

**KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT**

WETENSCHAPPELIJK RAPPORT

SCIENTIFIC REPORT

W.R. 79-11

Th. de Crook

Het berekenen van de verticale grondwatersnelheid
uit grondtemperatuurprofielmetingen.



De Bilt, 1979

Publikatienummer: K. N. M. I. W. R. 79-11 (MBW)

Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut,
Afd. Machinale Bewerking Waarnemingen,
Postbus 201,
3730 AE De Bilt.
Nederland

U. D. C. 551.525.4 :
556.34 :
681.3

INHOUD

Summary

1. Inleiding
 2. Afleiding van het functionele verband tussen de grondwatersnelheid en de grondtemperatuur
 - 2.1. Het functionele verband voor zeer kleine snelheden
 - 2.2. Het functionele verband voor kleine snelheden
 - 2.3. Het functionele verband dat ook geldt voor grotere snelheden
 3. Het berekenen van de grondwatersnelheid
 4. De stationaire oplossing van de lineaire partiële differentiaalvergelijking van de 2de orde
 5. Speciale gevallen
 - 5.1. Geen grondwatersnelheid en geen zonnestraling
 - 5.2. Geen grondwatersnelheid
 - 5.3. Geen zonnestraling
 - 5.4. De diepte z is groot
 6. Berekenende grondtemperatuurprofielen
 7. Toepassingen
 8. Bezwaren van de methode
 9. Het computerprogramma
 10. Lijst van symbolen
 11. Literatuur
- Grafieken
Computerprogramma met uitvoer

Summary.

In this report a method is presented for computing the vertical groundwater-velocity from the earth's temperature profile. In polders it occurs that groundwater streams to the surface. For hydrologists its important to know the groundwater-velocity. Because this is very small, it is difficult to measure the groundwater-velocity directly. Therefore we must determine the groundwater-velocity indirectly from the earth's thermal profile measurements.

If there is no groundwater-velocity the groundtemperature is determined by a vertical upward thermal flow, that comes from deeper bottomlayers, and a thermal flow streaming up or down in the upper bottomlayers, determines by the radiation of the sun. These two heat flows determine the "normal" temperature profile. But if the groundwater streams upward, with a certain velocity, the "normal" temperature profile is modified.

Extra heat is transported upward and the temperature increases. The rate of temperature rise depends on the velocity of water. We can describe this problem by a linear partial differential equation of the second order, which determines the relationship between the groundwater-velocity and the temperature of the bottom (see chapter 2 and 4).

For the determination of the vertical groundwater-velocity from the earth's thermal profile measurements we refer to chapter 3. In chapter 5 some special cases are described.

Some applications are discussed in chapter 6 and 7 for upward velocities.

The computer-program is written for the Burroughs B6700 in the "Extended Algol Language" (see appendix).

A description of this program is given in chapter 9.

1. Inleiding.

In polders komt het grondwater soms aan de oppervlakte door een opwaartse stroming.

Voor hydrologen is het van belang dat men de grondwatersnelheid direct kan meten of indirect uit andere gemeten waarden kan berekenen.

Het is moeilijk de grondwatersnelheid direct te meten, omdat deze zeer klein is (bv. enkele mm/dag).

Door het meten van het grondtemperatuurprofiel kunnen we indirect de grondwatersnelheid bepalen.

Als het grondwater in rust is wordt de grondtemperatuur bepaald door een vrijwel constante, verticaal opwaarts gerichte warmtestroming afkomstig uit de diepe grondlagen en een afwisselend omhoog en omlaag gerichte warmtestroming in de bovenste grondlagen bepaald door de zonnestraling. Deze twee warmte-stromingen bepalen het "normale" temperatuurverloop als functie van de diepte.

Als het grondwater echter van beneden naar boven stroomt met een bepaalde snelheid, wordt het "normale" temperatuurverloop gewijzigd. Er wordt extra warmte naar boven getransporteerd en de temperatuur stijgt. De mate van de temperatuurstijging hangt nauw samen met de snelheid van het water.

Mathematisch kunnen we het probleem weergeven door een lineaire partiële differentiaalvergelijking van de 2de orde, die het functionele verband vaststelt tussen de grondwatersnelheid en de grondtemperatuur (zie punt 2 en 4).

Voor het bepalen van de verticale grondwatersnelheid uit het gemeten grondtemperatuurprofiel verwijzen we naar punt 3.

In punt 5 worden enkele speciale gevallen behandeld (bv. er is geen grondwatersnelheid en/of geen zonnestraling).

De theorie wordt toegepast op meerdere voorbeelden (zie punt 6 en 7) voor opwaartse grondwatersnelheden.

De tekst van het computerprogramma is als bijlage toegevoegd.

Voor een beschrijving van het programma verwijzen we naar punt 9.

2. Afleiding van het functionele verband tussen de grondwatersnelheid en de grondtemperatuur.

2.1. Het functionele verband voor zeer kleine snelheden.

Het temperatuurverloop in de grond hangt af van de manier waarop de warmte loopt van een punt naar een ander punt.

In de grond (waarin water aanwezig is) zal dit op twee manieren gebeuren. Ten eerste door de warmtegeleiding, die in stand gehouden wordt door de temperatuurgradiënt en ten tweede door convectie wanneer warmte in stromend water wordt meegevoerd.

We veronderstellen dat de grond de volgende eigenschappen heeft:

- 1e. doordringbaar materiaal ,
- 2e. homogeen ,
- 3e. isotroop ,
- 4e. water aanwezig (grond niet altijd verzadigd met water).

De hoeveelheid warmte die door warmtegeleiding aan een volume-element $dx dy dz$ wordt toegevoegd is (zie [10]):

$$q_1 = k_{wg} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dx dy dz \quad (2.1)$$

waarbij k_{wg} = de warmtegeleidingscoëfficiënt van de grond(met water)
en T = de temperatuur.

De warmte toevoer door convectie aan het volume-element $dx dy dz$ is (zie [10]):

$$q_2 = -C_w \rho_w \left(\frac{\partial (v_x T)}{\partial x} + \frac{\partial (v_y T)}{\partial y} + \frac{\partial (v_z T)}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.2)$$

met C_w = de soortelijke warmte van water ,

ρ_w = de dichtheid van water

en v_x, v_y, v_z = de componenten van de snelheidsvector in de x, y, z richting.

Aangezien de grondtemperatuurmetingen worden verricht in de bovenste grondlagen, moeten we ook rekening houden met de invloed van de warmte toevoer, die afkomstig is van de zonnestraling.

Uit de praktijk blijkt dat deze invloed niet verder reikt dan 20 m diep. Verder kunnen we er een duidelijke jaarlijkse gang in zien. De dagelijkse gang heeft praktisch geen invloed meer beneden 0.5 m. Als we de metingen beneden 0.5 m plaatsen, mogen we de dagelijkse gang verwaarlozen en kunnen we het temperatuurverloop ten gevolge van de zonnestraling in de grond beschrijven met de formule (zie [2] pag. 10):

$$v = v_0 e^{-bz} \cos(\omega t - bz) + E_0 \quad (2.3)$$

waarbij v_0 = de amplitude van de jaarlijkse gang op de diepte $z=0$
(dus aan het aardoppervlak),

E_0 = de gemiddelde grondtemperatuur aan het aardoppervlak,

$\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ met τ is de periode (1 jaar),

t = de tijd,

$b = \left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\rho_{wg} C_{wg}}{k_{wg}} \right)^{\frac{1}{2}}$ met ρ_{wg} is de dichtheid van de grond
(met water)

en C_{wg} is de soortelijke warmte van de
grond (met water).

Formule (2.3) is een benadering voor het temperatuurverloop ten gevolge van de zonnestraling in de grond en geldt slechts bij benadering voor kleine grondwatersnelheden.

De hoeveelheid warmte die door de zonnestraling aan het volume-element $dx dy dz$ wordt toegevoegd is (zie [10]):

$$q_3 = C_{wg} \rho_{wg} \frac{\partial v}{\partial t} dx dy dz \quad (2.4)$$

Voor de stationaire toestand geldt dan:

$$q_1 + q_2 = q_3 \quad (2.5)$$

Vergelijking (2.5) geldt alleen als de temperatuur in de grond geen functie is van de tijd. Dit is praktisch het geval n.l. binnen de opname van een temperatuurprofiel kunnen we zeker geen temperatuurveranderingen constateren als functie van de tijd.

In de praktijk komt het vaak voor dat wij een opwaartse stroming constateren bij een kwel. In dit geval kunnen we stellen dat:

$$v_x = v_y = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ en } v_z = \text{constant.}$$

Substitutie van (2.1), (2.2) en (2.4) in (2.5) geeft dan de differentiaal-vergelijking:

$$k_{wg} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - C_w \rho_w v_z \frac{\partial T}{\partial z} = C_{wg} \rho_{wg} \frac{\partial v}{\partial t}$$

Substitueren we hierin (2.3) dan kunnen we de differentiaal-vergelijking in de volgende vorm schrijven:

$$k_{wg} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - C_w \rho_w v_z \frac{\partial T}{\partial z} = - C_{wg} \rho_{wg} \omega v_0 e^{-bz} \sin(\omega t - bz)$$

$$\text{of } \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - V \frac{\partial T}{\partial z} &= - 2b^2 v_0 e^{-bz} \sin(\alpha - bz) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\text{waarbij } V = \frac{C_w \rho_w}{k_{wg}} v_z \text{ en } \alpha = \omega t.$$

In formule(2.6) kan men α als constant beschouwen, omdat de meting van een profiel hoogstens een half uur duurt, dus de grootste verandering hoogstens

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{1 \text{ jaar}} \cdot \frac{1}{2} \text{ uur} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ radialen}$$

kan bedragen, die praktisch nul is.

Vergelijking (2.6) kan analytisch worden opgelost (zie [7]).

De algemene oplossing is:

$$T = a_1 e^{-bz} \cos(\alpha - bz) - a_2 e^{-bz} \sin(\alpha - bz) + \frac{A}{V} (e^{Vz} - 1) + B \quad (2.7)$$

$$\text{waarbij } a_1 = \frac{2b^2 + bV}{(b+V)^2 + b^2} \cdot v_0 \text{ en } a_2 = \frac{bV}{(b+V)^2 + b^2} \cdot v_0$$

De willekeurige constanten A en B in (2.7) kunnen we berekenen uit de bijbehorende randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} T &= T_0 \text{ voor } z = 0 \\ (\text{dus } T_0 &= a_1 \cos \alpha - a_2 \sin \alpha + B, \text{ deze randvoorwaarde} \\ &\text{geldt alleen voor zeer kleine snelheden)} \\ \text{en } T &= T_L \text{ voor } z = L. \end{aligned}$$

De algemene oplossing wordt dan:

$$\begin{aligned} T = T_0 + \left[T_L - T_0 + a_1 u(L) - a_2 v(L) \right] \cdot w(z) \\ - a_1 u(z) + a_2 v(z) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \text{waarbij } u(z) &= \cos \alpha - e^{-bz} \cos(\alpha - bz) \\ v(z) &= \sin \alpha - e^{-bz} \sin(\alpha - bz) \end{aligned}$$

$$\text{en } w(z) = \frac{e^{Vz} - 1}{e^{VL} - 1}.$$

Voor de afleiding van formule (2.8) verwijzen we ook naar [6]. Deze formule geldt slechts voor zeer kleine snelheden i.v.m. de geldigheid van (2.3) en de geldigheid van de randvoorwaarde voor $z = 0$.

2.2. Het functionele verband voor kleine snelheden.

Uit formule (2.7) volgt voor $z = 0$:

$$T(0) = a_1 \cdot \cos \alpha - a_2 \cdot \sin \alpha + B \quad (2.9)$$

Voor de temperatuur aan het aardoppervlak $T(0)$ geldt echter ook:

$$T(0) = v_0 \cos \alpha + B_0 \quad (2.10)$$

Dit is de jaarlijkse gang van de temperatuur aan het aardoppervlak. Uit (2.9) en (2.10) volgt:

$$a_1 = v_0, \quad a_2 = 0 \quad \text{en} \quad B = B_0$$

Substitueren we dit in (2.7) dan krijgen we:

$$T = v_0 e^{-bz} \cos(\alpha - bz) + \frac{A}{V} (e^{Vz} - 1) + B_0 \quad (2.11)$$

met de bijbehorende randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} T &= T(0) = v_0 \cos \alpha + B_0 \quad \text{voor } z = 0 \\ \text{en } T &= T_L \quad \text{voor } z = L. \end{aligned}$$

De algemene oplossing wordt dan voor grote L:

$$T = v_0 e^{-bz} \cos(\alpha - bz) + B_0 + (T_L - B_0) \cdot w(z) \quad (2.12)$$

Uit (2.12) blijkt dat het grondtemperatuurprofiel samengesteld is uit het door de zonnestraling geïnduceerde deel (zie formule 2.3) en een bijdrage afkomstig van de warmtegeleiding.

De invloed van de convectie op het temperatuurprofiel is alleen terug te vinden in de bijdrage afkomstig van de warmtegeleiding, aangezien $w(z)$ afhankelijk is van V (zie 2.8).

Formule (2.12) geldt voor kleine snelheden i.v.m. de geldigheid van formule (2.3).

2.3. Het functionele verband dat ook geldt voor grotere snelheden.

We vervangen formule (2.3) door:

$$v = v_0 e^{-a_V z} \cos(\omega t - b_V z) + B_0 \quad (2.13)$$

waarbij a_V = de dempingsfactor

en b_V = de fase-verschuivingsfactor.

Beide factoren zijn afhankelijk van V dus afhankelijk van de grondwatersnelheid (zie [9]).

Formule (2.13) is een betere benadering voor het temperatuurverloop in de grond ten gevolge van de zonnestraling dan (2.3), omdat in (2.13) ook de invloed van de convectie is terug te vinden.

Formule (2.13) geldt ook voor grotere snelheden.

Beschouwen we weer de stationaire toestand dan vinden we op analoge wijze als in punt (2.1) de lineaire differentiaal - vergelijking van de 2de orde:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - V \frac{\partial T}{\partial z} = - 2K v_0 e^{-aVz} \sin(\alpha - b_V z) \quad (2.14)$$

waarbij $V = \frac{C_w \rho_w}{k_{wg}} v_z$, $K = \frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\rho_{wg} C_{wg}}{k_{wg}}$ en $\alpha = \omega t$.

De analytische oplossing van (2.14) is (stel tot (2.20)

$a = a_V$ en $b = b_V$):

$$T = \frac{2Kv_0}{(a+V)^2 + b^2} \cdot \frac{e^{-az}}{a^2 + b^2} \left\{ (b^2 - a^2 - aV) \sin(\alpha - bz) + (2ab + bV) \cos(\alpha - bz) \right\} + \frac{A}{V} (e^{Vz} - 1) + B \quad (2.15)$$

Uit de bijbehorende randvoorwaarden:

$$T = T(0) = v_0 \cos \alpha + E_0 \quad \text{voor } z = 0$$

en $T = T_L$ voor $z = L$ (L is groot)

kunnen we A en B berekenen.

Uit de eerste randvoorwaarde en (2.15) volgt:

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 - aV &= 0 \\ 2ab + Vb &= 2K \\ B &= E_0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

zodat

$$a_V = \left(\frac{V^2}{8} + \sqrt{\frac{V^4}{64} + K^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{V}{2}$$

en $b_V = \left(\frac{-V^2}{8} + \sqrt{\frac{V^4}{64} + K^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.17)$

De algemene oplossing wordt nu:

$$T = v_0 e^{-az} \cos(\alpha - bz) + \frac{A}{V} (e^{Vz} - 1) + B_0 \quad (2.18)$$

Uit de tweede randvoorwaarde en (2.18) volgt voor grote L:

$$\frac{A}{V} = \frac{T_L - B_0}{e^{\frac{VL}{V}} - 1} \quad (2.19)$$

Dit gesubstitueerd in (2.18) geeft voor de oplossing:

$$T = v_0 e^{-a_V z} \cos(\alpha - b_V z) + B_0 + (T_L - B_0) \frac{e^{\frac{Vz}{V}} - 1}{e^{\frac{VL}{V}} - 1} \quad (2.20)$$

Uit (2.20) blijkt opnieuw dat het grondtemperatuurprofiel samengesteld is uit een bijdrage afkomstig van de zonnestraling en een bijdrage afkomstig van de warmtegeleiding. De invloed van de convectie is nu in beide delen terug te vinden, aangezien beide delen afhankelijk zijn van V.

3. Het berekenen van de grondwatersnelheid.

Stel dat het grondtemperatuurprofiel gemeten is in de meetpunten 1 t/m P, d.w.z. $T_g(z_i)$ is bekend voor $i = 1(1)P$ ($g =$ gemeten). Afhankelijk van V, dus afhankelijk van de verticale grondwatersnelheid v_z , kunnen we $T(V, z_i)$ berekenen met de formule (2.20) voor $i = 1(1)P$.

Stellen we vervolgens:

$$F(V) = \sum_{i=1}^P \left\{ T_g(z_i) - T(V, z_i) \right\}^2 \text{ is minimaal,} \quad (3.1)$$

dan kunnen we V berekenen met de kleinste kwadraten methode.

De verticale grondwatersnelheid v_z volgt dan uit:

$$v_z = \frac{k_w g}{C_w \rho_w} V \quad (3.2)$$

en is dus evenredig met V.

4. De stationaire oplossing van de lineaire partiële differentiaalvergelijking van de 2de orde.

In punt 2 veronderstelden we het temperatuurverloop ten gevolge van de zonnestraling in de grond bekend (zie (2.3) en (2.13)). We veronderstellen thans dat de temperatuur aan het aardoppervlak wordt weergegeven door de jaarlijkse gang.

$$\text{Dus: } T(0,t) = v_0 \cos(\omega t) + B_0. \quad (4.1)$$

Voor grote waarden van L (> 20 m) is de grondtemperatuur onafhankelijk van de tijd t .

Dus kunnen we stellen:

$$T(L,t) = T_L. \quad (4.2)$$

De begin-toestand wordt bepaald door:

$$T(z,0) = f(z). \quad (4.3)$$

De differentiaal-vergelijking die het gestelde probleem (zie punt 1) beschrijft is:

$$k_{wg} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - C_w \rho_w v_z \frac{\partial T}{\partial z} = C_{wg} \rho_{wg} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.4)$$

voor $t > 0$ en $0 \leq z \leq L$,

$$\text{of } \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - V \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{C_{wg} \rho_{wg}}{k_{wg}} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.5)$$

voor $t > 0$ en $0 \leq z \leq L$, waarbij $V = \frac{C_w \rho_w}{k_{wg}} v_z$.

Het probleem kunnen we dus beschrijven door een lineaire partiële differentiaal-vergelijking van de 2de orde met bijbehorende begin- en randvoorwaarden.

We bepalen hiervan de oplossing voor $t \rightarrow \infty$ (dus de stationaire oplossing).

De partiële differentiaal-vergelijking is lineair dus als T_1, T_2, T_3 en T_4 oplossingen zijn dan is ook $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ een oplossing.

Stel:

$$\begin{aligned} T_1(o,t) = o & \quad T_2(o,t) = o & \quad T_3(o,t) = B_o & \quad T_4(o,t) = v_o \cos \omega t \\ T_1(L,t) = o & \quad T_2(L,t) = T_L & \quad T_3(L,t) = o & \quad T_4(L,t) = o \\ T_1(z,o) = f(z) & \quad T_2(z,o) = o & \quad T_3(z,o) = o & \quad T_4(z,o) = o \end{aligned}$$

dan geldt:

$$\begin{aligned} T(o,t) &= v_o \cos \omega t + B_o \\ T(L,t) &= T_L \\ T(z,o) &= f(z). \end{aligned}$$

Dus $T(z,t)$ voldoet aan de gestelde rand- en beginvoorwaarden. Ook geldt natuurlijk dat de stationaire oplossing van de partiële differentiaal-vergelijking voor T gelijk is aan de som van de stationaire oplossingen van de partiële differentiaal-vergelijkingen voor T_1 , T_2 , T_3 en T_4 .

We kunnen uitrekenen dat:

$$T_1(\text{stat.}) = o \quad \text{met behulp van scheiding van variabelen,}$$

$$T_2(\text{stat.}) = T_L \frac{e^{Vz} - 1}{e^{VL} - 1} \quad \text{" " " Laplace-transformaties,}$$

(zie [4] pag. 270)

$$T_3(\text{stat.}) = -B_o \frac{e^{Vz} - e^{VL}}{e^{VL} - 1} \quad \text{" " " Laplace-transformaties en}$$

$$T_4(\text{stat.}) = v_o e^{-a_V z} \cos(\omega t - b_V z) \text{ m.b.v. Laplace-transformaties,}$$

(zie [7])

waarbij
$$a_V = \left(\frac{V^2}{8} + \sqrt{\frac{V^4}{64} + K^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{V}{2}$$

$$b_V = \left(-\frac{V^2}{8} + \sqrt{\frac{V^4}{64} + K^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

en
$$K = \frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\rho_{wg} C_{wg}}{k_{wg}} .$$

De stationaire oplossing van $T(z,t)$ wordt dan:

$$T(\text{stat.}) = v_o e^{-a_V z} \cos(\omega t - b_V z) + B_o + (T_L - B_o) \frac{e^{Vz} - 1}{e^{VL} - 1}$$

en is hetzelfde als formule (2.20). (4.6)

Hieruit volgt dat formule (2.13), die het temperatuurverloop in de grond ten gevolge van de zonnestraling weergeeft, inderdaad een juiste keuze is.

5. Speciale gevallen.

5.1. Geen grondwatersnelheid en geen zonnestraling.

Stel het grondwater is in rust met andere woorden $v_z = 0$ dan is volgens (4.5)

$$V = 0.$$

Er is geen zonnestraling dat wil zeggen dat de temperatuur aan het aardoppervlak is constant, dus $T(0,t) = B_0$ (met $v_0 = 0$), zie (4.1). De stationaire oplossing (4.6) wordt nu:

$$T(\text{stat.}) = B_0 + (T_L - B_0) \frac{z}{L} \quad (5.1)$$

De oplossing wordt alleen bepaald door de warmtegeleiding; de oplossing is een rechte lijn.

5.2. Geen grondwatersnelheid.

Stel de grondwatersnelheid $v_z = 0$, dus $V = 0$ volgens (4.5).

De stationaire oplossing (4.6) wordt dan:

$$T(\text{stat.}) = v_0 e^{-bz} \cos(\omega t - bz) + B_0 + (T_L - B_0) \frac{z}{L} \quad (5.2)$$

waarbij $b = \sqrt{K}$.

Formule (5.2) volgt ook uit (2.8), (2.12) en (2.20) voor $V = 0$.

Als $V = 0$ is $a_V = b_V = b$ (zie [9] pag 2823).

De oplossing (het temperatuurprofiel) is dus samengesteld uit een rechte (de bijdrage van de warmtegeleiding) en een bijdrage afkomstig van de zonnestraling.

5.3. Geen zonnestraling.

Stel er is geen zonnestraling, dus $T(0,t) = B_0$ (met $v_0 = 0$), zie (4.1).

Voor de stationaire oplossing (4.6) krijgen we dan:

$$T(\text{stat.}) = B_0 + (T_L - B_0) \frac{e^{\frac{Vz}{L}} - 1}{e^{\frac{Vz}{L}} - 1} \quad (5.3)$$

De oplossing wordt bepaald door de warmtegeleiding en de convectie.

In een artikel van Bredehoeft en Papadopoulos [8] wordt dit geval uitgebreid behandeld.

5.4. De diepte z is groot.

Als we de waarnemingen (van het grondtemperatuurprofiel) doen op grote diepte, dan kunnen we de invloed van de zonnestraling verwaarlozen, immers beneden de 20 m is de invloed van de zonnestraling niet meer aanwezig.

Dit blijkt ook uit formule (4.6), want voor grote waarden van z geldt:

$$T(\text{stat.}) = B_0 + (T_L - B_0) \frac{e^{Vz} - 1}{e^{VL} - 1} \quad (5.4)$$

Deze formule (5.4) geldt echter niet voor grote grondwatersnelheden, omdat uit de praktijk blijkt dat temperatuurprofielen beneden 20 m al bij geringe verticale snelheden bijna verticaal zijn, zodat met (5.4) in de praktijk niet meer gewerkt kan worden, immers

$$T(\text{stat.}) - B_0 \approx 0 \text{ en } T_L - B_0 \approx 0.$$

6. Berekende grondtemperatuurprofielen.

Om een idee te krijgen van het functionele verband tussen de verticale opwaartse grondwatersnelheid (dus v_z is negatief) en de grondtemperatuur is een voorbeeld geconstrueerd dat nauw aansluit bij de praktijk. Zie grafiek 3.

Stel: de amplitude van de jaarlijkse gang aan het aardoppervlak $v_0 = 8^\circ\text{C}$,

het tijdstip van de meting is 15 januari, dus $\alpha = 3$ radialen (het maximum van de jaarlijkse gang aan het aardoppervlak treedt op bij 25 juli, waar $\alpha = 0$),

de gemiddelde grondtemperatuur aan het aardoppervlak $B_0 = 9,5^\circ\text{C}$,

de temperatuur aan het aardoppervlak $T_0 = 1,58^\circ\text{C}$ (dit volgt uit de randvoorwaarde (4.1)),

de grootte $K = 0.102/\text{m}^2$ (deze geldt voor natte zandgrond),

de temperatuur op diepte L is $T_L = 12^\circ\text{C}$ en de diepte L = 100 m.

Met de formules (2.8), (2.12) en (2.20) of (4.6) is, met vorenstaande gegevens, het grondtemperatuurprofiel berekend voor verschillende waarden van V .

Uit theoretische overwegingen sluiten de kromme's berekend met formule (2.20), zie grafiek 3, het beste aan bij de temperatuurprofielen uit de praktijk.

Bij formule (2.12) is de aansluiting duidelijk minder en geldt alleen voor $|V| < 0.1/m$.

De aansluiting voor formule (2.8) is zelfs slecht en geldt bij benadering alleen nog voor $|V| < 0.01/m$.

We weten dat (zie (3.2)):

$$v_z = \frac{k_{wg}}{C_w \rho_w} V. \quad (6.1)$$

Verder geldt voor natte zandgrond:

$$k_{wg} = 0.004 \text{ cal/cm sec } ^\circ\text{C (zie [3] pag. 27).}$$

En voor water (zie [4] appendix VI):

$$\begin{aligned} C_w &= 1.0 \text{ cal/gr. } ^\circ\text{C} \\ \rho_w &= 1.0 \text{ gr/cm}^3. \end{aligned}$$

Zodat volgens (6.1):

$$\begin{aligned} v_z &= \frac{0.004}{1.1} 10^{-2} V \text{ cm/sec} = 0.004 \cdot 10^{-2} \cdot V \cdot 10 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ mm/dag} \\ &= V \cdot 0.004 \cdot 8640 \text{ mm/dag} = V \cdot 34.6 \text{ mm/dag,} \end{aligned}$$

waarbij V wordt uitgedrukt in m^{-1} .

Dus voor $V = -0.1/m$ is $v_z = -3.5 \text{ mm/dag}$

en voor $V = -0.01/m$ is $v_z = -0.4 \text{ mm/dag}$.

Met andere woorden bij dit voorbeeld geldt formule (2.8) voor grondwatersnelheden kleiner dan ongeveer $\frac{1}{2} \text{ mm/dag}$ en formule (2.12) voor snelheden kleiner dan ongeveer 3 mm/dag .

Formule (2.20) geldt ook voor grotere snelheden.

Indien er geen grondwatersnelheid en geen zonnestraling is, is volgens formule (5.1) het grondtemperatuurprofiel een rechte lijn. Zie rechte lijn in grafiek 3.

Is de grondwatersnelheid $v_z = 0$ dan is m.b.v. (5.2) het grondtemperatuurprofiel te berekenen. In de grafiek 3 is dit de dikke lijn.

Gaan we dieper dan 20 m dan is de invloed van de zonnestraling te verwaarlozen (zie grafiek 3) en kunnen we de grondwatersnelheid berekenen met (5.4). Deze formule geldt echter niet voor grote snelheden (zie punt 5.4). Uit grafiek 3 blijkt dat (5.4) geldt voor snelheden tot $V = -0.2/m$, hetgeen ongeveer overeenkomt met een grondwatersnelheid $v_z = 7$ mm/dag.

Voor nog grotere snelheden moeten we formule (2.20) gebruiken. Zijn de snelheden zeer groot (meerdere cm/dag) dan dienen we zelfs de dagelijkse gang van de zonnestraling in de berekeningen te betrekken (tot nu toe hadden we deze verwaarloosd) en moeten we de metingen van het grondtemperatuurprofiel vooral verrichten van 0 tot 0.5 m (zie [9]).

Voor zeer grote snelheden is $a_v \approx |V|$, dus ook zeer groot en $b_v \approx 0$, d.w.z. de invloed van de zonnestraling door de jaarlijkse gang is te verwaarlozen (zie (2.20)).

7. Toepassingen.

Op twee plaatsen zijn er grondtemperatuurprofielen gemeten n.l. in de Flevopolder op 21-4-1966 (meting 21C-72 en 21C-71) en in de B ethune-polder bij Utrecht op 11-1-1977 (meting 31F-272).

De eerste metingen (tot ca. 5 m) zijn fout, omdat het meetinstrument zich eerst moet aanpassen aan zijn omgeving en dat is niet gebeurd. Deze metingen laten we dan ook buiten beschouwing bij de berekening van de grondwatersnelheid.

Om zeker te weten of de metingen goed zijn, zouden deze tweemaal dienen te worden uitgevoerd (van boven naar beneden en omgekeerd). Zijn de metingen niet gelijk, dan is te snel gemeten (het temperatuurprofiel verandert nauwelijks binnen de duur van de meting).

Om de grondwatersnelheid te berekenen volgens punt 3 dient bekend te zijn:

- het gemeten grondtemperatuurprofiel in P meetpunten (zie grafiek 2),
- een schatting voor V ,
- de jaarlijkse gang van de temperatuur aan het aardoppervlak, waaruit volgt de amplitude v_0 en de gemiddelde temperatuur B_0 ,
- het tijdstip van de meting, waaruit volgt α ,
- de grootte K ,
- de grondtemperatuur op grote diepte L n.l. T_L ,
- en tenslotte $k_{wg}/C_w \rho_w$.

Uit grondtemperatuurmetingen te De Bilt op 50 cm diepte van 1914 t/m 1942 (zie grafiek 1 en [1] pag. 15) volgt na correctie tot het oppervlak voor de gemiddelde jaarlijkse gang:

$$B_0 = 10.1 \text{ } ^\circ\text{C},$$

maximum, waar $\alpha = 0$, treedt op bij 25 juli

$$\text{en } v_0 = 7.8 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Deze waarden komen overeen met [2] pag. 11, 12 en grafieken, na correctie tot het oppervlak.

De jaarlijkse gang van de grondtemperaturen te De Bilt op 50 cm diepte voor de perioden april 1965 tot april 1966 en januari 1976 tot januari 1977 wijken iets af van de gemiddelde jaarlijkse gang (zie grafiek 1).

Nemen we aan dat de jaarlijkse gang voor zowel de Flevopolder als de B ethunepolder ongeveer gelijk is aan de jaarlijkse gang voor De Bilt, dan krijgen we voor de jaarlijkse gang aan het oppervlak voorafgaande aan de grondtemperatuurprofielmeting (zie grafiek 1)

voor de Flevopolder:

$$B_0 = 9.8 \text{ } ^\circ\text{C},$$

maximum ($\alpha=0$) bij 25 juli, dus $\alpha=4.64$ radialen

$$\text{en } v_0 = 7.8 \text{ } ^\circ\text{C}$$

en voor de B ethunepolder:

$$B_0 = 10.1 \text{ } ^\circ\text{C},$$

maximum ($\alpha=0$) bij 25 juli, dus $\alpha=2.93$ radialen

$$\text{en } v_0 = 7.8 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Voor het berekenen van de grondwatersnelheid gebruiken we de jaarlijkse gang aan het aardoppervlak van ongeveer een jaar voorafgaande aan de grondtemperatuurprofielmeting. Voor de praktijk is dit voldoende.

De grootheid K wordt bepaald met de formule, zie punt 2:

$$K = \frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\rho_{wg} C}{k_{wg}} = b^2 = \frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{1}{a}$$

waarbij a = de temperatuurvereffeningsco effici ent.

Voor de Flevopolder waar de grond hoofdzakelijk uit natte klei bestaat geldt:

$$\begin{aligned} a &= 0.007 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}, \\ b &= 0.38 \text{ m}^{-1}, \\ K &= 0.144 \text{ m}^{-2}, \\ k_{wg} &= 0.0038 \text{ cal/cm.sec. } ^\circ\text{C}, \end{aligned}$$

(zie [5] pag. 259 en [2] pag. 10 en 11).

Voor de B ethunepolder met hoofdzakelijk natte zandgrond geldt:

$$\begin{aligned} a &= 0.010 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}, \\ b &= 0.32 \text{ m}^{-1}, \\ K &= 0.102 \text{ m}^{-2}, \\ k_{wg} &= 0.004 \text{ cal/cm.sec. } ^\circ\text{C}, \end{aligned}$$

(zie [3] pag. 27, [5] pag. 259 en [2] pag. 10 en 11).

Voor de grondtemperatuur op grote diepte L t.w. T_L nemen we de temperatuur met de grootste diepte van de grondtemperatuurprofiel-meting.

De soortelijke warmte van water $C_w = 1.0 \text{ cal/gr.} ^\circ\text{C}$ en de dichtheid van water $\rho_w = 1.0 \text{ gr/cm}^3$ (zie [4] appendix VI), zodat voor de Flevopolder geldt:

$$v_z = V. 32.8 \text{ mm/dag}$$

en voor de B ethunepolder:

$$v_z = V. 34.6 \text{ mm/dag.}$$

Alle gegevens om de grondwatersnelheid volgens punt 3 te berekenen zijn nu bekend.

Uit meting 21C-72 vinden we voor $V = -0.011/\text{m}$, dus $v_z = -0.3 \text{ mm/dag}$,
uit meting 21C-71 " " " $V = -0.111/\text{m}$, dus $v_z = -3.7 \text{ mm/dag}$ en
uit meting 31F-272 " " " $V = -0.280/\text{m}$, dus $v_z = -9.7 \text{ mm/dag}$.

De berekende profielen zijn weergegeven in grafiek 2.

Verwaarlozen we in meting 31F-272 bij de berekening de invloed van de zonnestraling (dus $v_o = 0$) dan vinden we $V = -0.365/\text{m}$, dus $v_z = -12.6 \text{ mm/dag}$. We vinden dan een te grote opwaartse grondwatersnelheid, hetgeen ook met grafiek 3 te verklaren is.

Voor de berekeningen van v_z verwijzen we naar de bijlage.

8. Bezwaren van de methode.

De grootte K is zeer gevoelig, vooral omdat de grootte van k_{wg} afhankelijk van de hoeveelheid water die in de grond aanwezig is, sterk kan variëren. Zo is voor droge zandgrond $k_{wg} = 0.0004$ cal/cm. sec. °C en voor natte zandgrond $k_{wg} = 0.004$ cal/cm.sec. °C (zie [3] pag. 27).

Het is dus noodzakelijk om, naast het vaststellen van de grondsoort (langs het temperatuurprofiel), ook vast te stellen hoeveel water er (in procenten) in de grond zit.

Voor meer gegevens over de grootte van ρ , C, k (waaruit a, b en K te berekenen zijn) verwijzen we naar [3], [4] en [5].

In de praktijk zal het moeilijk zijn de juiste grootte van K vast te stellen, vooral ook omdat de grond niet homogeen is, hetgeen in de theorie verondersteld is. Om de fout die hierdoor bij de berekening van de grondwatersnelheid optreedt minimaal te houden, kunnen we het beste een zo homogeen mogelijk stuk grond (langs het temperatuurprofiel) uitkiezen.

Een ander bezwaar is dat de jaarlijkse gang van de temperatuur aan het aardoppervlak slechts bij benadering kan worden voorgesteld door $v_0 \cos \alpha + B_0$.

Al deze bezwaren geven aanleiding tot fouten bij de berekening van de grondwatersnelheid, die (zoals uit experimenten is gebleken) kan oplopen tot rond 1 mm/dag.

Vanzelfsprekend moet veel zorg besteed worden aan de metingen. Hoe beter deze zijn, des te kleiner is de fout in de grondwatersnelheid.

Zie ook punt 7.

9. Het computerprogramma.

Het programma om de grondwatersnelheid v_z te berekenen is geschreven in "Extended Algol Language" voor de Burroughs B6700 (zie bijlage).

De invoergegevens staan op kaarten en bestaan uit:

- 1e. het aantal meetpunten P,
- 2e. een schatting van $X [1]$ (=V),
- 3e. de amplitude van de jaarlijkse gang van de temperatuur aan het aardoppervlak NU_0 (= v_0),
- 4e. het tijdstip van de meting ALFA (= α),
- 5e. de gemiddelde temperatuur aan het aardoppervlak B_0 ,

- 6e. de grootheid $KK(=K)$,
- 7e. de warmte-geleidingscoëfficiënt $KWG(=k_{wg})$,
- 8e. de grondtemperatuurprofielmeting met voor elk meetpunt I de diepte $ZZ[I]$ en de gemeten temperatuur $TM[I]$,
- 9e. een eventuele herhaling van 1 t/m 8 en
- 10e. het sluitgetal 999.

Het programma volgt in grote lijnen de methode beschreven in punt 3. Om te berekenen voor welke V de functie $F(V)$ minimaal is (zie formule 3.1) wordt de methode van Davidon, die herzien is door Fletcher en Powell (zie [11]), gebruikt voor het één-dimensionale geval. Het bijbehorende programma is terug te vinden in [12].

De uitvoer wordt afgedrukt met de regeldrukker en bestaat uit:

- 1e. $P, NU_0(=v_0), ALFA(=\alpha), B_0, KK(=K), KWG(=k_{wg})$,
- 2e. voor elke iteratie $X(=V), F, G(=\partial F/\partial V), COUNT$ (het aantal iteraties), $EVALUATION$ (het aantal berekende functiewaarden van F),
- 3e. het gemeten en het berekende profiel;
voor elke meetpunt wordt afgedrukt de diepte $ZZ[I]$, de gemeten temperatuur $TM[I]$ en de berekende temperatuur $T[I]$,
- 4e. de verticale grondwatersnelheid $VZ(=v_z)$ en
- 5e. een eventuele herhaling van 1 t/m 4.

Met het computerprogramma zijn vier experimenten uitgevoerd (zie bijlage en punt 7.). Voor het berekenen van de grondwatersnelheid zijn per geval slechts enkele seconden rekentijd vereist.

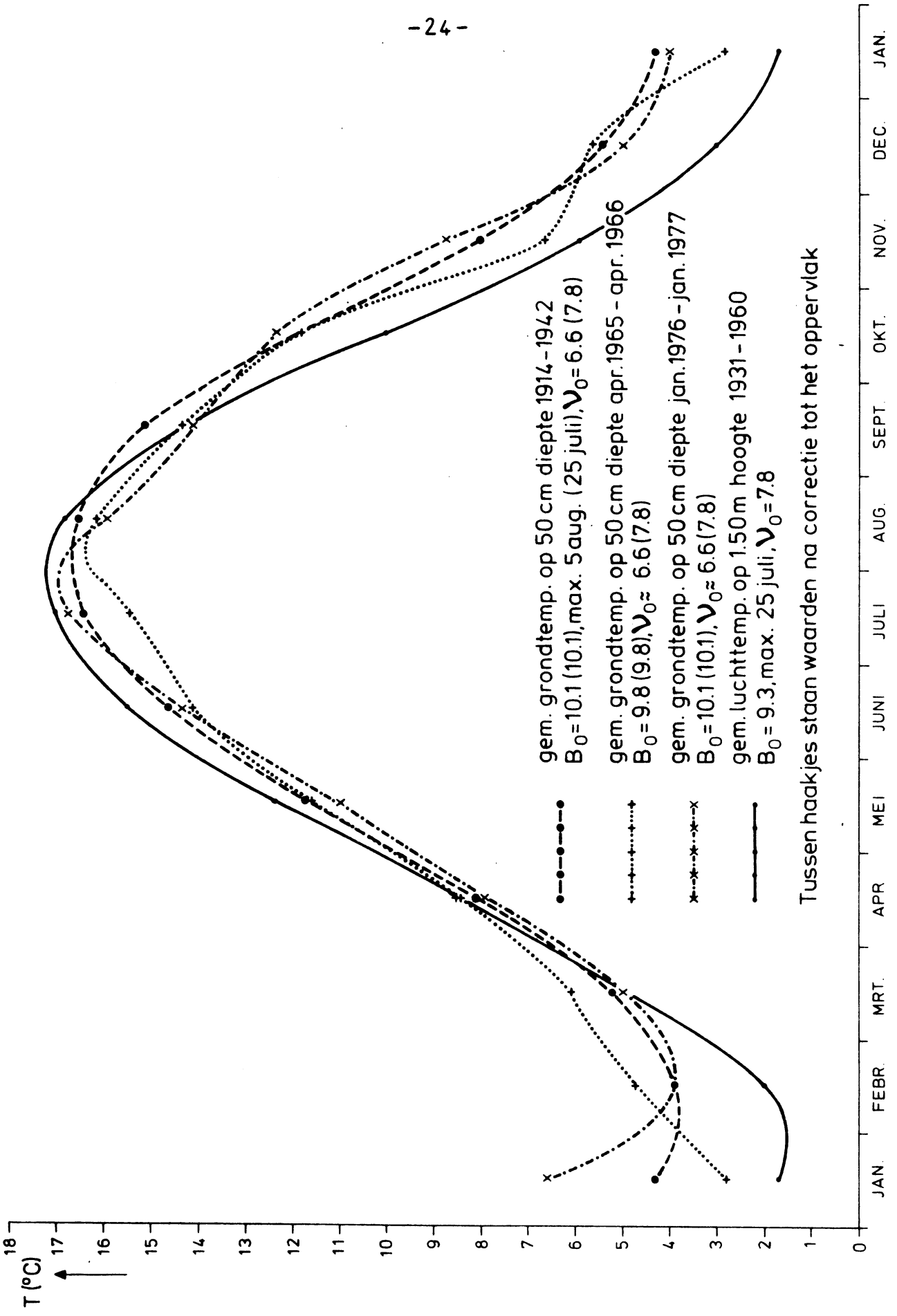
10. Lijst van symbolen.

<u>Symbool</u>	<u>Formule</u>	<u>Eenheid</u>	<u>Betekenis</u>
$T(z,t)$		$^{\circ}\text{C}$	temperatuur op diepte z en tijdstip t
z		m	diepte beneden het aardoppervlak (positieve richting)
t		jaar	tijd
C_w		cal/gr. $^{\circ}\text{C}$	soortelijke warmte van water
ρ_w		gr/cm ³	dichtheid van water
C_{wg}		cal/gr. $^{\circ}\text{C}$	soortelijke warmte van grond (met water)
ρ_{wg}		gr/cm ³	dichtheid van grond (met water)
k_{wg}		cal/cm.sec. $^{\circ}\text{C}$	warmtegeleidingscoëfficiënt van de grond (met water)
v_z		mm/dag	de component van de snelheidsvector in de z -richting
V	$= \frac{C_w \rho_w v_z}{k_{wg}} z$	m ⁻¹	grootheid evenredig met v_z
L		m	grote diepte
v_0		$^{\circ}\text{C}$	de amplitude van de jaarlijkse gang van de temperatuur aan het aardoppervlak
τ		jaar	de periode (1 jaar) van de jaarlijkse gang van het aardoppervlak
ω	$= \frac{2\pi}{\tau}$	1/jaar	
α	$= \omega t$	radialen	
B_0		$^{\circ}\text{C}$	gemiddelde temperatuur aan het aardoppervlak
T_L		$^{\circ}\text{C}$	grondtemperatuur op diepte L
K	$= \frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\rho_{wg} C_{wg}}{k_{wg}}$	m ⁻²	grootheid die wordt bepaald door de samenstelling van de grond
a_V	$= \left(\frac{V^2}{8} + \sqrt{\frac{V^4}{64} + K^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{V}{2}$	m ⁻¹	dempingsfactor
b_V	$= \left(-\frac{V^2}{8} + \sqrt{\frac{V^4}{64} + K^2} \right)^{\frac{1}{2}}$	m ⁻¹	fase-verschuivingsfactor
T_0	$= v_0 \cos \alpha + B_0$	$^{\circ}\text{C}$	temperatuur aan het aardoppervlak
a	$= \frac{k_{wg}}{\rho_{wg} C_{wg}}$	cm ² /sec	temperatuur-vereffeningscoëfficiënt

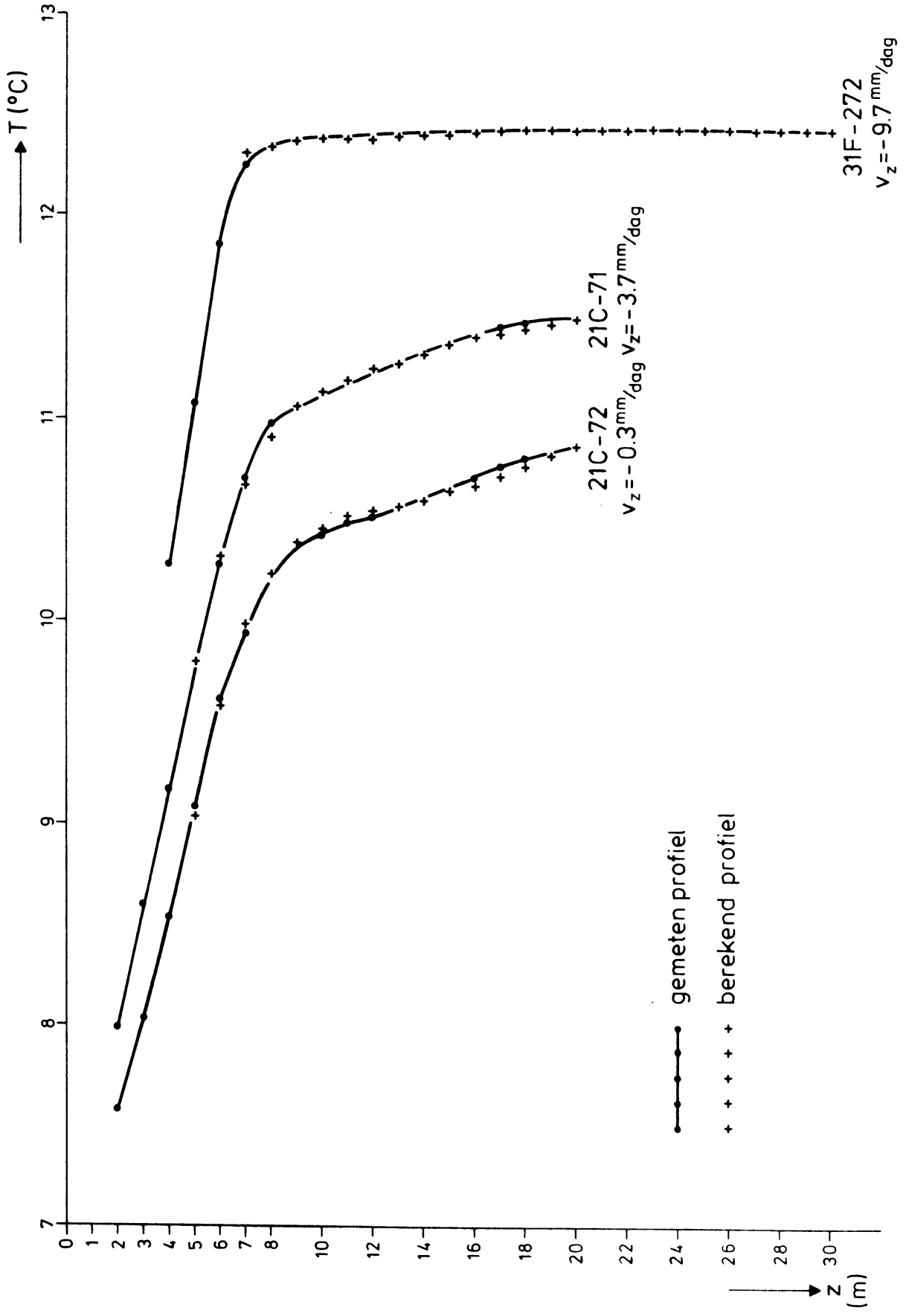
<u>Symbol</u>	<u>Formule</u>	<u>Eenheid</u>	<u>Betekenis</u>
b	$= \left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\rho_{wg}^C}{k_{wg}} \right)^{\frac{1}{2}}$	m ⁻¹	zie K
P		--	aantal meetpunten.

11. Literatuur.

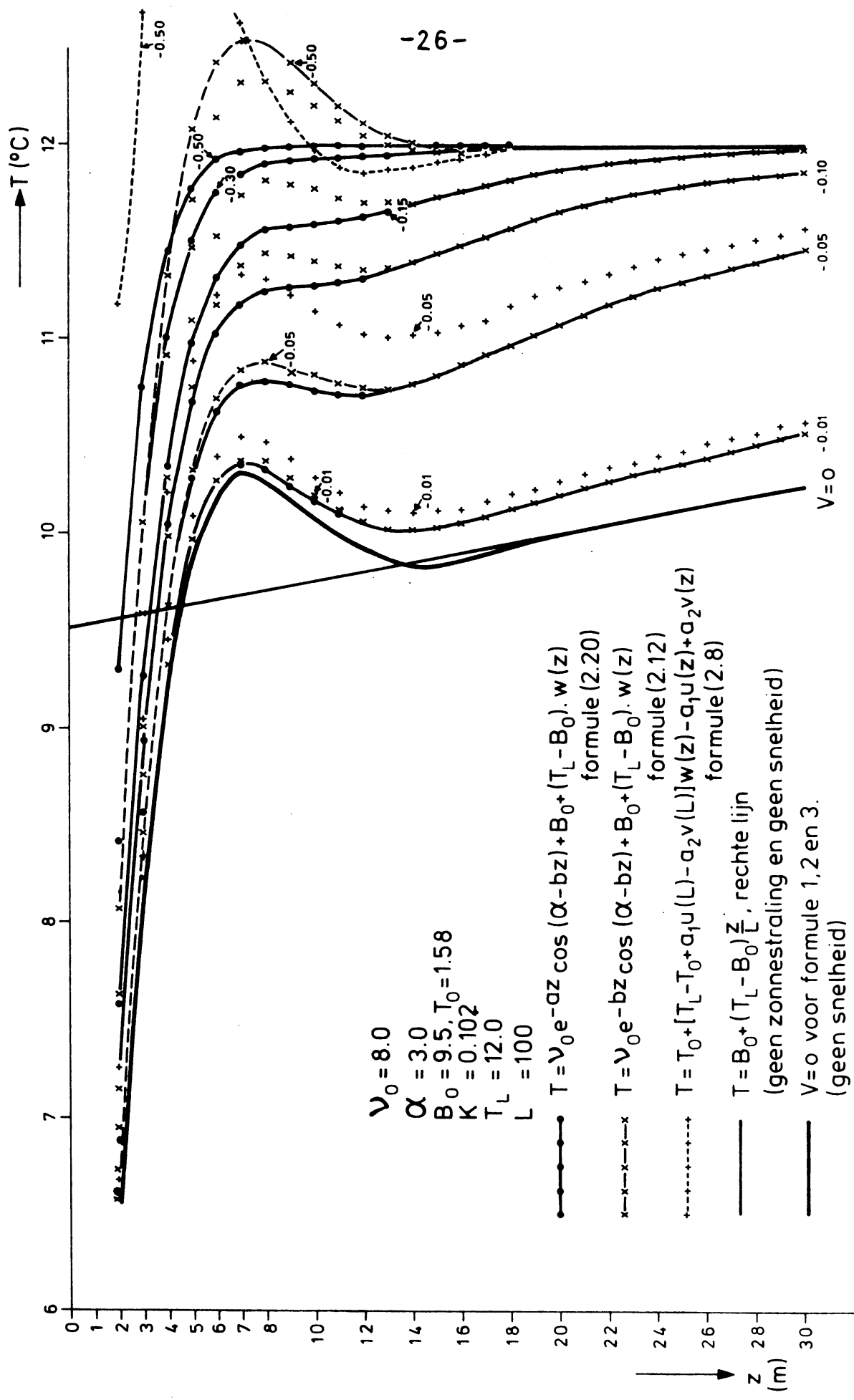
- [1] C. Braak
Het klimaat van Nederland B,
Mededelingen en Verhandelingen 47, KNMI, 1943.
- [2] P.J. Rijkoort
De indringingsdiepte van de vorst in de bodem,
Wetenschappelijk Rapport 60-5, KNMI, 1960.
- [3] R. Geiger
Das Klima der Bodennahen Luftschicht, 1950.
- [4] H.S. Carslaw and
J.C. Jaeger
Conduction of heat in solids, 1947.
- [5] A.F. Birch e.a.
Handbook of physical constants, 1942.
- [6] I. Csikós
Het berekenen van de grondwatersnelheid met
behulp van temperatuurmetingen in de bovenste
grondlagen,
colloquiumverslag KNMI, 1969.
- [7] L. Kuipers en
R. Timman
Handboek der Wiskunde, 1963.
- [8] J.D. Bredehoeft
and I.S. Papadopoulos
Rates of vertical groundwater movement estimated
from the earth's thermal profile, Water Resources
Research, vol. 1, no. 2, 325-328, 1965.
- [9] R.W. Stallman
Steady one-dimensional fluid flow in a semi-
infinite porous medium with sinusoidal surface
temperature, Journal of Geophysical Research,
vol. 70, no. 12, 2821-2827, 1965.
- [10] R.W. Stallman
Computation of groundwater velocity from
temperature data, U.S. Geolog. Survey, Water
Supply Paper 1544H, 36-46, 1963.
- [11] R. Fletcher
and M.J.D. Powell
A rapidly convergent descent method for
minimization, The Computer Journal,
vol. 6, 163-168, 1963.
- [12] S.A. Lill
A modified Davidon method for finding the
minimum of a function, using difference
approximation for derivatives,
The Computer Journal, vol. 13, 111-113, 1970;
vol. 14, 106, 1971 and vol. 14, 214, 1971.



Grafiek 1 Gemiddelde temperaturen De Bilt



Grafiek 2 Grondtemperatuurprofielen



Grafiek 3 Berekende profielen behorende bij 3 formules

BEGIN

```
COMMENT KNMI-070279-CROT-GWS-AG077013
HET BEREKENEN VAN DE GRONDWATERSNELHEID M.B.V.
TEMPERATUURMETINGEN IN DE BOVENSTE GRONDLAGEN;
INTEGER P,I,N,J,K,COJNT,EVALUATION;
REAL F,OLDF,SG,YHY,SY,GX,FY,FZ,A,B,C,MIN,FM,EF,NUO,ALFA,BO,KK,
      KWG,VZ;
BOOLEAN CHECK; LABEL START,STOP;
REAL ARRAY X,DFIRST,G,S,OLOG,LODX,Y,Z,HHC(1:1),HC(1:1);
FILE CARD(KIND=READER); FILE LPR(KIND=PRINTER);
```

```
N:=1;
START:
READ(CARD,<I3,5F8.3,F8.5>,P,X(1),NUO,ALFA,BO,KK,KWG);
IF P=999 THEN GO TO STOP;
WRITE(LPR,<"CROT-GWS",/ >);
WRITE(LPR,<I3,4F8.3,F8.5>,P,NUO,ALFA,BO,KK,KWG);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO DFIRST(I):=X(I)/20;
BEGIN
  LABEL EXIT;
```

```
REAL ARRAY ZZ, TM, T(1:P);
PROCEDURE FUNCT(P,X,ZZ, TM, T, F);
VALUE P; INTEGER P; REAL F; REAL ARRAY X, ZZ, TM, T(*);
BEGIN
  INTEGER I;

  REAL L, TML, V, A, B, Q1, Q2, Q3, Z, TV;
  L:=ZZ(P); TML:=TM(P);
  V:=X(1);
  Q1:=V*V/8; Q2:=SQRT(Q1*Q1+KK*KK);
  A:=SQRT(Q1+Q2)-V/2; B:=SQRT(-Q1+Q2);
  Q3:=(TML-BO)/(EXP(V*L)-1);
  F:=0;
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL P DO
  BEGIN
    Z:=ZZ(I);
    T(I):=NUO*EXP(-A*Z)*COS(ALFA-B*Z)+BO+Q3*(EXP(V*Z)-1);
    TV:=TM(I)-T(I); F:=F+TV*TV
  END
END FUNCT;
```

```
PROCEDURE MONITOR(X,F,G,COUNT,EVALUATION);
INTEGER COUNT,EVALUATION; REAL F; REAL ARRAY X,G(*);
BEGIN
```

```
WRITE(LPR,<3 F8.3,2I4>,X(I),F,
                                           G(I),COUNT,EVALUATION)
END MONITOR;
REAL PROCEDURE DOT(A,B);
REAL ARRAY A,B[*];
BEGIN
  INTEGER I;REAL S;

  S:=0;
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO S:=S+A(I)*B(I);
  DOT:=S;
END DOT;

REAL PROCEDURE UPDOT(A,B,I);
VALUE I;INTEGER I;REAL ARRAY A,B[*];
BEGIN
  INTEGER J,K;REAL S;

  K:=I;S:=0;
  FOR J:=1 STEP 1 UNTIL I-1 DO
  BEGIN S:=S+A(K)*B(J);K:=K+N-J END;
  FOR J:=I STEP 1 UNTIL N DO S:=S+A(K+J-I)*B(J);
  UPDOT:=S
END UPDOT;

PROCEDURE GRAD(X,FIRST,G);
BOOLEAN FIRST;REAL ARRAY X,G[*];
BEGIN
  INTEGER I,J;REAL E,D,ESTD,BD,FPD,FMD;REAL ARRAY XPLUSD,XMINUSD(1:N)

  FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N DO
  BEGIN LABEL CAD,SDI,OMIT;

    IF FIRST THEN BEGIN D:=DFIRST(J);GO TO SDI END;
  CAD:BD:=ABS(OLDG(J)*X(J)/F)*0.5*10**(-12);
    E:=IF EF>=BD THEN EF ELSE BD;
    IF OLDG(J)**2>=ABS(HH(J)*F)*E THEN
  BEGIN
    ESTD:=2*SQRT(ABS(F/HH(J))*E);
    D:=ESTD*(1-ABS(HH(J))*ESTD/(3*ABS(HH(J))*ESTD+4*ABS(OLDG(J))))
  END ELSE
  BEGIN
    ESTD:=2*ABS(F*OLDG(J)*E/HH(J)**2)**(1/3);
    D:=ESTD*(1-2*ABS(OLDG(J))/(3*ABS(HH(J))*ESTD+4*ABS(OLDG(J))))
  END;
  IF 0.5*ABS(HH(J)*D/OLDG(J))>0.01 THEN
  BEGIN
    D:=-ABS(OLDG(J)/HH(J))+SQRT(OLDG(J)**2+200*F*E*ABS(HH(J))
    /ABS(HH(J)));
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO XPLUSD(I):=XMINUSD(I):=X(I);
```

```
XPLUSD(J):=XPLUSD(J)+D;XMINUSD(J):=XMINUSD(J)-D;
EVALJATION:=EVALUATION+2;FUNCT(P,XPLUSD,ZZ,TM,T,FPD);
FUNCT(P,XMINUSD,ZZ,TM,T,FMD);
G(J):=(FPD-FMD)/2/D;GO TO OMIT
END;
S)I:FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO XPLUSD(I):=X(I);
XPLUSD(J):=XPLUSD(J)+D;FUNCT(P,XPLUSD,ZZ,TM,T,FPD);
EVALUATION:=EVALUATION+1;G(J):=(FPD-F)/D;
OMIT:
END
END GRAD;
```

```
PROCEDURE SETUNITHANDHH;
BEGIN
  INTEGER I,J,K;
```

```
  K:=1;
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
  BEGIN H(K):=1;HH(I):=1;
    FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N-I DO H(K+J):=0;
    K:=K+N-I+1
  END
END SET;
```

```
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL P DO READ(CARD,<F5.1,F6.2>,ZZ(I),TM(I));
EF:=10**(-10);FM:=0.0;SETUNITHANDHH;EVALUATION:=1;
FUNCT(P,X,ZZ,TM,T,F);GRAD(X,TRUE,G);
MONITOR(X,F,G,0,EVALUATION);
FOR COUNT:=1,COUNT+1 WHILE GLOF>F DO
BEGIN LABEL SAS,DOU,ESE,PRINT;
```

```
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
  BEGIN
    GLOX(I):=X(I);GLOG(I):=G(I);S(I):=-UPDOT(H,G,I)
  END;
SAS:GLOF:=F;GX:=DOT(G,S);
IF COUNT>1 THEN
  BEGIN
    CHECK:=GX>=0;
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO CHECK:=CHECK OR HH(I)<=0;
    IF CHECK THEN
      BEGIN SETUNITHANDHH;
        FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO S(I):=-G(I);GX:=DOT(G,S)
      END
    END;
IF COUNT<=4 THEN MIN:=-2*(F-FM)/GX ELSE
IF COUNT=N+1 THEN MIN:=1 ELSE
IF C/MIN>2 THEN MIN:=2*MIN ELSE
IF C/MIN<0.5 THEN MIN:=MIN*0.5;
```

```
B:=MIN;A:=0;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO Y(I):=X(I)+B*S(I);
FUNCT(P,Y,ZZ,TM,T,FY);EVALUATION:=EVALUATION+1;
IF FY>=F THEN
BEGIN
  C:=IF F=FY THEN B/2 ELSE -GX*B**2/2/(FY-F-GX*B);
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO X(I):=OLDX(I)+C*S(I);
  FUNCT(P,X,ZZ,TM,T,F);EVALUATION:=EVALUATION+1;
  IF F>=OLDF THEN
  BEGIN
    IF F=OLDF AND OLDF=FY THEN GO TO EXIT;
    IF F<OLDF THEN C:=0.5*C ELSE
    BEGIN
      FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO Y(I):=OLDY(I)-C*S(I);
      FUNCT(P,Y,ZZ,TM,T,FY);EVALUATION:=EVALUATION+1;
      C:=(FY-F)*C/2/(F+FY-2*OLDF)
    END;
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO X(I):=OLDX(I)+C*S(I);
    FUNCT(P,X,ZZ,TM,T,F);EVALUATION:=EVALUATION+1
  END;
  GO TO ESE
END;
DDJ:C:=IF FY-F-B*GX<=0 THEN 3*B ELSE -GX*B**2/2/(FY-F-B*GX);
IF C>3*B THEN C:=3*B;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO Z(I):=X(I)+C*S(I);
FUNCT(P,Z,ZZ,TM,T,FZ);EVALUATION:=EVALUATION+1;
IF FZ>FY THEN
BEGIN
  IF C=3*B OR A>0 THEN
  BEGIN
    C:=A+(F*(B**2-C**2)+FY*C**2-FZ*B**2)/2/(F*(B-C)+FY*C-FZ*B);
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO X(I):=OLDX(I)+C*S(I);
    FUNCT(P,X,ZZ,TM,T,F);EVALUATION:=EVALUATION+1
  END ELSE
  BEGIN
    F:=FY;C:=A+B;
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO X(I):=Y(I)
  END;
  GO TO ESE
END;
IF C=3*B THEN
BEGIN
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO BEGIN X(I):=Y(I);Y(I):=Z(I) END;
  GX:=(FY-F)/B;F:=FY;FY:=FZ;
  A:=A+B;B:=2*B;
  GO TO DDJ
END ELSE
BEGIN
  F:=FZ;C:=A+C;
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO X(I):=Z(I)
```



```
END;
ESE:GRAD(X,FALSE,G);
IF COUNT>N THEN
  BEGIN
    CHECK:=TRJE;
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
      CHECK:=CHECK AND ABS(S[I])<10**(-6) AND ABS(C*S[I])<10**(-6);
    IF CHECK THEN GO TO EXIT
  END;
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO OLDX[I]:=X[I]-OLDX[I];
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO Y[I]:=G[I]-OLOG[I];
  SY:=DOT(OLDX,Y);
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO S[I]:=UPDOT(H,Y,I);
  YHY:=DOT(S,Y);K:=1;
  IF SY=0 OR YHY=0 THEN GO TO PRINT;
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
    FOR J:=I STEP 1 UNTIL N DO
      BEGIN
        H[K]:=H[K]+OLDX[I]*OLDX[J]/SY-S[I]*S[J]/YHY;
        K:=K+1
      END;
    SG:=DOT(OLDG,OLDX);
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
      HH[I]:=HH[I]+Y[I]*(Y[I]*(1-SG*C/SY)+2*C*OLOG[I])/SY;
  PRINT:MONITOR(X,F,G,COUNT,EVALUATION)
  END;

EXIT:
  FUNCT(P,X,ZZ,TM,T,F);
  WRITE(LPR,</>);
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL P DO WRITE(LPR,<F5.1,2F6.2>>ZZ[I],TM[I],T[I]);
  VZ:=X[1]*WG*8640;WRITE(LPR,</,F5.1>,VZ);
  END;WRITE(LPR(SKIP 1),</>);GO TO START;

STJP:
END.
```

CRUT-GWS: 21C-72

16	7.800	4.640	9.800	0.144	0.00380
-0.050	0.156	-6.905	0	2	
-0.011	0.020	0.006	1	5	
-0.011	0.020	0.000	2	8	
-0.011	0.020	0.000	3	12	

5.0	9.08	9.04
6.0	9.61	9.59
7.0	9.92	9.99
8.0	10.21	10.24
9.0	10.33	10.39
10.0	10.42	10.47
11.0	10.49	10.52
12.0	10.52	10.55
13.0	10.58	10.57
14.0	10.63	10.60
15.0	10.67	10.64
16.0	10.71	10.68
17.0	10.77	10.72
18.0	10.81	10.77
19.0	10.82	10.82
20.0	10.87	10.87

-0.3

CRDT-GWS: 2/C-71

-33-

16	7.800	4.640	9.800	0.144	0.00380
-0.100	0.035	2.439	0	2	
-0.111	0.018	0.024	1	5	
-0.111	0.018	0.000	2	8	

5.0	9.77	9.80
6.0	10.27	10.32
7.0	10.70	10.68
8.0	10.98	10.91
9.0	11.05	11.06
10.0	11.12	11.14
11.0	11.19	11.20
12.0	11.24	11.25
13.0	11.30	11.28
14.0	11.33	11.32
15.0	11.39	11.35
16.0	11.42	11.39
17.0	11.47	11.42
18.0	11.49	11.45
19.0	11.50	11.47
20.0	11.50	11.50

-3.7

CPOT-GWS: 31 F-272

24	7.800	2.930	10.100	0.102	0.00400
-0.200	0.153	4.793	0	2	
-0.264	0.008	0.376	1	5	
-0.277	0.005	0.052	2	8	
-0.280	0.005	-0.000	3	11	
-0.280	0.005	0.000	4	15	

7.0	12.25	12.31
8.0	12.34	12.34
9.0	12.37	12.36
10.0	12.37	12.37
11.0	12.38	12.37
12.0	12.40	12.38
13.0	12.41	12.39
14.0	12.41	12.40
15.0	12.42	12.40
16.0	12.42	12.41
17.0	12.42	12.42
18.0	12.43	12.42
19.0	12.43	12.43
20.0	12.43	12.43
21.0	12.43	12.43
22.0	12.43	12.44
23.0	12.43	12.44
24.0	12.43	12.44
25.0	12.43	12.44
26.0	12.43	12.44
27.0	12.43	12.44
28.0	12.43	12.44
29.0	12.44	12.44
30.0	12.44	12.44

-9.7

CRDT-GWS: 3/F-272

24	0.000	2.930	10.100	0.102	0.00400
-0.200	0.555	11.620	0	2	
-0.295	0.040	1.389	1	5	
-0.337	0.007	0.326	2	9	
-0.362	0.003	0.025	3	12	
-0.365	0.003	0.000	4	15	
-0.365	0.003	0.000	5	19	

7.0	12.25	12.26
8.0	12.34	12.31
9.0	12.37	12.35
10.0	12.37	12.38
11.0	12.38	12.40
12.0	12.40	12.41
13.0	12.41	12.42
14.0	12.41	12.43
15.0	12.42	12.43
16.0	12.42	12.43
17.0	12.42	12.44
18.0	12.43	12.44
19.0	12.43	12.44
20.0	12.43	12.44
21.0	12.43	12.44
22.0	12.43	12.44
23.0	12.43	12.44
24.0	12.43	12.44
25.0	12.43	12.44
26.0	12.43	12.44
27.0	12.43	12.44
28.0	12.43	12.44
29.0	12.44	12.44
30.0	12.44	12.44

-12.6