

21 AUG. 1970

KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT

De Bilt

WETENSCHAPPELIJK RAPPORT

W.R. 70-4

J.J.M. van Gorp

Stationaire en niet-stationaire temperatuur
verdeling in een cilindervormige grondbak

De Bilt, 1970

Publikatienummer: K.N.M.I. W.R. 70-4 (I)

All rights reserved

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm of op welke andere wijze ook, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van het K.N.M.I., De Bilt.

**U.D.C.: 551.525.4 :
551.508.26**

SUMMARY

In order to study the properties of different types of ground thermometers, a simulated laboratory experiment was proposed in which use is made of a vertically placed double-walled cylinder isolated by glass-fibre and filled with dry sand. By heating respectively cooling of the upper and lower parts of the contents of the cylinder a temperature difference between these parts and the environment is introduced.

The relatively small difference in thermal conductivity between sand and glass-fibre then produces a tendency of building up horizontal temperature gradients within the cylinder. This effect can partly be reduced by increasing the size of the cylinder. However, some heat leakage cannot be avoided.

In order to determine the influence of this heat leakage on the horizontal temperature distribution the heat differential equation is analytically solved for a cylindrical body with the above mentioned boundary conditions. A numerical example is worked out.

The comparison of different thermometers in a medium is only allowed when the stationary state is reached. The establishment of this stable temperature equilibrium takes considerable time due to the high thermal capacity and the low thermal conductivity of the soil. For this process also a numerical solution is given in this report.

The calculations in this report are given in a general form, so as to make them equally applicable for other materials. However, they are valid for a cylindrical body only.

Inhoudsopgave

Samenvatting	1
Gebruikte symbolen	3
1. Inleiding	4
2. Theoretische achtergrond	7
2.1. Horizontale stationaire temperatuurverdeling in een cylinder door warmteverliezen aan de wand	7
2.2. Insteltijd van de stationaire toestand in de cylinder	12
3. Numerieke berekeningen	15
3.1. Horizontale stationaire temperatuurverdeling in een cylinder door warmteverliezen aan de wand	15
3.2. Insteltijd van de stationaire toestand in de cylinder	20
4. Toepassingen	22
4.1. Horizontale stationaire temperatuurverdeling in een grondbak door warmteverliezen aan de wand	22
4.2. Insteltijd van de stationaire toestand in een grondbak	24
5. Conclusies	26
Figuren	28
Appendix I. Gemodificeerde Bessel functie	33
Appendix II. Toepassing van de Fourier analyse op form. (1.1.9c)	35
Appendix III. Numerieke waarden voor de coëfficiënt $A(\xi, \zeta)$ uit formule (3.1.1)	37
Appendix IV. Numerieke waarden voor Nu' uit formule (3.1.8)	46
Appendix V. Numerieke waarden voor de coëfficiënt $A(\zeta, \tau)$ uit formule (3.2.1)	48
Literatuur opgave	49

Gebruikte symbolen

T	= temperatuur	°C
θ	= "overtemperatuur"; verschil tussen T en omgevingstemperatuur	°C
ν	= "correctie temperatuur"; verschil tussen ideale en werkelijke temperatuur	°C
z	= diepte vanaf bovenoppervlak in cylinder	m
L	= totale diepte van cylinder	m
ζ	= z/L = axiale dimensieloze parameter	--
r	= radiale afstand tot as van de cylinder	m
R	= halve inwendige diameter van de cylinder	m
ξ	= r/R = radiale dimensieloze parameter	—
μ	= R/L = verhouding halve diameter t.o.v. lengte van de cylinder	—
d	= isolatie wanddikte om cylinder	m
λ_1	= warmtegeleidingscoëfficiënt van het medium in de cylinder	W m ⁻¹ °C ⁻¹
λ_2	= warmtegeleidingscoëfficiënt van de isolatie	W m ⁻¹ °C ⁻¹
c	= warmtecapaciteit per gewichtshoeveelheid	Wsec kg ⁻¹ °C ⁻¹
C	= warmtecapaciteit per volume eenheid	Wsec m ⁻³ °C ⁻¹
ρ	= dichtheid materiaal	kg m ⁻³
a	= $\frac{\lambda}{\rho c} = \frac{\lambda}{C}$ temperatuurvereffeningscoëfficiënt	m ² sec ⁻¹
t	= tijd	sec
τ	= $\frac{at}{L^2}$ = kengetal van "Fourier"	—
ϕ_w''	= warmtestroom door oppervlakte eenheid	W m ⁻²
α'	= partiële warmte-overdrachtscoëfficiënt van medium naar isolatie	W m ⁻² °C ⁻¹
α''	= partiële warmte-overdrachtscoëfficiënt van isolatie naar omgeving	W m ⁻² °C ⁻¹
U	= totale warmte-overdrachtscoëfficiënt door de isolatie	W m ⁻² °C ⁻¹
Nu'	= $\frac{UR}{\lambda_1}$ = gemodificeerd Nusselt-kengetal	—

Aanduidingen voor mathematische functies:

- $J_0(x)$ = Besselfunctie van de nulde orde
 $I_0(x)$ = gemodificeerde Besselfunctie van de nulde orde
 $J_1(x)$ = Besselfunctie van de eerste orde
 $I_1(x)$ = gemodificeerde Besselfunctie van de eerste orde

1. Inleiding

Tot op heden werden grondtemperaturen overwegend gemeten m.b.v. glazen kwikthermometers. Daarbij bevindt zich het kwikreservoir op de diepte waarop men de temperatuur wenst te kennen. De temperatuur kan afgelezen worden op de schaalverdeling die juist boven de grond uitsteekt. Om op de vereiste diepte te kunnen meten is de kwikdraad tussen reservoir en schaalverdeling verlengd.

De zonnestraling wordt gedeeltelijk gebruikt om het grondoppervlak op te warmen. Van het oppervlak uit dringt deze warmte de grond in. Doordat nu grond een relatief kleine warmtegeleiding (bv. t.o.v. metalen) bezit, treedt een significante verticale temperatuurverdeling op. Deze verdeling is tijdsafhankelijk: tautochroon. Wij beperken ons hier tot het eenvoudige geval dat optreedt wanneer de maximale oppervlaktetemperatuur wordt bereikt. Dit is juist op het tijdstip waarop de warmtestroom naar beneden omkeert van richting. Het bijbehorende tautochroon is dan te beschrijven door een exponentiële functie (fig. 1).

De hoeveelheid warmte die door het grondoppervlak uit de zonnestraling wordt geabsorbeerd is mede afhankelijk van de bodemgesteldheid (zand, klei etc, al dan niet begroeid). Verder is het warmtegeleidingsvermogen afhankelijk van vochtgehalte van de grond. Vergelijkt men op een proefterrein gelijktijdig gemeten temperaturen op gelijke diepten, dan blijken deze verschillend. Uit het voorgaande volgt dat dit niet verwonderlijk is. In de klimatologie worden deze metingen statistisch bekeken. Omdat het klimatologisch gaat om temperatuurverschillen tot op $0,1^{\circ}\text{C}$, kunnen hiertegen bedenkingen worden gemaakt. M.a.w. zijn temperatuurmetingen m.b.v. kwikthermometers tot op $0,1^{\circ}\text{C}$ reëel te noemen?

Ter zijde zij hier opgemerkt dat een correctie van bv. $+ 0,2^{\circ}\text{C}$ (= systematische fout) uit een laboratoriumijking - waarvoor slechts een zekerheid van $\pm 0,1^{\circ}\text{C}$ opgegeven kan worden - weinig zin heeft. Dit betekent dat wil men tot $0,1^{\circ}\text{C}$ ijken, een thermostaat vereist is die: stabiel is tot op $\pm 0,01^{\circ}\text{C}$ en proportioneel geregeld wordt.

Willen wij de vraag naar de realiteit van de temperatuurmetingen exact beantwoorden dan moeten wij de eigenschappen van thermometer en medium in rekening brengen.

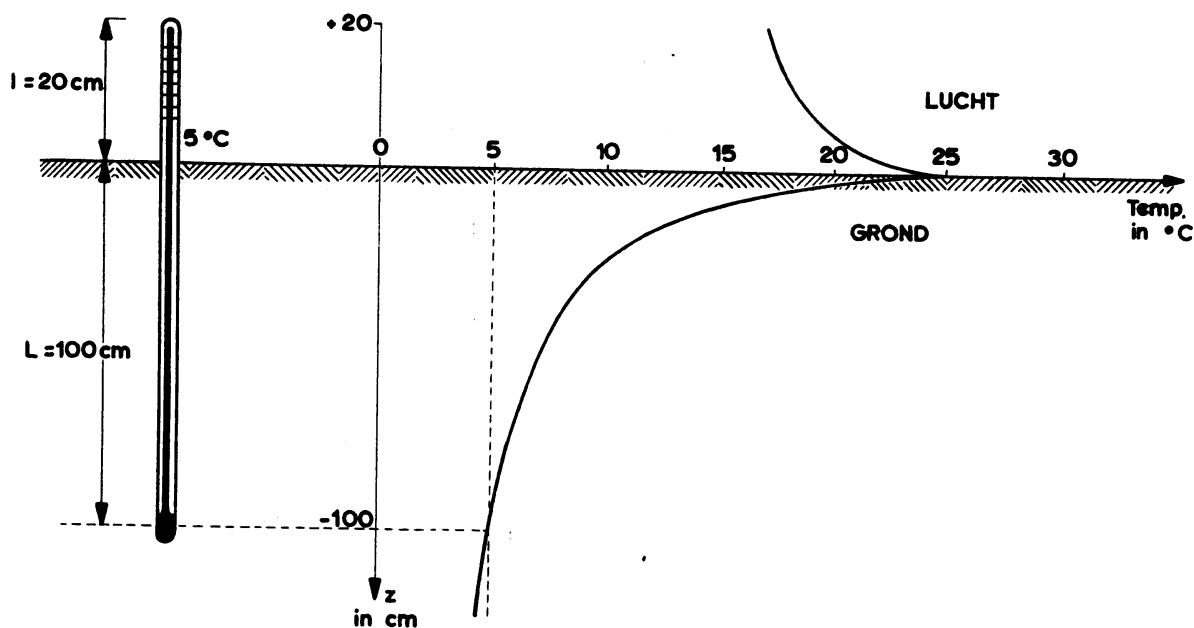


fig. 1. De invloed van temperatuur profielen in grond en lucht op de gemeten grondtemperatuur op 1 m diepte.

In het vereenvoudigde voorbeeld van fig. 1, valt direkt op dat de thermometer over de gehele lengte niet dezelfde temperatuur "ziet".

Bij de meting van de luchttemperatuur kunnen wij de temperatuur over de gehele thermometer wel als gelijk beschouwen (afgezien van turbulentie, in ieder geval wel gemiddeld over de responsietijd van de thermometer).

De temperatuurmeting m.b.v. een kwikthermometer berust op het verschil in uitzetting tussen kwik en glas. Indien de schaalverdeling en de kwikdraad boven de grond warmer zijn dan het meetpunt, leest men een hogere temperatuur af dan die van het meetpunt. Daarom moet de zgn. "steel correctie" worden toegepast. Meestal wordt deze alleen berekend op het boven de grond uitstekende gedeelte (l in fig. 1) van de thermometer.

Wij moeten echter ook het exponentiële temperatuurverloop (L in fig. 1) in rekening brengen.

Is het temperatuurverschil tussen aflees- en meetpunt 40°C dan komen wij nog maar tot een "steel correctie" van $0,05^\circ\text{C}$. Deze waarde is tegen de eerder genoemde ijknauwkeurigheid te verwaarlozen.

Wat echter wel een belangrijke rol kan spelen is de warmtelek door de kwikdraad. Hierdoor kan, vooral bij slecht warmtecontact van het kwikreservoir met de grond een meetfout optreden ('s zomers is deze positief).

Bij variërende zonnestraling hebben wij te doen met een instationnaire toestand d.w.z. de warmtestroom wordt door een volume elementje voor een gedeelte opgenomen (waardoor temperatuurstijging) en voor de rest doorgelaten. De verhouding waarin beide processen optreden wordt bepaald door de zgn. temperatuurvereffeningscoëfficiënt. Dit is het quotiënt van warmtegeleiding en warmtecapaciteit (per volume-eenheid). Deze bezit voor grond een kleine waarde (t.o.v. metalen). Hierdoor worden op grotere diepte (> 20 à 30 cm) snelle temperatuur fluctuaties aan het oppervlak zeer sterk gedempt. Bij geringere diepte is de amplitude van de temperatuurgolf kleiner en in fase achter op de oppervlaktetemperatuur.

In de praktijk worden kwikthermometers met elkaar vergeleken door ze zo kort mogelijk na elkaar af te lezen. In het vrije veld met zijn steeds variërende bewolking en windsterkte is het vergelijken (c.q. meten) van grondtemperaturen op geringe diepte m.b.v. kwikthermometers een dubieuze zaak.

Reden waarom het gewenst is over een laboratoriumopstelling te beschikken. Hiervoor zou in aanmerking kunnen komen een bak met grond, waarin vertikaal een temperatuurgradiënt kan worden opgebouwd bij horizontale isothermie. Dit kan door bijv. koeling aan de onderzijde en verwarming aan de bovenzijde.

Deze laatste kunnen wij eventueel sinusvormig laten verlopen om de dagelijkse gang te imiteren. Om zinvol thermometertypen in deze bak te kunnen vergelijken is het noodzakelijk dat de horizontale temperatuurgradiënt beneden een bepaalde waarde ligt (bv. $0,01^{\circ}\text{C}$). Zonder voorzorgen krijgen wij nl. met randeffecten te doen. Dit verslag beschrijft nu hoe de horizontale temperatuurgradiënt afhangt (zowel kwalitatief als kwantitatief) van:

- a) de diameter van de bak
- b) de hoogte van de bak (grondhoogte)
- c) de grondsoort in de bak
- d) de isolatie dikte
- e) de soort isolatie.

Op de tweede plaats is de insteltijd, waarna de stationnaire toestand is ingetreden, berekend voor een "goed" geïsoleerde bak. Het zal blijken dat deze tijd voor een grondhoogte van 30 cm een redelijke waarde bezit (\approx 20 uur). Voor de grondhoogte van 1 meter is de benodigde tijd echter ongeveer 9 etmalen. Zoals reeds werd opgemerkt kunnen wij op deze diepte gemakkelijker in het vrije veld meten.

In een volgend verslag zullen wij nader ingaan op:

- de warmtelek door de kwikdraad;
 - de thermische contactweerstand tussen thermometer en grond,
- en zo komen tot de thermische en meettechnische eigenschappen van kwik thermometers.

Parallel hiermee wordt een onderzoek verricht met elektrische thermometers, om hiervan de optimale ontwerpeisen te vinden.

2. Theoretische achtergrond

2.1. Horizontale stationnaire temperatuurverdeling in een cylinder door warmteverliezen aan de wand

De in de inleiding besproken grondbak nemen wij cilindervormig (straal R , hoogte L zie fig. 2.1.1)

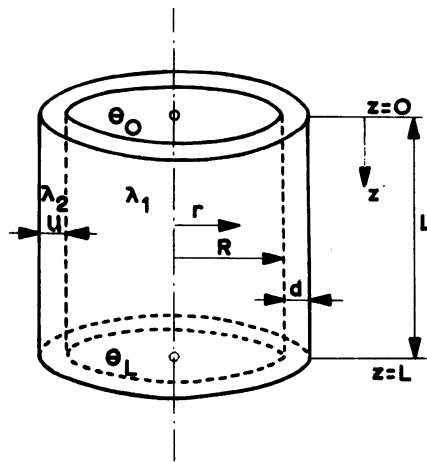


fig. 2.1.1. Cilindervormige grondbak met isolatiewand (dikte d).

Boven en ondervlak worden respectievelijk op temperatuur T_0 en T_L gehouden, terwijl de omgevingstemperatuur $(T_e)^*$ constant is (over L). Wij introduceren een "overtemperatuur" $\theta \equiv T - T_e$. Dan ligt de temperatuur van boven- en ondervlak resp. θ_0 en θ_L °C boven de omgevingstemperatuur

* Index e = environment = omgeving

Is $\theta_o > \theta_L$ dan zal warmte in de positieve z-richting stromen (zie fig. 2.1.1.)
Indien men de isolatie zodanig zou kunnen maken dat de radiale warmtestroom nul zou zijn, zou de temperatuur onafhankelijk van r zijn. Deze verloopt in dat geval lineair tussen θ_o en θ_L (in het stationaire geval van deze §):

$$\theta(r,z) = \theta(z) = \theta_o + (\theta_L - \theta_o) \frac{z}{L} \quad (2.1.1.)$$

In werkelijkheid treedt er echter wel een warmtelek op.
Deze kan voorgesteld worden door:

$$(\theta_w)_1 = U \cdot \theta_1(R,z) \quad (2.1.2)$$

hierin is:

θ_1 = totaal temperatuurverschil over de isolatie

U = totale warmteoverdrachtscoëfficiënt van de isolatie

θ_w = warmtestroom per oppervlakte eenheid.

De radiale warmte-lekstroom ondervindt drie (thermische) weerstanden:

- a) contactweerstand van grond naar isolatie;
- b) thermische weerstand van de isolatie;
- c) contactweerstand van isolatie naar lucht.

Voor (a) en (c) geldt een overeenkomstige formule als (2.1.2.):

$$(\theta_w)_2 = \alpha \cdot \theta_2 \quad (2.1.3.)$$

Nu is:

θ_2 = temperatuurverschil grond - isolatie

α = partiële warmte-overdrachtscoëfficiënt.

Voor (b) geldt de warmtegeleidings formule:

$$(\theta_w)_3 = - \lambda_2 \left(\frac{\delta\theta}{\delta r} \right)_3 \quad (2.1.4.)$$

Hierin is:

λ_2 = warmtegeleidingscoëfficiënt van de isolatie

$\frac{\delta\theta}{\delta r}$ = temperatuurgradiënt in de isolatie.

Voor a, b en c samen geldt formule (2); vandaar ook de naam totale warmte-overdrachtscoëfficiënt (zie par. 3.1.).

Physisch is de radiale warmtestroom continu, dit betekent dat voor $r = R$ moet gelden:

$$\theta_w = - \lambda_1 \cdot \left(\frac{\delta\theta}{\delta r} \right)_{r=R} = U \cdot \theta(R,z) \quad (2.1.5)$$

Hierin is:

λ_1 = warmtegeleidingscoëfficiënt van het medium (grond).

Zie fig. 3.1.4. ter nadere verduidelijking.

$$v(\xi, \zeta) = X(\xi) \cdot Z(\zeta) \quad (2.1.12)$$

Wij krijgen hiermee twee nieuwe differentiaal vergelijkingen (met β als constante):

$$X'' + \frac{1}{\xi} X' - \beta^2 X = 0 \quad (2.1.13)$$

$$Z'' + \gamma^2 Z = 0 \quad (2.1.14)^{\times}$$

hierin is: $\gamma = \beta/\mu$ (2.1.10a)

Vgl (2.1.13) is een gemodificeerde Bessel d.v. met als oplossing een gemodificeerde Besselfunctie (zie Appendix I):

$$X = I_0(\beta\xi) \quad (2.1.15)$$

Voor (2.1.14) vinden wij als oplossing

$$Z = p \exp(i \zeta) + q \exp(-i \zeta) \quad (2.1.16)$$

waarin p en q integratie constanten.

Nu is $I_0(\beta\xi) \geq 1$ d.w.z. voor geen enkele waarde ξ gelijk aan nul. Wij kunnen dus de randvoorwaarden (2.9 a en b) toepassen op (2.1.16) en krijgen zo:

$$Z_n = A_n \sin(n\pi\zeta) \quad (2.1.17)$$

met als eis: $A_n = 2\pi i =$ nieuwe integratie constante $\neq 0$.

De totale oplossing van (2.1.9) wordt nu:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot I_0(n\pi\mu\xi) \cdot \sin(n\pi\zeta) \quad (2.1.18)$$

waarin wij de constanten A_n nog moeten bepalen m.b.v. de overblijvende randvoorwaarde (2.1.9c).

De waarde voor A_n vinden wij door vgl (2.1.18) te substitueren in de overblijvende randvoorwaarde (2.1.9c) en hierin de term $\theta_0 + (\theta_L - \theta_0)\zeta$ in een Fourier reeks te ontwikkelen (zie Appendix II).

Voor de temperatuur correctie $v(\xi, \zeta)$ t.g.v. de radiale warmtelek vinden wij tenslotte:

^x) - γ^2 geeft een oplossing van de d.v. (2.1.9) die niet aan randvoorwaarden (2.1.9a) en (2.1.9b) voldoet.

$$v = 2 \cdot \theta_L \cdot \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{I_0(n\pi\mu\xi)}{n\pi \left[\frac{n\pi\mu}{Nu'} I_1(n\pi\mu) + I_0(n\pi\mu) \right]} \cdot (-1)^n \cdot \sin(n\pi\zeta) -$$

(2.1.19)

$$- 2 \cdot \theta_0 \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{I_0(n\pi\mu\xi)}{n\pi \left[\frac{n\pi\mu}{Nu'} I_1(n\pi\mu) + I_0(n\pi\mu) \right]} \cdot \sin(n\pi\zeta).$$

waarin: $\mu = R/L$

$$Nu' = \frac{UR}{\lambda_1}$$

$\xi = r/R$ en $\zeta = z/L$ (zie fig. 2.1.1).

Deze oplossing, en de in de volgende paragrafen daaruit getrokken conclusies gelden slechts indien voldaan is aan de randvoorwaarden. Dit betekent dat wij bij de metingen ervoor moeten zorgen, dat de temperaturen van boven- en ondervlak van het medium in de cylinder door speciale voorzorgen in radiale richting constant zijn. Dit kan door afdekking met dikke goed warmte geleidende metalen platen (roodkoper). In het voorgaande is een mathematisch model opgezet met als opzet de invloed van de radiale warmtelek, op de horizontale temperatuur verdeling, tot een bepaalde tolerantie te nivelleren. De temperatuur gradiënten in boven- en ondervlak moeten dan ook binnen deze tolerantie vallen.

Opmerkingen:

Indien wij de randvoorwaarden van de diff.vgl.(2.1.7) anders kiezen krijgen wij de oplossing $v(\xi, \zeta)$ in een andere vorm. Door bv. $z = \pm \frac{1}{2} L$ (d.w.z. $\zeta = \pm \frac{1}{2}$) te nemen, vinden wij m.b.v. de Fourier analyse (7) of door gebruik te maken van de eigenschappen van de Sturm-Liouville (1) differentiaal vergelijkingen, waartoe (2.1.13) behoort:

$$v = 2 \cdot (\theta_L - \theta_0) \cdot \sum_{n=2,4,6\dots}^{\infty} \frac{I_0(n\pi\mu\xi)}{n\pi \left[\frac{n\pi\mu}{Nu} \cdot I_1(n\pi\mu) + I_0(n\pi\mu) \right]} \cdot (-1)^{\frac{n}{2} + 2} \cdot \sin(n\pi\zeta) +$$

(2.1.20)

$$+ 2 \cdot (\theta_L + \theta_0) \cdot \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{I_0(m\pi\mu\xi)}{m\pi \left[\frac{m\pi\mu}{Nu} \cdot I_1(m\pi\mu) + I_0(m\pi\mu) \right]} \cdot (-1)^{\frac{m+1}{2}} \cdot \cos(m\pi\zeta)$$

Doordat in de afleiding van formule (2.1.19) en (2.1.20) hetzelfde integratie interval ($\Delta z = L$ d.w.z. $\Delta\zeta = 1$) gebruikt is, krijgen wij dezelfde numerieke uitkomsten. Bij formule (2.1.19) moet dan wel bedacht worden, dat ζ varieert van 0 tot 1, terwijl deze in formule (2.1.20) loopt tussen $-\frac{1}{2}$ en $+\frac{1}{2}$.

Het integratie interval wordt verdubbeld door als grenzen $z = \pm L$ te kiezen. Zie de opmerking onder formule (2.2.6).

2.2. Insteltijd van de stationaire toestand

De differentiaal vergelijking (2.1.7) gaat in het niet stationaire geval over in:

$$\frac{\delta\theta}{\delta t} = a \left[\frac{\delta^2\theta}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta\theta}{\delta r} + \frac{\delta^2\theta}{\delta z^2} \right] \quad (2.2.1)$$

hierin is: $a \equiv \frac{\lambda}{\rho c} = \frac{\lambda}{C}$ = de temperatuurvereffeningscoëfficiënt

en ρ = de dichtheid van het materiaal

c = de warmtecapaciteit per gewichtshoeveelheid (soortelijke warmte)

C = de warmtecapaciteit per volume eenheid.

Formule (2.2.1) staat bekend als de "diff.vgl. van Fourier". De cylinder met inhoud wordt van het tijdstip $t = 0$ aan de bovenzijde op een constante temperatuur θ_0 en aan de onderzijde op θ_L gehouden.

In de vorige paragraaf is een formule (2.1.19) afgeleid, die nodig is, om de radiale temperatuur verstoring t.g.v. de optredende warmtelek door de isolatie, beneden een bepaalde grens (bv. 0,01°C) te houden. Par. 4.1. geeft een numerieke uitwerking van deze eis voor zand. In de in deze paragraaf te behandelen kwestie, gaan wij er vanuit dat aan bovenstaande eis van een "goede" isolatie is voldaan. De radiale warmtelek is dan te verwaarlozen.^{*)} Formule (2.2.1) kan dan worden vereenvoudigd tot een "eendimensionale" vergelijking:

$$\frac{\delta\theta}{\delta t} = a \frac{\delta^2\theta}{\delta z^2} \quad (2.2.2)$$

met plaats- en tijdvoorwaarden:

$$\text{voor } z = 0 \text{ en } t > 0 \text{ is } \theta = \theta_0 \quad (2.2.2a)$$

$$\text{" } z = L \text{ en " is } \theta = \theta_L \quad (2.2.2b)$$

$$\text{" } t = 0 \text{ en } 0 < z < L \text{ is } \theta = 0 \quad (2.2.2c)$$

Voor $t = \infty$ is de temperatuur binnen de cylinder stationair en wordt overeenkomstig formule (2.1.1) weergegeven door:

$$\theta = \theta_0 + (\theta_L - \theta_0) \frac{z}{L} \quad (2.2.2d).$$

Na enige tijd ($t > 0$) is de temperatuur nog niet constant. Dit is te verdisconteren door een correctie term v in formule (2.2.2d) aan te brengen:

$$\theta(z,t) = \theta_0 + (\theta_L - \theta_0) \frac{z}{L} + v(z,t) \quad (2.2.3)$$

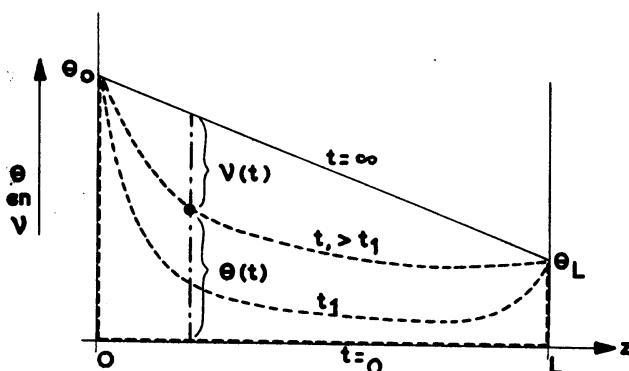


fig. 2.1.2. De stationaire insteltijd

^{*)} M.b.v. formules (2.1.4, 2.1.6 en 2.1.19) kan een niet te verwaarlozen radiale warmtelek berekend worden.

De temperatuurafwijking v van de stabiele toestand wordt hieronder berekend. Wij voeren ook hier weer dimensieloze parameters in:

$$\zeta = \frac{z}{L} \text{ en } \tau = \frac{at}{L^2} = \text{"kengetal van Fourier"} \quad (2.2.4)$$

Dan gaat de diff. vgl. (2.2.2) met bijbehorende condities over in:

$$\frac{\delta v}{\delta \tau} = \frac{\delta^2 v}{\delta \zeta^2} \quad (2.2.5)$$

$$\text{voor } \tau > 0 \text{ en } \zeta = 0 \text{ is } v = 0 \quad (2.2.5a)$$

$$\text{" " } \zeta = 1 \text{ " } v = 0 \quad (2.2.5b)$$

$$\text{" } \tau = 0 \text{ en } 0 < \zeta < 1 \text{ is } v = -\theta_0 - (\theta_L - \theta_0)\zeta \quad (2.2.5c)$$

De oplossing hiervan verloopt analoog met de reeds uitvoerig beschreven oplossing van formule (2.1.9) en is:

$$v = 2 \cdot \theta_L \cdot \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{\exp[-(n\pi)^2 \tau]}{n\pi} \cdot (-1)^n \cdot \sin(n\pi\zeta) - \quad (2.2.6)$$

$$- 2 \cdot \theta_0 \cdot \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{\exp[-(n\pi)^2 \tau]}{n\pi} \cdot \sin(n\pi\zeta)$$

waarin: $\zeta = z/L$ en $\tau = \frac{at}{L^2}$ (zie fig. 2.1.2).

Deze uitkomst komt overeen met (8, blz. 13). Hiervoor gelden dezelfde experimentele eisen als reeds gestipuleerd zijn onder formule (2.1.19).

Opmerkingen:

Indien wij de randvoorwaarden van de diff.vgl. (2.2.2) anders kiezen, krijgen wij de oplossing $v(\zeta, \tau)$ in een andere vorm.

Door bv. $z = \pm L$ (d.w.z. $\zeta = \pm 1$), vinden wij m.b.v. de Fourier analyse of door gebruik te maken van de eigenschappen van de Sturm Liouville differentiaal vergelijking:

$$v = 2 \cdot (\theta_L - \theta_0) \sum_{n=2,4,6,\dots} \frac{\exp[-(\frac{n\pi}{2})^2 \tau]}{n\pi} (-1)^{\frac{n}{2} + 2} \cdot \sin(\frac{n\pi}{2}\zeta) + \quad (2.2.7)$$

$$+ 2 (\theta_L + \theta_0) \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{\exp[-(\frac{m\pi}{2})^2 \tau]}{m\pi} (-1)^{\frac{m+1}{2}} \cdot \cos(\frac{m\pi}{2}\zeta).$$

Omdat in de vorige opmerking het integratie gebied ($\Delta z = 2L$ d.w.z. $\Delta \zeta = 2$) verdubbeld is, moet voor τ een twee maal zo hoge waarde ingevuld worden, als in formule (2.2.6), om toch dezelfde numerieke waarden voor v te vinden.

Wij kunnen echter ook de dimensieloze parameter ζ anders kiezen nl. $\zeta = \frac{z}{2L}$ en krijgen daardoor als getransformeerde grenzen $\zeta = \pm \frac{1}{2}$.

D.w.z. het integratie interval is identiek met dat behorend bij formule (2.2.6). De oplossing voor $v(\zeta, \tau)$ is dan ook dezelfde alsof wij grenzen $z = \pm \frac{1}{2} L$ of $\zeta = \pm \frac{1}{2}$ (met $\zeta = z/L$) gekozen hadden. Door op de analogie met het vorige probleem te letten - vergelijk formule (2.1.19, 2.1.20) en (2.2.6; 2.2.7) - is de oplossing van diff.vgl. (2.2.5) op deze nieuwe grenzen gemakkelijk te vinden. Vervang daartoe in formule (2.2.7) de factor $\frac{n\pi}{2}$ door $n\pi$ (als argument van de exponentiële functie, de sinus en de cosinus). Zie ook de opmerking onder formule (2.1.19).

3. Numerieke berekeningen

3.1. Horizontale stationaire temperatuurverdeling in een cylinder door warmteverliezen aan de wand

Grafische voorbeelden van horizontaal- en vertikaal temperatuurverloop.

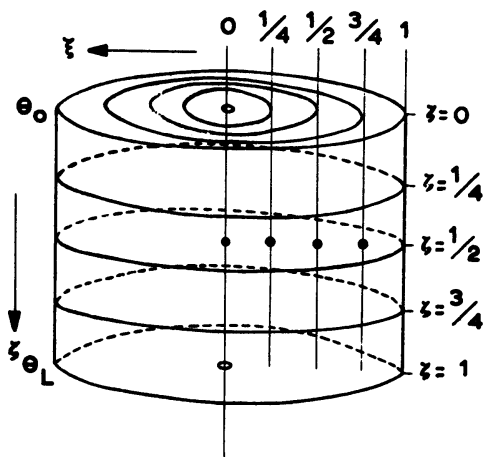


fig. 3.1.1. Cylinder is verdeeld in "roosterpunten"

Boven- en ondervlak van de cylinder worden op een constante temperatuur van resp. θ_0 en θ_L gehouden. Dit om aan de randvoorwaarden (2.1.9a en b) te voldoen. Uit de overblijvende randwaarde (2.1.9c) blijkt dat indien er geen warmte overdracht van de cylinderwand naar de omgeving op zou treden ($U = 0$) er ook geen temperatuurgradiënt aanwezig is op dat grensvlak.

Doordat bij perfecte isolatie ($U = 0$) geen warmte door de wand kan stromen is dit triviaal (zie ook formule 2.1.2).

De horizontale temperatuur is dan constant d.w.z. θ is onafhankelijk van ξ . In de praktijk treedt er natuurlijk wel een warmtelek op, waardoor er in een horizontale doorsnijding van de cylinder een zekere temperatuurverdeling aanwezig is. De vraag is, hoe ziet deze eruit en hoe is deze afhankelijk van ζ (de hoogte waarop wij de doorsnijding kiezen).

Wij hebben daartoe in de cylinder 5 equidistante vlakken aangebracht (boven- en ondervlak meegerekend) en hierop telkens 5 concentrische cirkels (de eerste valt in de as, de laatste op de omtrek van de cylinder).

Om nu een idee te krijgen van de temperatuurafwijking - zowel horizontaal als vertikaal - is m.b.v. een computerprogramma (zie Appendix I en III) formule (2.1.19) numeriek opgelost voor de waarden $\zeta = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ en $\xi = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$.

Voor de diameterhoogteverhouding (μ) hebben wij de waarden 1 resp. 2 gekozen.

Om de informatie in dit verslag algemeen toepasbaar te houden, hebben wij voor Nu' een 35-tal waarden genomen. Deze faktor is nl. bepalend voor het materiaal binnen de cylinder en het gebruikte isolatie materiaal (zie Appendix IV).

Formule (2.1.19) is te vereenvoudigen tot:

$$v(\xi, \zeta) = A(\xi, \zeta) \cdot \theta_L - B(\xi, \zeta) \cdot \theta_0 \quad (3.1.1.)$$

Hierin is v de gevraagde temperatuurafwijking t.g.v. radiale warmtelek. Deze is, zoals boven besproken, niet alleen afhankelijk van ξ en ζ maar ook nog van de factoren μ en Nu' (evenzo de coëfficiënten A en B). Letten wij alleen op de afhankelijk van ζ dan blijkt uit formule (2.1.19):

$$\begin{aligned} B(0) &= -A(0) \\ B(\frac{1}{4}) &= -A(\frac{3}{4}) \\ B(\frac{1}{2}) &= -A(\frac{1}{2}) \\ B(\frac{3}{4}) &= -A(\frac{1}{4}) \\ B(1) &= -A(1) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Wij kunnen dus volstaan met het tabellieren van de coëfficiënten A. Deze zijn opgenomen in Appendix III. Hieruit zijn ter illustratie de volgende voorbeelden gekozen: $\mu = Nu' = 1$.

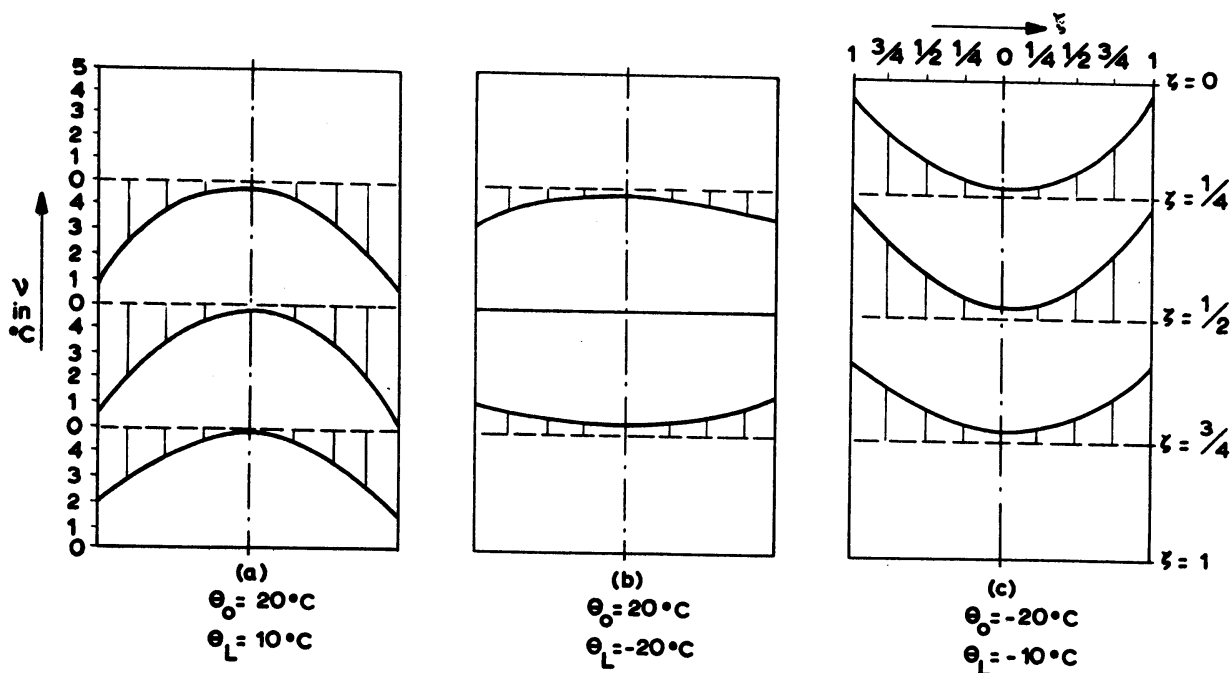


fig. 3.1.2. Horizontale temperatuur afwijking t.g.v. radiale warmtelek.

Uit de figuur is de cylinder symmetrie af te lezen, d.w.z. concentrische cirkels op een doorsnijing van de cylinder zijn isothermen.

In geval (a) is de gehele cylinder op hogere temperatuur dan de omgeving ($\theta = \text{pos.}$), daardoor is de warmtelek door de wand van de cylinder naar buiten gericht. Aan de binnenwand heerst dus een lagere temperatuur dan in de as van de cylinder (overeenkomstig formule 2.1.4). Het tegengestelde doet zich voor in geval (c).

Geval (b) is a-symmetrisch t.o.v. het vlak $\zeta = \frac{1}{2}$, omdat hierbij ook de gegeven grenscondities tegengesteld teken bezitten.

In deze situatie is de cylinder vertikaal in tweeën te splitsen, de randvoorwaarden worden dan resp. $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$; $\theta_{\frac{1}{2}L} = 0^\circ\text{C}$ en $\theta_{\frac{1}{2}L} = 0^\circ\text{C}$; $\theta_L = -20^\circ\text{C}$

Opm.: Voor deze minder algemene randcondities is in (2, blz. 189) een oplossing te vinden. Uitgedrukt in de notatie van dit verslag luidt deze:

$$\theta = \theta_o \cdot 2 \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{\sinh \beta_n (1-\zeta)}{\sinh \beta_n} \frac{Nu'}{(\beta_n^2 + Nu'^2) \cdot J_0(\beta_n)} \cdot J_0(\beta_n \xi) \quad (3.1.3)$$

De coëfficiënten β_n volgen uit de transcendente vgl.:

$$\beta_n J_1(\beta_n) = Nu' J_0(\beta_n) \quad (3.1.4)$$

In (2) zijn 6 van deze β 's gegeven in 4 decimalen. In eerste opzet was voor de berekening in dit verslag uitgegaan van deze oplossing. Het bleek echter moeilijk om mathematisch aan de grenswaarde $\theta = \theta_o$ voor $\zeta = 0$ met voldoende nauwkeurigheid te voldoen. Aantal en nauwkeurigheid van de β 's zijn te klein. Tot op twee decimalen komen de uitkomsten van (3.1.3) overeen met die van formule (2.1.19).

Opm.: D.m.v. een iteratie proces (5) zijn nauwkeurigheid en aantal β 's op te voeren.

Tenslotte geven wij ter illustratie de verticale temperatuurverdeling voor $Nu' = \mu = 1$.

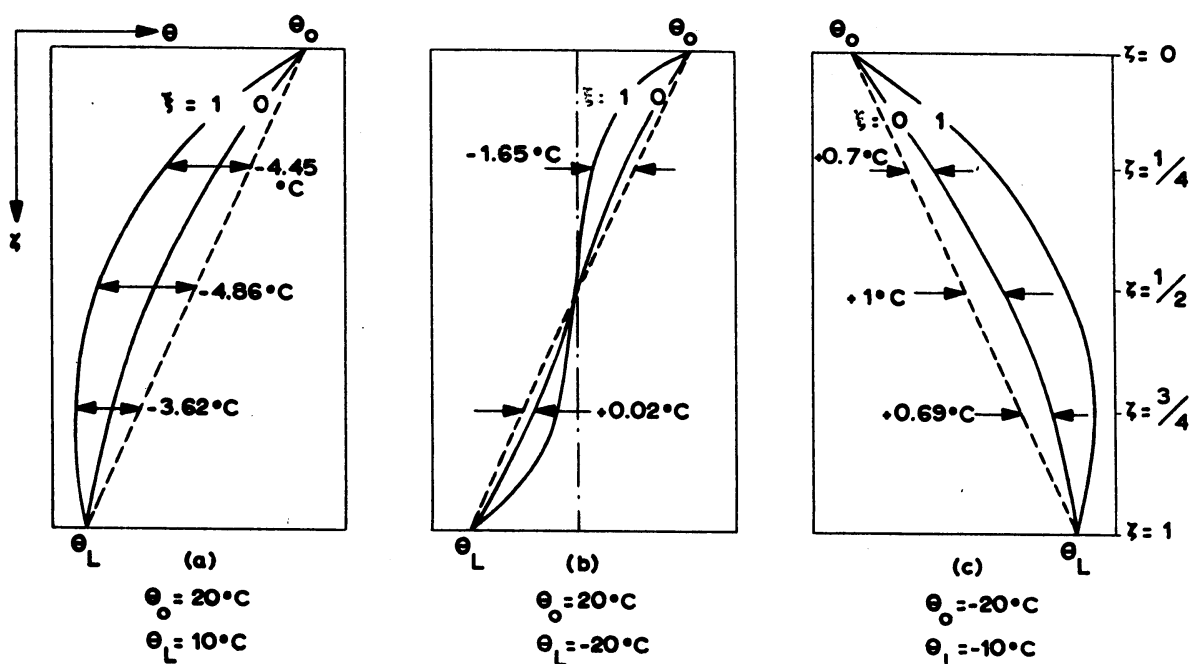


fig. 3.1.3. Vertikale temperatuurgradiënt bij een radiale warmtelek.

Opm.: Formule (2.1.20) is te vereenvoudigen tot:

$$v(\xi, \zeta) = C(\xi, \zeta) \cdot (\theta_L - \theta_0) + D(\xi, \zeta) \cdot (\theta_L + \theta_0) \quad (3.1.6)$$

Hieruit volgen dezelfde waarden voor v , als gedestilleerd uit formule (3.1.1), indien voldaan is:

$$A = C + D \text{ en } B = C - D \quad (3.1.7)$$

Deze gelijkheden zijn analytisch aan te tonen door vergelijking van de formules (2.1.19) en (2.1.20).

Het "gemodificeerde Nusselt getal" (dimensieloos).

Dit kwam ter sprake bij formule (2.1.11). Het geeft de verhouding van het warmtetransport door overdracht en geleiding weer.

- 1) Warmte overdracht van het ene medium naar het andere bv. van grond naar isolatiewand (α') of van wand naar lucht (α'').
- 2) Warmtegeleiding in een medium bv. grond (λ_1) of wand (λ_2).

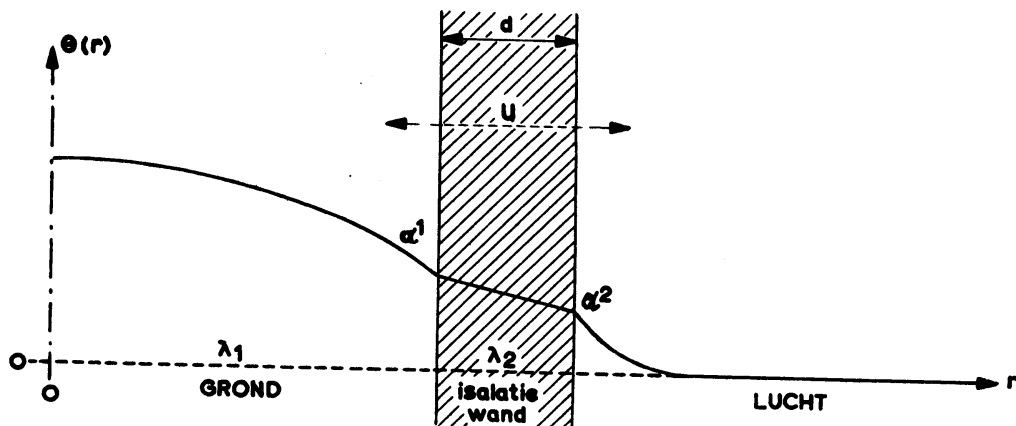


fig. 3.1.4. Temperatuurverdeling aan de rand van de bak.

Door de radiale warmtelek stelt zich een temperatuurgradiënt $\theta(r)$ in zoals aangegeven in fig. 3.1.4. M.b.v. de formules 2.1.2, 3, 4, 5 en 11 is af te leiden dat voor een vlakke wand (dikte d) geldt:

$$Nu' \equiv \frac{UR}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1} \left[\frac{R}{\frac{1}{\alpha'} + \frac{d}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha''}} \right] \quad (3.1.7)$$

Voor een cylinderwand (straal R, dikte d) wordt dit

$$\text{Nu}' \equiv \frac{UR}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1} \left[\frac{1}{\frac{1}{\alpha'R} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \left(\frac{R+d}{R} \right) + \frac{1}{\alpha''(R+d)}} \right] \quad (3.1.8)$$

Voor droge grond ($\lambda_1 = 2 \cdot 10^{-1}$ W/m °C, 9) met glaswol als isolatie ($\lambda_2 = 3 \cdot 10^{-2}$ W/m °C) zijn de Nu' getallen met R en d als parameter berekend (zie Appendix IV).

Respectievelijk is $\alpha' = 500$ W/m² °C en $\alpha'' = 10$ W/m² °C gekozen. Fysisch impliceert dit een goed warmtecontact (of lage overgangswaerstand) van de grond met de isolatiewand, terwijl de tweede numerieke waarde een gemiddeld praktisch getal is, bepaald door de warmte overdracht door convectie en straling van de wand naar de omgeving.

Indien geen isolatiewand (d = 0) aanwezig is, krijgen wij het gewone Nusselt getal (op een faktor 2 na, zie voetnoot onder formule 2.1.11). In dat getal gaat U over in α'' .

Ter vergelijking is in Appendix IV nog een tweede tabel opgenomen met asbest ($\lambda_2 = 0,16$ W/m °C) als isolatiemateriaal.

Voor natte grond ($\lambda_1 = 2$ W/m °C, 9) moeten de getallen door een faktor 10 gedeeld worden.

3.2. De insteltijd van de stationaire toestand in de cylinder

Wij zullen nu het verloop van de temperatuur beschrijven als functie van de tijd. De cylinder wordt weer in vier gelijke segmenten verdeeld (zie fig. 3.1.1.). M.b.v. een computerprogramma (analoog aan Appendix III) is hierop het temperatuur verloop als functie van ζ (hoogte van doorsnijding) en τ (maat voor de tijd t) berekend uit formule (2.2.6). Ook hier is - analoog formule (3.1.1) - v te schrijven als:

$$v(\zeta, \tau) = A(\zeta, \tau) \cdot \theta_L - B(\zeta, \tau) \cdot \theta_0 \quad (3.2.1)$$

In Appendix V is de coëfficiënt A (ζ, τ) getabelleerd. De coëfficiënt B is hieruit te vinden door formule (3.1.2) toe te passen.

In fig. 3.2.1. is te zien hoe zich de temperatuur in de loop van de tijd instelt.

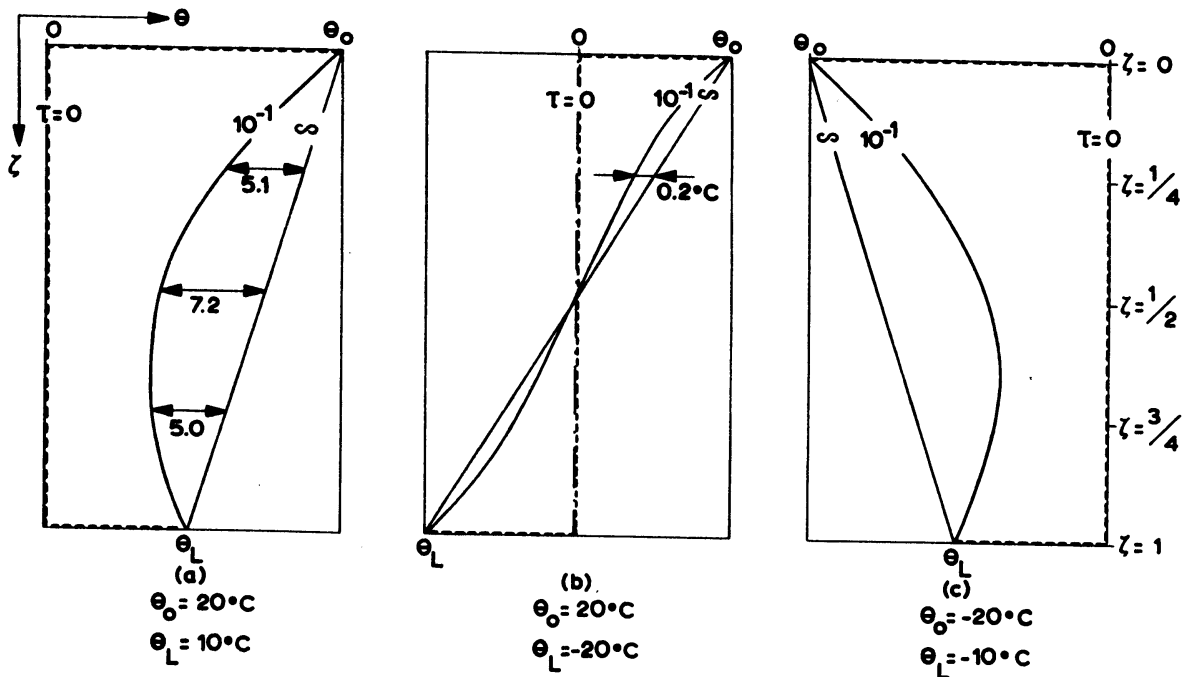


fig. 3.2.1. Penetratie van warmte van de grensvlakken ($\zeta = 0$ en 1) uit.

In geval (a) heeft de gehele cylinderinhoud een hogere temperatuur dan de omgeving, d.w.z. $\theta > 0$, waardoor $v < 0$.

Na verloop van tijd stelt zich de stationaire toestand in. Bij $\tau = \infty$ is deze exact bereikt. Andere uiterste is $\tau = 0$, waarbij de inhoud van de cylinder nog op omgevingstemperatuur is d.w.z. $\theta = 0$. Uit fig. 3.2.1. is - na omwerking van de dimensieloze parameter τ naar de tijd t (zie formule 2.2.4) - af te lezen na hoeveel tijd de stationaire toestand tot op bv. $0,01$ °C bereikt is.

In geval (c) is de gehele inhoud van de cylinder beneden omgevingstemperatuur d.w.z. $\theta < 0$ en $v > 0$.

In het geval (b) blijft de gehele horizontale doorsnijing ($\zeta = \frac{1}{2}$, halve cylinder hoogte) op omgevingstemperatuur, ($\theta = v = 0$). Door de symmetrische randvoorwaarden is dit triviaal.

Het dimensieloze "getal van Fourier".

Dit werd ingevoerd ter vereenvoudiging van de diff.vgl. (2.2.2) en is gedefinieerd in formulue (2.2.4) : $\tau = \frac{at}{L^2}$

De snelheid (θ in formule 2.2.2) waarmee zich de stationaire toestand instelt is afhankelijk van het materiaal en wordt bepaald door de zgn. temperatuurvereffeningscoëfficiënt a . In formule 2.2.2. is het dan ook een evenredigheidsconstante. Zoals de benaming aangeeft is het een maat voor de snelheid waarop zich de temperatuur over een bepaald gebied nivelleert. In roodkoper gaat dit veel sneller dan in droge grond, omdat a een faktor 100 groter is. Voor gewoon zand ligt de waarde van a tussen 10^{-6} en $4 \cdot 10^{-6}$ m²/sec (droog resp. nat, 9) afhankelijk van vochtgehalte en porositeit van de grond.

In het getal van Fourier is ook nog de hoogte L van de gebruikte cylinder verdisconteerd. D.m.v. een nomogram is de dimensieloze grootte τ gemakkelijk om te zetten in de tijd t voor een bepaald materiaal (a) en cylinder lengte (L). Door als parameter a/L^2 te kiezen bestaat dit nomogram uit rechten door de oorsprong.

4. Toepassingen

4.1. Horizontale stationaire temperatuurverdeling in een grondbak door warmte verliezen aan de rand

Uit praktische overwegingen kiezen wij een cilindrische grondbak met een diameter van 50 cm ($R = 25$ cm). De hoogte (L) ervan wordt beperkt door het gewicht van de grond en de lange tijd die verloopt voordat zich de stationaire toestand instelt bij grote L (zie 4.2). Wij kiezen daarom $L = 50$ cm. De "overtemperaturen" θ_0 en θ_L worden zo genomen dat een maximale horizontale temperatuur afwijking v_{\max} optreedt.

Voor alle andere in het nederlandse klimaat voorkomende grondtemperaturen op $z = 0$ cm (θ_0) en $z = 50$ cm (θ_L) geldt dan dat de horizontale temperatuur afwijkingen kleiner zijn dan de te specificeren tolerantie voor v_{\max} (zie fig. 3.1.2).

Dit levert voorwaarden voor θ_0 en θ_L :

- a) beiden hetzelfde teken (zie fig. 3.1.2)
- b) beiden zo groot mogelijk (zie form. 3.1.1 en 3.1.2).

Op grond van (10) kiezen wij daarom:

$$T_0 = \text{oppervlakte temperatuur} = 40^\circ\text{C} \rightarrow \theta_0 = +20^\circ\text{C}$$

$$T_L = \text{temperatuur op 50 cm diepte} = 22^\circ\text{C} \rightarrow \theta_L = +2^\circ\text{C}$$

Dit bij een "kamertemperatuur" van 20°C ($= T_e$, zie § 2.1).

Er zal zich een bepaalde temperatuurverdeling opbouwen in de grondbak (zie fig. 3.1.3), waarbij de v een functie is van de dimensieloze lineaire parameter ζ (zie fig. 3.1.1).

Bij de gekozen grenstemperaturen θ_0 en θ_L valt v_{\max} op $\zeta = \frac{1}{2}$. Wij beperken ons daarom in de volgende berekeningen van v voor het geval $\zeta = \frac{1}{2}$ d.i. op diepte van 12,5 cm beneden het grondoppervlak. Voor alle in het nederlandse klimaat te simuleren grondtemperaturen tussen $z = 0$ en $z = 50$ cm (zie fig. 2.1.1) geldt dan dat: $v \leq v_{\max}$.

M.b.v. de numerieke gegevens uit Appendix III en IV zijn - voor droge grond - de volgende nomogrammen in fig. 4.1.1. te construeren.

Opm.: Voor vochtige grond bezit de warmtegeleiding λ_1 een hogere waarde, waardoor bij een bepaalde isolatie dikte d lagere Nu' getallen horen (zie § 3.1 en 3.2). Dit betekent volgens de numerieke waarden uit Appendix III lagere v 's en dus is de temperatuurafwijking voor vochtige grond kleiner dan de reeds berekende v_{\max} .

Informatie uit fig. 4.1.1.:

Bij kleine isolatie dikte d blijkt de "temperatuur fout" sterk dalend bij verhoging van d . De fout van de rand ($\xi = 1$) blijkt erg groot te zijn. Op een concentrische cirkel halverwege de straal ($\xi = \frac{1}{2}$) blijkt $v \leq 0,05$ °C indien wij 10 cm glaswol isolatie aanbrengen. Grotere isolatie dikte levert niet veel winst op.

Een beeld van de horizontale temperatuurverdeling geeft fig. 4.1.2. In het ideale geval (geen warmtelek, $d = \infty$) zou de horizontale temperatuur gradiënt nul zijn. De optredende temperatuurverdeling is uitgezet als functie van ξ met de glaswol isolatie dikte d als parameter. Vanwege de cylinder-symmetrie is er een spiegelbeeld t.o.v. $\xi = 0$. Op cirkels (concentrisch met de wand) heerst dus dezelfde temperatuur.

Het sterke oplopen van de temperatuur van as naar wand, geeft aanleiding om te spreken van "randeffecten". Hoe groter d , hoe meer de ideale toestand benaderd wordt. Opmerkelijk is weer dat de eerste 5 cm isolatie veel invloed heeft, terwijl een verhoging tot 10 cm niet zoveel extra oplevert. Letten wij nu op $\xi = \frac{1}{2}$ dan blijkt de temperatuurgradiënt daar ter plaatse de volgende waarden te bezitten; voor:

$d = 0$ cm	$\rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta r} \approx 0,1$ °C/cm	
" = 1 "	\rightarrow " $\approx 0,04$ "	- winst 60%
" = 5 "	\rightarrow " $\approx 0,01$ "	- " 87%
" = 10 "	\rightarrow " $\approx 0,008$ "	- " 92%
" = 20 "	\rightarrow " $\approx 0,006$ "	- " 94%

De betekenis en wat daaruit volgt van bovenstaande getallen is: Per definitie is de isolatie winst voor $d = 0$ gelijk aan 0% en voor $d = \infty$ 100%. Door de cilindriersymmetrie kunnen wij thermometers die wij willen vergelijken (c.q. ijken), het beste op een cirkel in de grondbak aanbrengen. Indien nu de temperatuurvoelers zich exact op een cirkel bevinden, meten zij allemaal dezelfde temperatuurafwijking en zijn in dat geval dus op dezelfde temperatuur. Het niet vertikaal plaatsen van een thermometer betekent een meetfout. Deze is indien wij de thermometers tot 1 cm zuiver kunnen plaatsen in het geval 10 cm glaswolisolatie aangebracht is $< 0,01$ °C.

Dit geeft aanleiding om de te construeren grondbak met tenminste 10 cm glaswol thermisch te isoleren.

Door de thermometers dicht bij de as te plaatsen krijgen wij natuurlijk een hogere nauwkeurigheid, het praktisch aantal te vergelijken thermometers neemt echter af.

Willekeurig plaatsen van de thermometers levert grotere "ijkfouten" op.

Ter vergelijking zijn in fig. 4.1.2. de merites van een asbest isolatie mantel opgenomen. Zelfs een dikte van 30 cm voldoet nog niet aan bovengenoemde eis van $0,01$ °C/cm temperatuurgradiënt. Met 30 cm asbest komt een thermische isolatie overeen met $\approx 3,7$ cm glaswol. Asbest is dus ongeschikt als isolatie materiaal voor droge grond, de warmtegeleidingscoëfficiënten liggen dan ook te dicht bij elkaar, zie Appendix IV.

Een technische mogelijkheid om randeffecten te elimineren is de zgn. "schutmantel" methode. Deze blijft in dit verslag onbesproken.

Tenslotte is er helemaal geen isolatie nodig indien het medium zou bestaan uit roodkoper (i.p.v. grond). Door de hoge warmtegeleidingscoëfficiënt van koper (≈ 400 W/m °C) levert formule (3.1.8) voor $d = 0$ cm en $R = 25$ cm een $Nu' = 0,01$, waardoor:

$$v(\zeta = \frac{1}{2}, \xi = 1, \mu = 2, \theta_0 = 20^\circ\text{C}, \theta_L = 2^\circ\text{C}) = 0,01 \text{ } ^\circ\text{C}$$

De temperatuurgradiënt binnen het koperen blok zonder isolatie is dus ten hoogste $0,01$ °C per 25 cm of wel $\leq 4 \cdot 10^{-4}$ °C/cm.

4.2. Insteltijd van de stationaire toestand in een grondbak

Aan de grondbak in § 4.1. worden op $t = 0$ de genoemde (ook in § 4.1) grenswaarden θ_0 en θ_L opgelegd. Wij stellen overeenkomstig § 2.2. dat de bak zodanig goed is geïsoleerd dat van horizontale temperatuurgradiënten afgezien kan worden d.w.z. $v(\xi) = 0$. De eisen hiervoor zijn te vinden in de vorige par.

De vraag is nu hoe lang het duurt voor de verticale temperatuurverdeling niet meer verloopt d.w.z. lineair is tussen θ_0 en θ_L (zie fig. 3.2.1). Doordat de warmtevereffeningscoëfficiënt a voor vochtige grond groter is dan voor droge grond verloopt dit proces in vochtige grond het snelst. Wij berekenen daarom het temperatuurverloop in het geval droge grond in de bak aanwezig is. In formule (2.2.4) is dan $a = 10^{-6}$ m²/sec en $L = 0,5$ m (faktor $a/L^2 = 4 \cdot 10^{-6}$ sec⁻¹) en kunnen wij de dimensieloze parameter τ omzetten in de benodigde tijd t , d.m.v. $t = 25 \cdot 10^4 \cdot \tau$ sec.

Samen met numerieke gegevens uit Appendix V levert dit fig. 4.2.1. op. Hierin is de temperatuurafwijking van de stationaire toestand (bereikt op $t = \infty$) als functie van de doorsnijdingshoogte ζ van de grondbak uitgezet.

Doordat het bovenvlak ($\zeta = 0$; $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$) op een hogere temperatuur gehouden wordt als het ondervlak ($\zeta = 1$; $\theta_L = 2^\circ\text{C}$) zal de temperatuur in het bovenste deel van de cylinder ($\zeta = \frac{1}{2}$) zich sneller aanpassen dan het onderste gedeelte ($\zeta = \frac{3}{4}$) van de grondbak. Wij zien dan ook voor $\zeta = \frac{1}{2}$ een snellere daling van de temperatuur als voor $\zeta = \frac{3}{4}$.

Het verticale midden van de cylinder ($\zeta = \frac{1}{2}$) reageert nog langzamer. Ook is er voor alle ζ 's een aanlooptraject te onderscheiden. Dit betekent dat er b.v. in het geval $\zeta = \frac{1}{2}$ gedurende het eerste half uur nog geen warmte doordringt.

Om een beeld te krijgen hoe zich de temperatuur in de grondbak instelt is fig. 4.2.2 geconstrueerd (volgt uit fig. 4.2.1). Hierbij is voor $t = 0$ de gehele bak op een omgevingstemperatuur van 20°C gebracht, terwijl deze in de stationaire toestand ($t = \infty$) lineair verloopt tussen de opgelegde grenswaarden van resp. 40 en 22°C .

Van praktisch belang is de lange insteltijd gedurende welke moet worden gewacht voor zich de stationaire toestand tot op een bepaalde tolerantie instelt. Uit fig. 4.2.1. volgt nl. dat na 24 uur de temperatuur op halve hoogte nog $\approx 0,5^\circ\text{C}$ moet zakken om daarna constant te blijven.

Uit form. 4.2.2. blijkt een insteltijd van ongeveer 52 uur nodig te zijn om een temperatuurafwijking beneden $0,01^\circ\text{C}$ te vinden. Deze wachttijd is o.a. een functie van de hoogte (L) van de grondbak. In fig. 4.2.3. is voor het beschreven geval - droog zand, "over temperaturen" resp. 20°C en 2°C - de benodigde tijd als functie van L uitgezet voor een tolerantie van $v(\zeta = \frac{1}{2}, t) = 0,01^\circ\text{C}$. Deze is volgens fig. 4.2.1. maximaal in het horizontale vlak op halve hoogte van de grondbak d.w.z. voor $\zeta = \frac{1}{2}$. De vorm van de kromme is een parabool ($t = 75 \cdot 10^4 \cdot L^2$). Een praktische conclusie uit fig. 4.2.3. is dat m.b.v. de beschreven grondbak temperaturen tot op niet te grote diepte gesimuleerd kunnen worden.

Gekozen is dan ook voor een goed geïsoleerd vat dat tevens dienst kan doen als thermostaatbad. Hierin is dan een kleiner vat met grond op constante temperatuur te houden (veel lagere insteltijden). Binnen dit vat kunnen diverse elektrische thermometers vergeleken worden, waarbij de warmtelek door de toevoerdraden gemajoreerd wordt. Dit kan door de draden boven het vat door een koperen buisje te voeren waarop een verwarmingsdraad is aangebracht.

5. Conclusies

In slecht warmtegeleidende materialen treden gemakkelijk temperatuurgradiënten op. Bij het vergelijken, c.q. ijken, van thermometers is een optredend temperatuurverschil tussen ijk- en meetpunt van $0,01^{\circ}\text{C}$ geen enkel bezwaar. Om dit te bereiken worden echter stringente eisen gesteld aan de thermische isolatie van een grondbak.

Slechte warmtegeleiding samengaan met hoge warmtecapaciteit zijn oorzaak van de grote wachttijden, tot een stationaire toestand is ingetreden.

In dit verslag wordt het behandelde probleem in hoofdzaak mathematisch benaderd. De differentiaalvergelijking voor de temperatuurvereffening is opgelost voor een cylinder met bepaalde grenscondities. De exacte oplossing is d.m.v. een rekenmachine EL-X8 tot een nauwkeurigheid van 10^{-7} voor een aantal numerieke parameters berekend. In de praktijk liggen echter de parameters (zoals warmtegeleiding van de grond) niet zo erg vast. Dit kan in de beschreven oplossing echter in rekening worden gebracht door de variatie in de uitkomst te onderzoeken bij een bepaalde nauwkeurigheidsgrens van de op te geven parameters. De reden van het volgen van de nauwkeurige methode ligt in het bijna tijdsloos rekenen van een elektronische rekenmachine.

Bij een niet zo nauwkeurig vastleggen van de fysische grootheden lijkt een elektrische analogon methode een snellere oplossing te bieden. De desbetreffende apparatuur was echter niet beschikbaar. Bij de analogon methode wordt het medium, waarop de thermische berekening wordt losgelaten, in moten gehakt. Ieder element wordt daarbij, door de analogie tussen warmte- en elektrische eigenschappen gekenmerkt door een bepaalde elektrische weerstand en capaciteit.

Een overeenkomstige mathematische methode blijkt te bestaan onder de naam "eindige elementen" methode. Deze wordt tot op heden echter voornamelijk in de ruimtevaart toegepast op spanningsproblemen. Er wordt daarbij gewerkt met matrices, waarin de diverse warmtegrootheden ondergebracht worden (11).

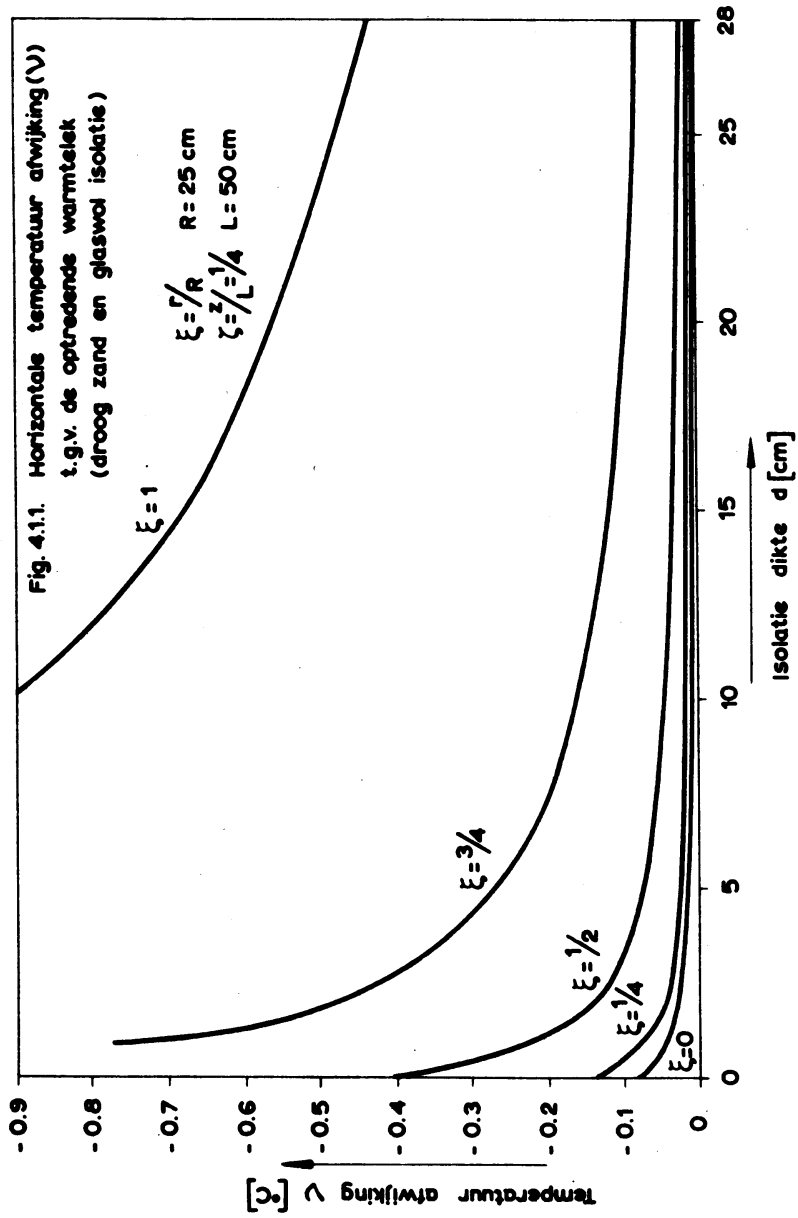
In bovenstaande zijn geen experimentele bewijzen geleverd voor de gebruikte fysische wetten. Dit valt dan ook buiten de opzet, omdat hier een optimaliserings kwestie behandeld is.

Ook bij een soepelere nauwkeurigheidseis dan $0,1^{\circ}\text{C}$ zijn de gevonden formules en grafieken toe te passen.

Door de enthousiaste medewerking van de computerafdeling is dit rapport tot stand kunnen komen.

Inmiddels heb ik vernomen dat er bij de T.P.D. in Delft gebruik gemaakt wordt van een matrix methode om de warmte differentiaalvergelijking op te lossen. Hierbij gaat het om rechthoekige ruimten (12).





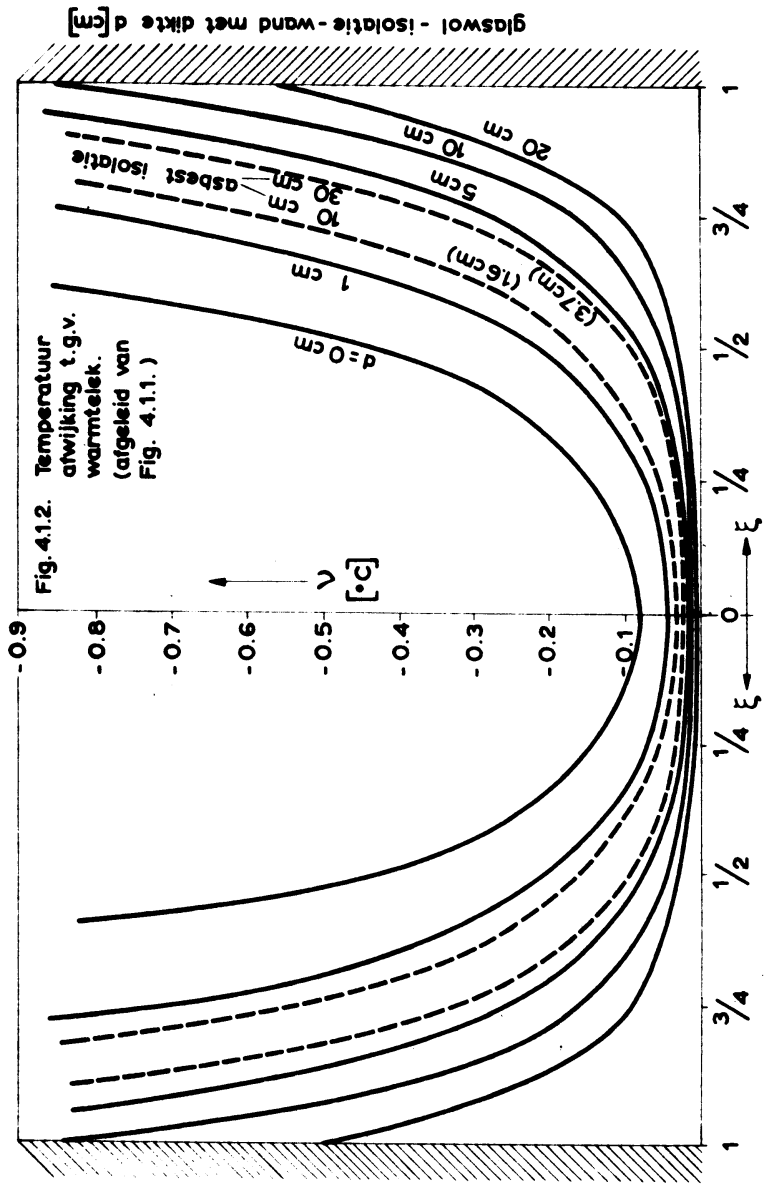
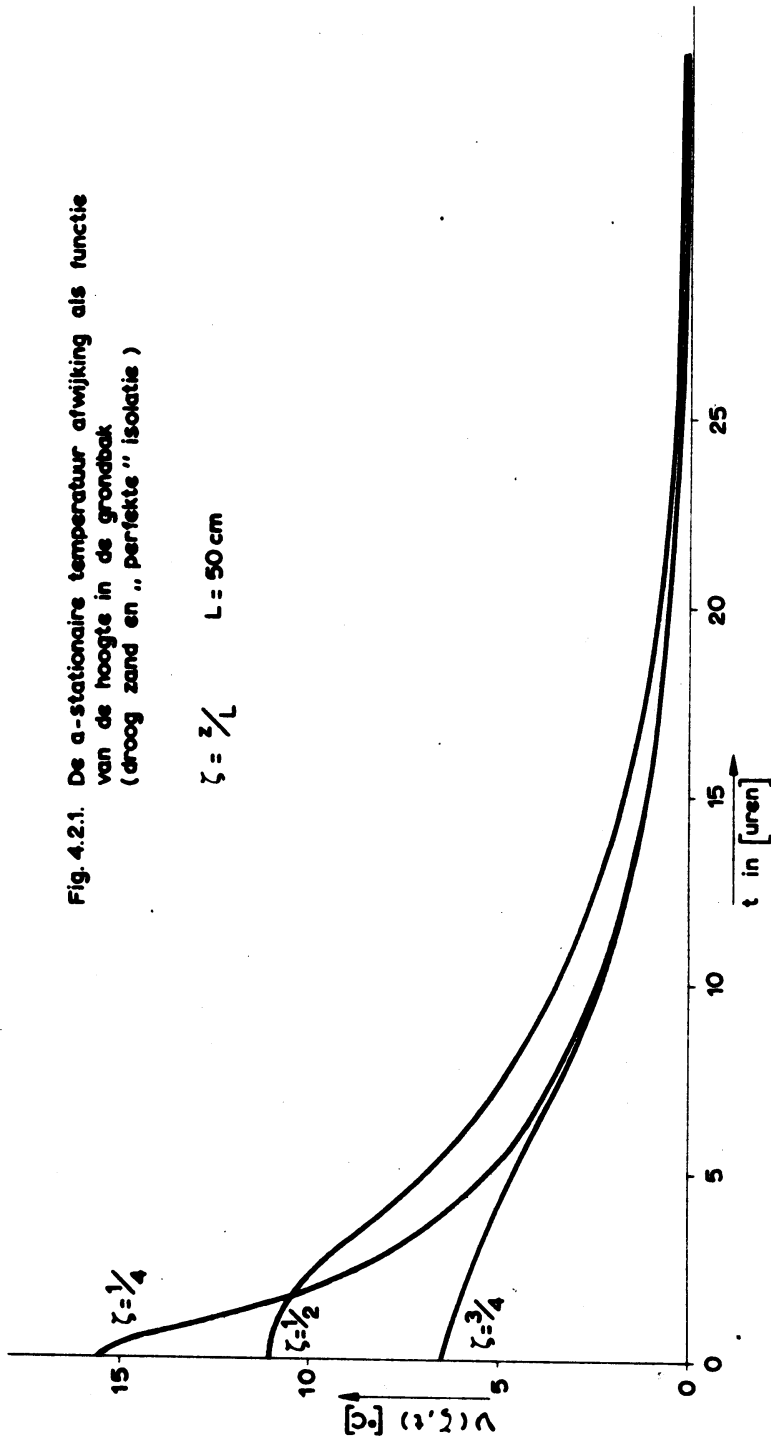


Fig. 4.2.1. De a-stationaire temperatuur afwijking als functie van de hoogte in de grondbak (droog zand en „perfekte“ isolatie)

$$\zeta = \frac{z}{L} \quad L = 50 \text{ cm}$$



Handwritten text at the bottom right of the page, possibly a signature or date.

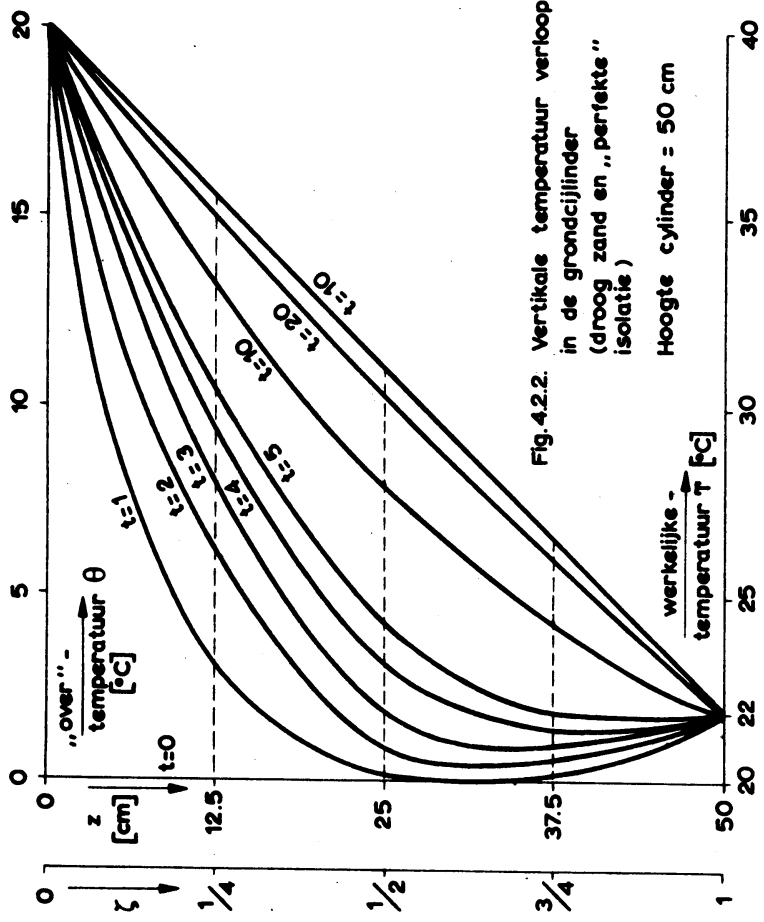


Fig.4.2.2. Vertikale temperatuur verloop in de grondcilinder (droog zand en „perfekte“ isolatie)

Hoogte cilinder = 50 cm

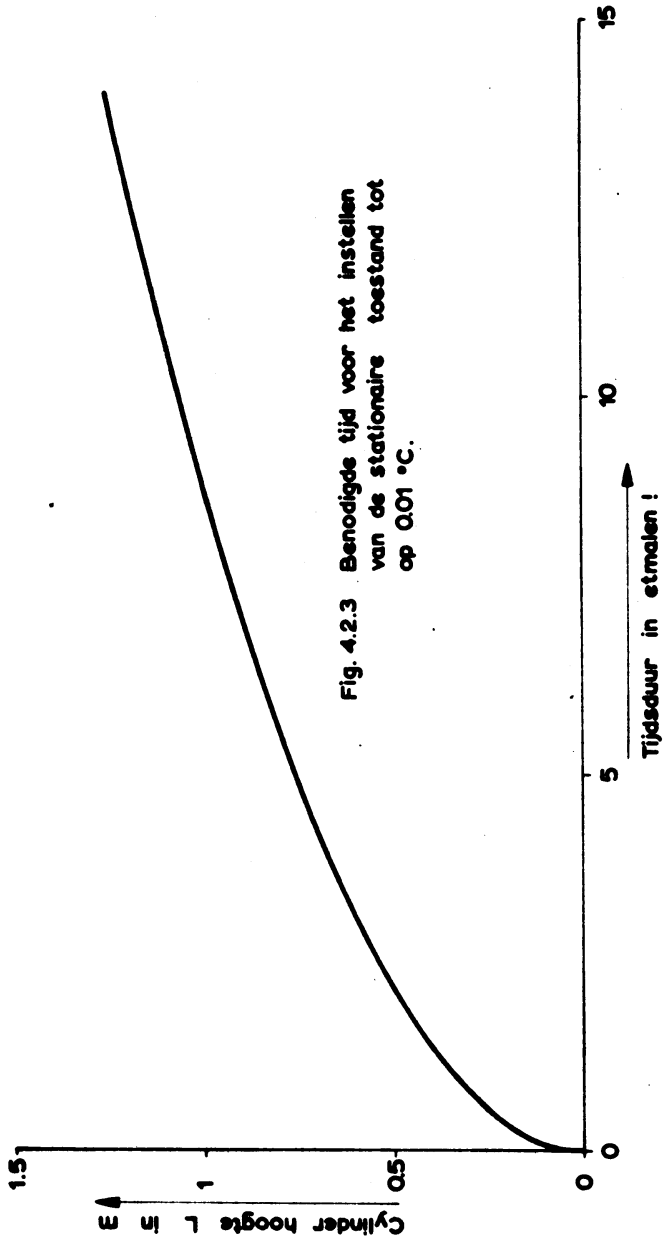


Fig. 4.2.3 Benodigde tijd voor het instellen van de stationaire toestand tot op 0.01 °C.

Appendix I

a. Gemodificeerde Besselfunctie (2, blz. 374 en 4, blz. 372)

De "gewone" Bessel d.v. luidt:

$$X'' + \frac{1}{x} X' + \beta^2 X = 0 \quad (\text{I.1})$$

met als oplossing een gewone Besselfunctie van de nulde orde: $J_0(\beta x)$ waarbij:

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\frac{1}{2}x)^{n+2r}}{r!(n+r)!} \quad \text{en } J_1(x) = -J_0'(x) \quad (\text{I.1a})$$

De gemodificeerde Bessel d.v. luidt:

$$X'' + \frac{1}{x} X' - \beta^2 X = 0 \quad (\text{I.2})$$

en geeft als oplossing een gemodificeerde Besselfunctie van nulde orde $I_0(\beta x)$ waarbij:

$$I_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}x)^{n+2r}}{r!(n+r)!} \quad \text{en } I_1(x) = I_0'(x) \quad (\text{I.2a})$$

Vergelijking (I.1) gaat over in (I.2) door $-\beta^2 = (i\beta)^2$ te stellen, dan levert dit als oplossing $J_0(i\beta x)$ en deze is identiek met de reeds gevonden oplossing van (I.1)

$$I_0(\beta x) = J_0(i\beta x) \quad (\text{I.3a})$$

M.a.w. de gemodificeerde Besselfunctie van nulde orde is een gewone Besselfunctie van nulde orde met complex argument. Voor n° orde is:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) \quad (\text{I.3})$$

b. Computer berekening van de gemodificeerde Besselfunctie

De gewone Besselfunctie vormt een alternerende aflopende reeks. Voor argumenten $x < 16$ kunnen wij formule (I.1a) gebruiken, voor hogere argumenten moet overgegaan worden op de Hankel formule. Met de hulp van Ir. Th. de Crook is dit uitgewerkt voor formule (3.1.3).

De gemodificeerde Besselfunctie convergeert echter slecht, het aantal stappen is te groot. Daarom is overgegaan op een polynoom benadering (6, blz. 378; voor Algol programma zie Appendix III).

Bij de computerberekening van formule (2.1.19) bleken de termen van de reeks periodiek te verlopen. Dit is niet te verwonderen doordat er een periodieke sinusterm in zit. Wil men dus een bepaalde nauwkeurigheid bv. 10^{-5} in de eindoplossing, dan is het niet voldoende om te eisen dat computerprogramma stopt als laatste term $< 10^{-5}$ is. Echter moet een groep van termen genomen worden waarvoor deze eis opgaat. Voor $\zeta = \frac{1}{2}$ moeten dit er 8 zijn vanwege periode $2\pi (= \frac{1}{2} \pi n)$. Om zeker te zijn hebben wij - vanwege de benaderingsfunctie van I_0 en I_1 - 16 termen tezamen genomen.

Appendix II

Toepassing van de Fourier analyse op form. (1.1.9c)

Een functie $f(x)$ is tot een reeks te ontwikkelen d.m.v. de Fourier analyse (5):

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(\frac{ni\pi x}{l}\right) \quad (\text{II.1})$$

$$\text{waarin: } C_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \exp\left(-\frac{ni\pi x}{l}\right) \quad (\text{II.1a})$$

$$\text{en: } \exp(ix) = \cos x + i \sin x \quad (\text{II.1b})$$

Willen wij nu de functie $f(\zeta) = \theta_0 + (\theta_L - \theta_0)\zeta$ (zie formule 2.1.9c) in een Fourierreeks ontwikkelen, waarbij alleen sinus termen overblijven dan moeten wij de functie $f(\zeta)$ periodiek maken in die zin dat het een oneven functie wordt M.a.w. $f(-\zeta) = -f(\zeta)$. Dit levert $f(\zeta) = \theta_0 + (\theta_L - \theta_0)\zeta$ voor $0 < \zeta < 1$ en $f(\zeta) = -\theta_0 + (\theta_L - \theta_0)\zeta$ voor $-1 < \zeta < 0$ (zie fig. II.1).

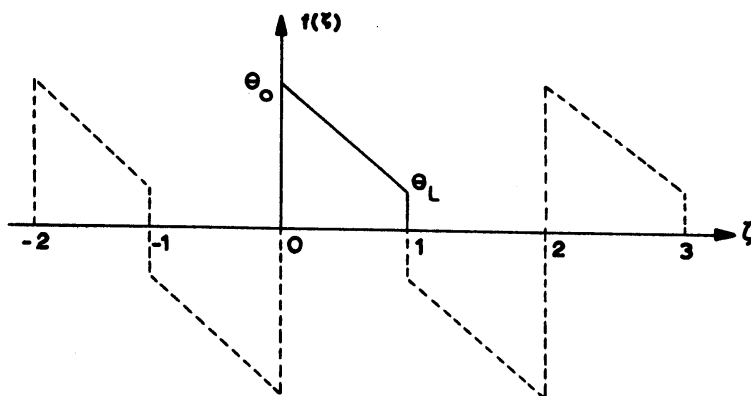


Fig. II.1. Fourier reeksontwikkeling van de functie: $f(\zeta) = \theta_0 + (\theta_L - \theta_0)\zeta$.

Door in formule (II.1a) te integreren tussen de grenzen -1 en $+1$ ($l = 1$) is:

$$C_n = -C_{-n} = \frac{-i}{n\pi} \left[(-1)^n \cdot \theta_L - \theta_0 \right]$$

Dan is de functie $f(\zeta)$ volgens (II.1) en (II.1b) te schrijven als:

$$f(\zeta) \equiv \theta_0 + (\theta_L - \theta_0)\zeta = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \theta_L \cdot (-1)^n - \theta_0 \} \cdot \frac{\sin n\pi\zeta}{n\pi} \quad (\text{II.2})$$

Opm.: In bovenstaande kunnen wij ook gebruik maken van een Fourier ontwikkeling, zoals beschreven is in (7, blz. 32):

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \sin(m_i x) + D_i \cos(n_i x) \quad (\text{II.3})$$

$$\text{waarin: } C_i = \frac{\int_{-1}^1 f(x) \cdot \sin(m_i x) dx}{\int_{-1}^1 \sin^2(m_i x) dx} \quad (\text{II.3a})$$

$$\text{en: } D_i = \frac{\int_{-1}^1 f(x) \cdot \cos(n_i x) dx}{\int_{-1}^1 \cos^2(n_i x) dx} \quad (\text{II.3b})$$

Hierin kunnen wij $+1$ vervangen door -1 en x door ζ . Verder is een integratie van de functie $f(x)$ tussen -1 en $+1$ identiek met de integratie tussen 0 en $+1$ indien, zoals in ons geval, $f(x) = 0$ tussen -1 en 0 .

Bij de oplossing van differentiaal vergelijkingen van Sturm-Liouville (waartoe de in dit verslag gebruikte d.v.'s behoren) krijgen wij een analoge berekening van coëfficiënten (1, dl. 2, blz. 15) als in formule (II.3 a en b). De coëfficiënt A_n (in formule 2.1.18) is dan ook m.b.v. deze analoge berekening rechtstreeks te vinden (zonder eerst $f(\zeta)$ in Fourierreeks te ontwikkelen).

Appendix III a.

```
begin comment KNMI -GCRJ - BESSIEI - 021069
Temperatuur-verdeling in grondbak t.g.v. radiale warmtelek;

integer een, n, mi, teken;
real e, pi, xi, t, zeta, r;

real procedure IO(x) ; real x;
begin real t, h;
t:= x/3.75;
if x<3.75 then IO:=1+3.5156229x2+3.0899424x4+
1.2067492x6+0.2659732x8+0.0360768x10+0.0045813x12
else
begin h:=1/(x0.5e-x);
IO:=hx(.39894228+.01328592x-1+.00225319x-2
-.00157565x-3+.00916281x-4
-.02057706x-5+.02635537x-6
-.01647633x-7+.00392377x-8);
end
end;

real procedure I1(x); real x ;
begin real t, h;
t:=x/3.75;
if x<3.75 then I1:=x(0.5+.87890594x2+.51498869x4
+.15084934x6+.02658733x8+.00301532x10
+.00032411x12)
else
begin h:=1/(x0.5e-x);
I1:=hx(.39894228-.03988024x-1-.00362018x-2
+.00163801x-3-.01031555x-4
+.02282967x-5-.02895312x-6
+.01787654x-7-.00420059x-8);
end
end;

real procedure SOM(f, een); integer een; real procedure f;
begin integer j; real ds, s; boolean ja;
s:=0;
ja:=false;
n:=een;
teken:=+1;
TEL: ds:=0;
for j :=n, j+1 while j<n+15 do
begin teken:= -teken;
r:= (j*pi) ;
ds:=ds+(teken *IO(r*mi)*xi)*f(r*zeta))/(r*
((r*mi*I1(r*mi))/t+IO(r*mi)));
end;
s:=s+ds;
n:=n+16;
if abs(ds)<.7 then begin if ja then goto AF else ja := true end
else ja:= false ;
goto TEL;
AF: SOM:=s;
e:=2.7182818284590 ;
pi:=3.1415926535898 ;

end;
```

Appendix III b.

Temperatuur-verdeling in cylinder t.g.v. radiale warmtelek

coefficient A(xi, zeta) uit formule (3.1.1.)

$$\mu = 1$$

zeta =					xi	Nu
0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	↓	↓
-.000000	-.000000	-.000000	+.000000	-.000000	.00	.00
-.000000	-.000000	-.000000	+.000000	-.000000	.25	.00
-.000000	+.000000	+.000000	+.000000	-.000000	.50	.00
-.000000	+.000000	+.000000	+.000000	-.000000	.75	.00
-.000000	+.000000	+.000000	+.000000	-.000000	1.00	.00
-.000000	-.000312	-.000449	-.000324	-.000000	.00	.01
-.000000	-.000358	-.000521	-.000380	-.000000	.25	.01
-.000000	-.000514	-.000769	-.000583	-.000000	.50	.01
-.000000	-.000822	-.001302	-.001088	-.000000	.75	.01
-.000000	-.001332	-.002281	-.002348	-.000000	1.00	.01
-.000000	-.000621	-.000895	-.000646	-.000000	.00	.02
-.000000	-.000713	-.001038	-.000757	-.000000	.25	.02
-.000000	-.001023	-.001533	-.001162	-.000000	.50	.02
-.000000	-.001637	-.002593	-.002168	-.000000	.75	.02
-.000000	-.002653	-.004543	-.004681	-.000000	1.00	.02
-.000000	-.001232	-.001777	-.001282	-.000000	.00	.04
-.000000	-.001416	-.002060	-.001503	-.000000	.25	.04
-.000000	-.002030	-.003042	-.002306	-.000000	.50	.04
-.000000	-.003246	-.005146	-.004305	-.000000	.75	.04
-.000000	-.005259	-.009013	-.009300	-.000000	1.00	.04
-.000000	-.001834	-.002645	-.001909	-.000000	.00	.06
-.000000	-.002107	-.003067	-.002237	-.000000	.25	.06
-.000000	-.003021	-.004529	-.003434	-.000000	.50	.06
-.000000	-.004830	-.007660	-.006412	-.000000	.75	.06
-.000000	-.007820	-.013411	-.013859	-.000000	1.00	.06
-.000000	-.002426	-.003500	-.002526	-.000000	.00	.08
-.000000	-.002788	-.004058	-.002961	-.000000	.25	.08
-.000000	-.003997	-.005993	-.004546	-.000000	.50	.08
-.000000	-.006388	-.010135	-.008490	-.000000	.75	.08
-.000000	-.010336	-.017740	-.018360	-.000000	1.00	.08
-.000000	-.003010	-.004342	-.003134	-.000000	.00	.10
-.000000	-.003459	-.005035	-.003673	-.000000	.25	.10
-.000000	-.004958	-.007435	-.005641	-.000000	.50	.10
-.000000	-.007920	-.012573	-.010539	-.000000	.75	.10
-.000000	-.012809	-.022000	-.022802	-.000000	1.00	.10
-.000000	-.005800	-.008370	-.006045	-.000000	.00	.20
-.000000	-.006665	-.009707	-.007086	-.000000	.25	.20
-.000000	-.009547	-.014332	-.010890	-.000000	.50	.20
-.000000	-.015228	-.024228	-.020378	-.000000	.75	.20
-.000000	-.024555	-.042330	-.044187	-.000000	1.00	.20
-.000000	-.008394	-.012119	-.008756	-.000000	.00	.30
-.000000	-.009644	-.014054	-.010266	-.000000	.25	.30
-.000000	-.013805	-.020749	-.015787	-.000000	.50	.30
-.000000	-.021990	-.035061	-.029586	-.000000	.75	.30
-.000000	-.035357	-.061167	-.064293	-.000000	1.00	.30

max = 1

zeta =	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	x1	Nu
						↓	↓
	-.000000	-.010812	-.015616	-.011287	-.000000	.00	.40
	-.000000	-.012420	-.018108	-.013236	-.000000	.25	.40
	-.000000	-.017767	-.026733	-.020367	-.000000	.50	.40
	-.000000	-.028261	-.045156	-.038225	-.000000	.75	.40
	-.000000	-.045318	-.078664	-.083236	-.000000	1.00	.40
	-.000000	-.013071	-.018885	-.013655	-.000000	.00	.50
	-.000000	-.015012	-.021899	-.016015	-.000000	.25	.50
	-.000000	-.021462	-.032327	-.024660	-.000000	.50	.50
	-.000000	-.034093	-.054584	-.046348	-.000000	.75	.50
	-.000000	-.054524	-.094954	-.101122	-.000000	1.00	.50
	-.000000	-.015186	-.021948	-.015876	-.000000	.00	.60
	-.000000	-.017438	-.025451	-.018623	-.000000	.25	.60
	-.000000	-.024916	-.037567	-.028693	-.000000	.50	.60
	-.000000	-.039528	-.063410	-.054002	-.000000	.75	.60
	-.000000	-.063054	-.110154	-.118041	-.000000	1.00	.60
	-.000000	-.017171	-.024824	-.017963	-.000000	.00	.70
	-.000000	-.019713	-.028786	-.021075	-.000000	.25	.70
	-.000000	-.028151	-.042486	-.032489	-.000000	.50	.70
	-.000000	-.044604	-.071689	-.061228	-.000000	.75	.70
	-.000000	-.070973	-.124366	-.134075	-.000000	1.00	.70
	-.000000	-.019036	-.027530	-.019927	-.000000	.00	.80
	-.000000	-.021851	-.031923	-.023383	-.000000	.25	.80
	-.000000	-.031187	-.047113	-.036069	-.000000	.50	.80
	-.000000	-.049353	-.079468	-.068062	-.000000	.75	.80
	-.000000	-.078342	-.137679	-.149296	-.000000	1.00	.80
	-.000000	-.020793	-.030080	-.021780	-.000000	.00	.90
	-.000000	-.023864	-.034879	-.025562	-.000000	.25	.90
	-.000000	-.034042	-.051473	-.039452	-.000000	.50	.90
	-.000000	-.053807	-.086793	-.074536	-.000000	.75	.90
	-.000000	-.085212	-.150174	-.163765	-.000000	1.00	.90
	-.000000	-.022450	-.032487	-.023531	-.000000	.00	1.00
	-.000000	-.025762	-.037670	-.027621	-.000000	.25	1.00
	-.000000	-.036730	-.055588	-.042652	-.000000	.50	1.00
	-.000000	-.057989	-.093701	-.080680	-.000000	.75	1.00
	-.000000	-.091627	-.161920	-.177542	-.000000	1.00	1.00
	-.000000	-.029501	-.042751	-.031011	-.000000	.00	1.50
	-.000000	-.033831	-.049569	-.036426	-.000000	.25	1.50
	-.000000	-.048119	-.073122	-.056390	-.000000	.50	1.50
	-.000000	-.075568	-.123068	-.107253	-.000000	.75	1.50
	-.000000	-.118170	-.211401	-.237657	-.000000	1.00	1.50
	-.000000	-.034993	-.050772	-.036877	-.000000	.00	2.00
	-.000000	-.040105	-.058866	-.043343	-.000000	.25	2.00
	-.000000	-.056925	-.086811	-.067242	-.000000	.50	2.00
	-.000000	-.088985	-.145901	-.128500	-.000000	.75	2.00
	-.000000	-.137902	-.249276	-.286351	-.000000	1.00	2.00

mu = 1

					xi	Nu	
zeta =	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	↓	↓
	-.000000	-.042986	-.062496	-.045489	-.000000	.00	3.00
	-.000000	-.049217	-.072453	-.053519	-.000000	.25	3.00
	-.000000	-.069619	-.106792	-.083327	-.000000	.50	3.00
	-.000000	-.108003	-.179046	-.160486	-.000000	.75	3.00
	-.000000	-.164912	-.303065	-.360696	-.000000	1.00	3.00
	-.000000	-.048518	-.070653	-.051514	-.000000	.00	4.00
	-.000000	-.055508	-.081904	-.060656	-.000000	.25	4.00
	-.000000	-.078303	-.120669	-.094708	-.000000	.50	4.00
	-.000000	-.120745	-.201897	-.183529	-.000000	.75	4.00
	-.000000	-.182239	-.339096	-.414957	-.000000	1.00	4.00
	-.000000	-.052571	-.076655	-.055968	-.000000	.00	5.00
	-.000000	-.060107	-.088857	-.065944	-.000000	.25	5.00
	-.000000	-.084603	-.130864	-.103203	-.000000	.50	5.00
	-.000000	-.129823	-.218570	-.200985	-.000000	.75	5.00
	-.000000	-.194126	-.364698	-.456368	-.000000	1.00	5.00
	-.000000	-.055667	-.081257	-.059396	-.000000	.00	6.00
	-.000000	-.063613	-.094187	-.070022	-.000000	.25	6.00
	-.000000	-.089374	-.138668	-.109795	-.000000	.50	6.00
	-.000000	-.136592	-.231255	-.214700	-.000000	.75	6.00
	-.000000	-.202701	-.383705	-.489018	-.000000	1.00	6.00
	-.000000	-.058108	-.084898	-.062118	-.000000	.00	7.00
	-.000000	-.066373	-.098402	-.073264	-.000000	.25	7.00
	-.000000	-.093107	-.144833	-.115065	-.000000	.50	7.00
	-.000000	-.141819	-.241217	-.225778	-.000000	.75	7.00
	-.000000	-.209133	-.398302	-.515411	-.000000	1.00	7.00
	-.000000	-.060081	-.087850	-.064331	-.000000	.00	8.00
	-.000000	-.068601	-.101819	-.075904	-.000000	.25	8.00
	-.000000	-.096106	-.149825	-.119376	-.000000	.50	8.00
	-.000000	-.145967	-.249242	-.234923	-.000000	.75	8.00
	-.000000	-.214111	-.409823	-.537172	-.000000	1.00	8.00
	-.000000	-.061709	-.090291	-.066166	-.000000	.00	9.00
	-.000000	-.070437	-.104645	-.078096	-.000000	.25	9.00
	-.000000	-.098566	-.153949	-.122971	-.000000	.50	9.00
	-.000000	-.149335	-.255840	-.242607	-.000000	.75	9.00
	-.000000	-.218061	-.419119	-.555409	-.000000	1.00	9.00
	-.000000	-.063075	-.092344	-.067713	-.000000	.00	10.00
	-.000000	-.071975	-.107021	-.079946	-.000000	.25	10.00
	-.000000	-.100620	-.157413	-.126015	-.000000	.50	10.00
	-.000000	-.152120	-.261357	-.249157	-.000000	.75	10.00
	-.000000	-.221264	-.426761	-.570900	-.000000	1.00	10.00
	-.000000	-.067551	-.099103	-.072832	-.000000	.00	15.00
	-.000000	-.077005	-.114840	-.086081	-.000000	.25	15.00
	-.000000	-.107275	-.168789	-.136192	-.000000	.50	15.00
	-.000000	-.160968	-.279293	-.271361	-.000000	.75	15.00
	-.000000	-.231016	-.450656	-.622732	-.000000	1.00	15.00

mu = 1

zeta =						x1	Nu
0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	↓	↓	
-.000000	-.070028	-.102867	-.075702	-.000000	.00	20.00	
-.000000	-.079779	-.119193	-.089532	-.000000	.25	20.00	
-.000000	-.110904	-.175101	-.141975	-.000000	.50	20.00	
-.000000	-.165665	-.289100	-.284203	-.000000	.75	20.00	
-.000000	-.235905	-.463019	-.651910	-.000000	1.00	20.00	
-.000000	-.072685	-.106927	-.078816	-.000000	.00	30.00	
-.000000	-.082747	-.123886	-.093286	-.000000	.25	30.00	
-.000000	-.114749	-.181887	-.148321	-.000000	.50	30.00	
-.000000	-.170533	-.299502	-.298493	-.000000	.75	30.00	
-.000000	-.240739	-.475497	-.683248	-.000000	1.00	30.00	
-.000000	-.074087	-.109080	-.080475	-.000000	.00	40.00	
-.000000	-.084310	-.126372	-.095290	-.000000	.25	40.00	
-.000000	-.116756	-.185472	-.151735	-.000000	.50	40.00	
-.000000	-.173025	-.304930	-.306270	-.000000	.75	40.00	
-.000000	-.243117	-.481723	-.699618	-.000000	1.00	40.00	
-.000000	-.074953	-.110413	-.081506	-.000000	.00	50.00	
-.000000	-.085274	-.127912	-.096537	-.000000	.25	50.00	
-.000000	-.117988	-.187689	-.153870	-.000000	.50	50.00	
-.000000	-.174536	-.308258	-.311162	-.000000	.75	50.00	
-.000000	-.244527	-.485439	-.709610	-.000000	1.00	50.00	
-.000000	-.075541	-.111320	-.082209	-.000000	.00	60.00	
-.000000	-.085927	-.128959	-.097388	-.000000	.25	60.00	
-.000000	-.118821	-.189195	-.155330	-.000000	.50	60.00	
-.000000	-.175551	-.310507	-.314524	-.000000	.75	60.00	
-.000000	-.245458	-.487903	-.716322	-.000000	1.00	60.00	
-.000000	-.075966	-.111977	-.082719	-.000000	.00	70.00	
-.000000	-.086400	-.129718	-.098006	-.000000	.25	70.00	
-.000000	-.119422	-.190285	-.156393	-.000000	.50	70.00	
-.000000	-.176278	-.312128	-.316976	-.000000	.75	70.00	
-.000000	-.246119	-.489655	-.721134	-.000000	1.00	70.00	
-.000000	-.076288	-.112475	-.083106	-.000000	.00	80.00	
-.000000	-.086758	-.130293	-.098475	-.000000	.25	80.00	
-.000000	-.119875	-.191110	-.157201	-.000000	.50	80.00	
-.000000	-.176826	-.313352	-.318845	-.000000	.75	80.00	
-.000000	-.246612	-.490965	-.724749	-.000000	1.00	80.00	
-.000000	-.076540	-.112865	-.083409	-.000000	.00	90.00	
-.000000	-.087038	-.130743	-.098843	-.000000	.25	90.00	
-.000000	-.120230	-.191756	-.157836	-.000000	.50	90.00	
-.000000	-.177252	-.314308	-.320315	-.000000	.75	90.00	
-.000000	-.246993	-.491981	-.727562	-.000000	1.00	90.00	
-.000000	-.076743	-.113180	-.083654	-.000000	.00	100.00	
-.000000	-.087263	-.131106	-.099140	-.000000	.25	100.00	
-.000000	-.120515	-.192276	-.158348	-.000000	.50	100.00	
-.000000	-.177594	-.315076	-.321503	-.000000	.75	100.00	
-.000000	-.247298	-.492791	-.729814	-.000000	1.00	100.00	

$\mu = 2$

zeta =					xi	Nu
0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	ψ	ψ
-.000000	-.000000	-.000000	+.000000	-.000000	.00	.00
-.000000	+.000000	+.000000	+.000000	-.000000	.25	.00
-.000000	+.000000	+.000000	+.000000	-.000000	.50	.00
-.000000	+.000000	+.000000	+.000000	-.000000	.75	.00
-.000000	+.000000	+.000000	+.000000	-.000000	1.00	.00
-.000000	-.000009	-.000013	-.000009	-.000000	.00	.01
-.000000	-.000015	-.000022	-.000015	-.000000	.25	.01
-.000000	-.000048	-.000069	-.000050	-.000000	.50	.01
-.000000	-.000177	-.000266	-.000203	-.000000	.75	.01
-.000000	-.000586	-.001016	-.001070	-.000000	1.00	.01
-.000000	-.000018	-.000025	-.000018	-.000000	.00	.02
-.000000	-.000031	-.000043	-.000031	-.000000	.25	.02
-.000000	-.000097	-.000139	-.000099	-.000000	.50	.02
-.000000	-.000352	-.000531	-.000405	-.000000	.75	.02
-.000000	-.001170	-.002028	-.002138	-.000000	1.00	.02
-.000000	-.000036	-.000050	-.000036	-.000000	.00	.04
-.000000	-.000061	-.000087	-.000061	-.000000	.25	.04
-.000000	-.000192	-.000276	-.000198	-.000000	.50	.04
-.000000	-.000702	-.001058	-.000808	-.000000	.75	.04
-.000000	-.002330	-.004041	-.004263	-.000000	1.00	.04
-.000000	-.000053	-.000075	-.000053	-.000000	.00	.06
-.000000	-.000091	-.000130	-.000092	-.000000	.25	.06
-.000000	-.000288	-.000413	-.000296	-.000000	.50	.06
-.000000	-.001050	-.001582	-.001208	-.000000	.75	.06
-.000000	-.003482	-.006040	-.006375	-.000000	1.00	.06
-.000000	-.000071	-.000105	-.000071	-.000000	.00	.08
-.000000	-.000121	-.000172	-.000122	-.000000	.25	.08
-.000000	-.000382	-.000548	-.000394	-.000000	.50	.08
-.000000	-.001395	-.002102	-.001605	-.000000	.75	.08
-.000000	-.004624	-.008024	-.008475	-.000000	1.00	.08
-.000000	-.000088	-.000125	-.000088	-.000000	.00	.10
-.000000	-.000151	-.000214	-.000152	-.000000	.25	.10
-.000000	-.000476	-.000683	-.000490	-.000000	.50	.10
-.000000	-.001737	-.002619	-.002000	-.000000	.75	.10
-.000000	-.005757	-.009993	-.010563	-.000000	1.00	.10
-.000000	-.000173	-.000245	-.000174	-.000000	.00	.20
-.000000	-.000297	-.000422	-.000299	-.000000	.25	.20
-.000000	-.000936	-.001343	-.000964	-.000000	.50	.20
-.000000	-.003414	-.005150	-.003934	-.000000	.75	.20
-.000000	-.011291	-.019633	-.020821	-.000000	1.00	.20
-.000000	-.000256	-.000362	-.000256	-.000000	.00	.30
-.000000	-.000439	-.000622	-.000441	-.000000	.25	.30
-.000000	-.001381	-.001982	-.001423	-.000000	.50	.30
-.000000	-.005034	-.007596	-.005808	-.000000	.75	.30
-.000000	-.016614	-.028935	-.030786	-.000000	1.00	.30

$\mu_1 = 2$

zeta = 0.00		0.25	0.50	0.75	1.00	χ_1	Nu
						ψ	ψ
-.000000	-.000335	-.000475	-.000336	-.000000	.00	.40	
-.000000	-.000575	-.000816	-.000579	-.000000	.25	.40	
-.000000	-.001812	-.002600	-.001866	-.000000	.50	.40	
-.000000	-.006599	-.009964	-.007623	-.000000	.75	.40	
-.000000	-.021737	-.037919	-.040473	-.000000	1.00	.40	
-.000000	-.000412	-.000584	-.000413	-.000000	.00	.50	
-.000000	-.000707	-.001003	-.000712	-.000000	.25	.50	
-.000000	-.002228	-.003198	-.002296	-.000000	.50	.50	
-.000000	-.008112	-.012255	-.009382	-.000000	.75	.50	
-.000000	-.026670	-.046598	-.049893	-.000000	1.00	.50	
-.000000	-.000487	-.000690	-.000488	-.000000	.00	.60	
-.000000	-.000836	-.001185	-.000841	-.000000	.25	.60	
-.000000	-.002631	-.003777	-.002712	-.000000	.50	.60	
-.000000	-.009576	-.014474	-.011087	-.000000	.75	.60	
-.000000	-.031423	-.054988	-.059057	-.000000	1.00	.60	
-.000000	-.000560	-.000792	-.000561	-.000000	.00	.70	
-.000000	-.000960	-.001361	-.000966	-.000000	.25	.70	
-.000000	-.003022	-.004338	-.003115	-.000000	.50	.70	
-.000000	-.010993	-.016624	-.012742	-.000000	.75	.70	
-.000000	-.036005	-.063102	-.067978	-.000000	1.00	.70	
-.000000	-.000630	-.000891	-.000631	-.000000	.00	.80	
-.000000	-.001080	-.001532	-.001087	-.000000	.25	.80	
-.000000	-.003401	-.004882	-.003506	-.000000	.50	.80	
-.000000	-.012365	-.018708	-.014349	-.000000	.75	.80	
-.000000	-.040424	-.070953	-.076664	-.000000	1.00	.80	
-.000000	-.000698	-.000988	-.000699	-.000000	.00	.90	
-.000000	-.001197	-.001698	-.001204	-.000000	.25	.90	
-.000000	-.003768	-.005410	-.003886	-.000000	.50	.90	
-.000000	-.013694	-.020730	-.015909	-.000000	.75	.90	
-.000000	-.044689	-.078554	-.085126	-.000000	1.00	.90	
-.000000	-.000764	-.001081	-.000765	-.000000	.00	1.00	
-.000000	-.001310	-.001858	-.001318	-.000000	.25	1.00	
-.000000	-.004124	-.005922	-.004254	-.000000	.50	1.00	
-.000000	-.014983	-.022691	-.017425	-.000000	.75	1.00	
-.000000	-.048806	-.085915	-.093372	-.000000	1.00	1.00	
-.000000	-.001067	-.001510	-.001069	-.000000	.00	1.50	
-.000000	-.001830	-.002596	-.001841	-.000000	.25	1.50	
-.000000	-.005757	-.008271	-.005945	-.000000	.50	1.50	
-.000000	-.020873	-.031685	-.024400	-.000000	.75	1.50	
-.000000	-.067414	-.119487	-.131655	-.000000	1.00	1.50	
-.000000	-.001331	-.001884	-.001333	-.000000	.00	2.00	
-.000000	-.002282	-.003238	-.002297	-.000000	.25	2.00	
-.000000	-.007178	-.010317	-.007420	-.000000	.50	2.00	
-.000000	-.025975	-.039515	-.030511	-.000000	.75	2.00	
-.000000	-.083232	-.148450	-.165662	-.000000	1.00	2.00	

mi = 2

zeta = 0.00					x1	Nu
0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	↓	↓
-.000000	-.001768	-.002503	-.001772	-.000000	.00	3.00
-.000000	-.003032	-.004302	-.003053	-.000000	.25	3.00
-.000000	-.009529	-.013709	-.009868	-.000000	.50	3.00
-.000000	-.034367	-.052484	-.040719	-.000000	.75	3.00
-.000000	-.108566	-.195784	-.223523	-.000000	1.00	3.00
-.000000	-.002116	-.002996	-.002121	-.000000	.00	4.00
-.000000	-.003627	-.005149	-.003654	-.000000	.25	4.00
-.000000	-.011394	-.016405	-.011818	-.000000	.50	4.00
-.000000	-.040974	-.062784	-.048915	-.000000	.75	4.00
-.000000	-.127839	-.232717	-.271007	-.000000	1.00	4.00
-.000000	-.002399	-.003396	-.002405	-.000000	.00	5.00
-.000000	-.004112	-.005838	-.004144	-.000000	.25	5.00
-.000000	-.012910	-.018600	-.013409	-.000000	.50	5.00
-.000000	-.046304	-.071162	-.055648	-.000000	.75	5.00
-.000000	-.142902	-.262241	-.310742	-.000000	1.00	5.00
-.000000	-.002634	-.003729	-.002640	-.000000	.00	6.00
-.000000	-.004514	-.006409	-.004550	-.000000	.25	6.00
-.000000	-.014166	-.020422	-.014731	-.000000	.50	6.00
-.000000	-.050690	-.078108	-.061283	-.000000	.75	6.00
-.000000	-.154939	-.286317	-.344519	-.000000	1.00	6.00
-.000000	-.002832	-.004010	-.002839	-.000000	.00	7.00
-.000000	-.004854	-.006892	-.004893	-.000000	.25	7.00
-.000000	-.015223	-.021958	-.015848	-.000000	.50	7.00
-.000000	-.054360	-.083959	-.066070	-.000000	.75	7.00
-.000000	-.164739	-.306277	-.373603	-.000000	1.00	7.00
-.000000	-.003001	-.004249	-.003009	-.000000	.00	8.00
-.000000	-.005143	-.007304	-.005186	-.000000	.25	8.00
-.000000	-.016126	-.023270	-.016804	-.000000	.50	8.00
-.000000	-.057475	-.088956	-.070190	-.000000	.75	8.00
-.000000	-.172847	-.323061	-.398918	-.000000	1.00	8.00
-.000000	-.003147	-.004457	-.003156	-.000000	.00	9.00
-.000000	-.005394	-.007660	-.005439	-.000000	.25	9.00
-.000000	-.016905	-.024405	-.017632	-.000000	.50	9.00
-.000000	-.060150	-.093272	-.073774	-.000000	.75	9.00
-.000000	-.179647	-.337347	-.421157	-.000000	1.00	9.00
-.000000	-.003275	-.004638	-.003284	-.000000	.00	10.00
-.000000	-.005612	-.007971	-.005661	-.000000	.25	10.00
-.000000	-.017584	-.025396	-.018355	-.000000	.50	10.00
-.000000	-.062470	-.097037	-.076922	-.000000	.75	10.00
-.000000	-.185420	-.349635	-.440848	-.000000	1.00	10.00
-.000000	-.003729	-.005281	-.003740	-.000000	.00	15.00
-.000000	-.006389	-.009076	-.006448	-.000000	.25	15.00
-.000000	-.019991	-.028917	-.020934	-.000000	.50	15.00
-.000000	-.070601	-.110393	-.088273	-.000000	.75	15.00
-.000000	-.204625	-.391716	-.512969	-.000000	1.00	15.00

nu = 2

zeta =		0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	x1	Nu
							↓	↓
-.000000	-.004006	-.005674	-.004019	-.000000			.00	20.00
-.000000	-.006863	-.009753	-.006930	-.000000			.25	20.00
-.000000	-.021458	-.031071	-.022519	-.000000			.50	20.00
-.000000	-.075472	-.118538	-.095358	-.000000			.75	20.00
-.000000	-.215291	-.416005	-.558679	-.000000			1.00	20.00
-.000000	-.004329	-.006131	-.004343	-.000000			.00	30.00
-.000000	-.007414	-.010538	-.007490	-.000000			.25	30.00
-.000000	-.023153	-.033572	-.024367	-.000000			.50	30.00
-.000000	-.081011	-.127961	-.103746	-.000000			.75	30.00
-.000000	-.226575	-.442508	-.612973	-.000000			1.00	30.00
-.000000	-.004510	-.006389	-.004525	-.000000			.00	40.00
-.000000	-.007723	-.010980	-.007806	-.000000			.25	40.00
-.000000	-.024104	-.034979	-.025411	-.000000			.50	40.00
-.000000	-.084068	-.133246	-.108557	-.000000			.75	40.00
-.000000	-.232390	-.456500	-.643847	-.000000			1.00	40.00
-.000000	-.004626	-.006554	-.004642	-.000000			.00	50.00
-.000000	-.007922	-.011264	-.008008	-.000000			.25	50.00
-.000000	-.024712	-.035881	-.026082	-.000000			.50	50.00
-.000000	-.086003	-.136626	-.111681	-.000000			.75	50.00
-.000000	-.235912	-.465083	-.663620	-.000000			1.00	50.00
-.000000	-.004707	-.006668	-.004723	-.000000			.00	60.00
-.000000	-.008060	-.011461	-.008149	-.000000			.25	60.00
-.000000	-.025134	-.036509	-.026550	-.000000			.50	60.00
-.000000	-.087337	-.138973	-.113874	-.000000			.75	60.00
-.000000	-.238268	-.470864	-.677305	-.000000			1.00	60.00
-.000000	-.004767	-.006753	-.004783	-.000000			.00	70.00
-.000000	-.008162	-.011606	-.008253	-.000000			.25	70.00
-.000000	-.025445	-.036972	-.026896	-.000000			.50	70.00
-.000000	-.088312	-.140698	-.115498	-.000000			.75	70.00
-.000000	-.239952	-.475015	-.687308	-.000000			1.00	70.00
-.000000	-.004812	-.006818	-.004829	-.000000			.00	80.00
-.000000	-.008239	-.011717	-.008332	-.000000			.25	80.00
-.000000	-.025682	-.037326	-.027160	-.000000			.50	80.00
-.000000	-.089055	-.142019	-.116750	-.000000			.75	80.00
-.000000	-.241215	-.478136	-.694927	-.000000			1.00	80.00
-.000000	-.004848	-.006869	-.004866	-.000000			.00	90.00
-.000000	-.008301	-.011806	-.008395	-.000000			.25	90.00
-.000000	-.025870	-.037606	-.027370	-.000000			.50	90.00
-.000000	-.089641	-.143063	-.117745	-.000000			.75	90.00
-.000000	-.242196	-.480568	-.700914	-.000000			1.00	90.00
-.000000	-.004878	-.006910	-.004895	-.000000			.00	100.00
-.000000	-.008351	-.011877	-.008446	-.000000			.25	100.00
-.000000	-.026023	-.037833	-.027540	-.000000			.50	100.00
-.000000	-.090115	-.143909	-.118554	-.000000			.75	100.00
-.000000	-.242981	-.482515	-.705740	-.000000			1.00	100.00

Appendix IVa

Thermische isolatie van grondbak
droog zand $\lambda_1 = 0.2 \text{ W/m C}$, glaswol isolatie $\lambda_2 = 0.03 \text{ W/m C}$

Gemodificeerd Nusselt-getal voor cylinder, zie formule(3.1.8).

R(m) = 0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	d(m) ↓
+5.000	+7.500	+10.000	+12.500	+15.000	+20.000	+25.000	.000
+3.726	+5.574	+7.421	+9.268	+11.116	+14.810	+18.505	.001
+1.218	+1.792	+2.367	+2.941	+3.516	+4.664	+5.813	.010
+.721	+1.047	+1.373	+1.699	+2.024	+2.675	+3.325	.020
+.524	+.752	+.980	+1.207	+1.434	+1.888	+2.342	.030
+.418	+.594	+.769	+.943	+1.118	+1.467	+1.815	.040
+.352	+.495	+.637	+.779	+.921	+1.204	+1.487	.050
+.307	+.427	+.547	+.667	+.786	+1.024	+1.263	.060
+.273	+.378	+.482	+.585	+.688	+.894	+1.100	.070
+.248	+.340	+.432	+.523	+.614	+.795	+.976	.080
+.228	+.311	+.392	+.474	+.555	+.717	+.879	.090
+.212	+.287	+.361	+.434	+.508	+.654	+.800	.100
+.161	+.213	+.264	+.314	+.364	+.463	+.562	.150
+.135	+.175	+.214	+.252	+.290	+.365	+.440	.200
+.119	+.152	+.183	+.214	+.245	+.306	+.366	.250
+.108	+.136	+.163	+.189	+.215	+.266	+.317	.300
+.093	+.115	+.136	+.156	+.176	+.215	+.254	.400
+.083	+.102	+.119	+.136	+.152	+.184	+.215	.500

Thermische isolatie van grondbak
droog zand $\lambda_1 = 0.2 \text{ W/m C}$, asbest isolatie $\lambda_2 = 0.16 \text{ W/m C}$

Gemodificeerd Nusselt-getal voor cylinder, zie formule(3.1.8).

R(m) = 0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	d(m) ↓
+5.000	+7.500	+10.000	+12.500	+15.000	+20.000	+25.000	.000
+4.663	+6.972	+9.282	+11.591	+13.901	+18.520	+23.139	.001
+3.279	+4.800	+6.320	+7.840	+9.360	+12.400	+15.439	.010
+2.509	+3.613	+4.716	+5.818	+6.920	+9.124	+11.327	.020
+2.058	+2.927	+3.793	+4.658	+5.523	+7.251	+8.979	.030
+1.762	+2.479	+3.192	+3.905	+4.617	+6.039	+7.461	.040
+1.552	+2.163	+2.771	+3.376	+3.981	+5.190	+6.398	.050
+1.396	+1.929	+2.458	+2.985	+3.511	+4.562	+5.612	.060
+1.274	+1.747	+2.216	+2.683	+3.149	+4.079	+5.008	.070
+1.177	+1.603	+2.024	+2.444	+2.862	+3.696	+4.529	.080
+1.097	+1.485	+1.868	+2.248	+2.628	+3.384	+4.139	.090
+1.030	+1.387	+1.738	+2.086	+2.433	+3.126	+3.816	.100
+.813	+1.069	+1.318	+1.565	+1.810	+2.297	+2.781	.150
+.693	+.894	+1.089	+1.281	+1.471	+1.848	+2.222	.200
+.615	+.782	+.943	+1.101	+1.257	+1.566	+1.872	.250
+.560	+.704	+.842	+.977	+1.110	+1.372	+1.631	.300
+.486	+.601	+.710	+.815	+.918	+1.121	+1.320	.400
+.439	+.536	+.626	+.714	+.798	+.964	+1.127	.500

Appendix V:

stationaire insteltijd cylinder

coefficient A(zeta,tau) uit formule(3.2.1)

tau ↓		zeta = 0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
9	4	-.000000	-.250000	-.500000	-.750000	-.000000
1	3	-.000000	-.250000	-.500000	-.750000	-.000000
2	3	-.000000	-.250000	-.500000	-.749923	-.000000
3	3	-.000000	-.250000	-.500000	-.748751	-.000000
4	3	-.000000	-.250000	-.500000	-.744811	-.000000
5	3	-.000000	-.250000	-.499999	-.737581	-.000000
6	3	-.000000	-.250000	-.499995	-.727521	-.000000
7	3	-.000000	-.250000	-.499976	-.715389	-.000000
8	3	-.000000	-.250000	-.499923	-.701893	-.000000
9	3	-.000000	-.250000	-.499806	-.687593	-.000000
1	2	-.000000	-.250000	-.499593	-.672900	-.000000
2	2	-.000000	-.249823	-.487581	-.538700	-.000000
3	2	-.000000	-.247801	-.458773	-.442566	-.000000
4	2	-.000000	-.242000	-.422900	-.373241	-.000000
5	2	-.000000	-.232371	-.386156	-.320805	-.000000
6	2	-.000000	-.219925	-.351100	-.279514	-.000000
7	2	-.000000	-.205815	-.318612	-.245967	-.000000
8	2	-.000000	-.190985	-.288877	-.218041	-.000000
9	2	-.000000	-.176116	-.261814	-.194347	-.000000
1	1	-.000000	-.161656	-.237244	-.173941	-.000000
2	1	-.000000	-.062413	-.088434	-.062651	-.000000
3	1	-.000000	-.023304	-.032960	-.023308	-.000000
4	1	-.000000	-.008686	-.012284	-.008686	-.000000
5	1	-.000000	-.003237	-.004578	-.003237	-.000000
6	1	-.000000	-.001207	-.001706	-.001207	-.000000
7	1	-.000000	-.000450	-.000636	-.000450	-.000000
8	1	-.000000	-.000168	-.000237	-.000168	-.000000
9	1	-.000000	-.000062	-.000088	-.000062	-.000000
1	0	-.000000	-.000023	-.000033	-.000023	-.000000
2	0	-.000000	-.000000	-.000000	-.000000	-.000000
3	0	-.000000	-.000000	-.000000	-.000000	-.000000

Literatuur opgave:

1. Kramers, H.
Fysische transportverschijnselen. Dl. 1, 2.
College dictaat T.H. Delft, zomer 1960.
2. Carslaw, H.S., and Jaeger, J.C.
Conduction of heat in solids.
Oxford, 1947.
3. Jakob, M.
Heat transfer. Vol. 1.
London, 1967.
4. Whittaker, E.T., and Watson, G.N.
A course of modern analysis.
Cambridge, 1958.
5. Kuipers, L., en Timman, R.
Handboek der wiskunde.
Amsterdam, 1963.
6. Abramowitz, M., and Stegun, I.A. (Editors)
Handbook of mathematical functions.
Washington, D.C., 1965.
7. Gröber, E., Erk and Grigull.
Fundamentals of heat transfer.
McGraw Hill, 1961.
8. Lauwerier, H.A.
Mathematische problemen uit de warmtegeleidingstheorie.
Mathematisch Centrum. Amsterdam, 1954-1955.
9. Van Wijk, W.R. (Editor)
Physics of plant environment.
Amsterdam, 1967.
10. Braak, C.
Het klimaat van Nederland.
B. Grondtemperatuur.
KNMI-publ. 102: Mededelingen en verhandelingen, no. 47 (1943).
11. Visser, W.
The finite element methode in deformation and heat conduction problems.
Doctoral Thesis, Techn.Un. Delft, 1958. (verkort in De Ingenieur 81 (1969),
nr. 25 p. 073-81).
12. Oegema, S.W.T.M.
De berekening van het binnenklimaat in gebouwen met behulp van een digitale
rekenautomaat.
Afstudeerverslag, T.H. Delft, 1970.