabla^2 z = m^2 \nabla^2 \psi$$

Tevens worden de advektietermen $\mathbb{V}.m\nabla(\zeta+f)$ enz. gelijk aan de Jacobianen $m^2 J(\psi, m^2\nabla^2\psi+f)$ enz., dus voor (1) en (2) kan vervolgens worden geschreven:

$$m^2 \nabla^2 \dot{\psi} + m^2 J(\psi, m^2\nabla^2\psi+f) + f_1 D = 0 \qquad (1.A)$$

en

$$\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial p} + m^2 J\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + \frac{\sigma}{f_1}\omega = \frac{-R}{pf_1c_p} \cdot \frac{dQ}{dt} \qquad (2.A)$$

2.2 Toepassing van de formules op het vierlagen-model

De vorticiteitsvergelijkingen voor de vier niveaus 300, 500, 850 en 1000 mbar zijn volgens (1.A):

$$m^2\nabla^2\dot{\psi}_3 + m^2 J(\psi_3, m^2\nabla^2\psi_3+f) + f_1 D_3 = 0 \qquad (1.1.B)$$

$$m^2\nabla^2\dot{\psi}_5 + m^2 J(\psi_5, m^2\nabla^2\psi_5+f) + f_1 D_5 = 0 \qquad (1.2.B)$$

$$m^2\nabla^2\dot{\psi}_8 + m^2 J(\psi_8, m^2\nabla^2\psi_8+f) + f_1 D_8 = 0 \qquad (1.3.B)$$

$$m^2\nabla^2\dot{\psi}_{10} + m^2 J(\psi_{10}, m^2\nabla^2\psi_{10}+f) + f_1 D_{10} = 0 \qquad (1.4.B)$$

waarbij de indices $_3$, $_5$, $_8$ en $_{10}$ de niveaus in genoemde volgorde aangeven.

Definieer:

$\psi_5' = \psi_3-\psi_5,\ \psi_8' = \psi_5-\psi_8,\ \psi_{10}' = \psi_8-\psi_{10}$,

$D_5' = D_3-D_5,\ D_8' = D_5-D_8,\ D_{10}' = D_8-D_{10}$,

p_3 = 300 mbar, p_5 = 500 mbar, p_8 = 850 mbar en

p_{10}= 1000 mbar

en ken de stabiliteitsparameter σ tussen 300 en 500, 500 en 850 en 850 en 1000 mbar, respektievelijk de (constante) waarden van σ_5', σ_8' en σ_{10}' toe. ψ wordt als volgt geparameteriseerd:

tussen 300 en 500 mbar:

$$\psi = \psi_5 + \alpha(p)\,\psi_5'$$

tussen 500 en 850 mbar:

$$\psi = \psi_5 + \alpha(p)\,\psi_8'$$

en tussen 850 en 1000 mbar:

$$\psi = \psi_8 + \beta(p)\,\psi_{10}'$$

α en β zijn monotone differentieerbare funkties van p met $\alpha(p_3) = -\alpha(p_8) = -\beta(p_{10}) = 1$ en $\alpha(p_5) = \beta(p_8) = 0$; na de nu volgende afleiding van (2.B) spelen ze geen rol meer. (N.B. deze parameterisatie is niet hetzelfde als (5) op blz. 5).

Integratie van (2.A) van achtereenvolgens 300 naar 500, 500 naar 850 en 850 naar 1000 mbar geeft dan:
($\frac{dQ}{dt}$ wordt in het volgende $\equiv$ 0 gesteld)

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\psi}_5' + m^2 J(\psi_5,\psi_3) &= \frac{\sigma_5'}{f_1}\int_{p_3}^{p_5} \omega\, dp \\
\dot{\psi}_8' - m^2 J(\psi_5,\psi_8) &= \frac{\sigma_8'}{f_1}\int_{p_5}^{p_8} \omega\, dp \\
\dot{\psi}_{10}' - m^2 J(\psi_8,\psi_{10}) &= \frac{\sigma_{10}'}{f_1}\int_{p_8}^{p_{10}} \omega\, dp
\end{aligned}\right\} \qquad (2.B)$$

Tenslotte worden de vergelijkingen (1.1.B) enz. herschreven als volgt:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{(1.1.B)-(1.2.B):} \\
m^2\nabla^2\dot{\psi}_5' + m^2 J(\psi_3, m^2\nabla^2\psi_3+f) - m^2 J(\psi_5, m^2\nabla^2\psi_5+f) = -f_1 D_5' \\
\text{(1.2.B)-(1.3.B):} \\
m^2\nabla^2\dot{\psi}_8' + m^2 J(\psi_5, m^2\nabla^2\psi_5+f) - m^2 J(\psi_8, m^2\nabla^2\psi_8+f) = -f_1 D_8' \\
\text{(1.3.B)-(1.4.B):} \\
m^2\nabla^2\dot{\psi}_{10}' + m^2 J(\psi_8, m^2\nabla^2\psi_8+f) - m^2 J(\psi_{10}, m^2\nabla^2\psi_{10}+f) = -f_1 D_{10}' \\
\text{met ongewijzigd (1.2.B):} \\
m^2\nabla^2\dot{\psi}_5 + m^2 J(\psi_5, m^2\nabla^2\psi_5+f) = -f_1 D_5
\end{array}\right\} \quad (1.C)$$

Ten einde voor numerieke behandeling geschikte vergelijkingen te krijgen, zullen ω, D_5', D_8', D_{10}' en D_5 met behulp van (3) uit (1.C) en (2.B) worden geëlimineerd.

2.3 Parameterisering van de divergentie D

Volgens (3) is

$$\omega(p) = -\int_0^p D\, dp \ .$$

Om ω en vervolgens de rechterleden van (2.B), $\frac{\sigma_5'}{f_1}\int_{p_3}^{p_5} \omega\, dp$ enz. te bepalen, is het gewenst het verloop van D als functie van p te kennen. Aangezien het niet mogelijk is D als functie van x, y, p en t volledig te beschrijven, wordt een parameterisering toegepast, die geïnspireerd is op een door HEIJBOER [1] geïntroduceerde methode. Dit gaat als volgt:

Gedefinieerd wordt een zogenaamde referentie-atmosfeer; voor deze atmosfeer geldt:

$$\psi(x,y,p,t) = A(p)\ \psi_5(x,y,t) + B(p) \qquad (5)$$

De getalwaarden van de functies $A(p)$ en $B(p)$ werden door HEIJBOER als regressiecoëfficiënten bepaald uit de aërologie van 25 maart 1971, 0000 GMT. Veronderstel dat er een niveau p_{nd} is waarvoor geldt $D(x,y,p_{nd},t) \equiv 0$; er is dus een "level of non-divergence", zijnde het vlak van constante druk $p = p_{nd}$. Stel $K = A(p_{nd})$. Uit (5) volgt dan:

$$\psi(x,y,p,t) = \frac{A(p)}{K} \{\psi(x,y,p_{nd},t) - B(p_{nd})\} + B(p)$$

dus, als $\psi(x,y,p_{nd},t)$ $\psi_{p_{nd}}$ genoemd wordt:

$$\dot{\psi} = \frac{A(p)}{K} \dot{\psi}_{p_{nd}} \quad \text{enz.}$$

Substitutie in (1.A) geeft:

$$\frac{A(p)}{K} m^2\nabla^2 \dot{\psi}_{p_{nd}} + \frac{A(p)}{K} m^2 J(\psi_{p_{nd}}, \frac{A(p)}{K} m^2\nabla^2 \psi_{p_{nd}} + f)$$

$$+ f_1 D(x,y,p,t) =$$

$$\frac{A(p)}{K} m^2\{\nabla^2\dot{\psi}_{p_{nd}} + J(\psi_{p_{nd}}, m^2\nabla^2\psi_{p_{nd}} + f)\} + \left(\frac{A^2(p)}{K^2} - \frac{A(p)}{K}\right) m^2 J(\psi_{p_{nd}}, m^2\nabla^2\psi_{p_{nd}})$$

$$+ f_1 D(x,y,p,t) = 0 \qquad (6)$$

Als $p = p_{nd}$ wordt dit:

$$m^2\nabla^2\dot{\psi}_{p_{nd}} + m^2 J(\psi_{p_{nd}}, m^2\nabla^2\psi_{p_{nd}} + f) + f_1 D(x,y,p_{nd},t) = 0$$

en dus wegens $D(x,y,p_{nd},t) \equiv 0$:

$m^2\{\nabla^2\dot{\psi}_{p_{nd}} + J(\psi_{p_{nd}}, m^2\nabla^2\psi_{p_{nd}} + f)\} = 0$. Dus wordt (6):

$$\left(\frac{A^2(p)}{K^2} - \frac{A(p)}{K}\right) m^2 J(\psi_{p_{nd}}, m^2\nabla^2\psi_{p_{nd}}) + f_1 D(x,y,p,t) = 0 \qquad (6.A)$$

Uit (3) volgt:

$$\int_0^{p_{10}} D\,dp = \omega(0) - \omega(p_{10}).$$

Als verondersteld wordt dat $\omega(0) = \omega(p_{10}) = 0$, geldt:

$$\int_0^{p_{10}} D\,dp = 0 \tag{7}$$

Integratie van (6A) van 0 naar 1000 mbar geeft in combinatie met (7):

$$\left\{\int_0^{p_{10}} \left(\frac{A^2(p)}{K^2} - \frac{A(p)}{K}\right) dp\right\} m^2\, J(\psi_{p_{nd}}, m^2\nabla^2\psi_{p_{nd}}) + f_1 \int_0^{p_{10}} D\,dp =$$

$$\left\{\int_0^{p_{10}} \left(\frac{A^2(p)}{K^2} - \frac{A(p)}{K}\right) dp\right\} m^2\, J(\psi_{p_{nd}}, m^2\nabla^2\psi_{p_{nd}}) = 0$$

Omdat verondersteld mag worden dat $J(\psi_{p_{nd}}, m^2\nabla^2\psi_{p_{nd}})$ niet identiek gelijk aan 0 is, is

$$\int_0^{p_{10}} \left(\frac{A^2(p)}{K^2} - \frac{A(p)}{K}\right) dp = 0 \tag{8}$$

dus

$$K = \int_0^{p_{10}} A^2(p)\,dp \Big/ \int_0^{p_{10}} A(p)\,dp \tag{9}$$

Verder volgt uit (6.A):

$$D = \frac{-1}{f_1} \cdot \frac{A^2 - KA}{K^2}\, m^2 \cdot J(\psi_{p_{nd}}, m^2\nabla^2\psi_{p_{nd}})$$

en, omdat

$$\psi_{p_{nd}} = K\,\psi_5 + B(p_{nd}) ,$$

is

$$D = -\frac{1}{f}\,(A^2 - KA) . m^2\, J(\psi_5, m^2\nabla^2\psi_5) .$$

Indien K wordt berekend volgens (9) blijkt de waarde vrijwel gelijk aan 1 te zijn - dit is te verwachten omdat het divergentievrije niveau dicht bij 500 mbar ligt.

$-m^2 J(\psi_5, m^2\nabla^2\psi_5)$ is de R(elatieve) V(orticiteits) A(dvectie) op 500 mbar in deze referentie-atmosfeer. Definieer:

$$F(p) = AK - A^2 = A - A^2 \quad (\text{neem } K = 1) \tag{10}$$

met volgens (8):

$$\int_0^{p_{10}} F(p)\,dp = 0 \tag{11}$$

D wordt dan:

$$D(p) = -F(p)\,\frac{RVA}{f_1} \tag{12}$$

Aangezien A(p) experimenteel als functie van p bepaald is, is volgens (10) ook F(p) bekend, zie HEIJBOER [1], blz. 11 t/m 21. Het verloop van D(p) in het vierlagen-model wordt nu op de volgende wijze gekoppeld aan het verloop dat D(p) zou hebben in de referentie-atmosfeer (laatstgenoemde D wordt in het onderstaande aangeduid met D_r):

Voor $p \leqslant 300$ mbar:

$$\frac{D(p)}{D_3} = \frac{D_r(p)}{D_{r_3}} = \frac{F(p)}{F(p_3)} ,$$

$$D(p) = \frac{F(p)}{F(p_3)}\,D_3 = \frac{F(p)}{F(p_3)}\,(D_5 + D_5') \tag{13.1}$$

Voor 300 mbar $< p \leqslant$ 500 mbar:

$$\frac{D(p)-D_5}{D_3-D_5} = \frac{D_r(p)-D_{r_5}}{D_{r_3}-D_{r_5}} = \frac{F(p)-F(p_5)}{F(p_3)-F(p_5)} .$$

Omdat $F(p_5) = 0$ leidt dit tot:

$$D(p) = D_5 + \frac{F(p)}{F(p_3)}\,D_5' \tag{13.2}$$

Voor 500 mbar $< p \leqslant$ 850 mbar:

$$\frac{D_5-D(p)}{D_5-D_8} = \frac{D_{r_5}-D_r(p)}{D_{r_5}-D_{r_8}} = \frac{-F(p)}{-F(p_8)} ,$$

$$D(p) = D_5 - \frac{F(p)}{F(p_8)} D_8' \qquad (13.3)$$

Voor 850 mbar $< p \leqslant$ 1000 mbar:

$$\frac{D_8-D(p)}{D_8-D_{10}} = \frac{D_{r_8}-D_r(p)}{D_{r_8}-D_{r_{10}}} = \frac{F(p_8)-F(p)}{F(p_8)-F(p_{10})} ,$$

$$D(p) = D_8 - \frac{F(p_8)-F(p)}{F(p_8)-F(p_{10})} D_{10}' ,$$

$$D(p) = D_5 - D_8' - \frac{F(p_8)-F(p)}{F(p_8)-F(p_{10})} D_{10}' \qquad (13.4)$$

Bovendien moet in dit model (7) blijven gelden, dus:

$$\int_o^{p_3} \frac{F(p)}{F(p_3)} (D_5+D_5')dp + \int_{p_3}^{p_5} (D_5+ \frac{F(p)}{F(p_3)} D_5')dp +$$

$$\int_{p_5}^{p_8} (D_5- \frac{F(p)}{F(p_8)} D_8')dp + \int_{p_8}^{p_{10}} (D_5-D_8'- \frac{F(p_8) - F(p)}{F(p_8) - F(p_{10})} D_{10}')dp = 0$$

Dit leidt tot de volgende betrekking tussen D_5, D_5', D_8' en D_{10}':

$$\left\{ \frac{\int_o^{p_3} F(p)dp}{F(p_3)} + \int_{p_3}^{p_{10}} dp \right\} D_5 + \frac{\int_o^{p_5} F(p)dp}{F(p_3)} D_5' -$$

$$\left\{ \frac{\int_{p_5}^{p_8} F(p)dp}{F(p_8)} + \int_{p_8}^{p_{10}} dp \right\} D_8' - \left\{ \frac{F(p_8) \int_{p_8}^{p_{10}} dp - \int_{p_8}^{p_{10}} F(p)dp}{F(p_8)-F(p_{10})} \right\} D_{10}' = 0$$

of

$$D_5 = d_0 D'_{10} + d_1 D'_8 + d_2 D'_5 \tag{14}$$

waarbij, rekening houdend met (11), de constanten d gelijk zijn aan:

$$\left.\begin{aligned}
d_0 &= \frac{1}{N}\left\{\frac{F(p_8)\int_{p_8}^{p_{10}} dp - \int_{p_8}^{p_{10}} F(p)\,dp}{F(p_8)-F(p_{10})}\right\} \\
d_1 &= \frac{1}{N}\left\{\frac{\int_{p_5}^{p_8} F(p)\,dp}{F(p_8)} + \int_{p_8}^{p_{10}} dp\right\} \\
d_2 &= \frac{1}{N}\left\{\frac{\int_{p_5}^{p_{10}} F(p)\,dp}{F(p_3)}\right\} \\
\text{met}\quad N &= \frac{-\int_{p_3}^{p_{10}} F(p)\,dp}{F(p_3)} + \int_{p_3}^{p_{10}} dp\ .
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

2.4 <u>Berekening van $\int \omega\, dp$</u>

Vervolgens worden de rechterleden van **blz. 4** (2.B) **uitgedrukt in** D'_5, D'_8 en D'_{10}. Daartoe worden de integralen $\int \omega\, dp$ met (3), (7), (13.1) t/m 13.4 en (14) berekend. Zoals eerder vermeld is $\omega(0) = 0$.

Stel:

$$\left.\begin{aligned}
\int_{p_8}^{p_{10}} \omega dp &= d_{00}D'_{10} + d_{01}D'_8 + d_{02}D'_5 \\
\int_{p_5}^{p_8} \omega dp &= d_{10}D'_{10} + d_{11}D'_8 + d_{12}D'_5 \\
\int_{p_3}^{p_5} \omega dp &= d_{20}D'_{10} + d_{21}D'_8 + d_{22}D'_5
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

De d's worden als volgt bepaald:

$$\int_{p_8}^{p_{10}} \omega\, dp = \int_{p_8}^{p_{10}} \int_{p}^{p_{10}} \left(D_5 - D_8' - \frac{F(p_8)-F(p')}{F(p_8)-F(p_{10})} D_{10}'\right) dp'\, dp \ ,$$

p' variabele in $\int_{p}^{p_{10}} \ldots dp'$

$$d_{00} = \left\{ \int_{p_8}^{p_{10}} \int_{p}^{p_{10}} dp'\, dp \right\} d_0 - \int_{p_8}^{p_{10}} \int_{p}^{p_{10}} \frac{F(p_8)-F(p')}{F(p_8)-F(p_{10})} dp'\, dp \ ,$$

$$d_{01} = \left\{ \int_{p_8}^{p_{10}} \int_{p}^{p_{10}} dp'\, dp \right\} (d_1 - 1) \ ,$$

$$d_{02} = \left\{ \int_{p_8}^{p_{10}} \int_{p}^{p_{10}} dp'\, dp \right\} d_2 \ ,$$

$$\int_{p_5}^{p_8} \omega\, dp = \int_{p_5}^{p_8} \left\{ \int_{p_8}^{p_{10}} \left(D_5 - D_8' - \frac{F(p_8)-F(p')}{F(p_8)-F(p_{10})} D_{10}'\right) dp' \right.$$

$$\left. + \int_{p}^{p_8} \left(D_5 - \frac{F(p')}{F(p_8)} D_8'\right) dp' \right\} dp$$

$$= \int_{p_5}^{p_8} \left\{ \left(\int_{p}^{p_{10}} dp'\right) D_5 - \left(\int_{p_8}^{p_{10}} dp' + \int_{p}^{p_8} \frac{F(p')}{F(p_8)} dp'\right) D_8' \right.$$

$$\left. - \left(\int_{p_8}^{p_{10}} \frac{F(p_8)-F(p')}{F(p_8)-F(p_{10})} dp'\right) D_{10}' \right\} dp \ ,$$

$$d_{10} = \int_{p_5}^{p_8} \left\{ \left(\int_{p}^{p_{10}} dp'\right) d_0 - \int_{p_8}^{p_{10}} \frac{F(p_8)-F(p')}{F(p_8)-F(p_{10})} dp' \right\} dp \ ,$$

$$d_{11} = \int_{p_5}^{p_8} \left\{ \left(\int_{p}^{p_{10}} dp' \right) d_1 - \int_{p_8}^{p_{10}} dp' - \int_{p}^{p_8} \frac{F(p')}{F(p_8)} dp' \right\} dp \; ,$$

$$d_{12} = \int_{p_5}^{p_8} \left\{ \left(\int_{p}^{p_{10}} dp' \right) d_2 \right\} dp \; ,$$

$$\int_{p_3}^{p_5} \omega \, dp = \int_{p_3}^{p_5} \left\{ \int_{p_8}^{p_{10}} (D_5 - D_8' - \frac{F(p_8)-F(p')}{F(p_8)-F(p_{10})} D_{10}') dp' \right.$$

$$\left. + \int_{p_5}^{p_8} (D_5 - \frac{F(p')}{F(p_8)} D_8') dp' + \int_{p}^{p_5} (D_5 + \frac{F(p')}{F(p_3)} D_5') dp' \right\} dp$$

$$= \int_{p_3}^{p_5} \left\{ \left(\int_{p}^{p_{10}} dp' \right) D_5 - \left(\int_{p_8}^{p_{10}} dp' + \int_{p_5}^{p_8} \frac{F(p')}{F(p_8)} dp' \right) D_8' \right.$$

$$\left. - \left(\int_{p_8}^{p_{10}} \frac{F(p_8)-F(p')}{F(p_8)-F(p_{10})} dp' \right) D_{10}' + \left(\int_{p}^{p_5} \frac{F(p')}{F(p_3)} dp' \right) D_5' \right\} dp \; ,$$

$$d_{20} = \int_{p_3}^{p_5} \left\{ \left(\int_{p}^{p_{10}} dp' \right) d_o - \int_{p_8}^{p_{10}} \frac{F(p_8)-F(p')}{F(p_8)-F(p_{10})} dp' \right\} dp \; ,$$

$$d_{21} = \int_{p_3}^{p_5} \left\{ \left(\int_{p}^{p_{10}} dp' \right) d_1 - \int_{p_8}^{p_{10}} dp' - \int_{p_5}^{p_8} \frac{F(p')}{F(p_8)} dp' \right\} dp \; ,$$

$$d_{22} = \int_{p_3}^{p_5} \left\{ \left(\int_{p}^{p_{10}} dp' \right) d_2 + \int_{p}^{p_5} \frac{F(p')}{F(p_3)} dp' \right\} dp \; .$$

Stel:

$$
\left.
\begin{array}{l}
P_1 = \int\limits_{p_8}^{p_{10}} dp, \quad P_2 = \int\limits_{p_5}^{p_8} dp, \quad P_3 = \int\limits_{p_3}^{p_5} dp, \quad P_4 = \int\limits_{p_3}^{p_{10}} dp, \\
PP_1 = \int\limits_{p_8}^{p_{10}} \int\limits_{p}^{p_{10}} dp'dp, \quad PP_2 = \int\limits_{p_5}^{p_8} \int\limits_{p}^{p_{10}} dp'dp, \quad PP_3 = \int\limits_{p_3}^{p_5} \int\limits_{p}^{p_{10}} dp'dp \\
F_1 = \int\limits_{p_8}^{p_{10}} F(p)dp, \quad F_2 = \int\limits_{p_5}^{p_8} F(p)dp, \quad F_3 = \int\limits_{p_5}^{p_{10}} F(p)dp, \\
F_4 = \int\limits_{p_3}^{p_{10}} F(p)dp, \\
FF_1 = \int\limits_{p_8}^{p_{10}} \int\limits_{p}^{p_{10}} F(p')dp'dp, \quad FF_2 = \int\limits_{p_5}^{p_8} \int\limits_{p}^{p_8} F(p')dp'dp, \\
FF_3 = \int\limits_{p_3}^{p_5} \int\limits_{p}^{p_5} F(p')dp'dp \quad \text{en tenslotte} \quad F' = F(p_8) - F(p_{10}).
\end{array}
\right\} \quad (17)
$$

De d's worden dan:

$$d_0 = \frac{F(p_3).(F(p_8).P_1 - F_1)}{F'.(F(p_3).P_4 - F_4)}$$

$$d_1 = \frac{F(p_3).(F(p_8).P_1 + F_2)}{F(p_8).(F(p_3).P_4 - F_4)}$$

$$d_2 = \frac{F_3}{F(p_3).P_4 - F_4}$$

$$d_{00} = PP_1.(d_0 - \frac{F(p_8)}{F'}) + \frac{FF_1}{F'}$$

$$d_{01} = PP_1.(d_1 - 1)$$

$$d_{02} = PP_1.d_2$$

$$d_{10} = PP_2.d_0 - \frac{P_2}{F'}(F(p_8).P_1 - F_1)$$

$$d_{11} = PP_2.d_1 - P_1.P_2 - \frac{FF_2}{F(p_8)}$$

$$d_{12} = PP_2.d_2$$

$$d_{20} = PP_3.d_0 - \frac{P_3}{F'}(F(p_8).P_1 - F_1)$$

$$d_{21} = PP_3.d_1 - P_1.P_3 - P_3.\frac{F_2}{F(p_8)}$$

$$d_{22} = PP_3.d_2 + \frac{FF_3}{F(p_3)}$$

Voor het bepalen van de d's is kennis van F(p) nodig en moeten de integralen P, PP, F en FF volgens (17) worden berekend. Zoals vermeld in 2.3 is A(p) en dus met (10) F(p) experimenteel bepaald; de integraties zouden dus numeriek kunnen worden uitgevoerd. Gebleken is echter dat F(p) tussen 300 en 1000 mbar zeer goed beschreven wordt met de kwadratische betrekking **(p in de S.I.-eenheid, dus in pascal):**

$$F(p) = \alpha p^2 + \beta p + \gamma \qquad (18)$$

met $\alpha = -2,6523.10^{-10}$, $\beta = 4,2809.10^{-5}$ en $\gamma = -1.4774$.
Mede met behulp van (18) worden nu de d's berekend. Het resultaat is:

(dimensies: d_0 enz. dimensieloos, d_{00} enz. $kg^2m^{-2}s^{-4}$)

$d_0 = 0.0718$, $d_{00} = -550.10^5$, $d_{10} = -1252.10^5$, $d_{20} = -321.10^5$,

$d_1 = 0.4885$, $d_{01} = -575.10^5$, $d_{11} = -5130.10^5$, $d_{21} = -2185.10^5$,

$d_2 = -0.2616$, $d_{02} = -294.10^5$, $d_{12} = -2976.10^5$, $d_{22} = -2554.10^5$.

2.5 Bepaling van de stabiliteitsconstanten σ'_5, σ'_8 en σ'_{10}

De waarden voor de σ's zijn constant. Door HEIJBOER (zie [1], blz. 39) is een relatie vastgesteld tussen de waarde van σ en de golflengte van het weersysteem, dat met die waarde door het model het beste wordt beschreven. Deze relatie wordt uitgedrukt door de volgende formules:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma'_5 &= \frac{f_0^2(A(p_3)-1)}{\int_{p_3}^{p_5}\int_{p}^{p_{10}} F(p)\,dp'\,dp}\cdot S\ , \\
\sigma'_8 &= \frac{f_0^2(1-A(p_8))}{\int_{p_5}^{p_8}\int_{p}^{p_{10}} F(p)\,dp'\,dp}\cdot S\ , \\
\sigma'_{10} &= \frac{f_0^{\,2}(A(p_8)-A(p_{10}))}{\int_{p_8}^{p_{10}}\int_{p}^{p_{10}} F(p)\,dp'\,dp}\cdot S\ ,
\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

waarbij:

f_0 = een constante waarde van de CORIOLIS-parameter, bijvoorbeeld 10^{-4},

$S = (1- \frac{\beta L^*}{U_5})L^*$,

$\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$ als y-richting noord-zuid,

$$L^* = \frac{L_x^2}{4\pi^2\left[1+\left(L_x/L_y\right)^2\right]} \quad ,$$

L_x = golflengte in x-(oost-west)richting, *)
L_y = golflengte in y-(noord-zuid)richting,*)
U_5 = gemiddelde windsnelheid in x-richting op 500 mbar.

Met behulp van (19) zijn σ'_5, σ'_8 en σ'_{10} te bepalen voor gegeven waarden van L^* en dus van de golflengten L_x en L_y. Echter, de achtergrond van een dergelijke waardebepaling van de σ's berust op zekere veronderstellingen betreffende de atmosfeer, in het bijzonder het in werkelijkheid geldig zijn van (5). In dit geschrift worden beschouwingen dienaangaande terzijde gelaten en zijn de volgende σ's gekozen:

$$\sigma'_5 = 13037.10^{-10} \quad (kg^{-2}m^4s^2)$$

$$\sigma'_8 = 15129.10^{-10}$$

$$\sigma'_{10} = 20000.10^{-10}$$

N.B.: σ'_5 en σ'_8 behoren volgens (19) bij L_x= 1800 km en $L_x/L_y = \frac{1}{2}$, zie [1]; σ'_{10} is min of meer willekeurig gekozen.

2.6 Vergelijkingen van het vierlagen-model

Noem de linkerleden van (2.B) respektievelijk G_5, G_8 en G_{10} en substitueer (16) in (2.B). Er komt:

$$\left.\begin{aligned} G_5 &= \frac{\sigma'_5}{f_1}\left(d_{20}D'_{10} + d_{21}D'_8 + d_{22}D'_5\right) \\ G_8 &= \frac{\sigma'_8}{f_1}\left(d_{10}D'_{10} + d_{11}D'_8 + d_{12}D'_5\right) \\ G_{10} &= \frac{\sigma'_{10}}{f_1}\left(d_{00}D'_{10} + d_{01}D'_8 + d_{02}D'_5\right) \end{aligned}\right\} \quad (2.C)$$

*) Alleen hier is oost-west bepaald als de x-richting enz.; in het hemisferisch rekenrooster is dit uiteraard slechts lokaal zo.

D'_{10}, D'_8 en D'_5 worden uit (2.C) opgelost. De oplossing luidt:

$$\left.\begin{aligned}
D'_5 &= f_1\left(\frac{g_{22}}{\sigma'_5} G_5 + \frac{g_{21}}{\sigma'_8} G_8 + \frac{g_{20}}{\sigma'_{10}} G_{10}\right) \\
D'_8 &= f_1\left(\frac{g_{12}}{\sigma'_5} G_5 + \frac{g_{11}}{\sigma'_8} G_8 + \frac{g_{10}}{\sigma'_{10}} G_{10}\right) \\
D'_{10} &= f_1\left(\frac{g_{02}}{\sigma'_5} G_5 + \frac{g_{01}}{\sigma'_8} G_8 + \frac{g_{00}}{\sigma'_{10}} G_{10}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

met voor de constanten g de volgende formules:

$$\left.\begin{aligned}
g_{22} &= \frac{d_{10}d_{01}-d_{00}d_{11}}{\Delta}, \quad g_{21} = \frac{d_{00}d_{21}-d_{20}d_{01}}{\Delta}, \\
g_{20} &= \frac{d_{20}d_{11}-d_{10}d_{21}}{\Delta}, \\
g_{12} &= \frac{d_{00}d_{12}-d_{10}d_{02}}{\Delta}, \quad g_{11} = \frac{d_{20}d_{02}-d_{00}d_{22}}{\Delta}, \\
g_{10} &= \frac{d_{10}d_{22}-d_{20}d_{12}}{\Delta}, \\
g_{02} &= \frac{d_{11}d_{02}-d_{01}d_{12}}{\Delta}, \quad g_{01} = \frac{d_{01}d_{22}-d_{21}d_{02}}{\Delta}, \\
g_{00} &= \frac{d_{21}d_{12}-d_{11}d_{22}}{\Delta},
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

$$\Delta = d_{20}(d_{11}d_{02}-d_{01}d_{12}) + d_{10}(d_{01}d_{22}-d_{21}d_{02}) + d_{00}(d_{21}d_{12}-d_{11}d_{22}).$$

Dus met de d's uit 2.4:

$$\begin{aligned}
g_{00} &= -2481.10^{-11}, & g_{10} &= 843.10^{-11}, & g_{20} &= -409.10^{-11}, \\
g_{01} &= 311.10^{-11}, & g_{11} &= -492.10^{-11}, & g_{21} &= 382.10^{-11}, \\
g_{02} &= -76.10^{-11}, & g_{12} &= 477.10^{-11}, & g_{22} &= -790.10^{-11}
\end{aligned}$$

$(kg^{-2}m^2s^4)$.

Substitueer (20) in (1.C); schrijf tevens G weer voluit.
Het resultaat is:

$$\left(m^2\nabla^2 + \frac{f_1^2\, g_{22}}{\sigma'_5}\right)\dot\psi'_5 + f_1^2\left(\frac{g_{21}}{\sigma'_8}\dot\psi'_8 + \frac{g_{20}}{\sigma'_{10}}\dot\psi'_{10}\right) =$$

$$+\, m^2\left\{-J(\psi_3, m^2\nabla^2\psi_3+f) + J(\psi_5, m^2\nabla^2\psi_5+f)\right\}$$

$$+\, f_1^2 m^2\left\{\frac{-g_{22}}{\sigma'_5}J(\psi_5,\psi_3) + \frac{g_{21}}{\sigma'_8}J(\psi_5,\psi_8) + \frac{g_{20}}{\sigma'_{10}}J(\psi_8,\psi_{10})\right\},$$

$$\left(m^2\nabla^2 + \frac{f_1^2\, g_{11}}{\sigma'_8}\right)\dot\psi'_8 + f_1^2\left(\frac{g_{12}}{\sigma'_5}\dot\psi'_5 + \frac{g_{10}}{\sigma'_{10}}\dot\psi'_{10}\right) =$$

$$+\, m^2\left\{-J(\psi_5, m^2\nabla^2\psi_5+f) + J(\psi_8, m^2\nabla^2\psi_8+f)\right\}$$

$$+\, f_1^2 m^2\left\{\frac{-g_{12}}{\sigma'_5}J(\psi_5,\psi_3) + \frac{g_{11}}{\sigma'_8}J(\psi_5,\psi_8) + \frac{g_{10}}{\sigma'_{10}}J(\psi_8,\psi_{10})\right\}, \qquad (1.D)$$

$$\left(m^2\nabla^2 + \frac{f_1^2\, g_{00}}{\sigma'_{10}}\right)\dot\psi'_{10} + f_1^2\left(\frac{g_{02}}{\sigma'_5}\dot\psi'_5 + \frac{g_{01}}{\sigma'_8}\dot\psi'_8\right) =$$

$$+\, m^2\left\{-J(\psi_8, m^2\nabla^2\psi_8+f) + J(\psi_{10}, m^2\nabla^2\psi_{10}+f)\right\}$$

$$+\, f_1^2 m^2\left\{\frac{-g_{02}}{\sigma'_5}J(\psi_5,\psi_3) + \frac{g_{01}}{\sigma'_8}J(\psi_5,\psi_8) + \frac{g_{00}}{\sigma'_{10}}J(\psi_8,\psi_{10})\right\}$$

en tenslotte na substitutie volgens (14) en (20) in de laatste vergelijking van (1.C):

$$m^2\nabla^2\dot\psi_5 + f_1^2\left(\frac{g_2}{\sigma'_5}\dot\psi'_5 + \frac{g_1}{\sigma'_8}\dot\psi'_8 + \frac{g_0}{\sigma'_{10}}\dot\psi'_{10}\right) = -m^2\, J(\psi_5, m^2\nabla^2\psi_5+f)$$

$$+\, f_1^2\, m^2\left\{\frac{-g_2}{\sigma'_5}J(\psi_5,\psi_3) + \frac{g_1}{\sigma'_8}J(\psi_5,\psi_8) + \frac{g_0}{\sigma'_{10}}J(\psi_8,\psi_{10})\right\}.$$

waarin de constanten g gelijk zijn aan:

$$\left.\begin{aligned} g_2 &= d_0 g_{02} + d_1 g_{12} + d_2 g_{22} \ ; \ g_2 = 434.10^{-11} \ (kg^{-2} m^2 s^4) \\ g_1 &= d_0 g_{01} + d_1 g_{11} + d_2 g_{21} \ ; \ g_1 = -318.10^{-11} \\ g_0 &= d_0 g_{00} + d_1 g_{10} + d_2 g_{20} \ ; \ g_0 = 341.10^{-11} \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

De vergelijkingen (1.D) zijn bepaald volgens de principes van blz. 3, d.w.z. op basis van een stroomfunctie volgens (4) met f_1 constant voor de omgeving van het punt waarvoor (1.D) geldt. Indien nu de berekening zoals gebruikelijk op een rekenrooster wordt uitgevoerd, waarbij voor elk roosterpunt aan f_1 de waarde van de CORIOLIS-parameter ter plaatse wordt toegekend, maakt men een fout. Immers, omdat f_1 nu van roosterpunt tot roosterpunt kan verschillen en dus - in tegenstelling tot de bedoeling uitgesproken op blz. 3 - variabel wordt, rekent men alsof voor de geostrofische wind geldt:

$$\mathbb{V} = \vec{k} \times m \nabla \frac{gz}{f}$$

in plaats van:

$$\mathbb{V} = \vec{k} \times \frac{m}{f} \nabla gz \ .$$

Daarom wordt een stroomfunctie ψ_0 ingevoerd, gedefinieerd als:

$$\psi_0 = \frac{gz}{f_0}$$

met voor f_0 een constante waarde, bijvoorbeeld 10^{-4}.
Dus:

$$\psi = \frac{f_0}{f_1} \psi_0 \qquad (23)$$

Advectie van een grootheid C(x,y) met de geostrofische wind wordt immers exact beschreven met

$$- \frac{f_0}{f} J(\psi_0, C) .$$

Indien men in het onderhavige model de advectie geostrofisch wil uitvoeren, moeten de Jacobianen $J(\psi, \ldots)$ worden vervangen door

f_0/f_1 $J(\psi_0,\ldots)$, dat betekent: substitueer volgens (23), waarbij f_0/f_1 constant geacht wordt. Als in (1.D) deze substitutie wordt uitgevoerd, begaat men een onnauwkeurigheid met betrekking tot de vorticiteit. Want de vorticiteit van de geostrofische wind is

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{f}\frac{\partial gz}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{f}\frac{\partial gz}{\partial y}$$

en dit is niet gelijk aan de uitdrukking, die na de genoemde substitutie gevonden wordt, namelijk

$$\frac{f_0}{f}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi_0 \,.$$

Het verschil is gering en zal worden verwaarloosd. Het stelsel (1.D) wordt dan ook herschreven met toepassing van de volgende manipulaties:

a) Substitueer

$$\psi = \frac{f_0}{f_1}\psi_0, \quad f_0 = 10^{-4}, \quad f_1 = \text{lokale waarde van } f,$$

en behandel f_0/f_1 bij het differentiëren als een constante.

b) Vermenigvuldig beide leden van de vergelijkingen met

$$\frac{f_1}{m^2 f_0}\,.$$

c) Definieer als nieuwe constanten

$$a_0 = \frac{f_0^2 g_0}{\sigma'_{10}}, \quad a_1 = \frac{f_0^2 g_1}{\sigma'_8}, \quad a_2 = \frac{f_0^2 g_2}{\sigma'_5},$$

$$a_{00} = \frac{f_0^2 g_{00}}{\sigma'_{10}}, \quad a_{01} = \frac{f_0^2 g_{01}}{\sigma'_8}, \quad a_{02} = \frac{f_0^2 g_{02}}{\sigma'_5},$$

$$a_{10} = \frac{f_0^2 g_{10}}{\sigma'_{10}}, \quad a_{11} = \frac{f_0^2 g_{11}}{\sigma'_8}, \quad a_{12} = \frac{f_0^2 g_{12}}{\sigma'_5},$$

$$a_{20} = \frac{f_0^2 g_{20}}{\sigma'_{10}}, \quad a_{21} = \frac{f_0^2 g_{21}}{\sigma'_8}, \quad a_{22} = \frac{f_0^2 g_{22}}{\sigma'_5}\,.$$

d) Schrijf de Jacobianen verkort als:

$$J_1 = J(\psi_3, m^2\nabla^2\psi_3), \quad J_2 = J(\psi_5, m^2\nabla^2\psi_5),$$

$$J_3 = J(\psi_8, m^2\nabla^2\psi_8), \quad J_4 = J(\psi_{10}, m^2\nabla^2\psi_{10}),$$

$$J_5 = J(\psi_3, f), \quad J_6 = J(\psi_5, f), \quad J_7 = J(\psi_8, f),$$

$$J_8 = J(\psi_{10}, f),$$

$$J_9 = J(\psi_5, \psi_3), \quad J_{10} = J(\psi_5, \psi_8), \quad J_{11} = J(\psi_8, \psi_{10}).$$

e) Laat in het eindresultaat de index $_0$ bij ψ_0 weg.
De vergelijkingen worden:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\nabla^2 + \frac{f_1^2}{m^2 f_0^2} a_{22}\right) \dot{\psi}'_5 + \frac{f_1^2}{m^2 f_0^2} \left(a_{21} \dot{\psi}'_8 + a_{20} \dot{\psi}'_{10}\right) = \\
&- \frac{f_0}{f_1} (J_1 - J_2) - J_5 + J_6 - \frac{f_1}{f_0} \left(a_{22} J_9 - a_{21} J_{10} - a_{20} J_{11}\right), \\
&\left(\nabla^2 + \frac{f_1^2}{m^2 f_0^2} a_{11}\right) \dot{\psi}'_8 + \frac{f_1^2}{m^2 f_0^2} \left(a_{12} \dot{\psi}'_5 + a_{10} \dot{\psi}'_{10}\right) = \\
&- \frac{f_0}{f_1} (J_2 - J_3) - J_6 + J_7 - \frac{f_1}{f_0} \left(a_{12} J_9 - a_{11} J_{10} - a_{10} J_{11}\right), \\
&\left(\nabla^2 + \frac{f_1^2}{m^2 f_0^2} a_{00}\right) \dot{\psi}'_{10} + \frac{f_1^2}{m^2 f_0^2} \left(a_{02} \dot{\psi}'_5 + a_{01} \dot{\psi}'_8\right) = \\
&- \frac{f_0}{f_1} (J_3 - J_4) - J_7 + J_8 - \frac{f_1}{f_0} \left(a_{02} J_9 - a_{01} J_{10} - a_{00} J_{11}\right), \\
&\nabla^2 \dot{\psi}_5 + \frac{f_1^2}{m^2 f_0^2} \left(a_2 \dot{\psi}'_5 + a_1 \dot{\psi}'_8 + a_0 \dot{\psi}'_{10}\right) = \\
&- \frac{f_0}{f_1} J_2 - J_6 - \frac{f_1}{f_0} \left(a_2 J_9 - a_1 J_{10} - a_0 J_{11}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (1.E)$$

Met de σ's uit 2.6 worden de constanten a:

$$a_{22} = -606.10^{-13}, \quad a_{21} = 253.10^{-13}, \quad a_{20} = -205.10^{-13},$$
$$a_{12} = 366.10^{-13}, \quad a_{11} = -325.10^{-13}, \quad a_{10} = 422.10^{-13},$$
$$a_{02} = -58.10^{-13}, \quad a_{01} = 205.10^{-13}, \quad a_{00} = -1241.10^{-13},$$
$$a_{2} = 333.10^{-13}, \quad a_{1} = -210.10^{-13}, \quad a_{0} = 170.10^{-13} \quad (m^{-2}).$$

3. DIVERSE TOEVOEGINGEN AAN DE VOORSPELVERGELIJKINGEN

3.1 Inleiding

De voorspelvergelijkingen (1.E) kunnen worden aangevuld met termen, die de horizontale diffusie, de oppervlaktewrijving en de invloed van de helling van het aardoppervlak beschrijven. Ook kan de zg. CRESSMAN-term worden opgenomen en kan de opname van vrijkomende latente warmte worden verwerkt. De stroomfunctie kan met de balansvergelijking worden bepaald. In de volgende paragrafen zal een en ander worden behandeld.

3.2 Horizontale diffusie

De horizontale diffusie wordt behandeld volgens de methode van FICK*). De vergelijkingen (1.A) en (2.A) op blz. 3 worden respectievelijk:

$$m^2\nabla^2\dot{\psi} + m^2 J(\psi, m^2\nabla^2+f) + f_1 D = \mu m^2\nabla^2 (m^2\nabla^2\psi) \quad \text{en}$$

$$\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial p} + m^2 J(\psi, \frac{\partial\psi}{p}) + \frac{\sigma}{f_1}\omega = \frac{-R}{pf_1c_p}\cdot\frac{dQ}{dt} + \mu m^2\nabla^2 \frac{\partial\psi}{\partial p} ,$$

welke vergelijkingen als volgt kunnen worden herschreven:

$$m^2\nabla^2(\dot{\psi}-\mu m^2\nabla^2\psi) + m^2 J(\psi, m^2\nabla^2\psi+f) + f_1 D = 0 , \quad (1.F)$$

$$\frac{\partial}{\partial p}(\dot{\psi}-\mu m^2\nabla^2\psi) + m^2 J(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial p}) + \frac{\sigma}{f_1}\omega = \frac{-R}{pf_1c_p}\frac{dQ}{dt} . \quad (2.D)$$

*) Zie o.a. H. LETTAU in [8], blz. 330, (99).

Deze vergelijkingen zijn identiek aan (1.A) en (2.A), behalve dat $\dot{\psi}$ vervangen is door $(\dot{\psi}-\mu m^2\nabla^2\psi)$. Dus wordt de diffusie in de voorspelvergelijkingen (1.E) verwerkt door telkens $\dot{\psi}$ te vervangen door $(\dot{\psi}-\mu m^2\nabla^2\psi)$. (In de praktijk wordt de gezochte tendens bepaald door (1.E) op te lossen met $(\dot{\psi}-\mu m^2\nabla^2\psi)$ als onbekenden en de gevonden waarden te vermeerderen met $\mu m^2\nabla^2\psi$ om de betreffende tendens $\dot{\psi}$ te krijgen).

Voor μ wordt wel $5.10^5\ m^2s^{-1}$ genomen. Deze waarde is minstens 2x te groot en kan fysisch onrealistisch genoemd worden. Soms wordt de diffusiecoëfficiënt echter op oneigenlijke wijze toegepast om met te grote waarden de uitkomst van de berekeningen glad te strijken; $\dot{\psi}$ wordt immers met een positief getal vermeerderd als $m^2\nabla^2\psi$ positief is, dus lagen vullen op, enz.

3.3 Oppervlaktewrijving

De oppervlaktewrijving wordt uiteraard alleen op 1000 mbar ingevoerd. Er wordt uitgegaan van de beide "horizontale" componenten van de bewegingsvergelijking volgens HESSELBERG [9], blz. 208:

$$\frac{du_{10}}{dt} - f\ v_{10} = -m\frac{\partial gz_{10}}{\partial x} + b(v_{10}\sin\beta - u_{10}\cos\beta)$$

$$\frac{dv_{10}}{dt} + f\ u_{10} = -m\frac{\partial gz_{10}}{\partial y} - b(u_{10}\sin\beta + v_{10}\cos\beta)$$

(b is een constante).

Uit de beide vergelijkingen wordt op de gebruikelijke wijze, met de gebruikelijke vereenvoudigingen (waaronder die, dat de schaalfactor m constant is), de vorticiteitsvergelijking voor 1000 mbar afgeleid.
Deze bevat dan de vorticiteit, die ten gevolge van de wrijving kleiner is dan de quasi-geostrofische waarde. Na uitdelen van de wrijvingsreduktiefaktor en enkele verwaarlozingen wordt de volgende vergelijking verkregen:

$$m^2\nabla^2\dot{\psi}_{10} + m^2\ J(\psi_{10},\nabla^2\psi_{10} + f) = -\ f_1\ D_{10} - C_D\ m^2\nabla^2\psi_{10}$$

Hierbij wordt nog opgemerkt dat door het introduceren van de wrijvingsterm $C_D\ m^2\nabla^2\psi_{10}$ zowel de divergenties D als de tendensen $\dot{\psi}$ worden beïnvloed, wat o.a. resulteert in een extra ω aan de top van de grenslaag. Een en ander kan worden afgeleid uit HESSELBERG

[9] samen met BIJVOET [10], 2.2.4.

Zo doorgaande wordt de derde vergelijking van (1.C) op blz. 5:

$$m^2\nabla^2\dot{\psi}'_{10} + m^2 J(\psi_8, m^2\nabla^2\psi_8 + f)$$

$$-m^2 J(\psi_{10}, m^2\nabla^2\psi_{10} + f) - C_D\, m^2\nabla^2\psi_{10} = -f_1\, D'_{10} \qquad (1.G)$$

en tenslotte de derde vergelijking van (1.E):

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_1^2}{m^2 f_0^2}\, a_{00}\right)\dot{\psi}'_{10} + \frac{f_1^2}{m^2 f_0^2}\left(a_{02}\,\dot{\psi}'_5 + a_{01}\,\dot{\psi}'_8\right) =$$

$$-\frac{f_0}{f_1}(J_3 - J_4) - J_7 + J_8 - \frac{f_1}{f_0}\left(a_{02}\,J_9 - a_{01}\,J_{10} - a_{00}\,J_{11}\right) + C_D\,\nabla^2\,\psi_{10}.$$

Voor C_D werd $29.10^{-6}s^{-1}$ genomen, Deze waarde bepaalde HEIJBOER uit [10], blz. 75, fig. 2.2.2 met luchttemperatuur = zeewatertemperatuur.

3.4 Helling van het aardoppervlak

De wisselende hoogte van het aardoppervlak (men zegt wel "de topografie") wordt als volgt in rekening gebracht:

Als de gronddruk langs een berghelling p_s bedraagt en de wind doet de lucht langs deze helling bewegen, dan krijgt deze lucht daardoor een vertikale snelheid opgedrongen ten bedrage van:

$$\omega = \mathbf{V} \cdot \nabla p_s$$

In het onderhavige model wordt p_s gelijkgesteld aan de druk, die de standaardatmosfeer op die hoogte heeft en wordt de topografie erin gebracht door $\omega_{10} = \omega(p_{10})$ niet langer = 0 te stellen, zoals op blz. 7 werd gedaan, maar door volgens bovenstaande te nemen:

$$\omega_{10} = \mathbf{V}_{10} \cdot \nabla p_s$$

Dit wordt met de gebruikte geostrofische benadering:

$$\omega_{10} = m^2 J(\psi_{10}, p_s) \tag{24}$$

en dus

$$\int_0^{p_{10}} D\, dp = - \omega_{10} = - m^2 J(\psi_{10}, p_s) \; . \tag{7.A}$$

De beweringen uit 2.3, met name (8) en (9), zijn nu niet meer algemeen geldig; alleen boven vlak gebied gelden ze nog zonder meer. Desondanks blijft de parameterisering van D uit 2.3 gehandhaafd. Er is een parameterisering gekozen voor het gehele gebied onafhankelijk van x en y; als deze onafhankelijkheid bewaard blijft kan er dus geen onderscheid gemaakt worden tussen bergland en zeeoppervlak. Omdat er (veel) meer zee en vlak terrein dan gebergte zijn, wordt de schatting van D langs de p-as gelaten zoals ze is, d.w.z. volgens (13.1, 2, 3 en 4).

De helling van het aardoppervlak wordt wel in rekening gebracht bij de berekening van $\int \omega\, dp$ en dus van de rechterleden van (2.B), zie 2.4. Dit gaat als volgt:

Gebruik makend van (3) en (7.A) wordt

$$\omega(p) = - \int_0^p D\, dp = \left(- \int_0^{p_{10}} + \int_p^{p_{10}} \right) D\, dp$$

$$= \omega_{10} + \int_p^{p_{10}} D\, dp \quad ,$$

terwijl met (7.A) kan worden afgeleid dat voor (14) geschreven moet worden:

$$D_5 = d_0\, D'_{10} + d_1\, D'_8 + d_2\, D'_5 - \frac{\omega_{10}}{N} \tag{14.A}$$

In (14.A) behouden d_0, d_1 en d_2 de op blz. 15 vermelde waarden en is N de laatste uitdrukking van 2.3, (15).

Analoog aan (16) kan nu worden geschreven:

$$\int_{p_8}^{p_{10}} \omega \, dp = \int_{p_8}^{p_{10}} \left(\omega_{10} + \int_{p}^{p_{10}} D \, dp' \right) dp =$$

$$d^*_{00} D'_{10} + d^*_{01} D'_8 + d^*_{02} D'_5 + d_{03} \, \omega_{10} \quad ,$$

$$\int_{p_5}^{p_8} \omega \, dp = d^*_{10} D'_{10} + d^*_{11} D'_8 + d^*_{12} D'_5 + d_{13} \, \omega_{10} \, ,$$

$$\int_{p_3}^{p_5} \omega \, dp = d^*_{20} D'_{10} + d^*_{21} D'_8 + d^*_{22} D'_5 + d_{23} \, \omega_{10} \, .$$

Na substitutie volgens (13.1, 2, 3, 4) blijken $d^*_{ij} = d_{ij}$ (blz. 15), terwijl

$$d_{03} = \int_{p_8}^{p_{10}} \left(1 - \frac{\int_p^{p_{10}} dp'}{N} \right) dp \quad ,$$

$$d_{13} = \int_{p_5}^{p_8} \left(1 - \frac{\int_p^{p_{10}} dp'}{N} \right) dp \quad ,$$

$$d_{23} = \int_{p_3}^{p_5} \left(1 - \frac{\int_p^{p_{10}} dp'}{N} \right) dp \quad .$$

Met de notatie van blz. 13 wordt dit

$$d_{03} = P_1 - \frac{PP_1}{N} ,$$

$$d_{13} = P_2 - \frac{PP_2}{N} ,$$

$$d_{23} = P_3 - \frac{PP_3}{N} \quad \text{met}$$

$$N = \frac{-F_4}{F(p_3)} + P_4 .$$

De getalwaarden zijn:

$d_{03} = 13630$, $d_{13} = 21151$, $d_{23} = 5390$ (kg $m^{-1}s^{-2}$) .

Vervolgens worden in (2.C) en daarna in (20) G_5, G_8 en G_{10} vervangen door respectievelijk

$$\left(G_5 - \frac{\sigma_5'}{f_1} d_{23}\, \omega_{10}\right) , \left(G_8 - \frac{\sigma_8'}{f_1} d_{13}\, \omega_{10}\right) \text{ en } \left(G_{10} - \frac{\sigma_{10}'}{f_1} d_{03}\, \omega_{10}\right) .$$

In plaats van (20) kan worden geschreven:

$$D_5' = f_1\left(\frac{g_{22}}{\sigma_5'} G_5 + \frac{g_{21}}{\sigma_8'} G_8 + \frac{g_{20}}{\sigma_{10}'} G_{10}\right) - g_{23}\, \omega_{10}$$

$$D_8' = f_1\left(\frac{g_{12}}{\sigma_5'} G_5 + \frac{g_{11}}{\sigma_8'} G_8 + \frac{g_{10}}{\sigma_{10}'} G_{10}\right) - g_{13}\, \omega_{10}$$

$$D_{10}' = f_1\left(\frac{g_{02}}{\sigma_5'} G_5 + \frac{g_{01}}{\sigma_8'} G_8 + \frac{g_{00}}{\sigma_{10}'} G_{10}\right) - g_{03}\, \omega_{10}$$

met

$$g_{23} = f_1\left(\frac{g_{22}}{\sigma_5'} \cdot \frac{\sigma_5'}{f_1} d_{23} + \frac{g_{21}}{\sigma_8'} \cdot \frac{\sigma_8'}{f_1} d_{13} + \frac{g_{20}}{\sigma_{10}'} \cdot \frac{\sigma_{10}'}{f_1} d_{03}\right)$$

$$= g_{22}d_{23} + g_{21}d_{13} + g_{20}d_{03} \quad \text{en vervolgens}$$

$$g_{13} = g_{12}d_{23} + g_{11}d_{13} + g_{10}d_{03} \quad \text{en}$$

$$g_{03} = g_{02}d_{23} + g_{01}d_{13} + g_{00}d_{03} \quad .$$

Deze constanten hebben de volgende waarden:

$$g_{03} = -27649.10^{-8}, \quad g_{13} = 3655.10^{-8}, \quad g_{23} = -1753.10^{-8} \quad (kg^{-1} m\ s^2).$$

Nadat ω_{10} volgens (24) is vervangen door $m^2\ J(\psi_{10}, p_s)$ worden de rechterleden van de eerste drie vergelijkingen van (1.D) vermeerderd met respectievelijk

$$\left.\begin{array}{l} f_1 g_{23}\ m^2\ J(\psi_{10}, p_s), \quad f_1 g_{13}\ m^2\ J(\psi_{10}, p_s) \ \text{en} \\ f_1 g_{03}\ m^2\ J(\psi_{10}, p_s) \end{array}\right\} \qquad (25.1)$$

De laatste term van (1.D) wordt vermeerderd met

$$f_1 g_3\ m^2\ J(\psi_{10}, p_s) \qquad (25.2)$$

waarin volgens (14.A)

$$g_3 = d_0 g_{03} + d_1 g_{13} + d_2 g_{23} + \frac{1}{N} \quad ,$$

zijnde 1476.10^{-8} $(kg^{-1} m\ s^2)$.

3.5 De CRESSMAN-term

Deze term wordt behandeld op de wijze zoals OPSTEEGH dit deed voor het operationale drielagen-model BK3, zie [11].

Neem de referentie-atmosfeer zoals deze is gedefinieerd met (5) op blz. 5:

$$\psi(x,y,p,t) = A(p)\ \psi_5(x,y,t) + B(p) \qquad (5)$$

Substitutie in blz. 3, (2.A), met $\frac{d\psi}{dt} = 0$ leidt tot:

$$\frac{dA}{dp} \cdot \dot{\psi}_5 + m^2 \, J\left(A \, \psi_5 + B, \, \frac{dA}{dp} \, \psi_5 + \frac{dB}{dp}\right) + \frac{\sigma}{f_1} \, \omega = 0$$

en omdat wegens de onafhankelijkheid van A en B van x en y de Jacobiaan duidelijk $\equiv 0$ is:

$$\frac{dA}{dp} \cdot \dot{\psi}_5 + \frac{\sigma}{f_1} \, \omega = 0 \, , \qquad \text{dus}$$

$$\omega = - \frac{f_1}{\sigma} \, \frac{dA}{dp} \cdot \dot{\psi}_5 \; .$$

Voor p = 1000 mbar wordt dit

$$\omega(p_{10}) = - \frac{f_1}{\sigma} \left(\frac{dA}{dp}\right)_{10} \dot{\psi}_5 \tag{26}$$

en niet $\omega(p_{10}) = 0$, zoals op blz. 7 wordt verondersteld; derhalve wordt (7):

$$\int_0^{p_{10}} D \, dp = - \omega(p_{10}) = \frac{f_1}{\sigma}\left(\frac{dA}{dp}\right)_{10} \cdot \dot{\psi}_5 \tag{7.B}$$

Substitueer (5) in (1.A); het resultaat is analoog aan (6) op blz. 6:

$$m^2 \nabla^2 \dot{\psi} + m^2 \, J(\psi, m^2 \nabla^2 \psi + f) + f_1 D =$$

$$m^2 \, A(p) \nabla^2 \dot{\psi}_5 + m^2 \, J\left(A(p) \psi_5 + B(p), \, m^2 \, A(p) \nabla^2 \psi_5 + f\right) + f_1 D =$$

$$m^2 \{A(p) \nabla^2 \dot{\psi}_5 + A^2(p) \, J(\psi_5, m^2 \nabla^2 \psi_5) + A(p) \, J(\psi_5, f)\} + f_1 D = 0 \tag{6.B}$$

Integreer vervolgens van p = 0 tot p = 1000 mbar:

$$\int_0^{p_{10}} \{ m^2 \left[A \nabla^2 \dot{\psi}_5 + A^2 \, J(\psi_5, m^2 \nabla^2 \psi_5) + A \, J(\psi_5, f) \right] + f_1 D \} \, dp =$$

$$m^2\left\{\left(\int_0^{p_{10}} A\,dp\right)\nabla^2\dot{\psi}_5 + \left(\int_0^{p_{10}} A^2\,dp\right)J(\psi_5,m^2\nabla^2\psi_5)\right.$$

$$\left. + \left(\int_0^{p_{10}} A\,dp\right)J(\psi_5,f)\right\} + f_1\int_0^{p_{10}} D\,dp = 0,$$

dit wordt met (9) en (7.B):

$$m^2\{\nabla^2\dot{\psi}_5 + K\,J(\psi_5,m^2\nabla^2\psi_5) + J(\psi_5,f)\} + \frac{f_1^2}{\sigma\int_0^{p_{10}} A\,dp}\cdot\left(\frac{dA}{dp}\right)_{10}\cdot\dot{\psi}_5 = 0 \qquad (1.H)$$

Stel $\frac{1}{\sigma\int_0^{p_{10}} A\,dp}\cdot\left(\frac{dA}{dp}\right)_{10} = -\,M$ en vermenigvuldig de beide leden van (1.H) met A(p):

$$m^2\{A(p)\nabla^2\dot{\psi}_5 + A(p)\,K\,J(\psi_5,m^2\nabla^2\psi_5) +$$

$$A(p)\,J(\psi_5,f)\} - A(p)\,f_1^2\,M\,\dot{\psi}_5 =$$

$$m^2\{A(p)\nabla^2\dot{\psi}_5 + A^2(p)\,J(\psi_5,m^2\nabla^2\psi_5) + A(p)\,J(\psi_5,f)$$

$$+ (A(p)\,K - A^2(p))J(\psi_5,m^2\nabla^2\psi_5)\} - A(p)\,f_1^2\,M\,\dot{\psi}_5 = 0$$

Volgens (5) staat hier:

$$m^2\{\nabla^2\dot{\psi} + J(\psi,m^2\nabla^2\psi + f) +$$

$$\left(A(p)\,K - A^2(p)\right)J(\psi_5,m^2\nabla^2\psi_5)\} - f_1^2\,M\,\dot{\psi} =$$

$$(m^2\nabla^2 - f_1^2\,M)\,\dot{\psi} + m^2\,J(\psi,m^2\nabla^2\psi + f) +$$

$$m^2\left(A(p)\,K - A^2(p)\right)J(\psi_5,m^2\nabla^2\psi_5) = 0$$

Hetzelfde betoog, maar nu met als vanouds $\omega(p_{10}) = 0$, dus met (7) in plaats van (7.B) maakt M = 0 en leidt tot

$$m^2\nabla^2\dot{\psi} + m^2 J(\psi, m^2\nabla^2\psi + f) +$$

$$m^2 (AK - A^2) J(\psi_5, m^2\nabla^2\psi_5) = 0$$

In combinatie met (1.A) volgt hieruit

$$m^2(AK-A^2) J(\psi_5, m^2\nabla^2\psi_5) = f_1 D ,$$

een resultaat dat ook al op blz. 7 werd verkregen; de formule is identiek aan (12) op blz. 8.

Als (1.A) wordt vervangen door

$$(m^2\nabla^2 - f_1^2 M)\dot{\psi} + m^2 J(\psi, m^2\nabla^2\psi + f) + f_1 D = 0 \qquad (1.I)$$

en D verder wordt behandeld zoals in 2.3, dus met

$$\int_0^{p_{10}} D\, dp = 0 \qquad (7)$$

dan is $\dot{\psi}$ de oplossing na toepassing van de CRESSMAN-term $f_1^2 M \dot{\psi}$.

Met A(p) volgens 2.3, blz. 6 en $\sigma = \sigma_{10} = 2.10^{-6}$ volgens 2.5, blz. 16, wordt M ca. 9.10^{-5}.

De beschouwingen in deze paragraaf doen onmiddellijk denken aan die in 3.4, waarin de invloed van de topografie wordt besproken. In beide gevallen gaat het erom dat (7) op blz. 7 vervangen wordt door

$$\int_0^{p_{10}} D\, dp = \chi(x,y,t) .$$

waarbij χ een functie van x,y en t is, die niet identiek gelijk aan 0 is.

De uitwerking verschilt nogal. In deze paragraaf wordt volgens (7.B):

$$\chi = \frac{f_1}{\sigma} \cdot \left(\frac{dA}{dp}\right)_{10} \cdot \dot{\psi}_5 \ ,$$

in 3.4 volgens (7.A):

$$\chi = - \omega_{10} = - m^2 \ J(\psi_{10}, p_s).$$

Het onderscheid tussen 3.4 en 3.5 is, dat in deze paragraaf alles uit (5) volgt. In 3.4 is het model "gewoon" baroklien.

De naar CRESSMAN genoemde term werd door hem behandeld in [6] en werd ook door BOUMAN en SCHMIDT besproken, zie [7] blz. 12 t/m 24. De hier getoonde afleiding wijkt enigszins af van die in de beide genoemde publicaties. Vergelijk ook met HALTINER [2], blz.116 e.v.

3.6 Latente warmte

Door HEIJBOER en DEN EXTER BLOKLAND [4] is destijds een methode ontwikkeld voor de verwerking van de latente warmte, die vrijkomt ten gevolge van het condenseren van waterdamp. De methode was aangepast aan het operationele drielagen-model. Het is de bedoeling de behandeling van de vrijkomende warmte in de gefilterde modellen opnieuw te onderzoeken en eventueel het resultaat in een afzonderlijke publicatie te vermelden. Inmiddels is met het onderhavige vierlagen-model een groot aantal proeven gedaan met de methode van [4], welke dan met behulp van een betrekkelijk aannemelijke veronderstelling toepasbaar was gemaakt voor vier lagen.

Deze methode wordt nu in combinatie met [4] - dus onder voortdurende verwijzing naar [4] - kort besproken. Dit gaat dan als volgt:

De tendens zonder inachtneming van latente warmte e.d. wordt $\dot{\psi}_d$ genoemd. Dit is de tendens, die in dit rapport werd berekend; op blz. 4 werd immers $\frac{dQ}{dt} \equiv 0$ gesteld. Noem de tendens met warmteterm $\dot{\psi}$ en de correctie $\dot{\psi}_m$, dus

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_d + \dot{\psi}_m \qquad (27)$$

[4], blz. 9, (12) wordt:

$$\left.\begin{aligned} m^2\nabla^2\dot{\psi}_{10_m} &= -\, f_1\, D_{10_m} \\ m^2\nabla^2\dot{\psi}_{8_m} &= -\, f_1\, D_{8_m} \\ m^2\nabla^2\dot{\psi}_{5_m} &= -\, f_1\, D_{5_m} \\ m^2\nabla^2\dot{\psi}_{3_m} &= -\, f_1\, D_{3_m} \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Als voor $p \leqslant 200$ mbar $D_m \equiv 0$ wordt gesteld - zoals dat in [4] op blz. 11 gebeurde - **en analoog aan blz. 7 bovenaan** $\omega_m \equiv 0$ op **0 en 1000 mbar, dan is**

$$\int_0^{p_{10}} D_m\, dp = - \int_0^{p_{10}} \frac{\partial \omega_m}{\partial p}\, dp = 0 \qquad \left([4],\ (15)\right)$$

Met de trapeziumregel (druk in mbar):

$$\left(\int_0^{200} + \int_{200}^{300} + \int_{300}^{500} + \int_{500}^{850} + \int_{850}^{1000} \right) D_m\, dp =$$

$$100\, \frac{D_{3_m}}{2} + 200\left(\frac{D_{3_m} + D_{5_m}}{2}\right) + 350\left(\frac{D_{5_m} + D_{8_m}}{2}\right)$$

$$+\ 150\left(\frac{D_{8_m} + D_{10_m}}{2}\right) = 0 \qquad \text{of}$$

$$6\, D_{3_m} + 11\, D_{5_m} + 10\, D_{8_m} + 3\, D_{10_m} = 0$$

Met (28):

$$\nabla^2\, (6\, \dot{\psi}_{3_m} + 11\, \dot{\psi}_{5_m} + 10\, \dot{\psi}_{8_m} + 3\, \dot{\psi}_{10_m}) = 0\ .$$

Stel op de rand alle $\dot{\psi}_m$'s $\equiv 0$, dan volgt uit een bekende stelling uit de theorie van de LAPLACE-vergelijkingen:

$$6\,\dot{\psi}_{3_m} + 11\,\dot{\psi}_{5_m} + 10\,\dot{\psi}_{8_m} + 3\,\dot{\psi}_{10_m} = 0 \tag{29}$$

Dit alles analoog aan [4], 3.2.

Zonder de voorwaarde $\frac{dQ}{dt} \equiv 0$ worden de vergelijkingen (2.B):

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi}_5' + m^2 J(\psi_5, \psi_3) = \frac{\sigma_5'}{f_1} \int_{p_3}^{p_5} \omega\, dp + \frac{R}{f_1 c_p} \int_{p_3}^{p_5} \frac{dQ}{dt}\Big/ p \; dp \end{aligned}\right\} \tag{2.E}$$

enz.

Noem de laatste termen van de rechterleden H_5' enz. De vergelijkingen [4], (13) worden dan voor het vierlagen-model:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi}_{3_m} - \dot{\psi}_{5_m} &= H_5' + \frac{\sigma_5'}{f_1} \int_{p_3}^{p_5} \omega_m\, dp \\ \dot{\psi}_{5_m} - \dot{\psi}_{8_m} &= H_8' + \frac{\sigma_8'}{f_1} \int_{p_5}^{p_8} \omega_m\, dp \\ \dot{\psi}_{8_m} - \dot{\psi}_{10_m} &= H_{10}' + \frac{\sigma_{10}'}{f_1} \int_{p_8}^{p_{10}} \omega_m\, dp \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

De moeilijkheid is nu steeds zo eenvoudig mogelijk een redelijk goede bepaling van de waarde van de H''s te krijgen. Als eerste benadering werden daarom, in overeenstemming met [4], 3.3 en 3.4, de rechterleden van de bovenste en de onderste vergelijking $\equiv 0$ gesteld, en het rechterlid van de middelste $10^7 P$. De term $10^7 P$ is aannemelijk gemaakt op blz. 14 van [4]; P is de hoeveelheid neerslag in cm s^{-1}, terwijl voor de rest S.I. eenheden worden gebruikt. (30) wordt dus:

$$\dot{\psi}_{3_m} = \dot{\psi}_{5_m} ,$$

$$\dot{\psi}_{5_m} - \dot{\psi}_{8_m} = 10^7 P ,$$

$$\dot{\psi}_{8_m} = \dot{\psi}_{10_m} .$$

Met (29) leidt dit tot

$$17\,\dot{\psi}_{5_m} + 13\,\dot{\psi}_{8_m} = 0 \quad \text{en} \quad \dot{\psi}_{5_m} - \dot{\psi}_{8_m} = 10^7 P$$

waaruit volgt:

$$\dot{\psi}_{3_m} = \dot{\psi}_{5_m} = 0{,}43 \times 10^7 P ,$$

$$\dot{\psi}_{8_m} = \dot{\psi}_{10_m} = -0{,}57 \times 10^7 P .$$

Met deze methode werden een groot aantal prognoses berekend met een bevredigend resultaat. Het is echter wel zo, dat vooral het $\equiv 0$ stellen van de bovenste en onderste vergelijking van (30) de werkelijkheid geweld aan doet. Het is realistischer $H_5' \equiv H_{10}' \equiv 0$ te stellen - want in de betreffende lagen zal inderdaad zeer weinig condensatiewarmte vrijkomen - en voor H_8' $10^7 P$ te nemen. (Dit ging in [4] anders; daar werd niet H_8' maar $(\dot{\psi}_{5_m} - \dot{\psi}_{8_m})$ gelijk aan $10^7 P$ gesteld). Zodoende wordt (30):

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\psi}_{3_m} - \dot{\psi}_{5_m} &= \dot{\psi}_{5_m}' = \frac{\sigma_5'}{f_1} \int_{p_3}^{p_5} \omega_m \, dp \\
\dot{\psi}_{5_m} - \dot{\psi}_{8_m} - 10^7 P &= \dot{\psi}_{8_m}' - 10^7 P = \frac{\sigma_8'}{f_1} \int_{p_5}^{p_8} \omega_m \, dp \\
\dot{\psi}_{8_m} - \dot{\psi}_{10_m} &= \dot{\psi}_{10}' = \frac{\sigma_{10}'}{f_1} \int_{p_8}^{p_{10}} \omega_m \, dp
\end{aligned}\right\} \quad (30.\text{A})$$

terwijl (28) kan worden geschreven als

$$m^2\nabla^2\dot{\psi}'_{10_m} = - f_1 D'_{10_m}$$

$$m^2\nabla^2\dot{\psi}'_{8_m} = - f_1 D'_{8_m}$$

$$m^2\nabla^2\dot{\psi}'_{5_m} = - f_1 D'_{5_m}$$

$$m^2\nabla^2\dot{\psi}_5 = - f_1 D_{5_m}$$

(met $D'_{10_m} = D_{8_m} - D_{10_m}$ enz.).

Met behulp van een parameterisatie van D_m langs de p-as kunnen ω_m en de D_m's worden geëlimineerd zoals dat in 2.4 en 2.6 gebeurde. Het analogon van (1.D) wordt dan:

$$(m^2\nabla^2 + \frac{f_1^2\, g_{22_m}}{\sigma'_5})\ \dot{\psi}'_{5_m} + f_1^2 (\frac{g_{21_m}}{\sigma'_8}\ \dot{\psi}'_{8_m} + \frac{g_{20_m}}{\sigma'_{10}}\ \dot{\psi}'_{10_m})$$

$$= f_1^2\ \frac{g_{21_m}}{\sigma'_8} \cdot 10^7 p \quad ,$$

enz.

en na de manipulaties a) t/m e) van blz. 20 en 21 worden de vergelijkingen voor $\dot{\psi}_m$ tenslotte:

$$(\nabla^2 + \frac{f_1^2}{m^2 f_o^2}\, a_{22_m})\ \dot{\psi}'_{5_m} + \frac{f_1^2}{m^2 f_o^2}\ (a_{21_m}\ \dot{\psi}'_{8_m} + a_{20_m}\ \dot{\psi}'_{10_m}) =$$

$$\frac{f_1^3}{m^2 f_o^3}\, a_{21_m} \cdot 10^7 p$$

$$\left.\begin{aligned}
&(\nabla^2 + \frac{f_1^2}{m^2 f_o^2} a_{11_m}) \dot{\psi}'_{8_m} + \frac{f_1^2}{m^2 f_o^2} (a_{12_m} \dot{\psi}'_{5_m} + a_{10_m} \dot{\psi}'_{10_m}) = \\
&\frac{f_1^3}{m^3 f_o^3} a_{11_m} \cdot 10^7 P \\
&(\nabla^2 + \frac{f_1^2}{m^2 f_o^2} a_{00_m}) \dot{\psi}'_{10_m} + \frac{f_1^2}{m^2 f_o^2} (a_{02_m} \dot{\psi}'_{5_m} + a_{01_m} \dot{\psi}'_{8_m}) = \\
&= \frac{f_1^3}{m^2 f_o^3} a_{01_m} \cdot 10^7 P \\
&\nabla^2 \dot{\psi}_{5_m} + \frac{f_1^2}{m^2 f_o^2} (a_{2_m} \dot{\psi}'_{5_m} + a_{1_m} \dot{\psi}'_{8_m} + a_{o_m} \dot{\psi}'_{10_m}) = \\
&\frac{f_1^3}{m^2 f_o^3} a_{1_m} \cdot 10^7 P
\end{aligned}\right\} \quad (28.B)$$

Om de vergelijkingen op te lossen moet P bekend zijn. P kan met de droge versie volgens de methode van [5] worden bepaald. Vergeleken met de in [4] beschreven manier om vrijkomende condensatiewarmte te verwerken, moeten dan wel drie HELMHOLTZ- en één POISSON-vergelijking - namelijk het stelsel (28.B) - extra opgelost worden.

Het is duidelijk dat als de constanten $a_m = a$ zijn - hetgeen zo is als de parameterisatie van D_m gelijk is aan die van D in 2.3 - men de vergelijkingen (1.E) en (28.B) kan optellen om een stelsel te krijgen dat zou ontstaan zonder de beperking $\frac{dQ}{dt} = 0$ van blz. 4.

3.7 De balansvergelijking

Tot hier zijn de formules opgesteld met de divergentievrije wind zoals gedefinieerd in 2.1, dus met de stroomfunctie volgens (4):

$$\psi = \frac{gz}{f_1} \qquad (4)$$

Inmiddels zijn de meeste experimenten met dit vierlagen-model uitgevoerd na toepassing van de lineaire balansvergelijking:

$$f \nabla^2 \psi + \nabla f . \nabla \psi = g \nabla^2 z \qquad (31)$$

(zie HALTINER [2], blz. 60).

Nadat de objektieve analyses van de topografieën van 300, 500, 850 en 1000 mbar zijn gemaakt, worden ψ_3, ψ_5, ψ_8 en ψ_{10} met (31) uit de desbetreffende z-velden afgeleid. Op de numerieke aspekten van de berekening wordt hier niet ingegaan. Deze met de lineaire balansvergelijking afgeleide ψ's worden in (1,A) en (2.A) gesubstitueerd en vervolgens wordt doorgerekend tot en met blz. 18 (1.D) of eventueel blz. 24 (1.G) enz. Hierbij is de gelijkstelling $\frac{\partial\psi}{\partial p} = -\frac{1}{f_1\rho}$, volgens welke de thermodynamische vergelijking in de vorm (2.A) wordt geschreven en waarbij

$$-\int_{p_3}^{p_5} \frac{\partial\psi}{\partial p}\, dp = \psi_5' \qquad \text{enz.}$$

de dikte tussen twee drukvlakken vermenigvuldigd met g/f_1 voorstelt, niet meer korrekt. Deze onnauwkeurigheid blijkt weinig invloed te hebben op het uiteindelijke resultaat, dus wordt er verder geen rekening mee gehouden.

De manipulaties a) t/m e) van blz. 20 en 21 worden nu:

a) Vervalt

b) Vermenigvuldig beide leden van de vergelijkingen met $\frac{1}{m^2}$.

c) en d) Ongewijzigd.

e) Vervalt.

Zodoende krijgt men verwachtingen van de stroomfunkties ψ en niet van de topografieën van de desbetreffende standaarddrukvlakken. Als men laatstgenoemde wil hebben - en dat zal nodig zijn wanneer de routine-uitvoer plaatsvindt - moet met (31) z uit ψ worden afgeleid (inverteren van de balansvergelijking).

3.8 De voorspelvergelijkingen met horizontale diffusie, oppervlaktewrijving, topografie, CRESSMAN-term en balansvergelijking

In deze paragraaf worden de voorspelvergelijkingen met de in de titel genoemde uitbreidingen nog eens volledig vermeld, zoals dat in de desbetreffende voorafgaande paragrafen al ten dele gebeurde.

De vergelijkingen blz. 18 (1.D) worden na toevoegingen volgens blz. 22 (1.F) en (2.D), blz. 24 (1.G), (25.1,2) en blz. 31 (1.I):

$$\left.\begin{aligned}
&(m^2\nabla^2 + \frac{f_1^2 g_{22}}{\sigma'_5} - f_1^2 M)(\dot{\psi}'_5 - \mu m^2\nabla^2\psi'_5) \\
&+ f_1^2 \{ \frac{g_{21}}{\sigma'_8} (\dot{\psi}'_8 - \mu m^2\nabla^2\psi'_8) + \frac{g_{20}}{\sigma'_{10}} (\dot{\psi}'_{10} - \mu m^2\nabla^2\psi'_{10}) \} \\
&= m^2 \{ - J(\psi_3, m^2\nabla^2\psi_3 + f) + J(\psi_5, m^2\nabla^2\psi_5 + f) \} \\
&+ f_1^2 m^2 \{ \frac{-g_{22}}{\sigma'_5} J(\psi_5, \psi_3) + \frac{g_{21}}{\sigma'_8} J(\psi_5, \psi_8) + \frac{g_{20}}{\sigma'_{10}} J(\psi_8, \psi_{10}) \} \\
&+ f_1 g_{23}\, m^2\, J(\psi_{10}, p_s) \\[2ex]
&(m^2\nabla^2 + \frac{f_1^2 g_{11}}{\sigma'_8} - f_1^2 M)(\dot{\psi}'_8 - \mu m^2\nabla^2\psi'_8) \\
&+ f_1^2 \{ \frac{g_{12}}{\sigma'_5} (\dot{\psi}'_5 - \mu m^2\nabla^2\psi'_5) + \frac{g_{10}}{\sigma'_{10}} (\dot{\psi}'_{10} - \mu m^2\nabla^2\psi'_{10}) \} \\
&= m^2 \{ - J(\psi_5, m^2\nabla^2\psi_5 + f) + J(\psi_8, m^2\nabla^2\psi_8 + f) \} \\
&+ f_1^2\, m^2 \{ \frac{-g_{12}}{\sigma'_5} J(\psi_5, \psi_3) + \frac{g_{11}}{\sigma'_8} J(\psi_5, \psi_8) + \frac{g_{10}}{\sigma'_{10}} J(\psi_8, \psi_{10}) \} \\
&+ f_1\, g_{13}\, m^2\, J(\psi_{10}, p_s)
\end{aligned}\right\} \quad (1,J)$$

$$(m^2\nabla^2 + \frac{f_1^2 g_{00}}{\sigma'_{10}} - f_1^2\, M)\ (\dot{\psi}'_{10} - \mu\, m^2\nabla^2\psi'_{10})$$

$$+\ f_1^2 \{ \frac{g_{02}}{\sigma'_5} (\dot{\psi}'_5 - \mu m^2\nabla^2\psi'_5) + \frac{g_{01}}{\sigma'_8} (\dot{\psi}'_8 - \mu m^2\nabla^2\psi'_8) \}$$

$$= m^2 \{ - J(\psi_8, m^2\nabla^2\psi_8 + f) + J(\psi_{10}, m^2\nabla^2\psi_{10} + f) \}$$

$$+ f_1^2\ m^2 \{ \frac{-g_{02}}{\sigma'_5} J(\psi_5,\psi_3) + \frac{g_{01}}{\sigma'_8} J(\psi_5,\psi_8) + \frac{g_{00}}{\sigma'_{10}} J(\psi_8,\psi_{10}) \}$$

$$+\ f_1\ g_{03}\ m^2\ J(\psi_{10}, p_s) + c_D\ m^2\nabla^2\psi_{10}$$

$$(m^2\nabla^2 - f_1^2\ M)\ (\dot{\psi}_5 - \mu\, m^2\nabla^2\psi_5)$$

$$+\ f_1^2 \{ \frac{g_2}{\sigma'_5} (\dot{\psi}'_5 - \mu m^2\nabla^2\psi'_5) + \frac{g_1}{\sigma'_8} (\dot{\psi}'_8 - \mu m^2\nabla^2\psi'_8)$$

$$+ \frac{g_0}{\sigma'_{10}} (\dot{\psi}'_{10} - \mu m^2\nabla^2\psi'_{10}) \}$$

$$= -\ m^2\ J(\psi_5,\ m^2\nabla^2\psi_5 + f)$$

$$+\ f_1^2\ m^2 \{ \frac{-g_2}{\sigma'_5} J(\psi_5,\psi_3) + \frac{g_1}{\sigma'_8} J(\psi_5,\psi_8) + \frac{g_0}{\sigma'_{10}} J(\psi_8,\psi_{10}) \}$$

$$+\ f_1\ g_3\ m^2\ J(\psi_{10}, p_s)$$

Indien ψ tevoren is bepaald met behulp van de balansvergelijking (31), worden vervolgens a) t/m e) van blz. 38 toegepast, nadat aan c) is toegevoegd:

$$a_{23} = f_0 g_{23}, \quad a_{13} = f_0 g_{13}, \quad a_{03} = f_0 g_{03}, \quad a_3 = f_0 g_3$$

en aan d):

$$J_{12} = J(\psi_{10}, p_s) \ .$$

Het resultaat is als volgt:

$$\left.\begin{aligned}
&(\nabla^2 + \frac{f_1^2}{m^2 f_0^2} a_{22} - \frac{f_1^2}{m^2} M)(\dot{\psi}_5' - \mu m^2 \nabla^2 \psi_5') \\
&+ \frac{f_1^2}{m^2 f_0^2} \{ a_{21}(\dot{\psi}_8' - \mu m^2 \nabla^2 \psi_8') + a_{20}(\dot{\psi}_{10}' - \mu m^2 \nabla^2 \psi_{10}')\} \\
&= - J_1 + J_2 - J_5 + J_6 - \frac{f_1^2}{f_0^2}(a_{22} J_9 - a_{21} J_{10} - a_{20} J_{11}) + \frac{f_1}{f_0} a_{23} J_{12} \\
&(\nabla^2 + \frac{f_1^2}{m^2 f_0^2} a_{11} - \frac{f_1^2}{m^2} M)(\dot{\psi}_8' - \mu m^2 \nabla^2 \psi_8') \\
&+ \frac{f_1^2}{m^2 f_0^2} \{ a_{12}(\dot{\psi}_5' - \mu m^2 \nabla^2 \psi_5') + a_{10}(\dot{\psi}_{10}' - \mu m^2 \nabla^2 \psi_{10}')\} \\
&= - J_2 + J_3 - J_6 + J_7 - \frac{f_1^2}{f_0^2}(a_{12} J_9 - a_{11} J_{10} - a_{10} J_{11}) + \frac{f_1}{f_0} a_{13} J_{12} \\
&(\nabla^2 + \frac{f_1^2}{m^2 f_0^2} a_{00} - \frac{f_1^2}{m^2} M)(\dot{\psi}_{10}' - \mu m^2 \nabla^2 \psi_{10}') \\
&+ \frac{f_1^2}{m^2 f_0^2} \{ a_{02}(\dot{\psi}_5' - \mu m^2 \nabla^2 \psi_5') + a_{01}(\dot{\psi}_8' - \mu m^2 \nabla^2 \psi_8')\} \\
&= - J_3 + J_4 - J_7 + J_8 - \frac{f_1^2}{f_0^2}(a_{02} J_9 - a_{01} J_{10} - a_{00} J_{11}) + \frac{f_1}{f_0} a_{03} J_{12} + C_D \nabla^2 \psi_{10}
\end{aligned}\right| \qquad (1.K)$$

$$(\nabla^2 - \frac{f_1^2}{m^2})(\dot{\psi}_5 - \mu m^2 \nabla^2 \psi_5)$$

$$+ \frac{f_1^2}{m^2 f_0^2} \{a_2(\dot{\psi}_5' - \mu m^2 \nabla^2 \psi_5') + a_1(\dot{\psi}_8' - \mu m^2 \nabla^2 \psi_8')$$

$$+ a_0(\dot{\psi}_{10}' - \mu m^2 \nabla^2 \psi_{10}')\}$$

$$= -J_2 - J_6 - \frac{f_1^2}{f_0^2}(a_2 J_9 - a_1 J_{10} - a_0 J_{11}) + \frac{f_1}{f_0} a_3 J_{12}$$

In deze vergelijkingen ontbreekt nog de verwerking van de condensatiewarmte volgens 3.6. Als een van de methoden van 3.6 wordt gevolgd, zoals aangegeven op blz. 34 e.v., komt het neer op een correctie van de tendens, welke kan worden bepaald met:

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_d + \dot{\psi}_m .$$

Daarbij kunnen nog allerhand beschouwingen worden gehouden met betrekking tot de nauwkeurigheid van de neerslagverwachting enz., indien met stroomfuncties en verschillen daartussen in plaats van met dikten enz. wordt gewerkt. Er zijn programma's ontworpen, waarin voor deze verschillen wordt gecorrigeerd; het is trouwens gebleken dat de fout nogal meevalt.

3.9 Het bepalen van het veld op het volgende tijdstip

Met de voorspelvergelijkingen blz. 41 (1.K) worden de tendensen $\dot{\psi}$ op het tijdstip t bepaald, waarmee volgens de "leap-frog" methode per roosterpunt de ψ-waarden op het volgende tijdstip worden gevonden. Dit gaat aldus:

(Δt is de tijdstap van het model; alleen voor de eerste stap wordt $\frac{1}{2}\Delta t$ genomen).

als $t = 0$ $\quad \psi(\frac{1}{2}\Delta t) = \psi(0) + \frac{1}{2}\Delta t\, \dot{\psi}(0)$,

als $t = \frac{1}{2}\Delta t$ $\quad \psi(\Delta t) = \psi(0) + \Delta t\, \dot{\psi}(\frac{1}{2}\Delta t)$,

als $t = \geqslant \Delta t$ $\quad \psi(t + \Delta t) = \psi(t - \Delta t) + 2\Delta t\, \dot{\psi}(t)$.

3.10 De verticale beweging

Als bijproduct wordt de integraal van de verticale snelheid van 500 tot 850 mbar berekend. Dit gebeurt met behulp van blz. 4 (2.B) als volgt:

$$\int_{p_5}^{p_8} \omega \, dp = \frac{f_1}{\sigma'_8} (\dot{\psi}_8 - m^2 J(\psi_5, \psi_8))$$

Deze grootheid wordt gebruikt bij de bepaling van de hoeveelheid neerslag. Zij wordt ook met de regeldrukker zichtbaar gemaakt, omdat de verticale beweging verband houdt met fronten e.d. en dus de verwachting van het ω-patroon de verplaatsing van deze systemen aangeeft.

4. TOEPASSING EN CONCLUSIE

Het hier beschreven model werd in december 1978 bij de Centrale Weerdienst van het KNMI ingevoerd; het wordt thans uitgevoerd met de volgende parameters:

horizontale diffusie	:	$\mu = 5.10^5$ (m^2s^{-1}), zie blz. 23
oppervlaktewrijving	:	$C_D = 29.10^{-6}$ (s^{-1}), zie blz. 24
topografie	:	ja
CRESSMAN-term	:	$M = 4.10^{-5}$ $(m^{-2}s^2)$, zie blz. 31
balansvergelijking	:	ja
tijdstap	:	½ uur
stabiliteitsparameter	:	in afwijking van blz. 16: $\sigma'_5 = \sigma'_8 = 15000.10^{-10}$ $\sigma'_{10} = 20000.10^{-10}$ $(kg^{-2}m^4s^2)$
gebied, rooster enz.	:	de berekening wordt uitgevoerd op een orthogonaal rooster, roosterpunt-afstand 375 km op 60° N.B., 1884 roosterpunten. Het gebied omvat vrijwel het gehele noordelijke halfrond, stereografische projectie.

De neerslag P en daaruit de vrijkomende condensatiewarmte worden in dit model onmiddellijk met de verticale snelheid bepaald als volgt:

$$\text{als} \int_{p_5}^{p_8} \omega \, dp < 0, \text{ dan is } P = -0.001729 \times \int_{p_5}^{p_8} \omega \, dp;$$

P is hier het aantal centimeters regen per tijdstap (dus $\frac{1}{2}$ uur).

De resultaten zijn bevredigend. Zij worden subjectief en objectief geverifieerd; de uitkomst zal elders worden gepubliceerd (bijv. in de jaarlijkse verslaggeving betreffende Numerieke Voorspelmethoden voor WMO).

Betekenis van de gebruikte symbolen

C_D	wrijvingscoëfficiënt
c_p	specifieke warmte bij constante druk
D	horizontale divergentie van de wind $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$
f	CORIOLIS-parameter
g	versnelling van de zwaartekracht
$J(A,B)$	determinant van JACOBI $\frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{\partial B}{\partial x}$
$\vec{k}$	eenheidsvector langs de p-as
m	schaalfactor
p	luchtdruk
Q	per massa-eenheid toegevoerde warmte
R	gasconstante voor droge lucht
T	temperatuur
t	tijd
u,v	$\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$
x,y,z	CARTESISCHE coördinaten, x en y horizontaal, z vertikaal
$\mathbb{V}$	windvector $(u,v,0)$
∇	gradiëntoperator $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0)$
∇^2	LAPLACE-operator $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
ζ	vertikale component van de relatieve vorticiteit
θ	potentiële temperatuur
μ	diffusiecoëfficiënt
ρ	luchtdichtheid
σ	stabiliteitsparameter $\frac{-1}{\rho\theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial p}$
ψ	stroomfunktie, zodat $\mathbb{V} = (-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x}, 0)$
ω	vertikale snelheid $\frac{dp}{dt}$
$\bullet$	staat voor $\frac{\partial}{\partial t}$

Niet vermelde symbolen worden in de tekst verduidelijkt.

Literatuur

[1] L.C. HEIJBOER (1977): Design of a baroclinic three-level quasi-geostrophic model with special emphasis on developing short frontal waves.
Proefschrift, ook no. 98 van de serie "Mededelingen en Verhandelingen" van het KNMI.

[2] G.J. HALTINER (1971): Numerical Weather Prediction.
John Wiley & sons, inc., New York, London, Sydney, Toronto.

[3] G.J. HALTINER and F.L. MARTIN (1957): Dynamical and Physical Meteorology.
Mc. Graw-Hill Book Company, inc., New York, London, Sydney, Toronto.

[4] L.C. HEIJBOER and A.W. den EXTER BLOKLAND (1974): The inclusion of latent heat in a three-level model with filtered equations and its influence upon the development of depressions.
KNMI, W.R. 74-11.

[5] A.W. den EXTER BLOKLAND (1972): Experimenten met het numeriek opstellen van neerslagverwachtingen.
KNMI, W.R. 72-8.

[6] G.P. CRESSMAN (1958): Barotropic divergence and very long atmospheric waves.
Mon. Weather Rev. 86, p. 293-297.

[7] D.J. BOUMAN en F.H. SCHMIDT (1962): Het numeriek voorspellen van stromingspatronen in de atmosfeer.
KNMI, W.R. 62-5.

[8] Compendium of Meteorology (1951).

[9] T. HESSELBERG (1915): Über eine Beziehung zwischen Druckgradient, Wind und Gradientenänderungen.
Veröff. Geoph. Inst. Leipzig, Serie 2, 1, S. 207-210.

[10] H.C. BIJVOET (1960): Meteorologische en statistische beschouwingen omtrent het optreden van zware stormen. In "Meteorologische en Oceanografische aspecten van stormvloeden op de Nederlandse kust (Bijdrage tot het rapport van de Deltacommissie)".

[11] J.D. OPSTEEGH (1975): Experimenten met een drielagen-model op een hemisferisch rooster.
Memorandum 75-027 (KNMI, interne publikatie).