

KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT

D e B i l t

WETENSCHAPPELIJK RAPPORT

W.R. 74-9

Th. de Crook en I. Csikós

Fourier-analyse van een seismisch signaal

De Bilt, 1974

Publikationsnummer: K.N.M.I. W.R. 74-9 (M.B.W., G.O.)

INHOUD

Summary

1. Inleiding
2. Probleemstelling
3. Polynoombenadering van een seismisch signaal
4. Fourieranalyse van een seismisch signaal
5. Het berekenen van de coëfficiënten
6. Resultaten van de diverse methodes
7. Programmabeschrijving
8. Toepassingen
9. Literatuur
10. Figuren
11. Algol-programma FASS

Summary

In this report a new method is developed to compute the Fourier integrals (Fourier transforms) of a seismic signal.

The seismic signal is approximated by a polynomial, so that the Fourier integrals can be computed analytically.

In section 3 a method is described to find a polynomial approximation of the seismic signal. This polynomial approximation is substituted in the Fourier integrals, see section 4, so that we can calculate these integrals.

In section 5 some methods are discussed to compute the coefficients of the polynomial approximation. In section 7 a program-description of the new method is presented and in section 11 the ALGOL-programme of the same method.

In section 8 some applications are discussed. For the results we refer to the graphs, see section 10.

1. Inleiding

Voor verschillende problemen, zoals het berekenen van de energie-inhoud van P- en S-golven, is het noodzakelijk een seismisch signaal in een Fourierreeks te ontwikkelen.

Dit is een bewerking die veel numerieke integratie vereist, en daardoor veel tijd kost. In dit rapport wordt een tijdbesparende methode ontwikkeld, die berust op de benadering van het geregistreerde signaal door een polynoom. Het resultaat kan ook worden gebruikt voor de oplossing van het probleem: hoe kan men de parameters van een seismometer-galvanometer-combinatie bepalen uit de registratie van een tegen de seismometer aangebrachte stoot.

Na de probleemstelling in par. 2 wordt in par. 3 een methode besproken waarmee het seismisch signaal in een polynoombenadering kan worden omgezet. Met behulp van deze polynoombenadering worden in par. 4 de Fourier-integralen berekend. In par. 5 worden enkele methoden besproken voor het berekenen van de coëfficiënten van het benaderingspolynoom.

Verder wordt in par. 7 een programmabeschrijving gegeven van de gevolgde methode, met in par. 11 het bijbehorende rekenprogramma FASS (Fourier Analyse van een Seismisch Signaal), dat geschreven is in ALGOL-60. Tenslotte worden in par. 8 enkele toepassingen besproken, waarvan de resultaten in de figuren, zie par. 10, zijn getekend.

2. Probleemstelling

We willen een Fourieranalyse maken van een seismisch signaal $f(t)$, waarvan bekend is dat voor $t = 0$ geldt dat $f(t) = \frac{df(t)}{dt} = \frac{d^2f(t)}{dt^2} = 0$ en dat $f(t)$ naar nul nadert bij grote waarden van t .

We proberen de waargenomen puls $f(t)$ door een polynoom te benaderen, dat opgebouwd is uit functies van het type e^{-ant} , zodat we de integralen [3]:

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

$$\text{en} \quad C(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

analytisch kunnen berekenen.

3. Polynoombenadering van een seismisch signaal

Het opgetekende seismische signaal $f(t)$ heeft enkele in het oog springende eigenschappen. In het begin bij $t = 0$ geldt dat $f(t) = \frac{d f(t)}{dt} = 0$. Bovendien is het zo dat bij galvanometrische registratie uit theoretische overweging volgt dat ook $\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = 0$ bij $t = 0$. Bij alle seismische registraties geldt dat $f(t)$ nul wordt bij grotere waarden van t , dus kunnen wij stellen dat $f(t) = 0$ bij $t = \infty$.

Bij seismische registratie geldt dus:

$$f(t) = \frac{d f(t)}{dt} = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = 0 \text{ voor } t = 0 \quad (3.1.)$$

en $f(t) = 0$ voor $t = \infty$

Als we de waargenomen puls door een polynoom laten benaderen, dat opgebouwd is uit functies van het type e^{-ant} , wordt de laatste voorwaarde automatisch vervuld, mits $n > 0$ is.

Stellen wij:

$$f(t) = a_1 e^{-at} + a_2 e^{-2at} + \dots + a_n e^{-nat} \quad (3.2.)$$

voor $t \geq 0$ en $a > 0$, dan blijkt hieruit onmiddellijk dat $f(t) = 0$ als $t = \infty$. Verder moeten de coëfficiënten a_1, a_2, \dots, a_n zodanig gekozen worden dat bij $t = 0$, $f(t)$ en de eerste en tweede afgeleide van $f(t)$ nul worden. Als wij nu vergelijking (3.2) in de volgende vorm schrijven:

$$f(t) = C_0 \phi_0(t) + C_1 \phi_1(t) + \dots + C_n \phi_n(t) \quad (3.3)$$

en bovendien geldt:

$$\phi_n(t) = \frac{d}{dt} \phi_n(t) = \frac{d^2}{dt^2} \phi_n(t) = 0 \text{ als } t = 0 \quad (3.4)$$

en

$$\int_0^\infty \phi_n(t) \phi_m(t) dt = 0 \text{ (} n \neq m \text{)} \quad (3.5)$$

dan voldoet vergelijking (3.3) ook aan de eisen die de beginvoorwaarden stellen en heeft nog het voordeel dat de functies orthogonaal zijn, hetgeen

het berekenen van de coëfficiënten $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ vergemakkelijkt. Stel nu $e^{-at} = z$ en $\phi_n(t) = P_n(z)$ dan worden de beginvoorwaarden volgens (3.4):

$$P_n'(z) = \frac{d}{dz} P_n(z) = \frac{d^2}{dz^2} P_n(z) = 0 \text{ als } z = 1 \quad (3.6)$$

en de orthogonaliteitsrelatie gaat over in :

$$\frac{1}{a} \int_0^1 P_n(z) P_m(z) \frac{dz}{z} = 0 \quad (n \neq m) \quad (3.7)$$

Vervolgens stellen we (omdat $f(t)$ aan de gestelde eigenschappen moet voldoen):

$$\begin{aligned} P_n(z) &= z(1 - z^2)^3 Q_{n-7}(z) \\ &= (z - 3z^3 + 3z^5 - z^7) Q_{n-7}(z) \end{aligned} \quad (3.8)$$

waar $Q_{n-7}(z)$ een veelterm is van de graad $n-7$.

We zien dat vergelijking (3.8) voldoet aan de eis die door (3.6) is gesteld. De orthogonaliteitsrelatie (3.7) wordt nu:

$$\frac{1}{a} \int_0^1 z(1 - z^2)^6 Q_{n-7}(z) Q_{m-7}(z) dz = 0 \quad (n \neq m) \quad (3.9)$$

Stellen we nu $z^2 = x$ en $Q_n(z) = \frac{S_n}{2}(x)$, dan kunnen we (3.9) in de volgende vorm schrijven:

$$\frac{1}{2a} \int_0^1 (1-x)^6 \frac{S_{n-7}}{2}(x) \frac{S_{m-7}}{2}(x) dx = 0 \quad (n \neq m) \quad (3.10)$$

Stel $n' = \frac{n-7}{2}$ dan wordt (3.10):

$$\frac{1}{2a} \int_0^1 (1-x)^6 S_{n'}(x) S_{m'}(x) dx = 0 \quad (n' \neq m') \quad (3.11)$$

Hieraan voldoen de polynomen van Jacobi:

$$I_n(\alpha; \delta; x) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\dots(\alpha+n+k-1)}{\delta(\delta+1)\dots(\delta+k-1)} x^k \quad (3.12)$$

die aan de volgende integraalrelaties voldoen:

$$\int_0^1 x^{\delta-1} (1-x)^{\alpha-\delta} I_n(\alpha; \delta; x) I_m(\alpha; \delta; x) dx = 0 \quad (3.13)$$

$$\int_0^1 x^{\delta-1} (1-x)^{\alpha-\delta} I_n^2(\alpha; \delta; x) dx = \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\alpha+1-\delta)}{\Gamma(\alpha)} \frac{(\alpha+1-\delta)(\alpha+2-\delta)\dots(\alpha+n-\delta)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\delta(\delta+1)\dots(\delta+n-1)} \cdot \frac{n!}{\alpha+2n} \quad (3.14)$$

Hiervoor zij verwezen naar [4] pag. 780 en [5] pag. 98.

Volgens (3.11) en (3.13) is: $\delta-1 = 0$ en $\alpha-\delta = 6$ of $\alpha = 7$ en $\delta = 1$, dus $S_n(x) = I_n(7; 1; x)$.

Uit (12) volgt nu:

$$S_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n'} (-1)^k \binom{n'}{k} \frac{(7+n')(8+n')\dots(6+k+n')}{k!} x^k \quad (3.15)$$

$$\delta f \frac{S_{\frac{n-7}{2}}(x)}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{(n-7)/2} (-1)^k \binom{(n-7)/2}{k} \frac{(7+\frac{n-7}{2})\dots(6+k+\frac{n-7}{2})}{k!} x^k$$

$$\delta f Q_{n-7}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\frac{n-7}{2}} (-1)^k \binom{\frac{n-7}{2}}{k} \frac{(7+\frac{n-7}{2})\dots(6+k+\frac{n-7}{2})}{k!} z^{2k}$$

$$\delta f P_n(z) = z(1-z^2)^3 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{(n-7)/2} \dots z^{2k} \right\}$$

$$\delta f \phi_n(t) = e^{-at} (1-e^{-2at})^3 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\frac{n-7}{2}} \dots e^{-2akt} \right\} \quad (3.16)$$

Omdat $n' = \frac{n-7}{2}$ en n' de waarden 0, 1, 2, 3 doorloopt, kan $n = 7, 9, 11, 13 \dots$ zijn.

Uit (3.16) volgt nu:

$$\phi_7(t) = e^{-at} (1 - e^{-2at})^3 = e^{-at} - 3e^{-3at} + 3e^{-5at} - e^{-7at}$$

$$\begin{aligned} \phi_9(t) &= e^{-at} (1 - e^{-2at})^3 \left\{ 1 + (-1) \binom{1}{1} \frac{8}{1!} e^{-2at} \right\} \\ &= e^{-at} (1 - e^{-2at})^3 \left\{ 1 - 8 e^{-2at} \right\} \end{aligned}$$

$$\phi_{11}(t) = e^{-at}(1 - e^{-2at})^3 \{ 1 - 18 e^{-2at} + 45 e^{-4at} \}$$

Vervangen we voorts $\phi_7(t)$ door $\phi_0(t)$, $\phi_9(t)$ door $\phi_1(t)$, $\phi_{11}(t)$ door $\phi_2(t)$ dan kunnen we voor (3.16) ook schrijven:

$$\phi_n(t) = e^{-at} (1 - e^{-2at})^3 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(7+n) \dots (6+k+n)}{k!} e^{-2akt} \right\} \quad (3.17)$$

voor $n = 0, 1, 2, \dots$

Verder geldt volgens (3.13) en (3.14):

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \phi_n(t) \phi_m(t) dt &= 0 \\ \text{en } \int_0^\infty \phi_n^2(t) dt &= \frac{1}{(14+4n)a} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Omdat in vergelijking (3.3) de functies $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$,, $\phi_n(t)$ identiek zijn met (3.17) en de orthogonaliteitsrelaties voldoen aan (3.18) kunnen de coëfficiënten van (3.3) C_0, C_1, \dots, C_n eenvoudig uitgedrukt worden met de volgende vergelijking:

$$C_n = (14+4n) a \int_0^\infty f(t) \phi_n(t) dt \quad (3.19)$$

waarin $f(t)$ het waargenomen seismische signaal is en $\phi_n(t)$ de orthogonale functie, die wordt bepaald met vergelijking (3.17).

De integraal in (3.19) kan met een of andere numerieke methode berekend worden. Nu de coëfficiënten C_n , zie (3.19), en de functies $\phi_n(t)$, zie (3.17), berekend kunnen worden, is volgens (3.3) het polynoom eenvoudig te bepalen, waarmee dan een benadering is gevonden van het seismische signaal $f(t)$.

4. Fourieranalyse van een seismisch signaal

De functie $f(t)$ - het seismische signaal - wordt bepaald door

$$f(t) = C_0 \phi_0(t) + C_1 \phi_1(t) + C_2 \phi_2(t) + \dots + C_{m-1} \phi_{m-1}(t) \quad (4.1)$$

waarbij de coëfficiënten C_0 t/m C_{m-1} berekende constanten zijn en $\phi_0(t)$ t/m $\phi_{m-1}(t)$ de bekende orthogonale polynomen.

Voor het maken van een Fourieranalyse dienen we de volgende twee integralen te berekenen, te weten:

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (4.2)$$

en $C(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (4.3)$

Hiertoe substitueren we (4.1) in (4.2) en vinden we:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_0^{\infty} (C_0 \phi_0 + C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2 + \dots + C_{m-1} \phi_{m-1}) \sin \omega t dt \\ &= \int_0^{\infty} C_0 \phi_0 \sin \omega t dt + \int_0^{\infty} C_1 \phi_1 \sin \omega t dt + \dots + \int_0^{\infty} C_{m-1} \phi_{m-1} \sin \omega t dt \\ &= C_0 \int_0^{\infty} \phi_0 \sin \omega t dt + C_1 \int_0^{\infty} \phi_1 \sin \omega t dt + \dots + C_{m-1} \int_0^{\infty} \phi_{m-1} \sin \omega t dt \\ S(\omega) &= \sum_{n=0}^{m-1} C_n \int_0^{\infty} \phi_n(t) \sin \omega t dt \end{aligned} \quad (4.4)$$

Er zijn twee manieren om deze integraal (4.4) op te lossen.

1^e Uit (3.17) volgt voor $a = 1$ dat:

$$\phi_n(t) = e^{-t}(1-e^{-2t})^3 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{(7+n)\dots(6+k+n)}{k!} e^{-2kt} \right\}$$

Stellen we:

$$B(n,k) = (-1)^k \frac{(7+n)\dots(6+k+n)}{k!}$$

dan krijgen we

$$\phi_n(t) = e^{-t}(1-e^{-2t})^3 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^n B(n,k)e^{-2kt} \right\} \quad (4.5)$$

Substitueren we (4.5) in (4.4) dan krijgen we:

$$S(\omega) = \sum_{n=0}^{m-1} C_n \int_0^{\infty} e^{-t}(1-e^{-2t})^3 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^n B(n,k)e^{-2kt} \right\} \sin \omega t dt \quad (4.6)$$

Indien we de integraal (4.6) verder uitschrijven vinden we allemaal integralen van het type

$$\int_0^{\infty} e^{-at} \sin \omega t dt = \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \quad (4.7)$$

Met behulp van integraal (4.7) is (4.6) gemakkelijk uit te rekenen.

2° Uit (3.15) en (3.17) volgt dat:

$$\phi_n(t) = \phi_0(t) S_n(t) \quad (4.8)$$

Verder geldt door $S_n(t)$ de recurrente betrekking:

$$S_n(t) = A_n S_{n-2}(t) + B_n S_{n-1}(t) + C_n e^{-2t} S_{n-1}(t) \quad (4.9)$$

$$\text{waarbij } A_n = \frac{-2(n-1)(n+3)(n+5)}{n(n+6)(2n+4)}$$

$$B_n = \frac{4n^3 + 30n^2 + 38n - 30}{n(n+6)(2n+4)}$$

$$\text{en } C_n = -\frac{(2n+4)(2n+5)(2n+6)}{n(n+6)(2n+4)}$$

Hiervoor zij verwezen naar [6] pag. 50, formule (7.2).

$$\begin{aligned} \text{Dus } \phi_n(t) &= \phi_0(t) (A_n S_{n-2}(t) + B_n S_{n-1}(t) + C_n e^{-2t} S_{n-1}(t)) \\ &= A_n \phi_0(t) S_{n-2}(t) + B_n \phi_0(t) S_{n-1}(t) + C_n e^{-2t} \phi_0(t) S_{n-1}(t) \\ &= A_n \phi_{n-2}(t) + B_n \phi_{n-1}(t) + C_n e^{-2t} \phi_{n-1}(t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Hieruit volgt dat voor $\phi_n(t)$ dezelfde recurrente betrekking geldt als voor $S_n(t)$.

Uit (4.8), (3.15) en (3.17) volgt:

$$\phi_0 = \phi_0 S_0 = \phi_0 \cdot 1 = e^{-t} (1 - e^{-2t})^3 = e^{-t} - 3 e^{-3t} + 3 e^{-5t} - e^{-7t}$$

en

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_0 S_1 = (e^{-t} - 3 e^{-3t} + 3 e^{-5t} - e^{-7t})(1 - 8 e^{-2t}) \\ &= e^{-t} - 11 e^{-3t} + 27 e^{-5t} - 25 e^{-7t} + 8 e^{-9t} \end{aligned}$$

Met behulp van de recurrente betrekking voor $\phi_n(t)$, zie (4.10), kunnen we een uitdrukking vinden voor ϕ_2, ϕ_3, \dots enz.

Substitueren we de uitdrukkingen voor $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ in de integraal (4.4) dan krijgen we allemaal integralen van het type

$$\int_0^{\infty} e^{-at} \sin \omega t dt = \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$$

zodat wij $S(\omega)$ als functie van de frequentie ω kunnen berekenen.

Op analoge wijze kunnen we de integraal

$$C(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

op twee manieren bepalen. Hierbij spelen de integralen van het type

$$\int_0^{\infty} e^{-at} \cos \omega t dt = \frac{a}{a^2 + \omega^2}$$

een belangrijke rol.

De tweede manier is programmatechnisch korter en ook veiliger, omdat we minder last van afrondingsfouten hebben, daar de getallen bij het rekenen kleiner blijven.

Vervolgens berekenen we de amplitude $A(\omega)$ en de fase $\phi(\omega)$ met de formules:

$$A(\omega) = \sqrt{S(\omega)^2 + C(\omega)^2} \quad (4.11)$$

en
$$\operatorname{tg} \phi(\omega) = \frac{C(\omega)}{S(\omega)} \rightarrow \phi(\omega) = \arctan \left(\frac{C(\omega)}{S(\omega)} \right) \quad (4.12)$$

Volgens de theorie van de Fourieranalyse geldt dat:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{\omega=0}^{\infty} S(\omega) \sin \omega t + \sum_{\omega=0}^{\infty} C(\omega) \cos \omega t \\ &= \sum_{\omega=0}^{\infty} A(\omega) \sin (\omega t + \phi(\omega)) \end{aligned}$$

waarbij $S(\omega)$, $C(\omega)$, $A(\omega)$ en $\phi(\omega)$ berekend kunnen worden met de formules (4.4), (4.11) en (4.12).

Met behulp van het voorgaande is het nu mogelijk van het seismisch signaal $f(t)$ een Fourieranalyse te maken, hetgeen van belang is voor de bestudering

van het signaal. Zo is het bijvoorbeeld mogelijk aardbevingen te onderscheiden van explosies omdat het spectrum van een natuurlijke aardbeving essentieel verschillend is van dat van een kernexplosie.

5. Het berekenen van de coëfficiënten

Het waargenomen seismisch signaal $f(t)$ wordt benaderd door het polynoom

$$f(t) = C_0 \phi_0(t) + C_1 \phi_1(t) + \dots + C_n \phi_n(t) \quad (5.1)$$

waarbij $\phi_n(t)$ voor $n = 0, 1, 2, \dots$ wordt bepaald door formule (3.17) en de coëfficiënten C_0 t/m C_n door formule (3.19).

Zijn eenmaal de coëfficiënten C_0 t/m C_n en de orthogonale functies $\phi_n(t)$ berekend, dan is het bepalen van het polynoom $f(t)$ voor bepaalde waarden van t een eenvoudige zaak, nl. door toepassing van formule (5.1).

Het berekenen van de orthogonale functies $\phi_n(t)$ levert geen moeilijkheden op (zie formule 3.17). Nog handiger kan $\phi_n(t)$ berekend worden met de recurrente betrekking (4.10), waarbij dan wel eerst $\phi_0(t)$ en $\phi_1(t)$ met behulp van (3.17) berekend moet worden. Ook kan $\phi_n(t)$ berekend worden uit (4.8) en (4.9), waarbij dan $S_0(t)$ en $S_1(t)$ berekend worden met formule (3.15).

Het berekenen van de coëfficiënten C_0 t/m C_n levert meer moeilijkheden op. De coëfficiënten worden bepaald met de formule (3.19):

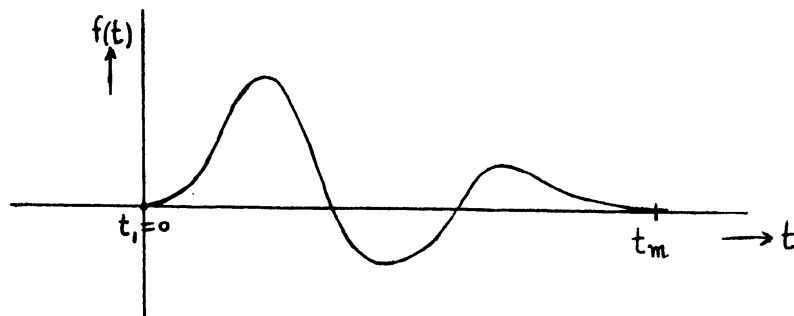
$$C_n = (14 + 4n) \cdot a \cdot \int_0^\infty f(t) \phi_n(t) dt \quad (5.2)$$

De factor $(14 + 4n)a$ geeft geen problemen. Uit berekeningen volgt dat de keuze $a = 1$ verantwoord is.

De integraalvorm kunnen we natuurlijk niet bepalen voor het gebied $(0, \infty)$. We moeten het bepalen van de integraal beperken tot de integraal:

$$\int_{t_1=0}^{t_m} f(t) \phi_n(t) dt \quad (5.3)$$

De rest van de integraal (5.2) verwaarlozen we, hetgeen gezien de vorm van de functie $f(t)$ is toegestaan, want $f(t) \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$.



5.1. Het berekenen van de integraal (5.3) kan op verschillende manieren geschieden.

1e. Bereken $f(t) \phi_n(t)$ voor de gegeven waarden van $t(t_1, t/m, t_m)$.

De functiewaarden $f(t)$ t/m $f(t_m)$ kunnen worden afgelezen van het seismische signaal.

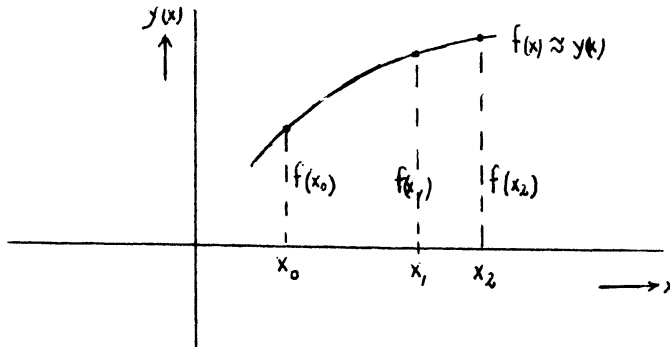
Met behulp van de methode voor het berekenen van een integraal volgens Lagrange (uitbreiding van de regel van Simpson) voor niet equidistante punten - en eventueel de trapeziumregel -, kan de integraal (5.3) in één keer worden bepaald.

Voor drie niet equidistante punten wordt een integraal $\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx$ volgens Lagrange als volgt berekend [1].

$$f(x) \approx y(x) = \sum_{j=0}^2 l_j(x) f(x_j) = l_0(x) f(x_0) + l_1(x) f(x_1) + l_2(x) f(x_2)$$

waarbij

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \quad l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, \quad l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$



Voor de integraal $\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx$ vinden we nu:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_2} y(x) dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) dx + \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) dx + \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \left[x \left\{ \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{2} (x_1+x_2)x + x_1 \cdot x_2 \right\} \right]_{x_0}^{x_2} + \\
 &\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \left[x \left\{ \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{2} (x_0+x_2)x + x_0 \cdot x_2 \right\} \right]_{x_0}^{x_2} + \\
 &\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \left[x \left\{ \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{2} (x_0+x_1)x + x_0 \cdot x_1 \right\} \right]_{x_0}^{x_2} \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

Met behulp van formule (5.4) kan de integraal (5.3) worden berekend, - we vervangen daartoe $f(x)$ door $f(t) \phi_n(t)$ en berekenen $\phi_n(t)$ volgens (3.17) - waarna voor verschillende waarden van n de coëfficiënten C_n t/m C_n kunnen worden berekend volgens (5.2).

2e. We kunnen $\phi_n(t)$ opgebouwd denken uit een aantal termen van het type $C \cdot e^{+Dt}$ (zie 4.5). Door nu de integraal $\int_{t_1}^{t_m} f(t) \phi_n(t) dt$ term voor term te integreren - de termen zijn van het type $\int_{t_1}^{t_m} f(t) \cdot C e^{+Dt} dt$ - met behulp van formule (5.4) en daarna de integralen te sommeren, kunnen we de integraal $\int_{t_1}^{t_m} f(t) \phi_n(t) dt$ bepalen en daarna met behulp van (5.2) de coëfficiënten C_n berekenen.

3e. Voor de integraal (5.3) kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_m} f(t) \phi_n(t) dt &= \int_{t_1}^{t_3} f(t) \phi_n(t) dt + \int_{t_3}^{t_5} f(t) \phi_n(t) dt + \dots + \\
 &\int_{t_{m-2}}^{t_m} f(t) \phi_n(t) dt \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

De integralen in het rechterlid zijn van hetzelfde type. We behandelen daarom alleen de eerste integraal.

In de eerste drie punten benaderen we $f(t)$ door $a+bt+ct^2$ (kwadratische functie), zodat geldt:

$$\int_{t_1}^{t_3} f(t) \phi_n(t) dt = \int_{t_1}^{t_3} (a+bt+ct^2) \phi_n(t) dt \quad (5.6)$$

Volgens (4.5) geldt:

$$\phi_n(t) = e^{-t} (1-e^{-2t})^3 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^n B(n,k) e^{-2kt} \right\} \quad (5.7)$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
 \phi_n(t) = & (e^{-t} - 3e^{-3t} + 3e^{-5t} - e^{-7t}) + \\
 & +(e^{-3t} - 3e^{-5t} + 3e^{-7t} - e^{-9t}) * B(n,1) \\
 & +(e^{-5t} - 3e^{-7t} + 3e^{-9t} - e^{-11t}) * B(n,2) \\
 & \dots \\
 & +(e^{-(2n+1)t} - 3e^{-(2n+3)t} + 3e^{-(2n+5)t} - e^{-(2n+7)t}) * B(n,n) \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

We kunnen $\phi_n(t)$ dus opgebouwd denken uit een aantal termen van het type Ce^{+Dt} . De integraal (5.6) bestaat dus uit integralen van het type

$$\begin{aligned}
 C \int_{t_1}^{t_3} (a+bt+ct^2) e^{+Dt} dt = \\
 C \int_{t_1}^{t_3} (a e^{Dt} + bt e^{Dt} + ct^2 e^{Dt}) dt = \\
 \frac{C}{D} [e^{Dt_3} \{ (a - \frac{b}{D} + 2 \frac{c}{D^2}) + (b - 2 \frac{c}{D}) t_3 + c t_3^2 \} \\
 - e^{Dt_1} \{ (a - \frac{b}{D} + 2 \frac{c}{D^2}) + (b - 2 \frac{c}{D}) t_1 + c t_1^2 \}] \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

Met behulp van (5.8) en (5.9) is de integraal (5.6) uit te rekenen en **evenzo** de integraal (5.5), zodat we vervolgens met formule (5.2) de coëfficiënten C_n kunnen bepalen.

De coëfficiënten a, b en c bepalen we door drie gegeven punten in te vullen in $f(t) = a + bt + ct^2$.

We krijgen dan:

$$\begin{aligned}
 a + bt_1 + ct_1^2 &= f(t_1) \\
 a + bt_2 + ct_2^2 &= f(t_2) \\
 a + bt_3 + ct_3^2 &= f(t_3)
 \end{aligned}$$

We hebben nu drie vergelijkingen met drie onbekenden a, b en c.
Met behulp van de regel van Cramer vinden we dan:

$$a = \frac{t_2 t_3 (t_3 - t_2) f(t_1) - t_1 t_3 (t_3 - t_1) f(t_2) + t_1 t_2 (t_2 - t_1) f(t_3)}{t_1^2 (t_3 - t_2) - t_2^2 (t_3 - t_1) + t_3^2 (t_2 - t_1)}$$

$$b = \frac{-(t_3^2 - t_2^2) f(t_1) + (t_3^2 - t_1^2) f(t_2) - (t_2^2 - t_1^2) f(t_3)}{(t_3 - t_2) t_1^2 - (t_3 - t_1) t_2^2 + (t_2 - t_1) t_3^2}$$

$$\text{en } c = \frac{(t_3 - t_2) f(t_1) - (t_3 - t_1) f(t_2) + (t_2 - t_1) f(t_3)}{(t_3 - t_2) t_1^2 - (t_3 - t_1) t_2^2 + (t_2 - t_1) t_3^2}$$

5.2. Het is ook mogelijk de integraal (5.2) rechtstreeks te berekenen.
Met behulp van (4.8) kunnen we schrijven:

$$\int_0^{\infty} f(t) \phi_n(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-t} (1 - e^{-2t})^3 S_n(t) f(t) dt \quad (5.10)$$

Stellen we $x = e^{-2t}$ dan wordt (5.10):

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{x} (1-x)^3 S_n(x) f(x) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} (1-x)^3 S_n(x) f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^6 \frac{S_n(x)}{\phi_0(x)} f(x) dx, \text{ omdat } \phi_0(x) = \sqrt{x} (1-x)^3 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Stellen we:

$$w(x) = (1-x)^6 \text{ en } g(x) = \frac{S_n(x)}{\phi_0(x)} f(x)$$

dan gaat (5.11) over in:

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 w(x) g(x) dx \quad (5.12)$$

Volgens de integratie-methode van Gauss [1] kunnen we schrijven dat:

$$\int_0^{\infty} f(t) \phi_n(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 w(x) g(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m C_j g(x_j) \quad (5.13)$$

waarbij dan: $C_j = \int_0^1 w(x) l_j(x) dx,$

x_1 t/m x_m de nulpunten van $S_m(x) = I_m(7,1,x)$, zie (3.15),

$$\text{en } l_j(x) = \prod_{k=1, k \neq j}^m \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$$

Dus $C_j = \int_0^1 (1-x)^6 l_j(x) dx$. Voor het berekenen van de integraal C_j

- voor $j = 1(1)m$ - is van belang de integraal:

$$\int_0^1 x^n w(x) dx = \int_0^1 x^n (1-x)^6 dx = \frac{720}{(n+1)(n+2)\dots(n+7)}$$

De coëfficiënten C_0 t/m C_n kunnen dus worden berekend met behulp van de formules (5.13) en (5.2).

De functies $S_m(x)$ voor $m = 0,1,2,\dots$ vormen een stelsel orthogonale polynomen met de gewichtsfunctie $w(x) = (1-x)^6$ en het interval $[0,1]$, zie (3.13).

Er geldt dan dat $S_m(x)$ m verschillende nulpunten heeft, die liggen op het interval $[0,1]$.

Deze nulpunten van $S_m(x)$ kunnen worden bepaald volgens de methode van Newton-Raphson of met de procedure ZERO - deze methode is een combinatie van de bisectie-methode en de Regula falsi - .

Dit zijn iteratieprocessen waarvoor we dus benaderingen van de nulpunten moeten hebben. Deze kunnen we het beste vinden door $S_m(x)$ te tabelleren voor verschillende waarden van x .

Bij de nulpunten x_1 t/m x_m van $S_m(x)$ kunnen de bijbehorende waarden van t berekend worden met $x = e^{-2t}$.

In deze nulpunten dienen we nog de bijbehorende functiewaarden van het seismische signaal $f(t)$ te berekenen.

Bekend zijn de meetpunten van $f(t)$ als functie van t . Benaderen we nu $f(t)$ per drie punten door een kwadratische functie, dan kunnen we in de nulpunten de functiewaarden van $f(t)$ bepalen door kwadratische interpolatie ($f(t) = a + bt + ct^2$).

De methode volgens dit punt 5.2 wordt gevolgd in het programma FASS.

6. Resultaten van de diverse methodes

De resultaten volgens de methode, zie punt 5.1.1e, zijn sterk afhankelijk van het tijdsinterval. Hoe kleiner het tijdsinterval is, des te beter zijn de resultaten met andere woorden des te beter is de polynoombenadering. Een nadeel is echter dat de rekentijd steeds groter wordt.

Het aantal termen van het polynoom mag niet te klein zijn, omdat dan de polynoombenadering minder goed is. Indien echter het aantal termen te groot wordt, treedt er oscillatie op. Voor een bepaald aantal termen is dus de benadering optimaal.

Uit het voorgaande zal het duidelijk zijn dat aan het tijdsinterval en het aantal termen grenzen gesteld dienen te worden, zodat ook de kwaliteit van de resultaten begrensd is.

De resultaten volgens de methode, zie punt 5.1.2e zijn hetzelfde dan volgens de methode van punt 5.1.1e.

De methode van punt 5.1.3e geeft een betere polynoombenadering dan de beide vorige methodes. Dit komt omdat bij deze methode alleen $f(t)$ benaderd wordt door een kwadratische functie.

De resultaten volgens de methode van punt 5.1.3e zijn echter nog niet bevredigend, zodat een andere methode is ontwikkeld, zie punt 5.2, waarvan de polynoombenadering wel aan de gestelde eisen voldoet.

Hierop komen we later terug (zie punt 8).

7. Programmabeschrijving

Om een beter inzicht in het ALGOL-programma te krijgen, geven we in dit punt een regelbeschrijving van dit programma (zie punt 11).

Het programma is geschreven in ALGOL voor de EL-X8 rekenmachine.

7.1. Input

Gegeven is een seismisch signaal $f(t)$ als functie van de tijd t .

De functiewaarden van $f(t)$ kunnen worden afgelezen voor verschillende gegeven waarden van t . Dit noemen we de meetpunten.

Voor de input zijn een aantal beperkingen ingevoerd nl.:

a. Voor $t > 3/2$ dient $f(t)$ praktisch nul te zijn.

Hierdoor komt het signaal dichter bij de oorsprong te liggen, waar ook de meeste nulpunten van het Jacobi-polynoom $S_m(x)$ liggen, die bepalend zijn bij de berekening van de coëfficiënten van het benaderingspolynoom.

- b. De waarden van $f(t)$ dienen altijd te liggen tussen +9 en -9.
Deze beperking is uitsluitend ingevoerd in verband met het plotprogramma.
- c. Voor $t = 0$ en $t = 3.5$ dient $f(t)$ gegeven te zijn.
De andere waarden van t dienen altijd te liggen tussen +0 en +3.5.
Deze beperking is van belang in verband met het bepalen van de functie-
waarden van $f(t)$ in de nulpunten van $S_m(x)$, maar ook in verband met het
plotprogramma.

De invoergegevens, die op ponsband staan, bestaan uit:

Regelnr.

- 8 Voor elke gegeven waarde van t , de bijbehorende waarde van $f(t)$ (maximaal
100 waarnemingen);
- 8 Het sluitgetal +999;
- 10 De graad van de functie $S_m(x)$;
- 89-91 $m+1$ functiewaarden van $S_m(x)$, waar tussen de nulpunten van $S_m(x)$ liggen; deze
functiewaarden dienen als benaderingen van de nulpunten.

7.2. Programma CROT-FASS (Fourier Analyse van een Seismisch Signaal)

Regelnr.

- 14-24 De procedure SM berekent de functiewaarde van $S_m(x)$ voor een gegeven waarde
van m en x volgens de recurrente betrekking, die voor $S_m(x)$ geldt (zie formule
(4.9)).
- 26-42 Met de procedure ZERO worden de nulpunten van $S_m(x)$ bepaald (zie punt 5.2).
- 44-51 Met de procedure ABC worden de coëfficiënten a , b en c berekend van $f(t) =$
 $a + bt + ct^2$ volgens de regel van Cramer (zie punt 5.1.3e).
- 53-78 De procedure CJ berekent de constanten C_j (zie punt 5.2).
In de array C worden de integralen C_j voor $j = 1(1)m$ opgeborgen;
de array X bevat de waarden van de nulpunten x_j voor $j = 1(1)m$.
- 80-85 Met de procedure GAA wordt de gemiddelde absolute afwijking van twee rijen
getallen berekend.
- 87-93 De nulpunten x_j t/m x_m van $S_m(x)$ worden berekend, met de bijbehorende waarden
van t (zie punt 5.2).

- 94-104 In de nulpunten x_1 t/m x_m worden de functiewaarden van het seismisch signaal $f(t)$ bepaald met kwadratische interpolatie (zie punt 5.2 en 5.1.3e).
- 105-134 De coëfficiënten C_0 t/m C_{m-1} van het benaderingspolynoom worden berekend (zie punt 5.2).
- 136-152 Door toepassing van het benaderingspolynoom worden in de meetpunten de functiewaarden van $f(t)$ berekend, die een benadering zijn van het seismisch signaal $f(t)$, zie formule (5.1).
- 154-191 Voor $\omega = 0$ ($\frac{1}{2}$) 40 worden achtereenvolgens $S(\omega)$, $C(\omega)$, $A(\omega)$ en $\phi(\omega)$ berekend (zie punt 4).

7.3. Output

De uitvoergegevens, die met de regeldrukker worden afgedrukt, bestaan uit:

- Regelnr.
- 87 De graad van de functie $S_m(x)$;
- 104 Voor $j = 1(1)m$ de nulpunten x_j , de bijbehorende waarden t_j en de functiewaarden $f(t_j)$;
Voor $h = 1(1)3$:
- 129 a. voor $j = 1(1)m$ de functiewaarden $f(t_j)$, de benaderingen van $f(t_j)$, de afwijkingen en de coëfficiënten C_{j-1} ;
- 130 b. de gemiddelde absolute afwijking;
- 133 De waarden van $S_m(x)$ in de nulpunten x_1 t/m x_m ;
- 134 Rekeningtijden;
- 148 Voor $i = 1(1)p$ de meetpunten $(t_i, F(t_i))$ en de benadering van $F(t_i)$;
- 150 De gemiddelde absolute afwijking;
- 151 Rekeningtijd;
- 183-189 Voor $\omega = 0$ ($\frac{1}{2}$) 40 de frequentie ω , $S(\omega)$, $C(\omega)$, $A(\omega)$ en $\phi(\omega)$;
- 191 Rekeningtijd.

8. Toepassingen

We behandelen in dit punt vijf toepassingen van het programma FASS (zie ook figuren punt 10). De toepassing, waarvan de analytische oplossing bekend is, wordt eerst behandeld. Daarna volgen vier toepassingen uit de praktijk. Met het voorbeeld, waarvan de analytische oplossing bekend is, verkrijgen we een indicatie omtrent de fout die gemaakt wordt met het programma FASS. Als voorbeeld kiezen we $f(t) = 10.e^{-3t} \sin 2\pi t$. Hiervoor geldt dat $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, $f''(0) \neq 0$ en $f(t)$ nadert naar 0 voor t nadert naar oneindig. Het valt op dat $f'(0)$ en $f''(0)$ niet gelijk zijn aan nul zoals in punt 2 werd verondersteld. Voor het maken van een Fourier-analyse is dit echter minder belangrijk. Substitueren we $f(t) = 10.e^{-3t} \sin 2\pi t$ in de formules, zie punt 2, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = \int_0^{\infty} 10.e^{-3t} \sin 2\pi t \sin \omega t dt \\ &= -5 \left[\frac{3}{9+(2\pi+\omega)^2} - \frac{3}{9+(2\pi-\omega)^2} \right] \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} \text{en } C(\omega) &= \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = \int_0^{\infty} 10.e^{-3t} \sin 2\pi t \cos \omega t dt \\ &= 5 \left[\frac{2\pi+\omega}{9+(2\pi+\omega)^2} + \frac{2\pi-\omega}{9+(2\pi-\omega)^2} \right] \end{aligned} \quad (8.2)$$

Door substitutie in (8.1) en (8.2) kunnen we voor elke ω de integralen $S(\omega)$ en $C(\omega)$ berekenen. We noemen dit de analytische manier. We kunnen $S(\omega)$ en $C(\omega)$ echter ook numeriek berekenen met het programma FASS. In de tabel 1 geven we voor een aantal waarden van ω de waarden van $S(\omega)$ en $C(\omega)$, die zowel op de analytische als op de numerieke manier berekend zijn. In het rechter gedeelte van de tabel staat de fout. Onder fout verstaan we de werkelijke waarde verminderd met de benaderde waarde, oftewel:
fout = analytische waarde - numerieke waarde.

Tabel 1

ω	Analytisch		Numeriek		Fouten	
	S(ω)	C(ω)	S(ω)	C(ω)	in S(ω)	in C(ω)
0	+0.00	+1.30	+0.00	+1.27	+0.00	+0.03
5	+1.30	+1.02	+1.30	+1.01	+0.00	+0.01
10	+0.60	-0.52	+0.59	-0.53	+0.01	+0.01
15	+0.14	-0.28	+0.14	-0.28	+0.00	+0.00
20	+0.05	+0.16	+0.05	-0.17	+0.00	+0.01

Ondanks het feit dat $f'(0) \neq 0$ en $f'' \neq 0$ zijn de fouten klein. Om een beter inzicht te krijgen in de fouten die gemaakt worden met het programma FASS geven we een opsomming van de mogelijke fouten die in de berekening kunnen optreden.

De mogelijke fouten zijn:

1. Inherente fouten

Deze komen voort uit foute gegevens, dus bijvoorbeeld waarnemings-, aflees-, copierfouten etc.

2. Afrondingsfouten

3. Procesfouten

Deze worden ook wel genoemd afbreekfouten (truncation errors) of discretiseringsfouten.

Procesfouten worden gemaakt bij de nulpunten-bepaling, de polynoombenadering (graad beperkt) en de integratie-methode van Gauss (restterm).

4. Interpolatiefouten

Deze worden gemaakt bij de kwadratische interpolatie ter bepaling van de functiewaarden in de nulpunten.

In de figuren 1, 3, 5, 7 en 9 zijn de seismische signalen $f(t)$ getekend als functie van de tijd t . De meetpunten, waardoor een lijn getrokken is, zijn aangegeven met het \square teken. De benaderde waarden van $f(t)$, die verkregen zijn met behulp van het benaderingspolynoom, worden aangegeven met het * teken.

In de figuren 2, 4, 6, 8 en 10 zijn $S(\omega)$, $C(\omega)$ en $A(\omega)$ als functie van de frequentie ω getekend. De berekende waarden, die verbonden zijn door een lijn, van $S(\omega)$, $C(\omega)$ en $A(\omega)$ worden respectievelijk aangegeven door de tekens $+$, \times en \square .

De figuren 1 t/m 10 zijn getekend met de plotter. Het plotprogramma is niet in het verslag opgenomen.

Voor de figuren 5 t/m 10 zij verwezen naar [2] pag. 745.

- De nulpunten van $S_m(x)$ worden bepaald tot 10 dec. nauwkeurig. Indien de nulpunten tot 7 dec. nauwkeurig worden bepaald zijn de eindresultaten van de diverse berekeningen van iets mindere kwaliteit, doch nauwelijks merkbaar verschillend. Indien de nulpunten berekend worden in 12 dec. nauwkeurig, gaat het programma te lang duren. Daarom nauwkeurigheid 10 dec.
- De nulpunten van $S_m(x)$ worden bepaald met de procedure ZERO. Indien de nulpunten worden bepaald met de methode volgens Newton, geeft dit moeilijkheden als de graad van $S_m(x)$ te groot wordt - bv. $S_{24}(x)$ - ; in dit geval is de grafiek van $S_m(x)$ te steil. Daarom kunnen de nulpunten van $S_m(x)$ het beste berekend worden met de procedure ZERO.
- De graad van de functie $S_m(x)$ is m . In het programma FASS stellen we $m = 16$. Berekeningen uitgevoerd met $m \geq 18$ gaven een minder goede polynoombenadering (waarschijnlijk als gevolg van afrondingsfouten), die slechter werd, naarmate m groter werd. Indien de graad te laag wordt is uiteraard het benaderingspolynoom van minder goede kwaliteit, hetgeen dus inhoudt dat de graad van $S_m(x)$ niet te laag, maar ook niet te hoog mag zijn. Voor $m = 16$ is het benaderingspolynoom optimaal en voldoet aan de gestelde eisen.
- De rekentijden van de vijf toepassingen met het programma FASS liggen binnen de minuut, inclusief de uitvoer met de regeldrukker. Met het plotprogramma erbij liggen de rekentijden natuurlijk aanmerkelijk hoger.

Met deze methode, waarbij het seismische signaal eerst door een polynoom wordt benaderd, is het mogelijk de Fourier-integralen te berekenen.

Wel dient het signaal aan bepaalde voorwaarden te voldoen, zie punt 2. Voldoet het seismisch signaal echter aan iets andere voorwaarden, dan kan men door het opstellen van een andere polynoombenadering, de Fourier-integralen ook berekenen.

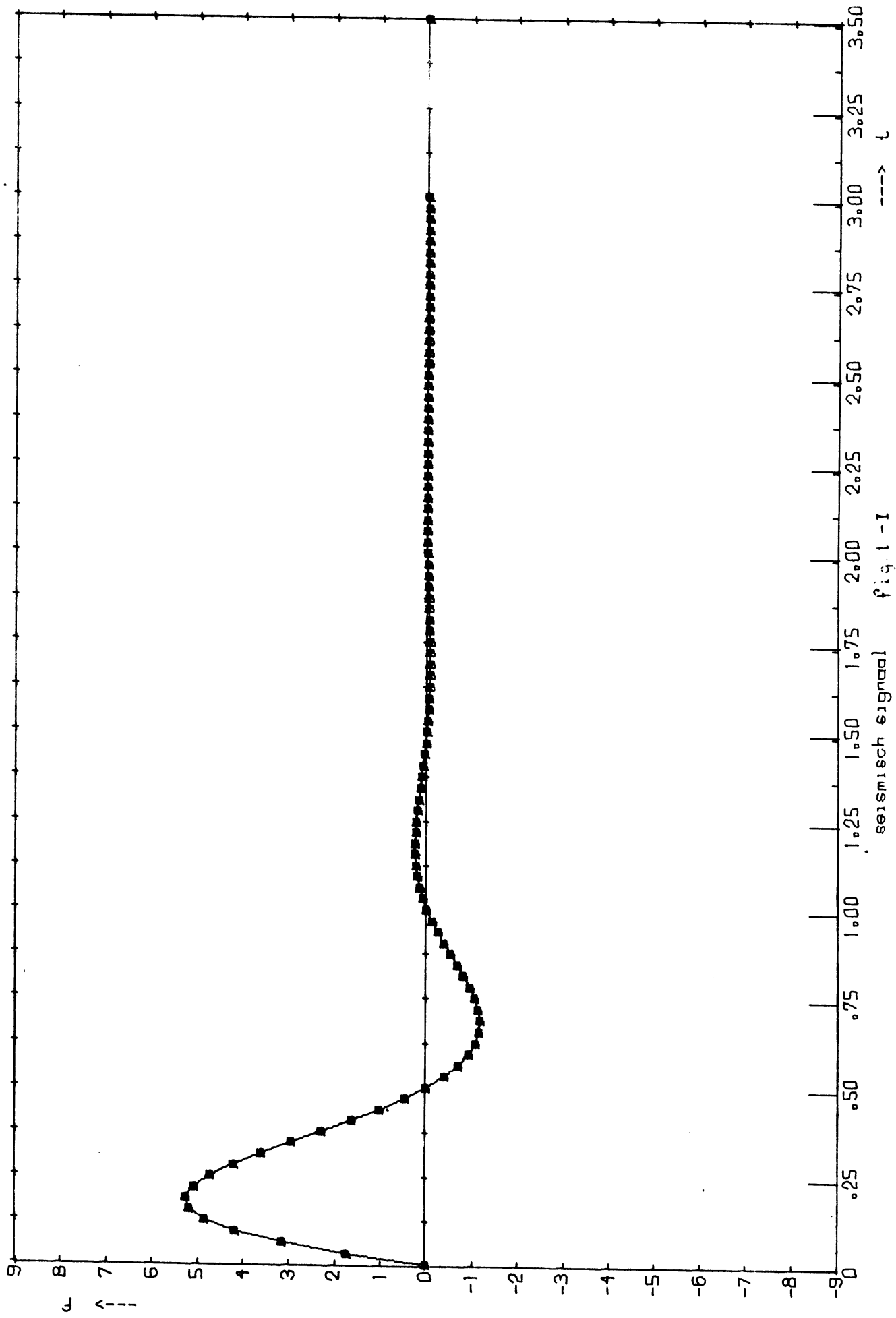
Voor het bepalen van de Fourier-integralen komen ook de FFT-procedures (Fast Fourier Transform) in aanmerking.

De resultaten van enkele toepassingen met de FFT-procedures zijn vergeleken met de resultaten verkregen met het FASS-programma. Hieruit bleek dat de resultaten van dezelfde kwaliteit en de rekentijden van dezelfde orde van grootte waren.

9. Literatuur

- [1] L. Kuipers en R. Timman Handboek der Wiskunde, 1963
- [2] A.R. Ritsema Band Samplitudes of two earthquakes of the single force couple type, Bulletin of the Seismological Society of America, vol. 52, no. 4, pp.723-746, 1962
- [3] A. Papoulis The Fourier integral and its applications, 1962
- [4] P.M. Morse and H. Feshbach Methods of Theoretical Physics, 1973
- [5] M. Bath Mathematical aspects of Seismology, 1968
- [6] Th. de Crook Generalisatie van de toegevoegde Legendre functies en de Jacobi functies, 1965, T.H. Delft.

10. Figuren



seismisch signaal fig. 1-1

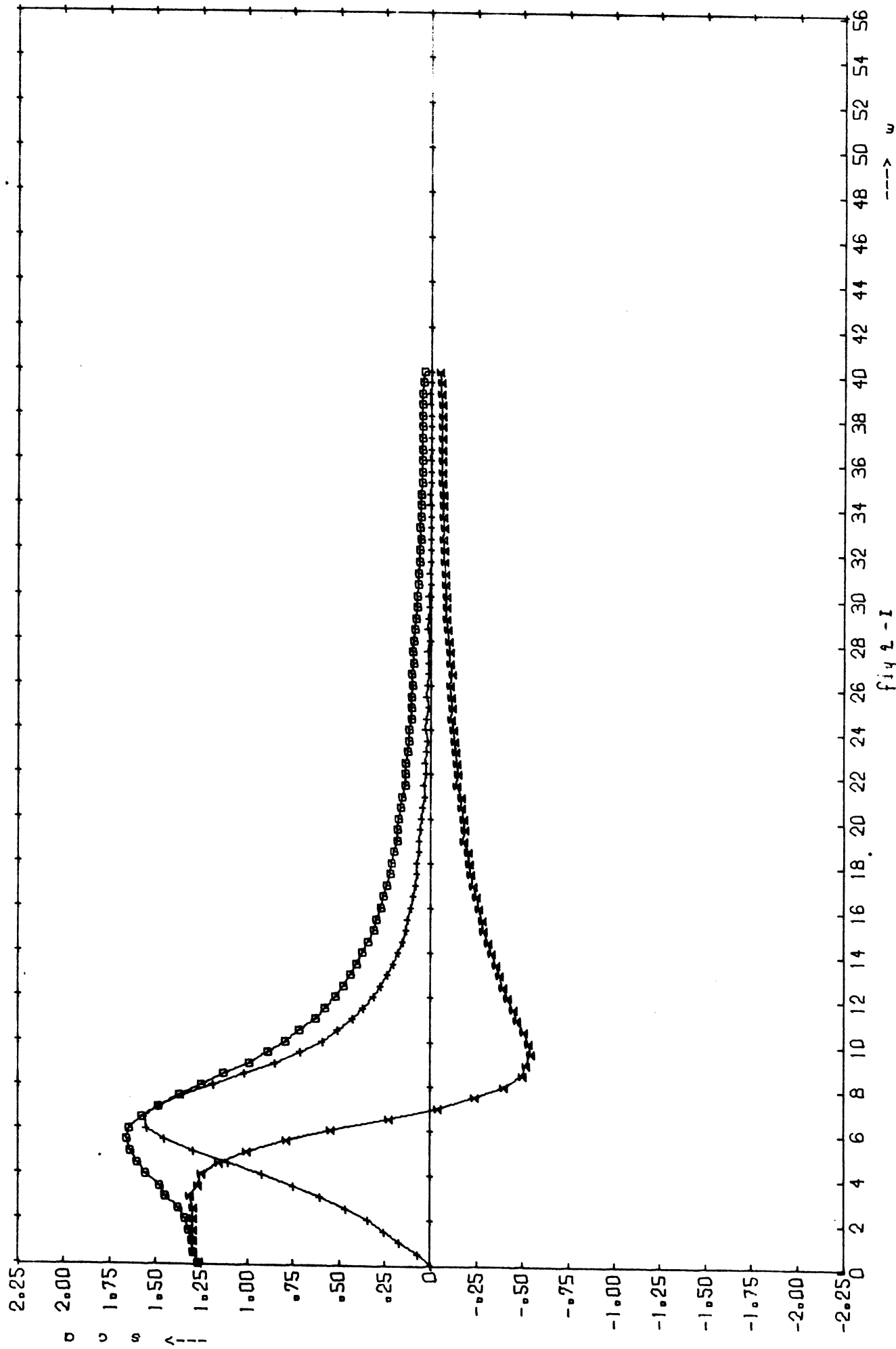
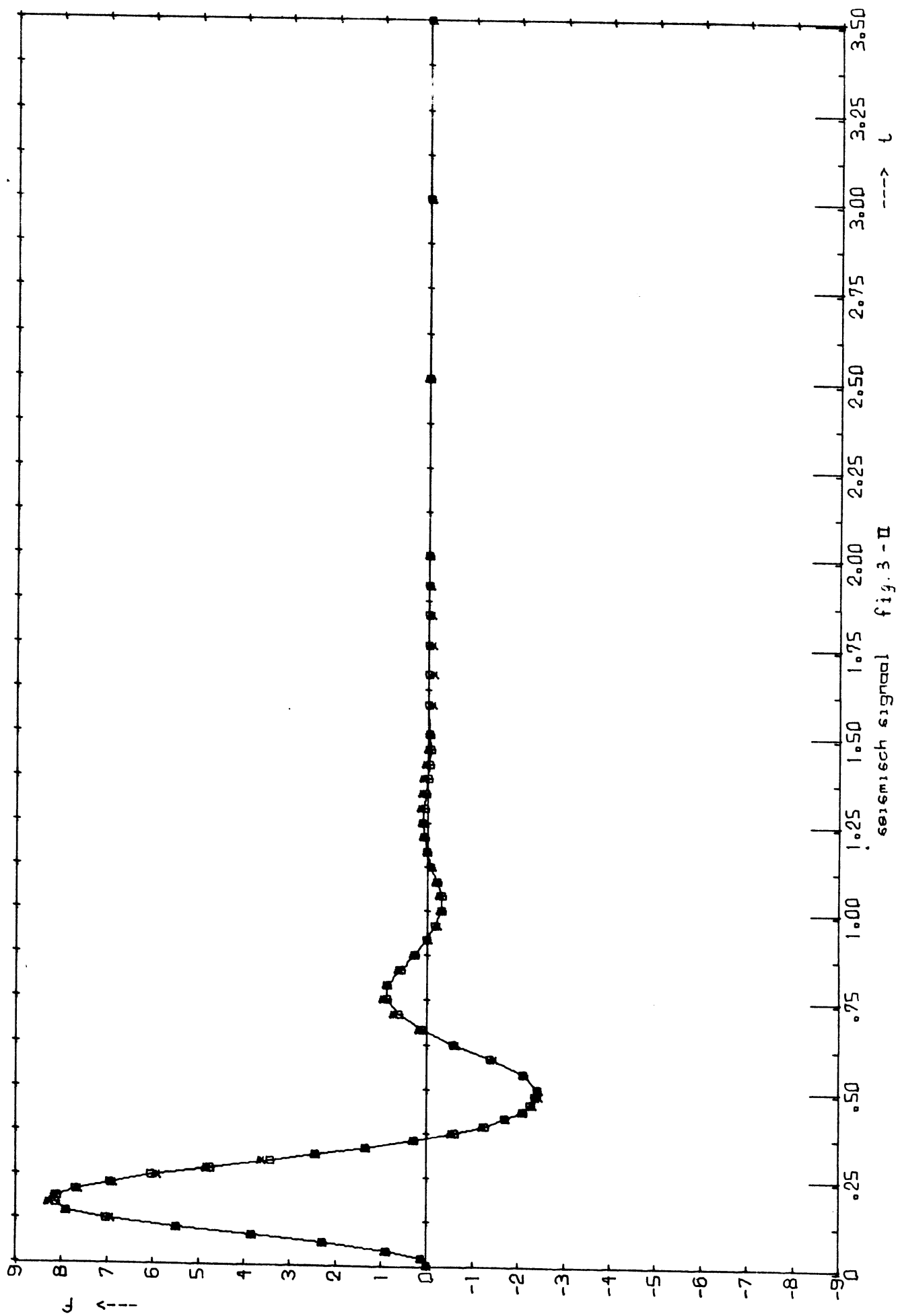


fig 2 - I



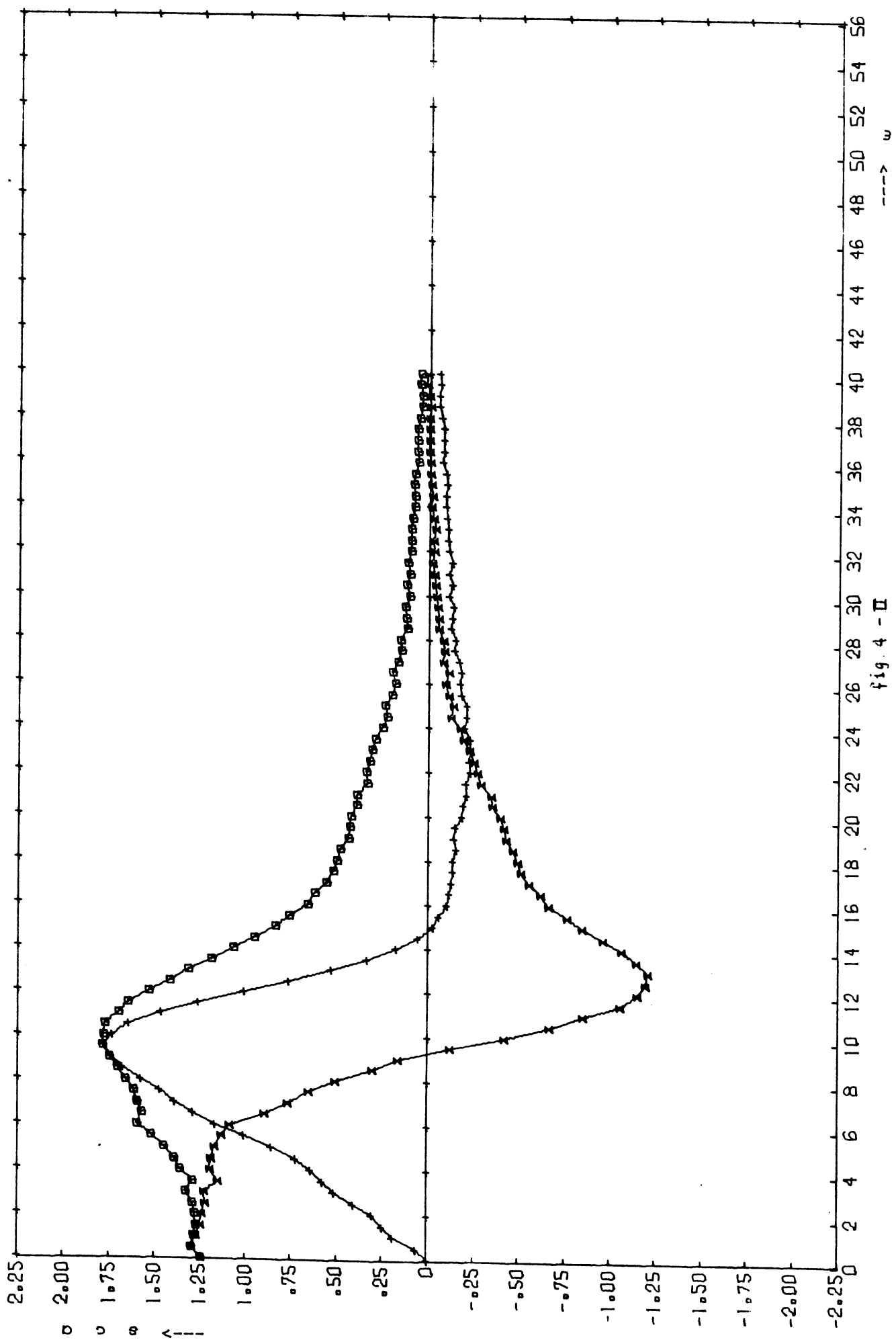
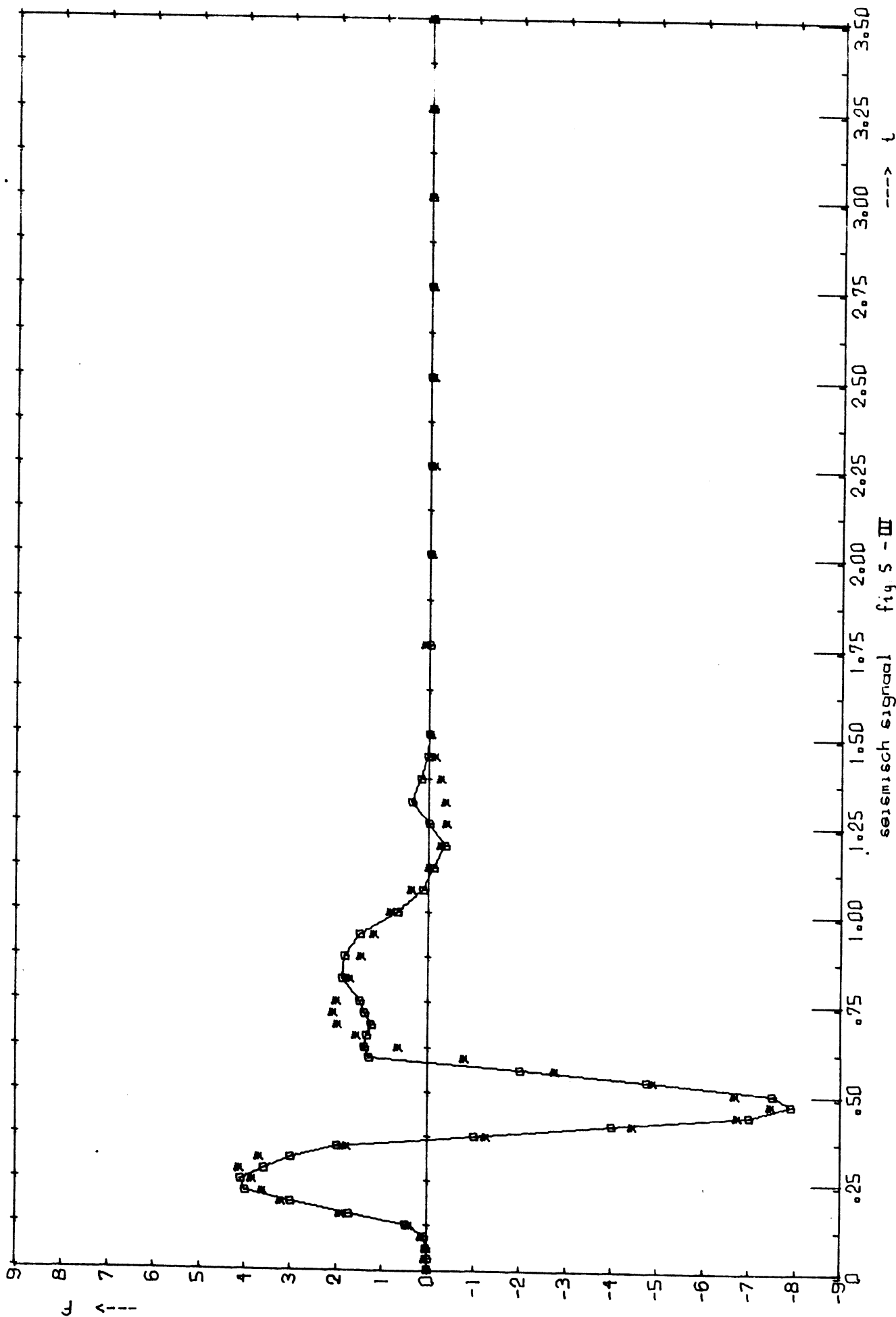


fig. 4 - II



seismisch signal fig 5 - III

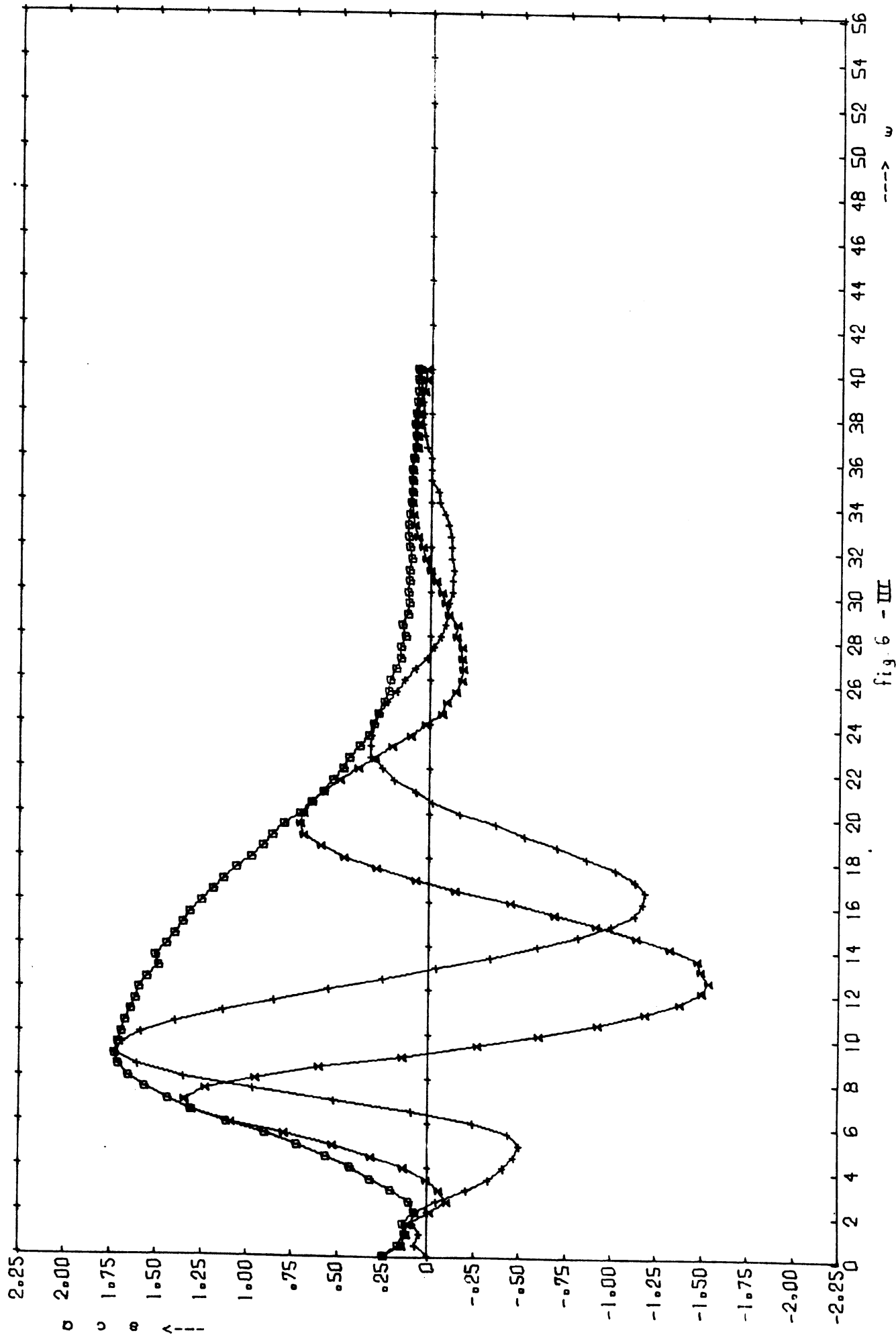
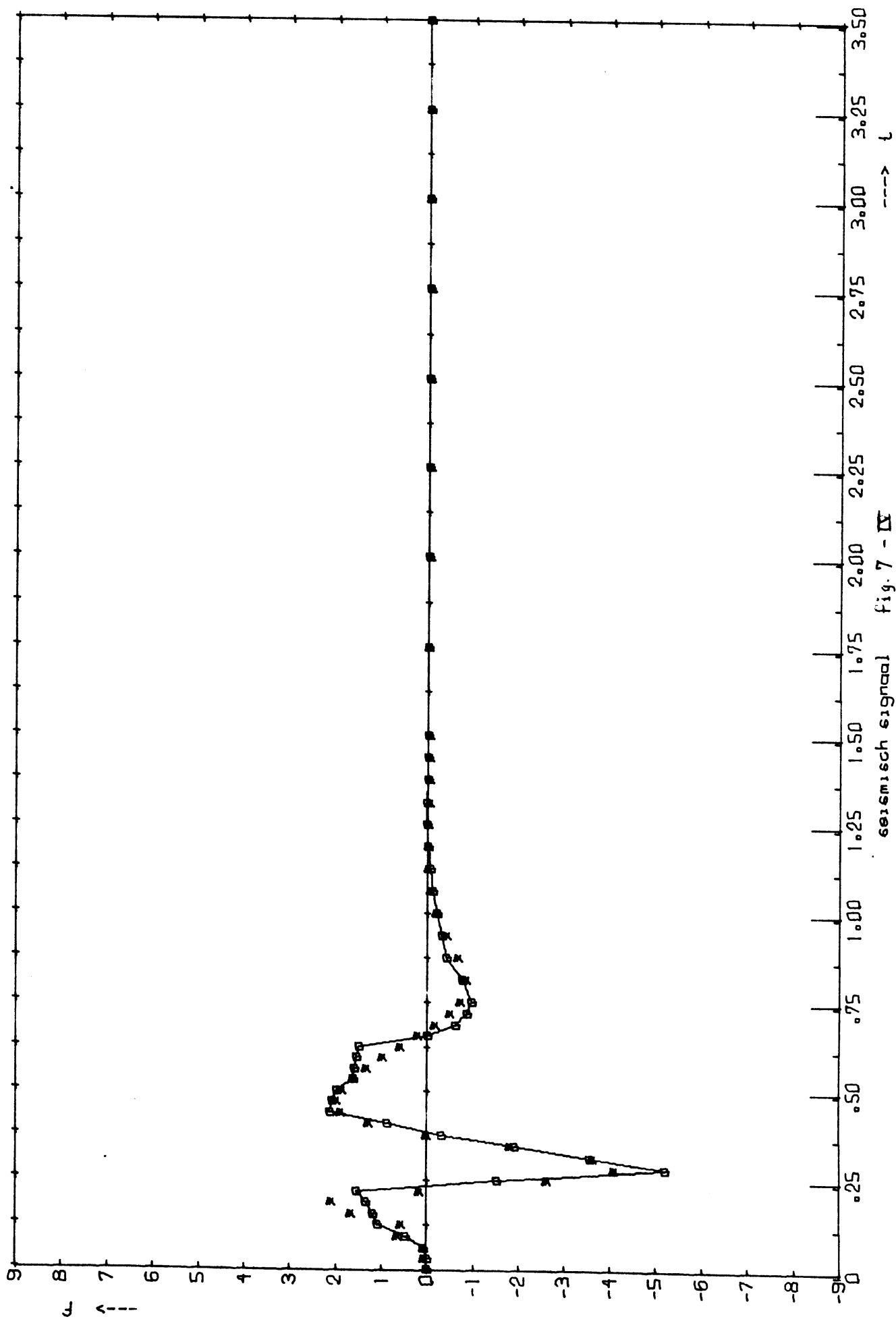


fig. 6 - III



seismisch signaal fig. 7 - IX

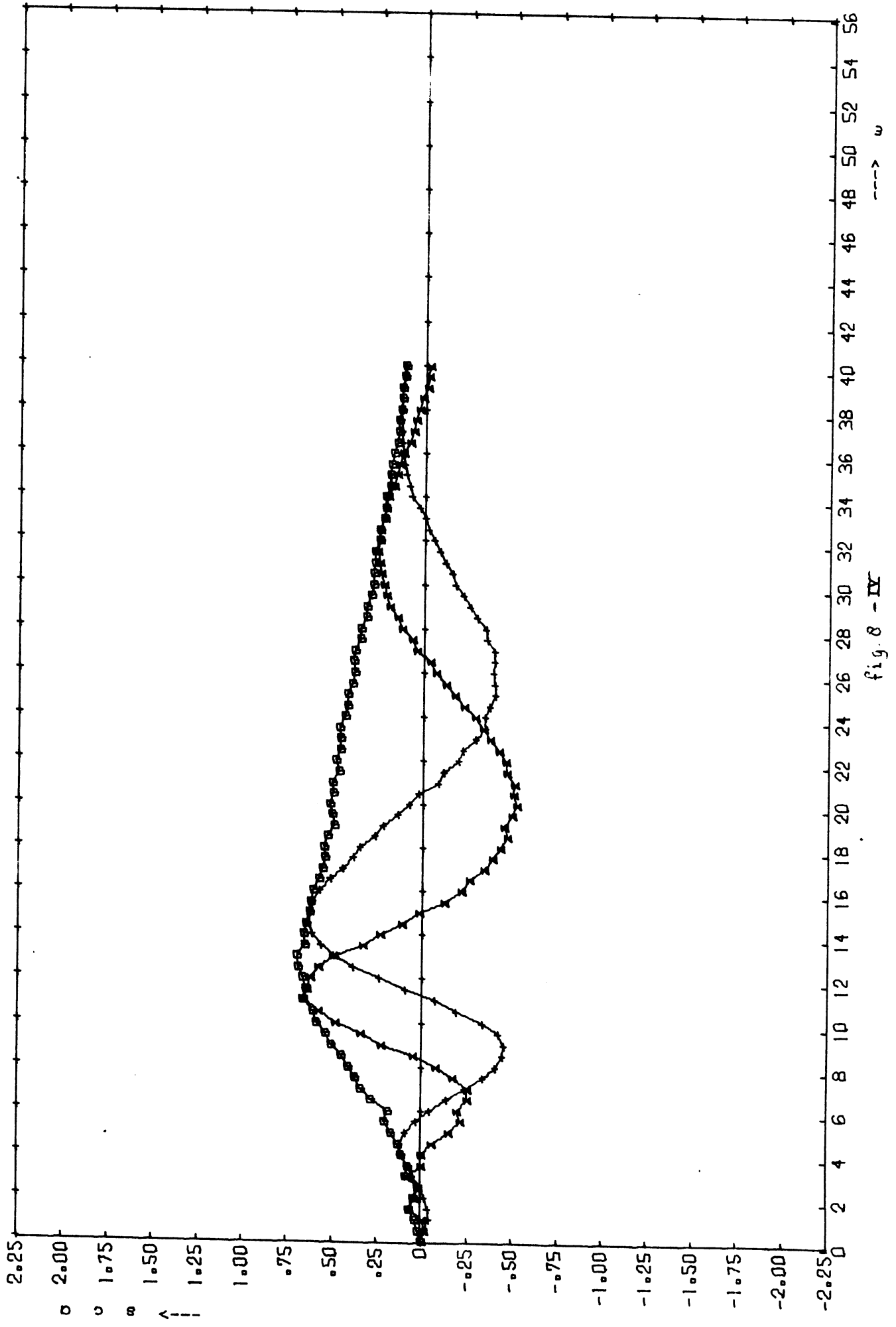
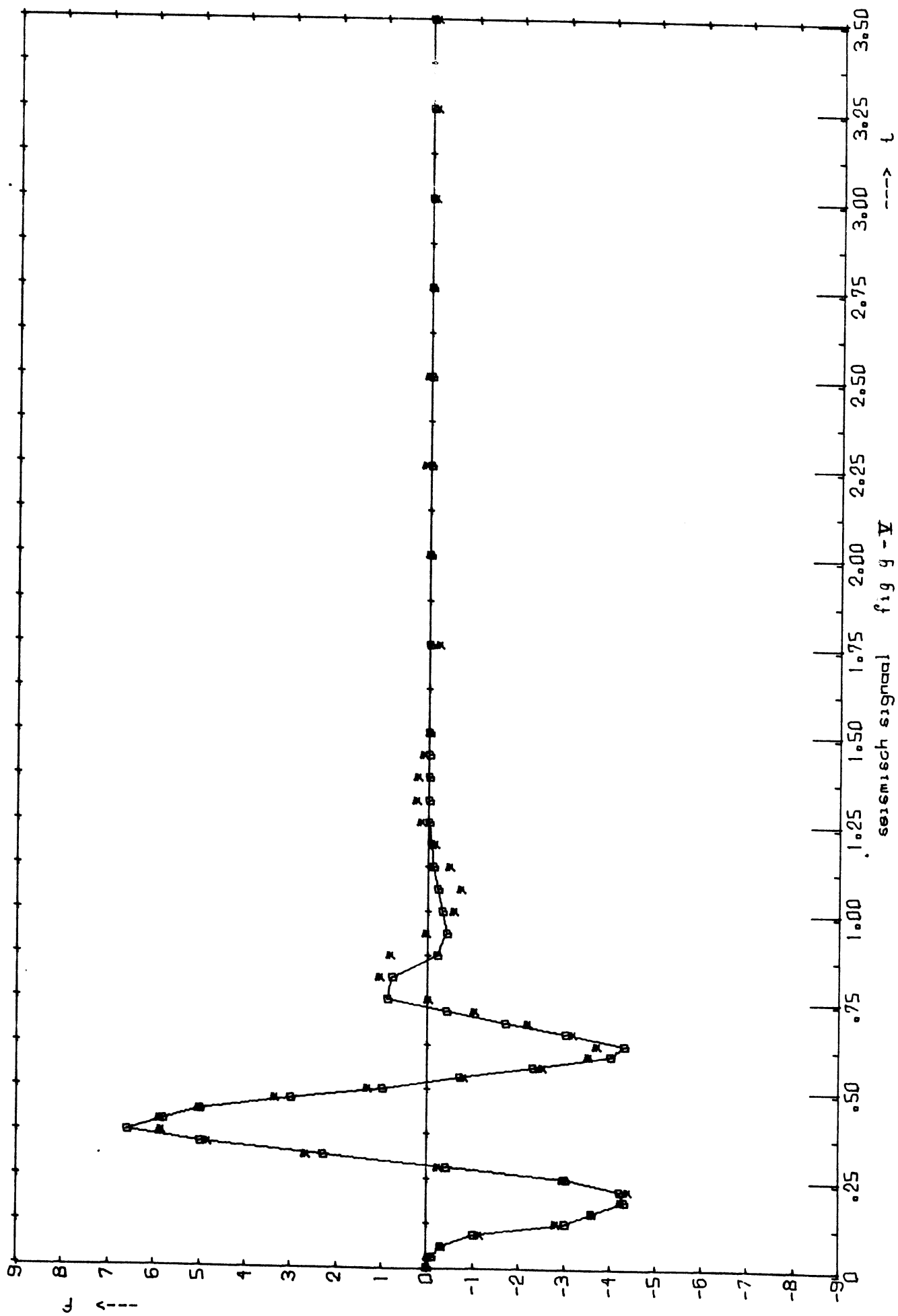


fig. 8 - IV



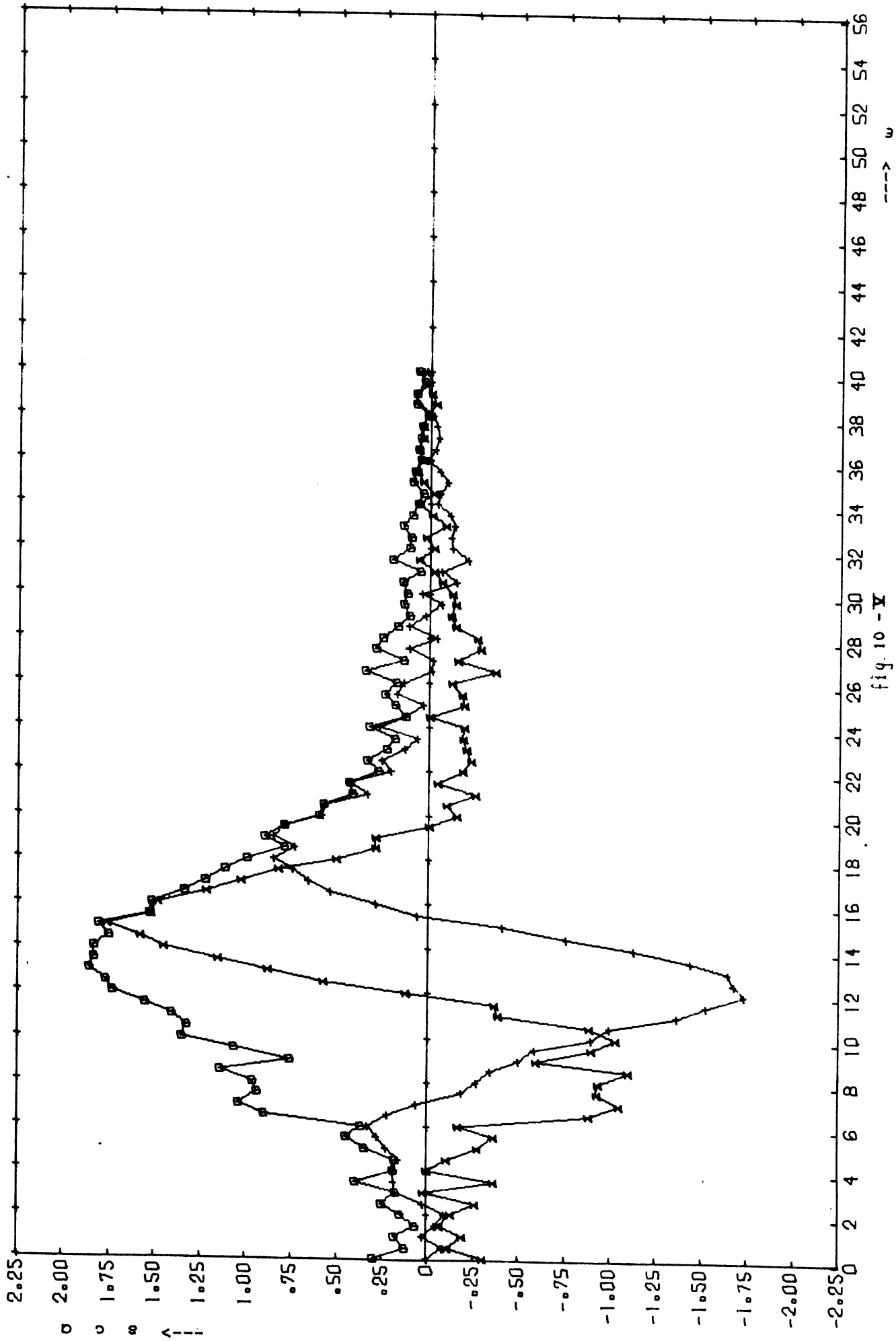


fig. 10 - V

11. ALGOL-programma FASS

```

1 BEGIN
2 COMMENT KMM1-130673 - CROT - FASS. BONNR. C181.
3
4 FOURIERANALYSE VAN EEN SEISMISCH SIGNAAL;
5 INIEGER I,J,K,M,N,P,T1,T2,H;
6 SEAL SOM,XX,V,A,B,X,H1,H2,SW,CW,W,AW,PW,GR;
7 REAL ARRAY MT,MF(1:100), E(1:2);
8 I:=1;
9 MT(I):=READ; LE MT(I)+999 ITHEN BEGIN MF(I):= READ; I:=I+1; GOIO G1 END;
10 P:=I-1; T1:=TIME;
11 M:=READ;
12
13 BEGIN
14 REAL ARRAY AA,DD,CC(1:P-1), X, T, F, FB, FD, CM(1:M), C, CD(0:M-1), ES, EC(1:M+3), S(0:M,1:M), AP(0:M-1,1:M+3);
15
16 REAL PROCEDURE SM(M,X): VALUE M; INIEGER M; REAL X;
17 BEGIN
18 INIEGER N; REAL S1, S2, S3;
19 S1:=1; S2:=1-8*X;
20 DOB N:=2 STEP 1 UNTIL M DO
21 BEGIN
22 S3:=((-2*(N-1)*(N+3)*(N+5)*S1
23 +(((4*N+30)*N+38)*N-30)-(2*N+5)*(2*N+6)*X)*S2
24 /N*(N+6)*(2*N+4));
25 S1:=S2; S2:=S3;
26 END;
27 SM:=S3;
28 END SM;
29
30 REAL PROCEDURE ZERO (X,A,B,FX,E):
31 VALUE A,B; REAL X,A,B,FX; ARRAY E;
32 BEGIN
33 REAL C,FA,FB,FC,RE,AE;
34 RE:= E(1); AE:= E(2);
35 X:= A; FA:= FX; X:= B; FB:= FX; GOIO ENTRY;
36 LE ABS (A - B) < FA ITHEN A:= B + SIGN (C - B) * FA;
37 LE SIGN (A - X) = SIGN (B - A) ITHEN X:= A;
38 A:= B; FA:= FB; B:= X; FB:= FX;
39 LE SIGN (FC) = SIGN (FB) ITHEN
40 BEGIN C:= A; FC:= FA END;
41 LE ABS (FB) > ABS (FC) ITHEN
42 BEGIN A:= B; FA:= FB; B:= C; FB:= FC; C:= A; FC:= FA END;
43 A:= (A * FB - B * FA) / (FB - FA);
44 X:= (C + B) / 2; FA:= ABS (B * RE) + AE;
45 LE ABS (X - B) > FA ITHEN GOIO BEGIN;
46 ZERO:= X;
47 END ZERO;
48
49 PROCEDURE ABC(T1,T2,T3,F1,F2,F3,A,B,C): VALUE T1,T2,T3,F1,F2,F3; REAL T1,T2,T3,F1,F2,F3,A,B,C;
50 BEGIN
51 REAL T32,T31,T21,T33,T22,T11,D;
52 T32:=T3-T2; T31:=T3-T1; T21:=T2-T1; T33:=T3 * T3; T22:=T2 * T2; T11:=T1 * T1;
53 D:=T11 * T32-T22 * T31+T33 * T21;
54 A:=(T2*T3*T32*F1-T1*T3*T31*F2+T1*T2*T21*F3)/D;
55 B:=((T22-T33)*F1+(T33-T11)*F2+(T11-T22)*F3)/D;
56 C:=(T32*F1-T33*T2+T21*F3)/D;
57 END ABC;
58
59 PROCEDURE GYM(X,C): VALUE M; INIEGER M; ARRAY X,C;
60 BEGIN
61 COMMENT KMM1-F016-301271;
62 INIEGER J,K,N1,N2;
63 SEAL A;
64 ABXAX HULP,S G(1:M-1),S(0:M-1,1:M-1);
65 REAL PROCEDURE OPLN(): VALUE M; INIEGER M;
66 DO I:=720/(M+1)*(M+2)*(M+3)*N1*(N1+6)*I*(M+7);

```

```

60 FOR J:=1,J+1 WHILE J<M DO
61 BEGIN A:=1; SIG[1]:=0;
62 FOR K:=1,K+1 WHILE K<M DO LE K=J ITHEN ELSE
63 BEGIN LE K>J ITHEN HULP(K-1):=X(K) ELSE HULP(K):=X(K);
64 A:=(X[J]-X(K))*A; SIG[1]:=SIG[1]+X(K)
65 END;
66 N2:=N1+N; M:=M-1; FOR K:=1,K+1 WHILE K<N DO S[0,K]:=1; C[J]:=-OPL(N-1)*SIG[1]+OPL(N); N:=N-1;
67 FOR I:=1,I+1 WHILE I<N1 DO
68 BEGIN S[I,1]:=-HULP[1]*S[I-1,1]+SIG[1]; SIG[I+1]:=S[I,1]*HULP[1];
69 N:=N-1;
70 FOR K:=2,K+1 WHILE K<N2 DO
71 BEGIN S[I,K]:=-HULP[K]*S[I-1,K]+S[I,K-1];
72 SIG[I+1]:=HULP[K]*S[I,K]+SIG[I+1]
73 END;
74 C[J]:=C[J]+(LE I:2*2=1 ITHEN - OPL(N)*SIG[I+1] ELSE OPL(N)*SIG[I+1]); N2:=N2-1
75 END;
76 C[J]:=C[J]/A
77 END
78 END C9;
79 END
80 REAL PROCEDURE GAA(M,F,B); VALUE M; INTEGER M; ARRAY F,B;
81 BEGIN INTEGER J; REAL AFW;
82 AFW:=0;
83 FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO AFW:=AFW+ABS(F[J]-FB[J]);
84 GAA:=AFW/M
85 END
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999
1000
1001
1002
1003
1004
1005
1006
1007
1008
1009
1010
1011
1012
1013
1014
1015
1016
1017
1018
1019
1020
1021
1022
1023
1024
1025
1026
1027
1028
1029
1030
1031
1032
1033
1034
1035
1036
1037
1038
1039
1040
1041
1042
1043
1044
1045
1046
1047
1048
1049
1050
1051
1052
1053
1054
1055
1056
1057
1058
1059
1060
1061
1062
1063
1064
1065
1066
1067
1068
1069
1070
1071
1072
1073
1074
1075
1076
1077
1078
1079
1080
1081
1082
1083
1084
1085
1086
1087
1088
1089
1090
1091
1092
1093
1094
1095
1096
1097
1098
1099
1100
1101
1102
1103
1104
1105
1106
1107
1108
1109
1110
1111
1112
1113
1114
1115
1116
1117
1118
1119
1120
1121
1122
1123
1124
1125
1126
1127
1128
1129
1130
1131
1132
1133
1134
1135
1136
1137
1138
1139
1140
1141
1142
1143
1144
1145
1146
1147
1148
1149
1150
1151
1152
1153
1154
1155
1156
1157
1158
1159
1160
1161
1162
1163
1164
1165
1166
1167
1168
1169
1170
1171
1172
1173
1174
1175
1176
1177
1178
1179
1180
1181
1182
1183
1184
1185
1186
1187
1188
1189
1190
1191
1192
1193
1194
1195
1196
1197
1198
1199
1200
1201
1202
1203
1204
1205
1206
1207
1208
1209
1210
1211
1212
1213
1214
1215
1216
1217
1218
1219
1220
1221
1222
1223
1224
1225
1226
1227
1228
1229
1230
1231
1232
1233
1234
1235
1236
1237
1238
1239
1240
1241
1242
1243
1244
1245
1246
1247
1248
1249
1250
1251
1252
1253
1254
1255
1256
1257
1258
1259
1260
1261
1262
1263
1264
1265
1266
1267
1268
1269
1270
1271
1272
1273
1274
1275
1276
1277
1278
1279
1280
1281
1282
1283
1284
1285
1286
1287
1288
1289
1290
1291
1292
1293
1294
1295
1296
1297
1298
1299
1300
1301
1302
1303
1304
1305
1306
1307
1308
1309
1310
1311
1312
1313
1314
1315
1316
1317
1318
1319
1320
1321
1322
1323
1324
1325
1326
1327
1328
1329
1330
1331
1332
1333
1334
1335
1336
1337
1338
1339
1340
1341
1342
1343
1344
1345
1346
1347
1348
1349
1350
1351
1352
1353
1354
1355
1356
1357
1358
1359
1360
1361
1362
1363
1364
1365
1366
1367
1368
1369
1370
1371
1372
1373
1374
1375
1376
1377
1378
1379
1380
1381
1382
1383
1384
1385
1386
1387
1388
1389
1390
1391
1392
1393
1394
1395
1396
1397
1398
1399
1400
1401
1402
1403
1404
1405
1406
1407
1408
1409
1410
1411
1412
1413
1414
1415
1416
1417
1418
1419
1420
1421
1422
1423
1424
1425
1426
1427
1428
1429
1430
1431
1432
1433
1434
1435
1436
1437
1438
1439
1440
1441
1442
1443
1444
1445
1446
1447
1448
1449
1450
1451
1452
1453
1454
1455
1456
1457
1458
1459
1460
1461
1462
1463
1464
1465
1466
1467
1468
1469
1470
1471
1472
1473
1474
1475
1476
1477
1478
1479
1480
1481
1482
1483
1484
1485
1486
1487
1488
1489
1490
1491
1492
1493
1494
1495
1496
1497
1498
1499
1500
1501
1502
1503
1504
1505
1506
1507
1508
1509
1510
1511
1512
1513
1514
1515
1516
1517
1518
1519
1520
1521
1522
1523
1524
1525
1526
1527
1528
1529
1530
1531
1532
1533
1534
1535
1536
1537
1538
1539
1540
1541
1542
1543
1544
1545
1546
1547
1548
1549
1550
1551
1552
1553
1554
1555
1556
1557
1558
1559
1560
1561
1562
1563
1564
1565
1566
1567
1568
1569
1570
1571
1572
1573
1574
1575
1576
1577
1578
1579
1580
1581
1582
1583
1584
1585
1586
1587
1588
1589
1590
1591
1592
1593
1594
1595
1596
1597
1598
1599
1600
1601
1602
1603
1604
1605
1606
1607
1608
1609
1610
1611
1612
1613
1614
1615
1616
1617
1618
1619
1620
1621
1622
1623
1624
1625
1626
1627
1628
1629
1630
1631
1632
1633
1634
1635
1636
1637
1638
1639
1640
1641
1642
1643
1644
1645
1646
1647
1648
1649
1650
1651
1652
1653
1654
1655
1656
1657
1658
1659
1660
1661
1662
1663
1664
1665
1666
1667
1668
1669
1670
1671
1672
1673
1674
1675
1676
1677
1678
1679
1680
1681
1682
1683
1684
1685
1686
1687
1688
1689
1690
1691
1692
1693
1694
1695
1696
1697
1698
1699
1700
1701
1702
1703
1704
1705
1706
1707
1708
1709
1710
1711
1712
1713
1714
1715
1716
1717
1718
1719
1720
1721
1722
1723
1724
1725
1726
1727
1728
1729
1730
1731
1732
1733
1734
1735
1736
1737
1738
1739
1740
1741
1742
1743
1744
1745
1746
1747
1748
1749
1750
1751
1752
1753
1754
1755
1756
1757
1758
1759
1760
1761
1762
1763
1764
1765
1766
1767
1768
1769
1770
1771
1772
1773
1774
1775
1776
1777
1778
1779
1780
1781
1782
1783
1784
1785
1786
1787
1788
1789
1790
1791
1792
1793
1794
1795
1796
1797
1798
1799
1800
1801
1802
1803
1804
1805
1806
1807
1808
1809
1810
1811
1812
1813
1814
1815
1816
1817
1818
1819
1820
1821
1822
1823
1824
1825
1826
1827
1828
1829
1830
1831
1832
1833
1834
1835
1836
1837
1838
1839
1840
1841
1842
1843
1844
1845
1846
1847
1848
1849
1850
1851
1852
1853
1854
1855
1856
1857
1858
1859
1860
1861
1862
1863
1864
1865
1866
1867
1868
1869
1870
1871
1872
1873
1874
1875
1876
1877
1878
1879
1880
1881
1882
1883
1884
1885
1886
1887
1888
1889
1890
1891
1892
1893
1894
1895
1896
1897
1898
1899
1900
1901
1902
1903
1904
1905
1906
1907
1908
1909
1910
1911
1912
1913
1914
1915
1916
1917
1918
1919
1920
1921
1922
1923
1924
1925
1926
1927
1928
1929
1930
1931
1932
1933
1934
1935
1936
1937
1938
1939
1940
1941
1942
1943
1944
1945
1946
1947
1948
1949
1950
1951
1952
1953
1954
1955
1956
1957
1958
1959
1960
1961
1962
1963
1964
1965
1966
1967
1968
1969
1970
1971
1972
1973
1974
1975
1976
1977
1978
1979
1980
1981
1982
1983
1984
1985
1986
1987
1988
1989
1990
1991
1992
1993
1994
1995
1996
1997
1998
1999
2000

```

```

120      CD(N):=(14+4*N)*0.5*SOM; C(N):=C(N)+CD(N)
121      END;
122      FOR J:= 1 STEP 1 UNTIL M DO
123        FB(J):=0; V:=SORT(X(J)) * (1-X(J))^3;
124        FOR N:=0 STEP 1 UNTIL M-1 DO FB(J):=FB(J)+C(N)*S(N,J) * V;
125        FB(J):=F(J)-FB(J)
126      END;
127      NUCR:
128      FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
129        BEGIN NUCR: FIXT(2,5,F(J)); FIXT(2,5,FB(J)); FIXT(1,5,FB(J)); PRINT(C(J-1)) END;
130        NUCR: FIXT(2,5,GAA(M,F,FB));
131        LE H#3 THEN GO TO AAA; NUCR:
132      FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
133        BEGIN NUCR: PRINT(S(M,J)) END;
134        NUCR: ABSFIXT(3,0,T1); ABSFIXT(3,0,T2); ABSFIXT(3,0,TIME);
135      END;
136      BEGIN
137        REAL X;
138        REAL ARRAY SX(0:M-1),FX(1:P);
139        NUCR:
140        FOR I:= 1 STEP 1 UNTIL P DO
141          BEGIN X:=EXP(-2 * MT(I)); V:=SORT(X) * (1-X)^3;
142          SX(0):=1; SX(1):=1-8 * X;
143          FOR N:=2 STEP 1 UNTIL M-1 DO
144            SX(N):=(-2 * (N-1) * (N+3) * (N+5) * SX(N-2)
145              +(((4*N+30)*N+38)*N-30) - (2*N+4) * (2*N+5) * (2*N+6) * X) * SX(N-1))
146              / (N*(N+6)*(2*N+4));
147          FX(1):=0;
148          FOR N:=0 STEP 1 UNTIL M-1 DO FX(1):=FX(1)+C(N)*SX(N)*V;
149          NUCR: FIXT(1,3,MT(1)); FIXT(2,3,MT(1)); FIXT(2,3,FX(1));
150          NUCR: ABSFIXT(3,0,TIME); NUCR
151        END;
152
153
154      AP(0,1):=+1; AP(0,2):=-3; AP(0,3):=+3; AP(0,4):=-1;
155      AP(1,1):=+1; AP(1,2):=-11; AP(1,3):=+27; AP(1,4):=-25; AP(1,5):=+8;
156      FOR N:=2 STEP 1 UNTIL M-1 DO
157        BEGIN H:=N * (N+6) * (2*N+4);
158        FOR K:=1 STEP 1 UNTIL N+2 DO
159          AP(N,K):=-2*(N-1) * (N+3) * (N+5)/H * AP(N-2,K);
160          AP(N,N+3):=0;
161          FOR K:=1 STEP 1 UNTIL N+3 DO
162            AP(N,K):=AP(N,K)+((4*N+30)*N+38)*N-30)/H*AP(N-1,K);
163            AP(N,N+4):=0;
164            FOR K:=2 STEP 1 UNTIL N+4 DO
165              AP(N,K):=AP(N,K)-((2*N+4)*(2*N+5)*(2*N+6)/H*AP(N-1,K-1)
166                GR:=45/ARCTAN(1);
167            FOR W:=0 STEP 0.5 UNTIL 40.1 DO
168
169
170      BEGIN FOR K:=1 STEP 1 UNTIL M+3 DO
171        BEGIN H:=2*K-1; HI:=H+H*W*W;
172        ES(K):=W/H1; EC(K):=H/H1
173      END;
174      SW:=0; CW:=0;
175      FOR N:=0 STEP 1 UNTIL M-1 DO
176        BEGIN H1:=H2:=0;
177        FOR K:=1 STEP 1 UNTIL N+4 DO
178          BEGIN H1:=H1+AP(N,K) * ES(K);
179            H2:=H2+AP(N,K) * EC(K)

```



```

180      END:
181      SW:=SW+C(N) * H1; CW:=CW+C(N)*H2
182
183      NUCR: ABSFIXT(2,1,W); FIXT(3,3,SW); FIXT(3,3,CW);
184      AW:=SQRT(SW*SW+CW*CW); FIXT(3,3,AW);
185      PW:=ARCTAN(CW/SW)*GR;
186      PW:= LE SIGN(1/SW)= +1 ITHEN
187      (JE SIGN(1/CW)=+1 ITHEN PW ELSE PW+360)
188      ELSE PW+180;
189      FIXT(5,1,PW)
190
191      END:
192      NUCR: ABSFIXT(3,0,TIME)
193      END
194
ER 999      +0      TIME
193      105

```