

KONINKLUK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT

Wetenschappelijk Rapport W.R. 63-1 (RIII 275-1963)

Drs. P.J. Rijkoort

Over de dagelijkse gang van bodem- en luchttemperatuur en de schatting van het etmaalgemiddelde van deze grootheden uit termijnwaarnemingen.

De Bilt, 1963

All Rights Reserved.

Nadruk zonder toestemming van het K.N.M.I. is verboden.

Over de dagelijkse gang van bodem- en luchttemperatuur
en de schatting van het etmaalgemiddelde van deze groot-
heden uit termijnwaarnemingen.

Drs. P.J. Rijkooft

<u>Inhoud</u>	<u>pag.</u>
0. Inleiding	1
1. Harmonische analyse van de dagelijkse gang van bodemtemperatuur.	2
2. De theoretisch beste tijdstippen voor driemaal daagse waarnemingen	4
3. Schatting van het 24-uur gemiddelde van de grondtemperatuur uit de beschikbare gegevens	8
4. Schatting van het 24-uur gemiddelde van de luchttemperatuur uit de beschikbare gegevens	22
5. Over de dagelijkse gang van de luchttemperatuur	24
6.. Overeenkomstig onderzoek in het buitenland.	29
Literatuur	30
Samenvatting	31
Summary	34

Drs. P.J. Rijkoort

Over de dagelijkse gang van bodem- en luchttemperatuur
en de schatting van het etmaalgemiddelde van deze groot-
heden uit termijnwaarnemingen.

0. Inleiding

Op de meeste plaatsen in Nederland waar door het K.N.M.I. temperaturen worden gemeten, blijft het aantal waarnemingen beperkt tot hoogstens drie per dag, n.l. te 8, 14 en 19 uur. Wil men op basis van deze gegevens b.v. de jaarlijkse gang bestuderen dan moet men het effect van de dagelijkse gang in de waarnemingen elimineren. Men moet daarvoor dus eigenlijk de beschikking hebben over de etmaal gemiddelden.

Bij bodemtemperaturen bestaat dan nog het bezwaar dat waarnemingen op één tijdstip van de dag op verschillende diepten niet zonder meer vergelijkbaar zijn tengevolge van het verschil in fase. Voor zover het om de jaarlijkse gang gaat kan men de eliminatie van het effect van de dagelijkse gang op twee manieren trachten te bereiken: 1° door een schattingsmethode te zoeken om het etmaalgemiddelde uit de beschikbare gegevens af te leiden en 2° door de jaarlijkse gang met behulp van een harmonische analyse te bepalen uit de beschikbare gegevens (hetzij van één vast tijdstip van de dag, hetzij b.v. van het driemaal daags gemiddelde) en daarna de gevonden constanten (amplituden en fasehoeken) te corrigeren. De laatste weg is b.v. door Peerlkamp in zijn dissertatie [1] gevolgd. In dit rapport zal de eerste methode worden toegepast.

Voor het onderzoek naar de mogelijkheden van toepassing van deze eerste methode zijn de bewerkingen van de met weerstandsthermometers verkregen registraties van de bodemtemperatuur in de onbegroeide lysimeter te Castricum in 1953, en van de registraties van de luchttemperaturen te De Bilt in 1950 gebruikt.

1. Harmonische analyse van de dagelijkse gang.

Van de registraties van de grondtemperatuur op 1, 10, 25, 50 en 100 cm diepte te Castricum zijn aflezingen verricht op de hele uren. Deze werden na toepassing der thermometercorrecties, per pentade gegroepeerd en per uur over de vijf dagen gemiddeld. We hebben uit het materiaal voor de harmonische analyse een tiental pentaden uit verschillende maanden uitgekozen, n.l. 6 - 10 jan., 20 - 24 febr., 12 - 16 mrt., 21 - 25 apr., 16 - 20 mei, 10 - 14 jun., 14 - 19 aug., 23 - 27 sep., 23 - 27 okt. en 12 - 16 nov. 1953.

Op de 24 gemiddelde uurwaarden van deze pentaden is een harmonische analyse toegepast. De temperatuur in °C wordt hierbij voorgesteld door:

$$T(h) = \bar{T} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k \cdot n \cdot 15^\circ) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(k \cdot n \cdot 15^\circ) = \bar{T} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \sin(k \cdot n \cdot 15^\circ + \varphi_n)$$

Hierin stelt h de tijd in uren voor, R_n de amplitudo (in °C) en φ_n de fasehoek (in graden) van de n^{de} harmonische, en \bar{T} een constante.

In tabel 1.1 zijn voor de waarnemingen op 1 cm diepte de waarden \bar{T} , R_n en φ_n samengevat. R_n is bepaald voor $n = 1, \dots, 6$. Het blijkt daarbij, dat voor $n \geq 3$ de waarden van a_n en b_n en dus ook R_n zo klein zijn, dat φ_n niet nauwkeurig genoeg meer te bepalen is.

Tabel 1.1

	\bar{T}	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	φ_1	φ_2
6-10 jan.	-0,64	0,36	0,40	0,19	0,13	0,06	0,05	245°16'	45°38'
20-24 febr.	+5,40	1,28	0,67	0,31	0,06	0,01	0,01	238°56'	29°51'
12-16 mrt.	+4,98	3,77	1,48	0,08	0,19	0,16	0,10	281°17'	24°51'
21-25 apr.	+12,74	8,45	2,39	0,38	0,32	0,18	0,13	262°53'	71°44'
16-20 mei	+17,06	7,10	1,73	0,22	0,08	0,11	0,02	243°12'	77°30'
10-14 juni	+17,13	4,70	0,40	0,76	0,26	0,18	0,12	230°54'	-21°15'
14-18 aug.	+20,89	8,00	1,76	0,19	0,12	0,23	0,17	246°23'	54°47'
23-27 sept.	+12,92	4,68	1,15	0,03	0,44	0,26	0,03	238°23'	71°59'
23-27 okt.	+8,75	2,12	0,98	0,24	0,12	0,01	0,04	247°58'	69°22'
12-16 nov.	+9,19	0,70	0,41	0,23	0,06	0,01	0,02	274°12'	62°48'

Voor de diepten 10, 15 en 50 cm zijn alleen \bar{T} , R_1 , R_2 , φ_1 en φ_2 berekend. Op de diepte 100 cm is een dagelijkse gang niet meer merkbaar, deze diepte blijft hier dus buiten beschouwing.

Tabel 1.2 geeft de resultaten

Tabel 1.2

10 cm.

	\bar{T}	R_1	R_2	φ_1	φ_2
6-10 jan.	0,14	0,07	0,05	174°55'	-77°21'
20-24 feb.	5,18	0,64	0,19	194°27'	-30° 0'
12-16 mrt.	5,19	1,72	0,39	185° 8'	-33°13'
21-25 apr.	12,05	3,25	0,47	197°21'	12°46'
16-20 mei	16,16	3,29	0,59	213°18'	35°15'
10-14 jun.	16,88	1,89	0,13	185°51'	-27°70'
14-18 aug.	20,14	2,99	0,49	195°14'	-11°25'
23-27 sep.	13,13	2,40	0,42	191°31'	13°23'
23-27 okt.	8,99	1,10	0,41	209°38'	15°12'
12-16 nov.	9,18	0,39	0,17	236°12'	3°47'

25 cm.

6-10 jan.	0,78	0,04	0,04	75° 0'	240° 0'
20-24 feb.	5,12	0,44	0,08	158°56'	251°47'
12-16 mrt.	5,40	0,93	0,20	145°42'	272°26'
21-25 apr.	11,90	1,82	0,22	160°58'	317°42'
16-20 mei	15,53	2,21	0,18	170°18'	308°41'
10-14 jun.	16,84	1,00	0,08	142°14'	325°27'
14-18 aug.	20,42	1,61	0,27	155°35'	307°15'
23-27 sep.	13,43	1,48	0,23	164°51'	284°49'
23-27 okt.	9,35	0,64	0,17	170°40'	329°43'
12-16 nov.	9,25	0,22	0,08	189°15'	188°26'

50 cm

6-10 jan.	1,64	0,06	0,02	37°12'	-15°58'
20-24 feb.	4,37	0,22	0,06	129°37'	172°29'
12-16 mrt.	5,19	0,29	0,05	71°27'	176°34'
21-25 apr.	10,80	0,55	0,07	92°31'	191°38'
16-20 mei	13,87	0,72	0,15	118°52'	189° 9'
10-14 jun.	15,75	0,36	0,03	63°47'	-2°23'
14-18 aug.	19,35	0,66	0,03	74°39'	-29°38'
23-27 sep.	12,61	0,56	0,06	96°16'	243° 0'
23-27 okt.	8,87	0,27	0,06	142°41'	276°50'
12-16 nov.	8,30	0,11	0,08	138°38'	240° 0'

Uit de verkregen resultaten blijkt, dat men in het algemeen voor de beschrijving van de dagelijkse gang met behulp van de harmonische analyse voldoende heeft aan de termen van de 1st en 2e orde (1st en 2e harmonische of "grondtoon" en 1st boventoon). Ter illustratie geeft fig. 1 de uitwerking van het geval 14 - 18 augustus 1953.

In de eerste plaats zijn de waargenomen uurwaarden aangegeven. Volgens de grondtoon. Deze blijkt b.v. op 1 cm diepte in het maximum ca 2 °C lager dan de waargenomen temperatuur te zijn en in het minimum 2 °C hoger. De 1ste en 2e harmonische tezamen geven nog slechts afwijkingen van hoogstens enkele tienden graden.

Ook de dagelijkse gang van deze luchttemperaturen is met de 1ste en 2e harmonische voldoende nauwkeurig te beschrijven. We hebben geen voorbeeld uit eigen materiaal, maar wijzen op een publikatie van Bultot [2] uit de Congo. Op blz. 43 van deze publikatie worden voor een aantal gevallen de amplitudines van 1st, 2e en 3e harmonische gegeven. In het algemeen is de derde t.o.v. de eerste twee te verwaarlozen.

2. De theoretisch beste tijdstippen voor driemaal daagse waarnemingen.

Hoewel het uit praktische overwegingen waarschijnlijk zeer bezwaarlijk zal zijn tot andere dan de gebruikelijke klimatologische termijnwaarnemingstijdstippen (8, 14 en 19 h middelbare plaatselijke tijd) over te gaan, willen we toch eerst onderzoeken of er drie tijdstippen t_1 , t_2 en t_3 te vinden zijn zodanig dat een gewogen gemiddelde, met gewichten α_1 , α_2 , α_3 , van de waargenomen temperaturen juist het etmaalgemiddelde (T_d) oplevert.

We gaan dus uit van de onderstelling, welke in par. 1 gerechtvaardigd werd, dat de gemiddelde dagelijkse gang met 1ste en 2e harmonisch is te beschrijven; dus:

$$T(t) = T_0 + R_1 \sin(\omega t + \rho_1) + R_2 \sin(2\omega t + \rho_2) \quad (2.1)$$

Hierbij is $T_0 \equiv T_d$

$$\text{We eisen dus } \alpha T(t_1) + \beta T(t_2) + \gamma T(t_3) = T_d \quad (2.2)$$

Aangezien echter de formule (2.1) vijf parameters bevat terwijl er zes variabelen bepaald moeten worden, kunnen we de formule nog uitbreiden met een term die lineair van de tijd afhangt, zodat de daarmee gepaard gaande temperatuurverandering per tijdseenheid als zesde parameter optreedt.

We schrijven dus nu:

$$T(t) = T_0 + \mu t + R_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + R_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) \quad (2.3)$$

Dan is, als we t in uren nemen, het etmaalgemiddelde $T_d = T_0 + 12/\mu$ (2.4)

In plaats van (2.2) krijgen we dan:

Dus: $\alpha T(t_1) + \beta T(t_2) + \gamma T(t_3) = T_0 + 12/\mu$ (2.5)

$$(\alpha + \beta + \gamma) T_0 + \mu(\alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma t_3) + R_1\{\alpha \sin(\omega t_1 + \varphi_1) + \beta \sin(\omega t_2 + \varphi_1) + \gamma \sin(\omega t_3 + \varphi_1)\} + R_2\{\alpha \sin(2\omega t_1 + \varphi_2) + \beta \sin(2\omega t_2 + \varphi_2) + \gamma \sin(2\omega t_3 + \varphi_2)\} = T_0 + 12/\mu.$$

waaruit volgt

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (2.6)$$

$$\alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma t_3 = 12 \quad (2.7)$$

$$\alpha \sin \omega t_1 + \beta \sin \omega t_2 + \gamma \sin \omega t_3 = 0 \quad (2.8)$$

$$\alpha \cos \omega t_1 + \beta \cos \omega t_2 + \gamma \cos \omega t_3 = 0 \quad (2.9)$$

$$\alpha \sin 2\omega t_1 + \beta \sin 2\omega t_2 + \gamma \sin 2\omega t_3 = 0 \quad (2.10)$$

$$\alpha \cos 2\omega t_1 + \beta \cos 2\omega t_2 + \gamma \cos 2\omega t_3 = 0 \quad (2.11)$$

In de betrekkingen (2.8) ... (2.11) substitueren we $\gamma = 1 - \alpha - \beta$:

$$\alpha(\sin \omega t_3 - \sin \omega t_1) + \beta(\sin \omega t_3 - \sin \omega t_2) = \sin \omega t_3 \quad (2.12)$$

$$\alpha(\cos \omega t_3 - \cos \omega t_1) + \beta(\cos \omega t_3 - \cos \omega t_2) = \cos \omega t_3 \quad (2.13)$$

$$\alpha(\sin 2\omega t_3 - \sin 2\omega t_1) + \beta(\sin 2\omega t_3 - \sin 2\omega t_2) = \sin 2\omega t_3 \quad (2.14)$$

$$\alpha(\cos 2\omega t_3 - \cos 2\omega t_1) + \beta(\cos 2\omega t_3 - \cos 2\omega t_2) = \cos 2\omega t_3 \quad (2.15)$$

Lossen we uit (2.12) en (2.13) α en β op dan vinden we:

$$\alpha = \frac{\sin \omega(t_2 - t_3)}{\sin \omega(t_1 - t_2) + \sin \omega(t_2 - t_3) + \sin \omega(t_3 - t_1)} \quad (2.16)$$

en
$$\beta = \frac{\sin \omega(t_3 - t_1)}{\sin \omega(t_1 - t_2) + \sin \omega(t_2 - t_3) + \sin \omega(t_3 - t_1)} \quad (2.17)$$

Evenzo uit (2.14) en (2.15):

$$\alpha = \frac{\sin 2\omega(t_2 - t_3)}{\sin 2\omega(t_1 - t_2) + \sin 2\omega(t_2 - t_3) + \sin 2\omega(t_3 - t_1)} \quad (2.18)$$

en
$$\beta = \frac{\sin 2\omega(t_3 - t_1)}{\sin 2\omega(t_1 - t_2) + \sin 2\omega(t_2 - t_3) + \sin 2\omega(t_3 - t_1)} \quad (2.19)$$

Gelijkstelling van (2.16) met (2.18) en van (2.17) met (2.19) levert:

$$\begin{aligned} \sin \omega(t_2 - t_3) \cdot \sin 2\omega(t_1 - t_2) + \sin \omega(t_2 - t_3) \sin 2\omega(t_3 - t_1) = \\ \sin 2\omega(t_2 - t_3) \cdot \sin \omega(t_1 - t_2) + \sin 2\omega(t_2 - t_3) \cdot \sin \omega(t_3 - t_1) \end{aligned} \quad (2.20)$$

en
$$\begin{aligned} \sin \omega(t_3 - t_1) \cdot \sin 2\omega(t_1 - t_2) + \sin \omega(t_3 - t_1) \sin 2\omega(t_2 - t_3) = \\ \sin 2\omega(t_3 - t_1) \sin \omega(t_1 - t_2) + \sin 2\omega(t_3 - t_1) \sin \omega(t_2 - t_3) \end{aligned} \quad (2.21)$$

In de eerste plaats zullen we laten zien, dat $\sin \omega(t_1 - t_2)$ en soortgelijke uitdrukkingen ongelijk nul zijn.

Stel n.l. $\sin \omega(t_1 - t_2) = 0$ dus $t_1 - t_2 = \pm 12k$ waarbij $k = 0, 1, 2, \dots$.
Aangezien we zonder aan de algemeenheid te kort te doen kunnen stellen

$$0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 24$$

komt alleen $t_1 - t_2 = 12$ in aanmerking ($t_2 - t_1 = 0$ heeft geen praktische betekenis).

(2.8) en (2.9) gaan over in:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \sin \omega t_1 - \beta \sin \omega t_1 + \gamma \sin \omega t_3 &= 0 \\ \alpha \cos \omega t_1 - \beta \cos \omega t_1 + \gamma \cos \omega t_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

of

$$\left. \begin{aligned} (\alpha - \beta) \sin \omega t_1 + \gamma \sin \omega t_3 &= 0 \\ (\alpha - \beta) \cos \omega t_1 + \gamma \cos \omega t_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Dit stelsel vergelijkingen geeft alleen een niet triviale oplossing voor $(\alpha - \beta)$ en γ als:

$$\begin{vmatrix} \sin \omega t_1 & \sin \omega t_3 \\ \cos \omega t_1 & \cos \omega t_3 \end{vmatrix} = 0$$

dus

$$\sin \omega t_1 \cos \omega t_3 - \sin \omega t_3 \cos \omega t_1 = \sin \omega(t_1 - t_3) = 0$$

Derhalve

$$t_1 - t_3 = 12k \quad (t_3 - t_1 = 12 \text{ kan niet wegens } t_2 - t_1 = 12);$$

nu komt alleen $t_3 - t_1 = 24$ in aanmerking.

Voor (2.10) kunnen we nu schrijven:

$$\alpha \sin 2\omega t_1 + \beta \sin 2\omega t_1 + \gamma \sin 2\omega t_1 = (\alpha + \beta + \gamma) \sin 2\omega t_1 = 0$$

wegens (2.6) wordt dit: $\sin 2\omega t_1 = 0$

Verder gaat (2.11) over in:

$$(\alpha + \beta + \gamma) \cos 2\omega t_1 = 0 \quad \text{dus ook} \quad \cos 2\omega t_1 = 0 \quad \text{Dit}$$

is in strijd met $\sin 2\omega t_1 = 0$. Dus $t_3 - t_1 \neq 12k$

Volkomen analoog is aan te tonen zijn dat ook $t_2 - t_1$ en $t_3 - t_2 \neq 12k$ moet zijn.

Derhalve

$$\sin \omega(t_1 - t_2) \neq 0 \quad \text{enz.}$$

We kunnen nu (2.20) en (2.21) vereenvoudigen tot

$$\cos \frac{1}{2} \omega(t_1 - t_2) \sin \frac{1}{2} \omega(t_1 - 2t_2 + t_3) = \cos \frac{1}{2} \omega(t_1 - t_2) \sin \frac{1}{2} \omega(t_2 - 2t_3 + t_1) \quad (2.25)$$

$$\text{en} \quad \cos \frac{1}{2} \omega(t_2 - t_3) \sin \frac{1}{2} \omega(t_2 - 2t_3 + t_1) = \cos \frac{1}{2} \omega(t_2 - t_1) \sin \frac{1}{2} \omega(t_3 - 2t_1 + t_2) \quad (2.26)$$

We voeren eerst in $\frac{1}{2} \omega(t_1 - t_2) = a$

$$\frac{1}{2} \omega(t_2 - t_3) = b$$

$$\frac{1}{2} \omega(t_3 - t_1) = c$$

met $(a + b + c) = 0$.

(2.25) en (2.26) worden nu :

$$\cos a \sin (a-b) = \cos c \sin (b-c)$$

$$\cos b \sin (b-c) = \cos a \sin (c-a)$$

of wegens (2.27):

$$\cos (b+c) \sin (a-b) = \cos (a+b) \sin (b-c)$$

$$\cos (a+c) \sin (b-c) = \cos (b+c) \sin (c-a)$$

wat gelijk is aan:

$$\begin{aligned} (\cos b \cos c - \sin b \sin c)(\sin a \cos b - \cos a \sin b) &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b)(\sin b \cos c - \cos b \sin c) \\ (\cos a \cos c - \sin a \sin c)(\sin b \cos c - \cos b \sin c) &= (\cos b \cos c - \sin b \sin c)(\sin c \cos a - \cos c \sin a) \end{aligned}$$

Na deling door $\cos a \cos b \cos c$ enz. ontstaat

$$(1 - \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c)(\operatorname{tga} - \operatorname{tg} b) = (1 - \operatorname{tga} \operatorname{tg} b)(\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} c)$$

$$(1 - \operatorname{tga} \operatorname{tg} c)(\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} c) = (1 - \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c)(\operatorname{tg} c - \operatorname{tga})$$

of als we kortheidshalve schrijven

$$\operatorname{tga} = m ; \operatorname{tg} b = n ; \operatorname{tg} c = r$$

ontstaan de vergelijkingen:

$$(1 - n \cdot r)(m - n) = (1 - m \cdot n)(n - r)$$

$$(1 - m \cdot r)(n - r) = (1 - n \cdot r)(r - m)$$

Uit beide vergelijkingen lossen we m op en vinden

$$m = \frac{2n - n^2 r - r}{1 - 2nr + nr^2} \quad \text{en} \quad m = \frac{2r - nr^2 - n}{1 - 2nr + nr^2}$$

Gelijkstelling levert na enig rekenen:

$$n^3 - r^3 + 3n^3 r^2 - 3n^2 r^3 - 9n^2 r + 9nr^2 + 3n - 3r = 0$$

of

$$(n-r) \{ n^2 + r^2 + 3n^2 r^2 - 8nr + 3 \} = 0$$

Dit betekent, dat of het eerste of het tweede lid nul is.

Als nu de kwadratisch vorm nul gesteld wordt, ontstaat de vergelijking

$$(1 + 3r^2)n^2 - 8rn + 3 + r^2 = 0$$

met als oplossing

$$n = \frac{4r \pm \sqrt{16r^2 - (1+3r^2)(3+r^2)}}{1+3r^2} = \frac{4r \pm \sqrt{-3(r^2-1)^2}}{1+3r^2}$$

Het tweede lid blijkt dus slechts iniimaginair wortels te hebben.

De enige echte oplossing is dus $n=r$ en wegens de cyclische verwisselbaarheid is ook $n=r=m$

Dus (2.27) wordt : $\operatorname{tga} = \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c$.

Derhalve $b = a + k_1 \pi$ en $c = a + k_2 \pi$ waarbij k_1 en k_2 gehele getallen zijn.

Daar $a + b + c = 0$, is derhalve $3a + (k_1 + k_2)\pi = 0$.

In verband met (2.22) wordt dan $k_1 = 0, k_2 = 1$ en $a = -1/3\pi$ $b = -1/3\pi$
 $c = 2/3\pi$

of wegens $\omega = \frac{2\pi}{24}$; $t_1 - t_2 = -8$; $t_2 - t_3 = -8$; $t_3 - t_1 = 16$.

Uit (2.16) en (2.17) volgt nu:

$$\alpha = \beta = 1/3 \text{ en wegens (2.6) ook } \gamma = 1/3$$

Waarmee uit (2.7) volgt:

$$t_1 = 4.$$

Het blijkt dus nu dat slechts één greep van drie waarnemingsuren (n.l. 4, 12 en 20 uur) en drie gewichten ($\alpha = \beta = \gamma = 1/3$) mogelijk zijn, zodanig dat het gewogen gemiddelde precies het etmaalgemiddelde voorstelt. Uiteraard is dit in de praktijk een schatting van het etmaalgemiddelde, welke een zekere onnauwkeurigheid bevat tengevolge van het feit, dat de dagelijkse gang niet volledig door de som van 1ste en 2e harmonische wordt beschreven.

Het is tenslotte gemakkelijk in te zien, dat voor $p = 0$ elk drietal tijdstippen, dat 8 uren uit elkaar gelegen is, zal voldoen. De invoering van de term $p\ddot{t}$ in (2.3) brengt automatisch met zich mede dat een der tijdstippen t_1, t_2, t_3 op 12 uur valt, mits de tijd van een etmaal van 0 tot 24 uur wordt gerekend.

3. Schatting van het etmaalgemiddelde van de bodemtemperatuur uit de beschikbare gegevens.

We willen thans onderzoeken hoe we het etmaal gemiddelde van de bodemtemperatuur uit de beschikbare gegevens, in de eerste plaats uit de driemaal daagse waarnemingen te 8, 14 en 19 uur, kunnen schatten.

We gaan uit van de onderstelling dat de dagelijkse gang is te beschrijven met de 1ste en 2e harmonische zoals in 1 voldoende is aangetoond.

De desbetreffende formule (2.1) luidt:

$$T(t) = T_d + R_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + R_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) \quad (2.1) = (3.1)$$

We eisen nu dat een gewogen gemiddelde van de waarnemingen te 8, 14 en 19 uur gelijk aan T_d is. Dus:

$$\alpha T(8) + \beta T(14) + \gamma T(19) = T_d \quad (3.2)$$

Nu is wegens $\omega = 15^\circ$ (voor t in uren en 24 als periode):

$$T(8) = T_d + R_1 \sin(120 + \varphi_1) + R_2 \sin(240 + \varphi_2)$$

$$T(14) = T_d + R_1 \sin(210 + \varphi_1) + R_2 \sin(60 + \varphi_2)$$

$$T(19) = T_d + R_1 \sin(285 + \varphi_1) + R_2 \sin(210 + \varphi_2)$$

Met gebruikmaking van deze vergelijkingen gaat dus (3.2) over in:

$$T_d = \alpha T(8) + \beta T(14) + \gamma T(19) = (\alpha + \beta + \gamma) T_d + R_1 \{ \alpha \sin(120 + \varphi_1) + \beta \sin(210 + \varphi_1) + \gamma \sin(285 + \varphi_1) \} + R_2 \{ \alpha \sin(240 + \varphi_2) + \beta \sin(60 + \varphi_2) + \gamma \sin(210 + \varphi_2) \} \quad (3.3)$$

Aan deze vergelijking moet identiek worden voldaan; dit levert de voorwaarden:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (3.4)$$

$$\alpha \sin(120 + \varphi_1) + \beta \sin(210 + \varphi_1) + \gamma \sin(285 + \varphi_1) = 0 \quad (3.5)$$

$$\alpha \sin(240 + \varphi_2) + \beta \sin(60 + \varphi_2) + \gamma \sin(210 + \varphi_2) = 0 \quad (3.6)$$

De laatste twee herleiden we tot:

$$(\alpha \sin 120 + \beta \sin 210 + \gamma \sin 285) \cos \varphi_1 + (\alpha \cos 120 + \beta \cos 210 + \gamma \cos 285) \sin \varphi_1 = 0$$

$$\text{en } (\alpha \sin 240 + \beta \sin 60 + \gamma \sin 210) \cos \varphi_2 + (\alpha \cos 240 + \beta \cos 60 + \gamma \cos 210) \sin \varphi_2 = 0$$

of

$$(0.866 \alpha - 0.500 \beta - 0.966 \gamma) \cos \varphi_1 + (-0.500 \alpha - 0.866 \beta + 0.259 \gamma) \sin \varphi_1 = 0$$

$$\text{en } (-0.866 \alpha + 0.866 \beta - 0.500 \gamma) \cos \varphi_2 + (-0.500 \alpha - 0.500 \beta - 0.866 \gamma) \sin \varphi_2 = 0$$

Als nu nog $\gamma = 1 - \alpha - \beta$ ingevuld wordt, ontstaan twee vergelijkingen

$$(1.832 \alpha + 0.466 \beta - 0.966) \cos \varphi_1 + (-0.759 \alpha - 1.125 \beta + 0.259) \sin \varphi_1 = 0$$

$$\text{en } (-0.366 \alpha + 1.366 \beta - 0.500) \cos \varphi_2 + (0.366 \alpha + 1.366 \beta - 0.866) \sin \varphi_2 = 0$$

derhalve

$$\tan \varphi_1 = \frac{1.832 \cos \varphi_1 + 0.466 \sin \varphi_1 - 0.966}{0.759 \cos \varphi_1 + 1.125 \sin \varphi_1 - 0.259} \quad (3.9)$$

en

$$\tan \varphi_2 = \frac{0.366 \cos \varphi_2 - 1.366 \sin \varphi_2 + 0.500}{0.366 \cos \varphi_2 + 1.366 \sin \varphi_2 - 0.866} \quad (3.10)$$

of als we α en β oplossen:

$$\alpha = \frac{1.087 + 0.208 \tan \varphi_1 + 0.916 \tan \varphi_2 + 0.620 \tan \varphi_1 \tan \varphi_2}{2.673 - 1.449 \tan \varphi_1 + 2.332 \tan \varphi_2 - 0.625 \tan \varphi_1 \tan \varphi_2} \quad (3.11)$$

$$\beta = \frac{1.270 - 0.475 \tan \varphi_1 + 1.233 \tan \varphi_2 - 0.562 \tan \varphi_1 \tan \varphi_2}{2.673 - 1.449 \tan \varphi_1 + 2.332 \tan \varphi_2 - 0.625 \tan \varphi_1 \tan \varphi_2} \quad (3.12)$$

Bij gegeven waarde van φ_1 en φ_2 zijn α en β (en dus γ) te bepalen volgens (3.11) en (3.12). α en β zijn afhankelijk van φ_1 en φ_2 . Een gewogen gemiddelde van $T(8)$, $T(14)$ en $T(19)$ met constanten waarde van de gewichten α , β en γ dat gelijk is aan T_d is dus alleen mogelijk als φ_1 en φ_2 constant zijn. Als φ_1 en φ_2 variëren zullen ook α en β variëren.

A priori is het uit fysieke overwegingen niet te verwachten dat φ_1 en φ_2 constant zullen zijn. Immers φ_1 moet een functie zijn van de temperatuur vereffeningscoëfficiënt $a = \lambda/\rho \cdot c$ die o.a. van het vochtgehalte afhangt.

In de tabellen 1.1 en 1.2 zien we inderdaad dat φ_1 en φ_2 niet constant zijn: ze variëren om een zeker gemiddelde. Is deze variatie misschien nog systematisch; is er b.v. een jaarlijkse gang? Op grond van enkele grafische voorstellingen moet gezegd worden dat er geen duidelijk seizoeneffect te constateren is. We zijn daarom zo vrij om na te gaan of toch voor praktische doeleinden voor φ_1 en φ_2 constante waarden gebruikt kunnen worden, waarvoor we de gemiddelde waarden van φ_1 en φ_2 zullen nemen.

We berekenen nu α_0 , β_0 en δ_0 voor de gemiddelde waarde van φ_1 en φ_2 . De resultaten zijn samengevat in tabel 3.1

Tabel 3.1

diepte	$\bar{\varphi}_1$	$\bar{\varphi}_2$	α_0	β_0	δ_0
1 cm	250°56'	48°43'	-5.18	+0.60	+5.58
10 cm	198°22'	-9°56'	+0.53	+0.51	-0.04
25 cm	153°21'	-77°22'	+0.20	+0.62	+0.18

Voor de diepte 10 en 25 cm krijgen we redelijke waarden voor α , β en δ . Voor de diepte 1 cm is de $|\alpha|$ groter dan 1 geworden (evenals de δ). In theorie is hier geen bezwaar tegen; in de praktijk echter wel, omdat de waargenomen grondtemperaturen niet precies een dagelijkse gang bestaande uit een grondtoon + 1st boventoon (niet $\varphi_1 = 250^\circ 56'$ en $\varphi_2 = 48^\circ 43'$) volgen. In de eerste plaats is er variatie in de fasehoeken en in de tweede plaats afwijking van de "theoretische" dagelijkse gang.

Gewichtscoefficienten, die in absolute waarde groter dan één zijn, kunnen tot zeer grote afwijkingen in de schattingen van het etmaalgemiddelde leiden.

We zullen nu nog met een aantal grafieken laten zien hoe α en β variëren tengevolge van variatie in φ_1 en φ_2 .

Hiertoe schrijven we (3.7) en (3.8) in de volgende vorm:

$$(1.832 \alpha + 0.466 \beta - 0.966) + \operatorname{tg} \varphi_1 (-0.759 \alpha - 1.125 \beta + 0.259) = 0 \quad (3.13)$$

$$(-0.366 \alpha + 1.366 \beta - 0.500) + \operatorname{tg} \varphi_2 (0.366 \alpha + 1.366 \beta - 0.866) = 0 \quad (3.13')$$

waaruit blijkt dat we met twee lijnenbundels (3.13) en (3.13') hebben te doen met $\operatorname{tg} \varphi_1$, resp. $\operatorname{tg} \varphi_2$ als parameter.

Het middelpunt van de bundel (3.13) is te vinden als snijpunt van het lijnenpaar:

$$1.832 \alpha + 0.466 \beta = 0.966$$

$$0.759 \alpha + 1.125 \beta = 0.259.$$

Hieruit volgt $\alpha_0 = +0.566$, $\beta_0 = -0.152$

Evenzo vinden we het middelpunt van de bundel (3.13) als snijpunt van het lijnenpaar

$$\begin{aligned} 0.366 \alpha - 1.366 \beta &= -0.500 \\ 0.366 \alpha + 1.366 \beta &= 0.866. \end{aligned}$$

Hieruit wordt berekend $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ en $\beta_2 = \frac{1}{2}$

We kunnen dus in één grafiek (zie fig.3.1) twee lijnen bundels tekenen; één met middelpunt M_1 ($\alpha_1 = +0.566$, $\beta_1 = -0.152$) en ψ_1 als parameters en één met middelpunt M_2 ($\alpha_2 = 0.5$ en $\beta_2 = 0.5$) en ψ_2 als parameter. Hiermede hebben we dan een grafische methode om snel de waarden van α en β bij gegeven ψ_1 en ψ_2 te bepalen. Het snijpunt van de lijnen met parameter waarde ψ_1 van de bundel (3.13) en ψ_2 de bundel (3.13) geeft deze waarden n.l. aan. In fig. 3.1 is de plaats der middelpunten aangegeven en tevens twee schalen, voor ψ_1 en ψ_2 .

We nemen nu aan dat de ψ -waarden voor de verschillende diepten normaal verdeeld zijn om de gemiddelden van tabel (3.1). Verder onderstellen we een ogenblik, dat ψ_1 en ψ_2 onafhankelijk van elkaar zijn. Dit is niet helemaal juist. Bij toetsing blijkt voor de diepte 1 cm en 25 cm de correlatie coëfficiënt tussen ψ_1 en ψ_2 niet significant te zijn. Voor de diepten 10 cm en 50 cm is dit wel het geval. We laten dit echter hier buiten beschouwing.

We berekenen voor de standaard deviatie van ψ_1 en van ψ_2 de volgende waarden, welke in tabel 3.2 zijn verzameld.

tabel 3.2

	σ_{ψ_1}	σ_{ψ_2}
1 cm	5° 11'	9° 54'
10 cm	5° 30'	10° 36'
25 cm	9° 42'	14° 18'

De waarde van $\bar{\psi}_1$, resp. $\bar{\psi}_2$ ligt dus met een kans van 95% tussen de grenzen, welke in tabel 3.3 zijn genoemd.

1 cm	$240^{\circ}34' < \psi_1 < 261^{\circ}18'$	en	$28^{\circ}55' < \psi_2 < 68^{\circ}31'$
10 cm	$187^{\circ}22' < \psi_1 < 209^{\circ}22'$		$-31^{\circ}8' < \psi_2 < 11^{\circ}16'$
25 cm	$133^{\circ}57' < \psi_1 < 172^{\circ}45'$		$-105^{\circ}58' < \psi_2 < -48^{\circ}36'$

Een ruwe grafische interpolatie geeft verder nog:

5 cm	$214^{\circ} < \psi_1 < 231^{\circ}$		$1^{\circ} < \psi_2 < 40^{\circ}$
------	--------------------------------------	--	-----------------------------------

De tangenten van bovenstaande grenswaarden bepalen dus resp. twee rechten door M_1 en twee door M_2 , waarvoor we van fig. 3.1 gebruik kunnen maken. We hebben voor ieder van de drie diepten een afzonderlijke figuur gemaakt (3.2, 3.3 en 3.4). In deze figuren zien we de twee stellen grenslijnen door M_1 en M_2 in het α - β vlak. Deze lijnen bepalen een gemeenschappelijk gebied dat door arcering is aangegeven. De punten van deze gebieden stellen α en β waarden voor, die tezamen een betrouwbaarheidsgebied om het gemiddelde (α_0, β_0) vormen; dit is niet precies een 95% betrouwbaarheidsgebied, waarschijnlijk is het iets te groot, een exacte berekening is echter zeer ingewikkeld en zal stellig geen principieel andere resultaten geven. Het blijkt dus dat zowel voor het 1 cm en als voor het 25 cm - niveau de α en β - waarden zeer groot kunnen worden. Voor het 10 cm niveau echter is het gebied zeer klein. De invloed van de variatie op de waarden van α en β is hier zeer gering. In plaats van de α en β van tabel 3.1 kunnen we voor dit geval nog eenvoudiger $\alpha = +0.5$;

$\beta = +0.5$ en $\gamma = 0$ gebruiken.

Op grond van de figuren 3.2 en 3.4 kunnen we echter toch nog wel α en β -waarden vinden die misschien iets beter voldoen dan die van tabel (3.1). We kunnen n.l. aan α, β en γ nog een eis stellen. We hebben reeds opgemerkt dat de waargenomen grondtemperaturen niet precies aan (3.1) voldoen en zeker niet als we voor y_1 en y_2 gemiddelde waarden nemen. Laten we onderstellen, dat het verschil $\delta t = T(t) - \tilde{T}(t)$, waarin $\tilde{T}(t)$ aan 3.1 voldoet bij gemiddelde y_1 en y_2 , normaal verdeeld is met een gemiddelde gelijk aan nul en een standaard deviatie gelijk aan σ ; laat dit zo zijn voor ieder der temperaturen om 8, 14 en 19 uur en stel bovendien $\delta(8), \delta(14)$ en $\delta(19)$ onderling onafhankelijk. I.p.v. de schatting $\alpha T(8) + \beta T(14) + \gamma T(19)$ krijgen we dus de schatting:

$$\alpha T(8) + \beta T(14) + \gamma T(19) = \alpha \tilde{T}(8) + \beta \tilde{T}(14) + \gamma \tilde{T}(19) + \alpha \delta(8) + \beta \delta(14) + \gamma \delta(19)$$

Dit moet dus gelijk zijn aan $T_d + \epsilon$; waarbij we nu moeten zorgen dat de st.dev van ϵ zo klein mogelijk wordt. Dus $E(\alpha \delta(8) + \beta \delta(14) + \gamma \delta(19))^2$ moet minimaal worden. Wegens bovenstaande onderstellingen is deze verwachtingswaarde $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \sigma^2$. Derhalve moet $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ zo klein mogelijk zijn. Het gaat er dus om een stel waarden α, β en γ te vinden, dat voldoet aan $\alpha + \beta + \gamma = 1$, terwijl $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ minimaal is.

Meetkundig kan dit als volgt uitgevoerd worden. We voegen in gedachten aan het α, β vlak en derde coördinaat γ loodrecht erop, toe. In de α, β, γ ruimte worden de punten die de bruikbare α, β en γ waarden aangeven, gevormd door het vlak dat voldoet aan $\alpha + \beta + \gamma = 1$; dit is een vlak V dat het α, β -vlak snijdt volgens een lijn (1) door M_2 , wegens $\alpha = \beta = 0,5$ dus $\gamma = 0$, onder een hoek van 135° met de α -as, terwijl dit vlak V met het α, β vlak een hoek $\psi (= \text{bg tg}(-\sqrt{2}))$ maakt.

In dit vlak bevinden zich gebieden, die de, in aanmerking komende triples (α, β, γ) voorstellen. De projectie van deze gebieden op het α, β vlak zijn de geharceerde gebieden in de fig. 3.2...3.4. Uit deze gebieden moet het punt met minimale afstand tot O worden bepaald. In het vlak V heeft dit punt minimale afstand tot de projectie van O op dit vlak. We kunnen nu in het α, β -vlak alles tekenen door het vlak V om de snijlijn met het α, β vlak neer te slaan. We hebben dit uitgevoerd in fig. 3.4. Het geharceerde gebied geven we hier met de punten A, B, C en D in het α, β -vlak aan. Dit is dus de projectie van een door A', B', C' en D' bepaald α, β, γ gebied in V . Door M_2 is een lijn l getrokken onder en hoek 135° met de α -as. Deze snijdt de lijnen $M_1 C$ en $M_1 D$ in P en Q. V gaat door l. P en Q zijn dus ook punten van het α, β, γ gebied in V . V wordt om l in het α, β vlak neer geklapt. Hierbij blijven P en Q dus op hun plaats. A' komt zodanig te liggen dat de afstand van A' tot l. $\sqrt{2}$ x zo groot is als de afstand van A tot l. A' verbinden we met P en Q. B', C' en D' kunnen op analoge wijze gevonden worden, maar ook door $A'P$ en $A'Q$ te snijden met een rechte door B, C en D \perp G. De projectie C' van O komt zo te liggen dat de afstand van O' tot l. $1/3\sqrt{3}$ x zo klein is als de afstand van O tot l. Het is duidelijk dat de kleinste afstand van C' tot het (α, β, γ) gebied de afstand $O'R'$ tot $D'C'$ is. Met R' correspondeert R op C D in het α, β vlak. We vinden dus voor het geval 25 cm als "beste" gewichtscoëfficiënten $\alpha = 0.26$; $\beta = 0.54$ en $\gamma = 0.20$. Dit maakt weinig verschil met de waarden van tabel 3.1. Voor de diepten 1 cm en 10 cm hebben we de constructie achterwege gelaten. Het is inimmers zonder meer duidelijk dat hier het bij A behorende punt A' het dichtst bij O moet liggen. A geeft dus de "beste" α, β, γ waarden n.l!

1 cm	$\alpha = -0,7$	$\beta = +0,4$	en	$\gamma = +3,4$
10 cm	$\alpha = +0,46$	$\beta = 0,45$	en	$\gamma = 0,09$

Deze waarden geven een aanzienlijk verschil t.a.v. de waarden van tabel (3.1) te zien.

Volgens het voorgaande is de standaard deviatie van de schatting van het etmaalgemiddelde met $\alpha T(8) + \beta T(14) + \gamma T(19)$ dus $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ x de standaard deviatie van de afzonderlijke temperatuur aflezingen verminderd met de volgens formule (3.1) aangepaste waarden.

We berekenen de waarden van $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ voor beide gevallen. Deze zijn in tabel (3.4) bijeengebracht.

tabel 3.4
waarden van $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$
volgens tabel 3.1 verbeterd

1 cm	ca 7,6	2,34
10 cm	" 0,74	0,65
25 cm	" 0,68	0,60

Uit tabel 3.4 blijkt duidelijk de verbetering voor het 1 cm-niveau.

Hoewel we de gegevens van de bodentemperaturen op 5 cm diepte niet gebruikt hebben voor de harmonische analyse van de dagelijkse gang, hebben we een schatting van de waarden van α , β en γ voor deze diepten toch verkregen en wel door in de grenswaarden van γ_1 en γ_2 van tabel 3.3 grafisch te interpoleren. Fig. 3.5 geeft het resultaat $\alpha = 0.18$; $\beta = 0.42$ en $\gamma = 0.40$.

Tabel 3.5 geeft tenslotte een overzicht van de gevonden waarden van de gewichtscoefficiënten

tabel 3.5

1 cm	-0.70	0.40	1.30
5 cm	0,18	0.42	0.40
10 cm	0.46	0.45	0.09
25 cm	0.26	0.54	0.20

We beschikken in totaal over bodentemperatuur waarnemingen in de periode mei 1952 tot en met november 1953, met enkele korte onderbrekingen. Voor deze gehele periode zijn vijfdaagse gemiddelden bepaald. Een kleine steekproef hieruit heeft dus de resultaten opgeleverd die in het voorgaande behandeld zijn.

We gaan nu de gewichtscoefficiënten, die we in tabel 3.5 hebben samengevat, toepassen op alle beschikbare vijfdaagse gemiddelden. We hebben hierbij het materiaal ingedeeld volgens de klimatologische seizoenen en verkregen dus 6 groepen n.l.

Z₅₂ (zomer 1952: juni--augustus; indit geval bovendien met mei erbij)

H₅₂ (herfst 1952: sept.-nov.)

W₅₂₋₅₃ (winter 1952 - 1953 = dec. 1952; jan en febr. 1953)

Z₅₃ (lente 1953 = maart--mei 1953)

Z₅₃ en H₅₃.

We berekenden $\tilde{T} = \alpha T(8) + \beta T(14) + \gamma T(19)$ en bepaalden daarmee $V = \tilde{T} - T_d$. Voor iedere groep werd \bar{V} nevens de standaard deviaties S_V en $S_{\bar{V}}$ berekend. Tabel 3.6 geeft een overzicht van de resultaten:

Tabel 3.6

	\bar{V}	1 cm S_V	$S_{\bar{V}}$	\bar{V}	5 cm S_V	$S_{\bar{V}}$
Z ₅₂	+4,23	1,89	0,57	+2,42	0,50	0,15
H ₅₂	+1,47	0,97	0,23	+1,01	0,54	0,13
W ₅₂₋₅₃	+0,57	0,59	0,14	+0,22	0,20	0,06
L ₅₃	+3,96	1,37	0,32	+1,83	0,62	0,14
Z ₅₃	+4,82	1,61	0,51	+2,49	0,53	0,17
H ₅₃	+1,78	1,43	0,37	+1,08	0,72	0,19

	\bar{V}	10 cm S_V	$S_{\bar{V}}$	\bar{V}	25 cm S_V	$S_{\bar{V}}$
Z ₅₂	+0,23	0,17	0,05	-0,05	0,07	0,02
H ₅₂	+0,06	0,06	0,01	-0,02	0,09	0,02
W ₅₂₋₅₃	+0,03	0,09	0,02	+0,03	0,09	0,02
L ₅₃	+0,12	0,18	0,04	+0,04	0,15	0,04
Z ₅₃	+0,11	0,15	0,05	+0,05	0,11	0,04
H ₅₃	+0,11	0,12	0,03	+0,07	0,07	0,02

In de eerste plaats valt op dat de gewichtscoefficienten voor de diepte 1 en 5 cm tot zeer grote systematische afwijkingen aanleiding geven en dus zeker niet bruikbaar zijn. Ook bij de 10 cm diepte is er nog een systematisch verschil (n.l. ca 0.1°C) dat echter van aanzienlijk kleinere orde is dan dat van de eerste twee diepten. De kleine steekproef, die voor het bepalen van de dagelijkse gang is gebruikt, geeft dus geen betrouwbare uitkomsten voor ons doel.

We kunnen door een kleine berekening wel inzien, dat de variatie in de waarde van φ_1 en φ_2 tot grote verschillen aanleiding kan geven. Voor de diepte van 1 cm betekent de keuze $\alpha = -0,7$ en $\beta = 0,4$ dat $\varphi_1 = 261^\circ 18'$ en $\varphi_2 = 28^\circ 55'$ zijn gebruikt. Stel nu dat we een dag hebben, waarin de dagelijkse gang exact is te beschrijven met grondtoon + 1st boventoon met $\varphi_1 = 240^\circ 34'$ en $\varphi_2 = 68^\circ 31'$ juist de andere grenzen uit tabel 3.4, dan zal de berekening van het daggemiddelde met $\alpha = 0,7$, $\beta = 0,4$ en $\gamma = 1,3$ opleveren?

$$\tilde{T} = -0,7 T(8) + 0,4 T(14) + 1,3 T(19) =$$

$$T_d - 0,7 R_1 \sin(120 + 240^\circ 38') - 0,7 R_2 \sin(240 + 68^\circ 31') \\ + 0,4 R_1 \sin(210 + 240^\circ 38') + 0,4 R_2 \sin(60 + 68^\circ 31') \\ + 1,3 R_1 \sin(285 + 240^\circ 38') + 1,3 R_2 \sin(210 + 68^\circ 31')$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } \bar{T} - T_d &= R_1 (-0.7 \sin 0^\circ 34' + 0.4 \sin 90^\circ 34' + 1.3 \sin 165^\circ 34') \\ &+ R_2 (-0.7 \sin 308^\circ 31' + 0.4 \sin 128^\circ 31' + 1.3 \sin 278^\circ 31') \\ &= 0.72 R_1 - 0.426 R_2 \end{aligned}$$

Indien gekozen wordt $R_1 \sim 8^\circ$ en $R_2 \sim 2^\circ$ (zoals b.v. in de zomer kan voorkomen) krijgt de uitdrukking $\bar{T} - T_d$ dus inderdaad een waarde (n.l. +49) die ongeveer zo groot is als de waarden in tabel 3.6.

Men zou dus geneigd zijn te constateren, dat de variatie in R_1 en R_2 oorzaak is, dat een gewogen gemiddelde van $T(8)$, $T(14)$ en $T(19)$ nog aanzienlijk van T_d kan afwijken en dat dus een ander stel α, β en γ waarden te vinden zou zijn, die een bruikbare schatting van T_d oplevert.

We gaan thans anders te werk. We bepalen nu voor alle zes groepen waarnemingen empirisch met de methode der kleinste kwadraten waarden voor α, β en γ (waarbij $\alpha + \beta + \gamma = 1$). We eisen dus dat

$$\sum (\alpha T(8) + \beta T(14) + \gamma T(19) - T_d)^2$$

minimaal wordt.

Substitueren we $\gamma = 1 - \alpha - \beta$ en schrijven we $x = T(8) - T(19)$, $y = T(14) - T(19)$ en $z = T_d - T(19)$, dan moet dus $\sum (\alpha x + \beta y - z)^2$ minimaal worden. Derhalve worden de normaalvergelijkingen:

$$\alpha \sum x^2 + \beta \sum xy = \sum xz$$

$$\alpha \sum xy + \beta \sum y^2 = \sum yz$$

waaruit α en β gevonden kunnen worden.

Het resultaat van de berekening vinden we in tabel 3.7.

Tabel 3.7

	1 cm			5 cm		
	α	β	γ	α	β	γ
Z ₅₂	+0.55	+0.06	+0.39	+0.51	+0.06	+0.43
H ₅₂	+0.29	+0.12	+0.59	+0.47	+0.15	+0.38
W ₅₂₋₅₃	+0.35	+0.19	+0.46	+0.43	+0.21	+0.36
L ₅₃	+0.52	+0.07	+0.41	+0.43	+0.05	+0.52
Z ₅₃	+0.61	+0.07	+0.32	+0.55	+0.08	+0.37
H ₅₃	+0.32	+0.10	+0.58	+0.48	+0.19	+0.33
Symultaan	+0.47	+0.08	+0.45	+0.54	+0.15	+0.31

	10 cm			25 cm		
	α	β	δ	α	β	δ
Z ₅₂	+0.52	+0.37	+0.11	+0.37	+0.26	+0.37
H ₅₂	+0.49	+0.48	+0.03	+0.54	-0.07	+0.53
W ₅₂₋₅₃	+0.47	+0.20	+0.33	+0.66	-0.07	+0.41
L ₅₃	+0.48	+0.11	+0.41	+0.44	+0.17	+0.39
Z ₅₃	+0.50	+0.19	+0.31	+0.46	+0.11	+0.43
H ₅₃	+0.47	+0.28	+0.25	+0.34	+0.44	+0.22
Symultaan	+0.49	+0.33	+0.18	+0.45	+0.14	+0.41

In de onderste regel van deze tabel hebben we de waarden van α , β en δ geplaatst, die we vinden, als we alle zes seizoengroepen bij elkaar nemen. Met deze waarden van de gewichtscoefficienten hebben we tabel 3.8 analoog aan tabel 3.6 samengesteld.

Tabel 3.8

	1 cm			5 cm		
	\bar{v}	S_v	$S\bar{v}$	\bar{v}	S_v	$S\bar{v}$
Z ₅₂	+0.26	0.41	0.12	+0.13	0.24	0.07
H ₅₂	-0.28	0.28	0.07	-0.17	0.23	0.05
W ₅₂₋₅₃	-0.18	0.14	0.03	-0.09	0.07	0.02
L ₅₃	-0.14	0.39	0.09	-0.06	0.22	0.05
Z ₅₃	+0.37	0.35	0.11	+0.22	0.22	0.07
H ₅₃	-0.31	0.35	0.09	-0.25	0.18	0.05
	10 cm			25 cm		
	\bar{v}	S_v	$S\bar{v}$	\bar{v}	S_v	$S\bar{v}$
Z ₅₂	+0.13	0.18	0.05	-0.06	0.08	0.03
H ₅₂	-0.06	0.07	0.02	-0.01	0.07	0.02
W ₅₂₋₅₃	+0.02	0.07	0.02	+0.03	0.08	0.02
L ₅₃	-0.02	0.14	0.03	+0.02	0.07	0.02
Z ₅₃	+0.04	0.07	0.02	-0.02	0.04	0.01
H ₅₃	-0.02	0.11	0.03	+0.01	0.05	0.02

Bij de beschouwing van deze resultaten valt in de eerste plaats op dat α en β voor de verschillende diepten betrekkelijk weinig verschillen. Rekenen we b.v. via fig. 3.1 uit deze waarden van α en β terug naar φ_1 en φ_2 dan vinden :

	tabel 3.9	
	φ_1	φ_2
1 cm	$148^\circ \pm K.180$	$136^\circ + K.180$
5 cm	$15^\circ \pm K.180$	$133^\circ + K.180$
10 cm	$8^\circ \pm K.180$	$135^\circ + K.180$
25 cm	$149^\circ \pm K.180$	$133^\circ + K.180$

Alleen voor de diepten 10 en 25 cm blijken deze waarden met die van de tabellen 3.3 te rijmen. Voor de diepten 1 en 5 cm is echter in het geheel geen overeenstemming. De verklaring van dit op het eerste gezicht vreemde verschijnsel is als volgt. Bij de afleiding van de formules voor de bepaling van α en β hebben we de voorwaarden (3.5) en (3.6) gesteld op grond van het feit, dat (3.2) moet gelden onafhankelijk van de waarden R_1 en R_2 . Nu blijken R_1 en R_2 niet onafhankelijk van elkaar te zijn. In grafiek tegen elkaar uitgezet is er duidelijk verband te zien. Laten we voor dit verband in eerste benadering een lineair verband door de oorsprong aannemen d.w.z. dat we de verhouding R_1/R_2 constant onderstellen. Daardoor blijkt het mogelijk α , β en δ waarden te vinden, waarvoor helemaal niet aan (3.5) en (3.6) voldaan is, maar waarvoor

$$R_1 \{ \alpha \sin(120 + \varphi_1) + \beta \sin(210 + \varphi_1) + \delta \sin(285 + \varphi_1) \} + R_2 \{ \alpha \sin(240 + \varphi_2) + \beta \sin(60 + \varphi_2) + \delta \sin(210 + \varphi_2) \}$$

toch ongeveer nul is.

Indien dus voor een bepaalde diepte φ_1, φ_2 en de verhouding R_1/R_2 (= g) exact constant is, zijn er voor de bepaling van α, β en δ slechts twee vergelijkingen n.l.:

$$\alpha + \beta + \delta = 1$$

$$\text{en } g \{ \alpha \sin(120 + \varphi_1) + \beta \sin(210 + \varphi_1) + \delta \sin(285 + \varphi_1) \} + \{ \alpha \sin(240 + \varphi_2) + \beta \sin(60 + \varphi_2) + \delta \sin(210 + \varphi_2) \} = 0 \quad (3.14)$$

d.w.z. dat er een enkelvoudig oneindig aantal oplossingen voor α, β en δ is. We kunnen dan echter weer de eis stellen dat $S = \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2$ minimaal is.

We schrijven voor (3.14):

$$\begin{aligned} & (1.832 g \cos \varphi_1 - 0.759 g \sin \varphi_1 - 0.366 \cos \varphi_2 + 0.366 \sin \varphi_2) \alpha \\ & + (0.466 g \cos \varphi_1 - 1.125 g \sin \varphi_1 + 1.366 \cos \varphi_2 + 1.366 \sin \varphi_2) \beta \\ & - 0.966 g \cos \varphi_1 - 0.259 g \sin \varphi_1 + 0.500 \cos \varphi_2 + 0.866 \sin \varphi_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

of

$$\beta = A \alpha + B$$

met

$$\begin{aligned} A &= \frac{1.832 \, q \cos \varphi_1 - 0.759 \, q \sin \varphi_1 - 0.366 \cos \varphi_2 + 0.366 \sin \varphi_2}{0.466 \, q \cos \varphi_1 - 1.125 \, q \sin \varphi_1 + 1.366 \cos \varphi_2 + 1.366 \sin \varphi_2} \\ B &= \frac{0.966 \, q \cos \varphi_1 - 0.259 \, q \sin \varphi_1 + 0.500 \cos \varphi_2 + 0.866 \sin \varphi_2}{0.466 \, q \cos \varphi_1 - 1.125 \, q \sin \varphi_1 + 1.366 \cos \varphi_2 + 1.366 \sin \varphi_2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nu wordt

$$\begin{aligned} S &= \alpha^2 + \beta^2 + (1 - \alpha - \beta)^2 = \\ &= 1 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\alpha - 2\beta + 2\alpha\beta = \\ &= 1 + 2\alpha^2 + 2(A\alpha + B)^2 + 2\alpha - 2(A\alpha + B) + 2\alpha(A\alpha + B) = \\ &= 2(1 + A + A^2)\alpha^2 + 2(2AB - A + B - 1)\alpha + 1 - 2B + 2B^2 \end{aligned}$$

Voor de extreme waarde geldt de conditie:

$$\frac{dS}{d\alpha} = 0$$

$$\text{of} \quad 4(1 + A + A^2)\alpha + 2(2AB - A + B - 1) = 0$$

Hieruit volgt:

$$\alpha = \frac{1 + A - B - 2AB}{2(1 + A + A^2)} \quad (3.17)$$

terwijl

$$\beta_0 = A\alpha_0 + B$$

en

$$\gamma_0 = 1 - (\alpha_0 + \beta_0)$$

We nemen nu van R_1/R_2 , φ_1 en φ_2 gemiddelde waarden uit de tabellen 1.1 en 1.2, waarbij we voor de diepte 5 cm interpoleren tussen de waarden van de andere diepten. Deze waarden zijn in tabel 3.10 te vinden.

Tabel 3.10

	R_1/R_2	φ_1	φ_2
1 cm	3,6	251°	49°
5 cm	4,6	220°	20°
10 cm	5,4	198°	-10°
25 cm	6,7	153°	-77°

De berekening van α_0 , β_0 en γ_0 heeft nu het resultaat, dat in tabel 3.11 is bijeengebracht.

Tabel 3.11

	1 cm	5 cm	10 cm	25 cm
α_0	0.43	0.54	0.51	0.34
β_0	0.10	0.15	0.27	0.33
γ_0	0.47	0.31	0.22	0.33

Vergelijken we deze cijfers met de rij: symultaan van tabel 3.7, dan zien we dat er thans een goede overeenstemming is, vooral voor de diepten 1 en 5 cm. Bij de cijfers voor de diepte 25 cm is wel enig verschil. We hebben echter in de tabellen 3.6 en 3.8 reeds gezien dat het voor het eindresultaat weinig verschil maakt of we voor deze diepten $\alpha = 0.26$ en $\beta = 0.54$ nemen of $\alpha = 0.45$ en $\beta = 0.11$. Ongetwijfeld zal daarom $\alpha = 0.34$ en $\beta = 0.33$ tot ongeveer hetzelfde resultaat voeren. Voor toepassing in de praktijk zouden we - en dit is belangrijk - voor deze diepten dus zonder meer het 3x daagse gemiddelde

$1/3 (T_{(8)} + T_{(14)} + T_{(19)})$ kunnen gebruiken.

Voor de 10 cm is zonder bezwaar gemakshalve

$1/4 (2 T_{(8)} + T_{(14)} + T_{(19)})$ te nemen.

Wat de 1 en 5 cm diepte betreft dienen we eerst nog op een opvallend effect te wijzen. In de tabel 3.8 zien we n.l. duidelijk, dat \bar{V} met het seizoen varieert. In de zomer is \bar{V} n.l. positief, in de herfst evenals in de winter en lente echter negatief; hierbij is de absolute waarde van \bar{V} in de herfst echter het grootste.

De herfst - evenals de zomer - waarden van 1952 en 1953 stemmen goed met elkaar overeen.

We zijn geneigd (Zie tabel 3.7) voor ieder der diepten 1 en 5 cm voorlente en zomer één stel gewichtscoefficienten te aanvaarden n.l.

	α	β	γ
1 cm	0.55	0.07	0.38
5 cm	0.50	0.06	0.44

en voor herfst en winter een ander stel

	α	β	γ
1 cm	0.32	0.14	0.54
5 cm	0.96	0.18	0.36

In plaats van de eis dat $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ minimaal is met de bijcondities (3.14) wat tot (3.17) voert, zouden we ook in de dagelijkse gang een trend kunnen toelaten en dus de voorwaarde (2.7) er bij nemen. Deze luidt dus nu

$$8\alpha + 14\beta + 19\gamma = 12. \quad (3.18)$$

Als nu nog $\alpha + \beta + \gamma = 1$ wordt ingevuld krijgt men de uitdrukking

$$11\alpha + 5\beta = 7. \quad (3.18')$$

Het zou het fraaiste zijn als naast de minimum eis ook dit zou gelden. We controleren daarom of aan (3.18) voldaan is met de waarden voor α_0, β_0 en δ_0 uit tabel 3.11. We vinden voor de numerieke waarde van $8\alpha_0 + 14\beta_0 + 19\delta_0$ op de diepten van 1, 5, 10 en 25 cm respectievelijk de waarden 13,77; 21,31; 12,04 en 13,61.

Op de diepten 5 en 10 cm is inderdaad vrijwel voldaan aan (3.18) Op 1 en 25 cm is de afwijking, hoewel groter, niet ernstig. Voor 1 cm b.v. krijgen we i.p.v. een bijdrage tot T_d van 12 p een bijdrage 13,77 p. Aangezien $p = \frac{T(24) - T(0)}{2.4}$ is de fout dus $0,07 \{ T(24) - T(0) \}$. Aangezien $T(24) - T(0)$ in 't algemeen, absoluut, niet meer dan 1 à 2 °C bedraagt en slechts in enkele gevallen groter is (tot 3 à 4 °C), is deze fout wel te verwaarlozen. Hetzelfde geldt voor de diepte 25 cm.

Thans rest ons nog omtrent de bepaling van het 24 uurgemiddelde op de diepten 50 en 100 cm iets vast te stellen. Voor deze diepten wordt bij routine aflezingen steeds met één aflezing (om 14 uur) per dag volstaan. Voor 100 cm is dit zeker voldoende. Hier is van een dagelijkse gang niets meer te merken (zie [3] blz. 49 tabel 3) en kan de momentane aflezing zonder meer als het etmaalgemiddelde worden beschouwd. Op 50 cm is echter wel enige dagelijkse gang te constateren. Ook hier zouden stellig 3x daagse waarnemingen gewenst zijn. Met alleen één waarneming om 14 uur, zal het resultaat van deze aflezing tot T_d moeten worden herleid, waarbij een constante vermenigvuldigingsfactor de eenvoudigste oplossing zou zijn. In fig. 3.6 hebben we van de 5 daagse gemiddelden te Castricum van mei 1952 tot oktober 1953 de waarden van $T_d - T_{(14)}$ tegen $T_{(14)}$ uitgezet. We kunnen de punten wolk met $T_d - T_{(14)} = 0.027 T_{(14)}$ of $T_d = 1.027 T_{(14)}$ beschrijven. De factor varieert tussen 1.00 en 1.07. De nauwkeurigheid, waarmee T_d uit T_{14} wordt afgeleid, bedraagt dus ca 3 à 4 %.

In het bovenstaande is uitsluitend met de 5 daagse gemiddeldengewerkt. Wil men daggemiddelden zelf gebruiken, dan wordt, als dezelfde gewichtscoefficienten worden gebruikt, de onnauwkeurigheid nog eens 2 à 3 x zo groot.

We hebben nu dus nagegaan hoe men, in onbegroeide zandbodem, uit drie maal daagse waarnemingen van de bodemtemperatuur de etmaalgemiddelde kan afleiden. Het is daarbij gebleken, dat men rekening moet houden met de diepte en voor de diepten dicht bij het oppervlak ook met het seizoen. Bovendien zullen we de resultaten, die hier voor onbegroeide zandgrond zijn verkregen, stellig niet zonder meer voor andere grondsoorten, en bij begroeide bodem kunnen gebruiken.

Wil men op andere plaatsen van ons land uit driemaaldaagse waarnemingen van de bodemtemperatuur, een redelijke schatting van het etmaalgemiddelde kunnen afleiden, dan zal er aan voorafgaande een onderzoek naar de waarde van de gewichtscoefficienten moeten plaatsvinden.

Hiervoor zullen een tijdlang registraties van temperaturen op verschillende diepten moet worden uitgevoerd, tenzij men de waarden van warmtegeleidensvermogen en warmtecapaciteit van de bodem door rechtstreekse meting zou kunnen bepalen. In het laatste geval is het toch ook nodig de dagelijkse gang van de temperatuur op één diepte te meten.

4. Schatting van het etmaalgemiddelde van de luchttemperatuur.

We willen thans onderzoeken, welke gewichten men aan de termijnwaarnemingen van de luchttemperatuur moet geven om een goede schatting van het etmaalgemiddelde (T_d) uit te verkrijgen.

We gebruiken voor dit onderzoek de waarnemingen van De Bilt over het willekeurig gekozen jaar 1950.

In de eerste plaats zullen we het in 3 afgeleide resultaat gebruiken, dat de tijdstippen 4, 12 en 20 uur de meest gunstige tijdstippen zijn om uit 3 waarnemingen T_d af te leiden.

$$\text{We bepalen dus } \bar{T}_1 = 1/3 (T_{(4)} + T_{(12)} + T_{(20)}) \quad (4.1)$$

In de tweede plaats gebruiken we een resultaat van Dr. Braak. Het verschil tussen T_d en het drie maal daagse gemiddelde is door deze auteur berekend en vertoont een jaarlijkse gang. Voor iedere maand geeft Braak een gemiddeld verschil (zie [4] p.12). We zullen dit met C_B aangeven. We berekenen dus ook

$$\bar{T}_2 = 1/3 (T_{(8)} + T_{(14)} + T_{(19)}) - C_B. \quad (4.2)$$

Voor de luchttemperatuur beschikken we in het algemeen ook over de maximum (T_M) en de minimum temperatuur (T_m). Een schatting van T_d hieruit is eenvoudig

$$\bar{T}_3 = \frac{1}{2} (T_M + T_m) \quad (4.3)$$

Dit is b.v. in Amerika de gebruikelijke methode om het etmaalgemiddelde te verkrijgen.

In de vierde plaats hebben we analoog aan hetgeen voor de bodemtemperaturen werd gedaan, empirisch met behulp van de methode der kleinste kwadraten waarden voor de gewichtscoefficienten α en β (waarna $\gamma = 1 - \alpha - \beta$) bepaald door te stellen:

$$T_d - T_{(19)} = \alpha (T_{(8)} - T_{(19)}) + \beta (T_{(14)} - T_{(19)})$$

We hebben dit afzonderlijk gedaan voor de 1st resp. 2e decade van iedere maand. In fig. 4.1 zijn de resultaten voorgesteld. Er is nog wel enig verschil tussen de α resp. β -waarden, die voor de 1st en de 2e decade werden bepaald. Het is echter duidelijk, dat vooral de waarde van β niet voor alle maanden dezelfde is. Aangezien het uit praktische overwegingen van belang is, dat α en β eenvoudige breuken zijn, zouden we de volgende waarden willen gebruiken voor toepassing:

Voor de maanden april september $\alpha = \frac{1}{2}$ en $\beta = 0$

Voor de maanden oktober maart $\alpha = \frac{1}{2}$ en $\beta = \frac{1}{4}$.

We krijgen dan

$$\tilde{T}_4 = \begin{cases} \frac{1}{4} (2T(8) + T(14) + T(19)) & \text{voor oktober maart} \\ \frac{1}{2} (T(8) + T(19)) & \text{voor april ... september} \end{cases} \quad (4.4)$$

We hebben eerst deze formules toegepast op de cijfers van de derde decade en van 1st en 2e decade afzonderlijk en voor iedere groep het verschil $(\tilde{T}_{(i)} - T_{(d)})$, het gemiddelde daarvan en de standaard - afwijking bepaald. We hebben de derde decade dus gebruikt om er een indruk van te krijgen of de gevonden waarden van α en β ook bruikbaar zijn voor waarnemingen, die niet bij de afleiding gebruik zijn. Het blijkt dat de standaard-afwijkingen van $\tilde{T}_{(i)} - T_d$ de volgende waarden bezitten:

	okt. - mrt.	apr. - sept.
1st + 2de dec.	0.46	0.78
3de dec.	0.50	0.61

De waarden van de standaard deviatie hebben voor beide groepen ongeveer dezelfde grootte. We kunnen dus \tilde{T}_4 zonder bezwaar algemeen gebruiken.

We hebben nu voor iedere maand de waarde van \tilde{T}_i ($i = 1, \dots, 4$) bepaald en vervolgens berekend $\tilde{T} - T_d$ en $S_{\tilde{T}} - T_d$. In fig. 4.2 zijn de resultaten samengevat.

We zien hieruit dat inderdaad de tijdstippen 4, 12 en 20 uur veel gunstiger resultaten geven. De spreiding is voor \tilde{T}_1 over de hele linie kleiner dan de spreiding voor de andere schattingen. Verder is \tilde{T}_2 in de maanden maart juni veel ongunstiger dan \tilde{T}_3 of \tilde{T}_4 . Tussen \tilde{T}_3 en \tilde{T}_4 is wat de spreidingen betreft weinig verschil. Helaas geeft \tilde{T}_4 in de zomermaanden (mei aug.) een vrij grote systematische fout. Toepassing van \tilde{T}_4 eist dus nog een van de maand afhankelijke correctie (C_m) zodat we T_d dan schatten met $\tilde{T}_4 + C_m$.

Willen we T_d zo eenvoudig mogelijk schatten dan is \tilde{T}_3 de aange-
wezen formule.

Daar echter van de termijnstations zowel 3x daagse waarnemingen als T_M en T_m beschikbaar zijn, ligt het voor de hand voor de schatting van T_d alle waarnemingen te gebruiken en b.v. $\tilde{T}_5 = \frac{1}{2} (T_3 + T_4)$ te bepalen. Als we dit doen, dan blijkt uit fig. 4.2 dat we een aanzienlijk betere schatting krijgen. De spreiding in de zomer blijkt nog gunstiger dan die van $\tilde{T}_1 - T_d$. Er blijft echter in de zomermaanden voor \tilde{T}_5 een systematische fout aanwezig. De combinatie van \tilde{T}_2 en \tilde{T}_3 geeft een minder gunstig resultaat, zoals ook te verwachten is, daar de spreiding in $\tilde{T}_2 - T_d$ over het algemeen groter is dan die van $\tilde{T}_4 - T_d$. Volledigheidshalve hebben we ook $\tilde{T}_6 = \frac{1}{2} (\tilde{T}_2 + \tilde{T}_3)$ bepaald.

Gemiddelde en spreiding zijn eveneens in fig. 4.2 aangegeven. Behoudens in de maanden november en december is $S_{T_6} - T_d > S_{T_5} - T_d$.

Op grond van fig. 4.2 kan als beste methode om T_d te schatten gebruikt worden

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{1}{4} \left\{ T_M + T_m + T(8) + \frac{1}{2} (T(14) + T(19)) \right\} - C \text{ van okt. ... maart} \\ \tilde{T} &= \frac{1}{4} \left\{ T_M + T_m + T(8) + T(19) \right\} - C \text{ van april maart, sept} \end{aligned} \quad (4.5)$$

waarbij C nog nader bepaald dient te worden. Misschien kan men zich er toe beperken om voor C in de maanden mei tot en met augustus de waarde 0,3 te kiezen en in de andere maanden de waarde nul te geven.

5. Over de dagelijkse gang van de luchttemperatuur.

In eerste instantie werd voor het bepalen van gewichtscoefficienten voor de schatting van het etmaalgemiddelde van de luchttemperatuur getracht van een formule voor de dagelijkse gang uit te gaan. Hoewel dit niet tot een bruikbare oplossing leidde, willen we de resultaten van dit deel van het onderzoek volledigheidshalve toch vermelden.

Aangezien wij niet de beschikking hadden over een voldoende groot aantal harmonische analyse van de dagelijkse gang kan de methode, die bij de bodemtemperaturen werd gebruikt niet worden toegepast. Met die methode werden immers uit de fasehoeken en amplitudines-verhouding de waarden bepaald van de gewichtscoefficienten. Intussen was onze aandacht gevallen op een door Azuma (zie [5]) voorgestelde formule voor de dagelijkse gang, waarvan we de bruikbaarheid wilden nagaan. Deze formule heeft een groot praktisch voordeel boven het gebruik van de harmonische analyse; hierbij kunnen de waarden van T_M en T_m , zonder de bijbehorende tijdstippen voor de bepaling van de constanten gebruikt worden.

Bij de formule

$$T = T_0 + R_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + R_2 \cos(2\omega t + \varphi_2)$$

is dit n.l. niet op eenvoudige wijze mogelijk.

De formule van Azuma luidt:

$$T = A_0 + A \sin(\omega t + \varepsilon - \gamma \sin \omega t) \quad (5.1)$$

O.i. moet echter deze formule nog met een constante uitgebreid worden tot

$$T = A_0 + A \sin\{\omega t + \varepsilon_1 - \gamma \sin(\omega t + \varepsilon_2)\} \quad (5.2)$$

We moeten immers toch minstens eisen, dat de formule niet afhankelijk is van het toevallige beginpunt van de 24 uur periode. Het mag geen verschil maken of we nu bij 0 uur of bij 8 uur het etmaal laten beginnen. Vervanging van t door $t + \tau$ moet namelijk geen invloed hebben op de vorm.

Vervangen we in (5.1) nu ook t door $t + \tau$, dan ontstaat:

$$T = A_0 + A \sin\{\omega t + \varepsilon + \omega \tau - \gamma \sin(\omega t + \omega \tau)\}$$

$$= A_0 + A \sin\{\omega t + \varepsilon + \omega \tau - \gamma \cos \omega \tau \sin \omega t - \gamma \sin \omega \tau \cos \omega t\}$$

Dit zou te schrijven moeten zijn als

$$A'_0 + A' \sin(\omega t + \varepsilon' - \gamma' \sin \omega t)$$

maar dat kan niet.

Met 5.2 lukt het wel; A_0, A en γ blijven dan gelijk en ε_1 resp ε_2 gaan over in $\varepsilon_1 + \omega \tau$ resp. $\varepsilon_2 + \omega \tau$.

Het is ons ook niet gelukt om met (5.1) een redelijke aanpassing aan 24 uur gemiddelde van de luchttemperatuur te verkrijgen; met (5.2) daarentegen wel.

De bepaling van de constanten is vrij eenvoudig; men bepaalt eerst

$$A_0 = \frac{1}{2} (T_M + T_m)$$

en $A = \frac{1}{2} (T_M - T_m)$

Daarna wordt voor iedere uurgemiddelde de grootheid $X = b \gamma \sin \frac{T - A_0}{A}$ berekend.

Nu moet dus gelden

$$X = \omega t + \varepsilon_1 - \gamma \sin(\omega t + \varepsilon_2)$$

Over alle 24 uurwaarden ($t = \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, \dots, 23\frac{1}{2}$) gemiddeld wordt $\sin(\omega t + \varepsilon_2)$ nul en ωt wordt 12 w.

dus $\bar{X} = 12\omega + \varepsilon_1$ of $\varepsilon_1 = \bar{X} - 12\omega$.

We moeten verder bedenken dat $\omega = 15$, als we X in graden nemen, en dat $\omega = \frac{\pi}{12}$ als we in radialen werken.

Nu we moeten γ en ε_2 bepaald worden uit de volgende vergelijkingen:

$$\gamma \sin(\omega t + \varepsilon_2) = \omega t + \varepsilon_1 - X = \omega(t - 12) - (X - \bar{X}) \quad (5.3)$$

De noodzakelijkheid van de invoering van ε_2 volgt ook reeds uit

(5.3.) Er is namelijk geen reden om te onderstellen, dat de fluctuerende grootheid $\omega t + \varepsilon_1 - X$ een zuivere sinus is, met een phasehoek die juist nul is.

Wil men toch (5.1) toepassen dan moet men voor γ nemen

$$\frac{1}{24} \sum_{t=\frac{1}{2}}^{23\frac{1}{2}} \frac{\omega(t - 12) - (X - \bar{X})}{\sin \omega t} \quad (5.4)$$

Als voorbeeld hebben we de temperatuur waarnemingen van De Bilt op 12 mei 1950 gebruikt en hierop zowel (5.1) als (5.2) toegepast. Fig. 5.1 geeft het resultaat. Hoewel de uitgebreide Azuma-formule (T_2) ook geen bijzonder fraaie aanpassing geeft is het resultaat toch aanzienlijk beter dan met de oorspronkelijke Azuma-formule (T_1). We hebben tenslotte voor dit geval ook de harmonische analyse (T_3) (beperkt tot "grondtoon" + 1ste "boventoon") uitgevoerd.

De op deze wijze aangepaste kromme is eveneens in fig. 5.1 aangegeven.

Als we de kwadraatsom (S^2) der afwijkingen berekenen vinden we

voor T_1 : $S^2 = 64.77$

T_2 : $S^2 = 22.74$

T_3 : $S^2 = 20.50.$

De formule van de harmonische analyse geeft dus de beste aanpassing; het verschil met de gecorrigeerde Azuma-formule is echter gering.

De vraag is nu of we met behulp van de gecorrigeerde Azuma-formule, uit T_M , T_{11} en $T(8)$, $T(14)$, $T(19)$ een schatting van T_d kunnen verkrijgen.

In de eerste plaats dienen we te weten wat T_d in het geval van de gecorrigeerde Azuma-formule is. We moeten dus berekenen (als t in uren is genoteerd):

$$T_d = \frac{1}{24} \int_0^{24} [A_0 + A \sin \left\{ \frac{2\pi}{24} t + \xi_1 - \gamma \sin \left(\frac{2\pi}{24} t + \xi_2 \right) \right\}] dt.$$

waarvoor we vinden

$$T_d = A_0 + A \sin (\xi_1 - \xi_2) \cdot J_1 (\gamma). \tag{5.5}$$

waarin $J_1 (\gamma)$ de Besselse functie van de eerste soort is en γ in radialen dient genoteerd te zijn.

Afleiding:

$$T_d = A_0 + A - \frac{1}{24} \int_0^{24} \sin \left\{ \frac{2\pi}{24} t + \xi_1 - \gamma \sin \left(\frac{2\pi}{24} t + \xi_2 \right) \right\} dt$$

We substitueren $x = \frac{2\pi}{24} t + \xi_2$ dus $dt = \frac{24}{2\pi} dx$.

$$\begin{aligned} T_d &= A_0 + A \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_2}^{2\pi + \xi_2} \sin (x + \xi_1 - \xi_2 - \gamma \sin x) dx \\ &= A_0 + A \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin (x + \xi_1 - \xi_2 - \gamma \sin x) dx = \\ &= A_0 + A \frac{\sin (\xi_1 - \xi_2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos (x - \gamma \sin x) dx + A \frac{\cos (\xi_1 - \xi_2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin (x - \gamma \sin x) dx \end{aligned}$$

De laatste integraal kunnen we schrijven als

$$\int_0^{\pi} \sin (x - \gamma \sin x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin (x - \gamma \sin x) dx = I_1 + I_2$$

Substitueren we in I_2 : $x = 2\pi - x'$ dan ontstaat

$$\begin{aligned} & - \int_{\pi}^0 \sin \left\{ 2\pi - x' - \gamma \sin (2\pi - x') \right\} dx' = \int_0^{\pi} \sin (2\pi - x' + \gamma \sin x') dx' \\ & = - \int_0^{\pi} \sin (x' - \gamma \sin x') dx' = - \int_0^{\pi} \sin (x - \gamma \sin x) dx \end{aligned}$$

Dit is precies gelijk aan I_1 .

Er blijft nu voor T over

$$A_0 + A \frac{\sin (\xi_1 - \xi_2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos (x - \gamma \sin x) dx$$

De integraal gaat over in

$$\int_0^{2\pi} \cos x \cos(\gamma \sin x) dx + \int_0^{2\pi} \sin x \sin(\gamma \sin x) dx = I_3 + I_4$$

Gemakkelijk is na te rekenen dat $I_3 = 0$ en $I_4 = 4 \int_0^{\pi} \sin x \sin(\gamma \sin x) dx$

Nu is $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(z \sin \varphi) \sin(2n+1)\varphi d\varphi$ een integraal voorstelling van de Bessel functie $J_{2n+1}(z)$ (zie [6] fig.150).

Derhalve is $4 \int_0^{\pi} \sin x \sin(\gamma \sin x) dx = 2\pi J_1(\gamma)$ waarmee (5.5.) bewezen is.

Controle:

De aanpassing aan (5.2) leverde: $A_0 = 16.7$; $A = 7.4$; $\epsilon_1 = -110^\circ 7'$; $\epsilon_2 = 75^\circ 3'$ en $\gamma = 28^\circ 56'$ ($= 0.505$ rad)

Als we hiermede de 24 uurwaarden berekenen en deze middelen vinden we 16.86 terwijl $T_d = 16.7 + 7.4 \sin -185^\circ 10' \cdot J_1(0.505)$
 $= 16.7 + 7.4 \times 0.090 \times 0,245 = 16.7 + 0.16 = 16.86$

Dit klopt.

Het gemiddelde van de waarnemingen bedraagt 16.99.

Nu laten A_0 , A , ϵ_1 , ϵ_2 en γ zich uit T_M , T_m , $T(8)$, $T(14)$ en $T(19)$ als volgt berekenen;

$$A_0 = \frac{1}{2} (T_M + T_m)$$

$$A = \frac{1}{2} (T_M - T_m)$$

Voeren we in

$$b_{(i)} = bg \sin \frac{T(i) - A_0}{A} \quad \text{voor } i = 8, 14 \text{ en } 19$$

dan moeten we nu γ , ϵ_1 en ϵ_2 oplossen uit de drie vergelijkingen:

$$b_{(8)} = 120 + \epsilon_1 - \gamma \sin(120 + \epsilon_2)$$

$$b_{(14)} = 210 + \epsilon_1 - \gamma \sin(210 + \epsilon_2)$$

$$b_{(19)} = 285 + \epsilon_1 - \gamma \sin(285 + \epsilon_1).$$

Als we in deze drie vergelijkingen invoeren $x = \gamma \sin \epsilon_2$ en $y = \gamma \cos \epsilon_2$ dan ontstaan de onderstaande vergelijkingen:

$$\epsilon_1 + 0.500 x - 0.866 y = b_{(8)} - 120$$

$$\epsilon_1 + 0.866 x + 0.500 y = b_{(14)} - 210$$

$$\epsilon_1 - 0.259 x + 0.966 y = b_{(19)} - 285$$

Hieruit worden ϵ_1 , x en y opgelost:

$$\epsilon_1 = 0.566 b_{(8)} - 0.152 b_{(14)} + 0.586 b_{(19)} - 203^\circ 0'$$

$$x = -0.273 b_{(8)} + 1.073 b_{(14)} - 0.800 b_{(19)} + 35^\circ 27'$$

$$y = -0.159 b_{(8)} + 0.445 b_{(14)} + 0.214 b_{(19)} - 75^\circ 28'$$

Uit $x = \gamma \sin \epsilon_2$ en $y = \gamma \cos \epsilon_2$ volgt:

$$\gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$$

en

$$\text{tg } \epsilon_2 = \frac{x}{y}$$

γ , ϵ_1 en ϵ_2 zijn dus te berekenen, waarna (5.5) kan worden toegepast voor de berekening van T_d .

Een belangrijke verkorting van de berekening bestaat in het gebruik maken van de benadering $J_1(\gamma) \approx \frac{1}{2}\gamma$. Aangezien γ meestal de waarde van omstreeks 1 of kleiner heeft, is deze benadering wel bruikbaar. Voor $\gamma = 1$ blijkt de procentuele fout + 15% te bedragen. Aangezien de gehele term $A \sin(\epsilon_1 - \epsilon_2) \cdot J_1(\gamma)$ meestal tussen $+1^\circ$ en -1° varieert, is de fout hoogstens 0.15°C .

Aangezien we met $\frac{1}{2}\gamma$ een iets te grote waarde krijgen, is het misschien nog beter voor $J_1(\gamma)$ b.v. 0.44γ te nemen. Daardoor luidt dan de formule:

$$T = A_0 + 0.44 A(\gamma \sin \epsilon_1 - x \cos \epsilon_1),$$

waarbij x en γ in radialen genomen moeten worden. Als x en γ in hooggraden worden uitgedrukt, zal de factor 0.44 door 0.00768 moeten worden vervangen.

We hebben voor de maanden februari, juni en oktober de berekening doorgevoerd. Het blijkt dan, dat de standaarddeviatie in het verschil $\tilde{T} - \bar{T}$ ongeveer even groot is als de standaarddeviatie van het direct beschikbare $A_0 - \bar{T}$ ($\equiv \tilde{T}_3 - T$, zie fig.5.2). Enkele voorbeelden hiervan volgen in onderstaande tabel

	$S_{A_0 - \bar{T}}$	$S_{\tilde{T} - \bar{T}}$
febr.	0.71	0.67
juni	0.67	0.61
okt.	0.58	0.60

Het heeft derhalve niet de minste zin om i.p.v. eenvoudig A_0 als schatting van \bar{T} te gebruiken, de altijd nog zeer tijdrovende berekening van de term $0.44 A(\gamma \sin \epsilon_1 - x \cos \epsilon_1)$ uit te voeren.

Hiermede is o.i. wel aangetoond, dat de formule van Azuma uit praktische overwegingen voor ons doel, de bepaling van het 24-uurgemiddelde uit de termijnwaarnemingen, geen betekenis heeft.

Voor de beschrijving van de dagelijkse gang is de formule wel bruikbaar en is dan stellig eleganter van vorm dan de formule met grondtoon en eerste boventoon. Azuma voert ter verdediging van zijn formule aan, dat de beschrijving van de dagelijkse gang met een "grondtoon", 1st harmonische (en eventueel hogere "boventonen") zuiver wiskundig is en geen fysische betekenis heeft. Zijn formule is gebaseerd op de vergelijking van het warmte-transport in een luchtlaag:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

Hierbij onderstelt hij, dat K varieert en wel volgens de formule
 $K = K_0 (1 - \gamma \cos \sigma t)$

De oplossing van de differentiaal vergelijking voor dit eenvoudige model suggereerde Azuma zijn formule voor de dagelijkse gang.

6. Overeenkomstig onderzoek in het buitenland.

Op het ogenblik zijn uit het buitenland drie onderzoeken met hetzelfde doel bekend n.l. een studie van Bultot, die nu reeds aangehaald hebben [2], een Duits onderzoek van Schmidt [3] en een Noors van Kåre Utaaker [8]. Een vergelijking van hun uitkomsten met onze resultaten is echter niet mogelijk, daar de termijnwaarnemingstijdstippen niet dezelfde zijn als bij ons. Schmidt baseert alles op de Duitse tijdstippen 7, 14 en 21 uur en Bultot op 6, 9, 12, 15 en 18 uur terwijl Utaaker, 7, 13 en 19 uur gebruikt. In de Congo wordt dus 5 maal per dag waargenomen, waarvoor er soms twee waarnemingen vervallen n.l. die van 9 en 15 uur; daarentegen worden ook de maximum- en minimumtemperatuur T_M en T_m in zijn betrokken.

Schmidt onderzocht een aantal, door verschillende onderzoekers vroeger voorgestelde gewichtscoefficienten en bepaalde empirisch de verdeling van het verschil tussen schatting en waargenomen 24-uurgemiddelde.

Bultot gebruikte als gewichtscoefficienten waarden die als volgt gevonden zijn?

Onderstel dat de temperatuur tussen de waarnemingstijdstippen lineair verloopt. Neem het gemiddelde van de temperatuur op opeenvolgende tijdstippen. De waarden tussen 6 en 18 uur zijn dagwaarden (twee stukken voor 3 gevallen) (6, 12 en 18 uur) en vier voor vijf gevallen (6, 9, 12, 15 en 18) uur. Middel deze twee of vier waarden. Middel dit "overdag" gemiddelde met het uit de 6 en 18-uurwaarnemingen gevonden "nacht" gemiddelde.

Voor drie waarnemingen ontstaat

$$T = 3/8 T_{(6)} + 1/4 T_{(12)} + 3/8 T_{(18)}$$

Aangezien er tussen T_d en T steeds een systematisch verschil blijkt te bestaan is er nog een correctieterm (C) nodig. Bultot heeft voor elk van een zestal maanden de waarden van C bepaald.

Utaaker onderzoekt tenslotte met een zeer kleine steekproef o.a. de formules:

$$T_3 = 1/3 (T_{(7)} + T_{(13)} + T_{(19)})$$

$$T_{2a} = 1/2 (T_{(7)} + T_{(19)})$$

$$T_{2b} = 1/2 (T_{(7)} + T_{(13)})$$

$$T_4 = 1/4 (2T_{(7)} + T_{(13)} + T_{(19)})$$

en vindt dat T_{2a} het beste voldoet.

Literatuur

- [1] P.K. Peerlkamp: Bodemmeteorologische onderzoekingen te Wageningen.
Mededelingen Landbouwhogeschool te Wageningen
Deel 47 - verh.3 (1944)
- [2] F. Bultot: Moyennes vraies journalières, diurnes et nocturnes
de la température et de l'humidité de l'air.
Inst.Nat.pour l'étude agron. du Congo.
Bur.clim. Comm.No.20 Bruxelles (1961)
- [3] P.J. Rijkoort: De natuurkundige grondbeginselen van de warmtehuis-
houding in de bodem.
Landbouwkundig Tijdschrift 72.No.2 (jan. 1960)
- [4] C. Braak: Het klimaat van Nederland: Luchttemperatuur.
Med. en Verh. K.N.M.I. 43. (1940)
- [5] S. Azuma: On a new expression for the diurnal variaton of air
temperature.
I Met.notes 2 - 8 Met.Res. Inst. Kyoto (1956)
II " 2 - 15 " (1958)
- [6] E. Jahnke en
F. Emde: Funktionentafeln.
4e ed. 1945.
- [7] M. Schmidt: Über die Berechnung von Tagels mitteltemperaturen der
oberen Bodenschichten.
Zeitschrift für Met. 10-2 (febr. 1956)
- [8] K. Utaaker: Soil temperature measurements Studies in Local and
micro-meteorology at Kleppe.
Acta Univ.Bergensis- Ser. Math. Res.Nat. 1961
No.10.

Samenvatting

Het probleem dat in dit rapport wordt behandeld is de schatting van het etmaalgemiddelde (T_d) van de bodem- en luchttemperatuur uit termijnwaarnemingen (3x daags om 8, 14 en 19 uur en voor de luchttemperatuur bovendien uit het dagelijkse maximum en minimum).

In de eerste plaats zijn bodemtemperaturen behandeld. Er wordt uitgegaan van de benadering van de dagelijkse gang met behulp van 1ste en 2e harmonische (formule (2.1)) waaraan toegevoegd een lineaire term als trend. In § 1 is aangetoond dat deze een bruikbare aanpassing geeft.

In § 2 is onderzocht of met deze aanpassing drie tijdstippen t_1 , t_2 en t_3 te vinden zijn zodanig dat

$$\alpha T(t_1) + \beta T(t_2) + \gamma T(t_3) = T_d$$

waarbij T_d het etmaalgemiddelde voorstelt. Het blijkt, dat de enige oplossing is: $t_1 = 4$, $t_2 = 12$ en $t_3 = 20$ en $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$.

In § 3 wordt de schatting van T_d uit 3 waarnemingen op de tijdstippen 8, 14 en 19 behandeld. Hierbij worden waarden van α , β en γ bepaald zodanig dat $\alpha T(8) + \beta T(14) + \gamma T(19)$ de beste schatting van T_d is. Het blijkt dat α en β van de fasehoeken φ_1 en φ_2 van de 1ste en 2e harmonische afhangen (formules (3.11) en (3.12)), als we stellen dat de amplitudines R_1 en R_2 allerlei waarden moeten kunnen aannemen. Daar φ_1 en φ_2 blijken te variëren zullen α , β en γ ook variëren. Het blijkt verder echter, dat φ_1 en φ_2 binnen zekere grenzen variëren. We zullen dit in aanmerking nemen en bovendien onderstellen dat de grootheden $\delta(8) = T(8) - \tilde{T}(8)$, $\delta(14) = T(14) - \tilde{T}(14)$ en $\delta(19) = T(19) - \tilde{T}(19)$ onderling onafhankelijk en normaal verdeeld zijn.

Hierin stelt $T(t)$ de ware temperatuur voor en $\tilde{T}(t)$ de temperatuur, die exact aan (3.1) en (2.1) voldoet bij gegeven gemiddelde waarden van φ_1 en φ_2 . We kunnen nu eisen

$$\alpha T(8) + \beta T(14) + \gamma T(19) = T_d + \mathcal{E}.$$

In deze uitdrukking is \mathcal{E} een toevals variabele, waarvan de standaard deviatie zo klein mogelijk moet zijn. Dit voert tot de eis: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ moet minimaal zijn.

Met deze eis zijn nu langs meetkundige weg (fig. 3.4) eenduidige waarden voor α , β en γ te bepalen.

De gewichtscoefficienten α , β en γ , die voor de diepten 1, 5, 10 en 25 cm zijn bepaald geworden uit een steekproef van 10 groepen 5-daagse gemiddelden (T(1) T(24)) uit het materiaal van Castricum (1953), zijn ter controle toegepast op het volledige materiaal van mei 1952 tot okt. 1953. Als we \tilde{T}_d noteren voor het geschatte etmaalgemiddelde en $v = \tilde{T}_d - T_d$ schrijven dan geeft tabel 3.6 de waarde van \bar{v} , S_v en S_v^- .

Het blijkt, dat \bar{v} vooral voor de diepte van 1 en 5 cm vrij grote waarden kan krijgen. Er moet dus worden geconcludeerd, dat de langs bovenstaande weg verkregen waarde van α , β en γ nog niet bevredigend zijn.

Een andere weg is de directe, empirische weg, waarbij met de methode der kleinste kwadraten waarden van α , β en γ worden bepaald door te eisen dat

$$\sum (\alpha T(8) + \beta T(14) + \gamma T(19) - T_d)^2$$
 minimaal wordt.

Het resultaat van de berekeningen geeft tabel 3.7 .

Annaloog aan tabel 3.6 is voor de volgens de laatste methode bepaalde α , β en γ waarden tabel 3.8 samengesteld. Dit geeft een veel bevredigender resultaat.

Waarom gaven de waarden, die langs de "theoretische" weg gevonden werden zoveel slechter resultaten?.

Misschien is dit te verklaren uit een al te stringente eis, n.l. dat α , β en γ zodanig moeten worden gekozen, dat voor ieder stel willekeurige waarden van R_1 en R_2 aan (3.2) voldaan wordt. Dit blijkt niet nodig te zijn. R_1 en R_2 zijn niet van elkaar onafhankelijk. R_1/R_2 is ongeveer constant en dat wil zeggen, dat de laatste twee termen van (3.3) tezamen (zie (3.13)) nul kunnen zijn zonder dat (3.5) en (3.6) behoeft te gelden. Als we R_1/R_2 door q voorstellen krijgen we twee voorwaarden, n.l. (3.14). Eisen we bovendien weer dat $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ minimaal is, dan hebben we drie vergelijkingen, waaruit α , β en γ zijn op te lossen (zie (3.15) (3.16) en (3.17)), als we voor q , Y_1 en Y_2 gemiddelde waarden gebruiken. Het resultaat van de berekening geeft tabel 3.11. Deze cijfers geven een goede overeenstemming met die van tabel 3.7.

Tenslotte is voor de diepte van 50 cm, waar meestal slechts eenmaal per dag (om 14 uur) wordt waargenomen, een schatting gemaakt van de correctie, die op deze waarneming moet worden toegepast om het etmaalgemiddelde te verkrijgen (zie fig. 3.6).

Voor de diepte van 100 cm is eenmaal per dag waarnemen zonder correctie voldoende, omdat hier van een dagelijkse gang niets meer te bemerken valt.

In principe kunnen op bovenstaande wijze waarden van α , β en δ voor toepassing in de praktijk worden gevonden.

Paragraaf 4 behandelt de schatting van het etmaalgemiddelde van de luchttemperatuur uit termijnwaarnemingen; hierbij zijn ook de waarnemingen van maximum en minimum betrokken.

Aangezien we niet de beschikking hadden over een voldoende aantal harmonische analyses van luchttemperaturen is de methode die op de bodemtemperaturen is toegepast, hier niet gebruikt.

Er zijn vier empirische formules (4.1) (4.4) onderzocht en tevens combinaties van deze formules. Op grond van fig. 4.2 waar het gemiddelde en de spreiding van het verschil tussen waargenomen en berekend etmaalgemiddelde is aangegeven, kan (4.5) als beste benadering van het etmaalgemiddelde gebruikt worden.

In § 5 is nog enig onderzoek betreffende de dagelijkse gang van de luchttemperatuur behandeld. Door Azuma (lit [5]) is n.l. een formule gepubliceerd (5.1) die enkele voordelen bezit boven de formule met een 1st en 2e harmonische. Naar onze mening moet deze formule tot (5.2) worden uitgebreid. Een voordeel van deze formule is dat het waargenomen maximum en minimum direct in de formule kan worden ingevuld. Daarmede kunnen de konstanten A en A_0 (formule (5.3)) worden bepaald.

De formule is voor de beschrijving van de dagelijkse gang goed bruikbaar, maar is toch niet beter dan de formule ontwikkeld uit de harmonische analyse.

Het blijkt dat voor de schatting van het etmaalgemiddelde het gebruik van de formule van Azuma geen verbetering is t.o.v. de eenvoudige formule (4.3) die gelijk is aan de A_0 uit de formule van Azuma.

Tenslotte zijn in (6) nog gelijksoortige onderzoekingen in het buitenland genoemd, n.l. die van Bultot [2], Schmidt [7] en Utaaker [8].

Summary

The subject of this paper is the estimation of the daily means of soil and air temperature (T_d) from the L.A.T. observations at climatological hours (8, 14 and 19 h) used in the Netherlands and in the case of air temperature also from the maximum and minimum temperature.

It is shown in para 1 that harmonic analysis of soil temperatures yields a rather good fit of the daily variation when only a 1st and 2nd harmonic are used (fig. 1).

It is tried in para 2, to determine, starting from the formula with 1st and 2nd harmonics and a trend (formula (2.3)), the three times of observation t_1 , t_2 and t_3 and three weighing coefficients α , β and γ in such a manner that:

$$\alpha T(t_1) + \beta T(t_2) + \gamma T(t_3) = T_d$$

It appears that there is only one solution, namely: $t_1 = 4$, $t_2 = 12$, $t_3 = 20$ and $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$.

In para 3 the estimation of T_d for soil temperatures from $T(8)$, $T(14)$ and $T(19)$ is considered starting in the first place from formula (2.1) = (3.1). From the result of para 2 it follows that it is impossible to obtain weighing-coefficients α , β and γ which give the exact value of T_d . We can only expect to obtain values of α , β and γ which give in the mean a good estimation of T_d . In fact we obtain α , β and γ as functions of φ_1 and φ_2 (the phase constants of 1st and 2nd harmonic) if we allow R_1 and R_2 (the amplitudes) to take any possible value (formula (3.11) and (3.12)). As φ_1 and φ_2 are varying around some mean value within a range which must be determined from practical values, α , β and γ are also varying in some range. The condition: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ has to be as small as possible (resultings from suppositions of normality), makes it possible to find one set of values α , β and γ which can be used in practice. If we do so, using the observations which also have been used for the harmonic analysis described in 1, we obtain, for 1 and 5 cm depth at least, rather disappointing results. The mean differences (\bar{v}) between the observed values of T_d and the estimates T using the observation of 8, 14 and 19 hour and the mean values of φ_1 and φ_2 to get α , β and γ are rather large (table 3.6).

Our second approach to find values of α , β and γ is the direct empirical way, with the aid of the method of least squares. This way yields values of α , β and γ which give much better results. The mean differences between T_d and \tilde{T} are much smaller (table 3.8).

So we have seen that there are values of α , β and γ which give better results than those found in our first approach. What is the reason?. It may be that we have required a condition which is too stringent. We asked a solution for which both R_1 and R_2 could have any numerical value independent of each other. Now in practice it turned out that R_1 and R_2 are not mutually independent; R_1/R_2 is nearly constant (say $R_1/R_2 = q$) and that makes it possible that (3.13) = 0 without (3.5) and (3.6) being satisfied. So if we take mean values of q , ψ_1 and ψ_2 we can find from (3.14), together with the condition that $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ is a minimum, new values of α , β and γ . Table 3.11 shows that we nearly get the same values of α , β and γ as with the empirical method.

In the last part of 3 we obtained a correction factor for temperature at 50 cm which is observed only at 14h in order to be able to obtain an estimate of the daily mean at this depth.

At 100 cm depth the diurnal variation can be neglected and the value of one observation can be considered as the daily mean.

Para 4 deals with the estimation of the daily mean for air temperature from the terminal observations (8, 14 and 19 h and maximum and minimum). The method with the harmonic analysis is not used here.

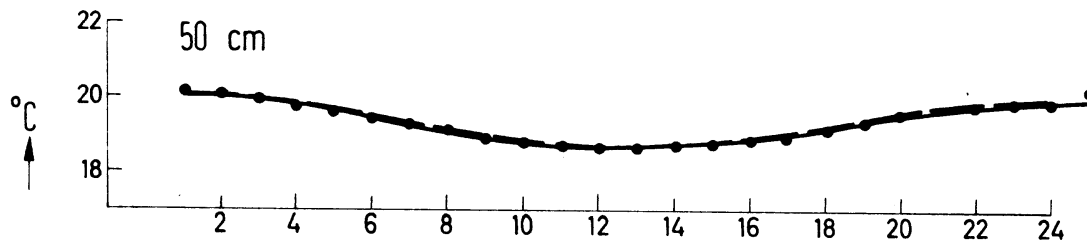
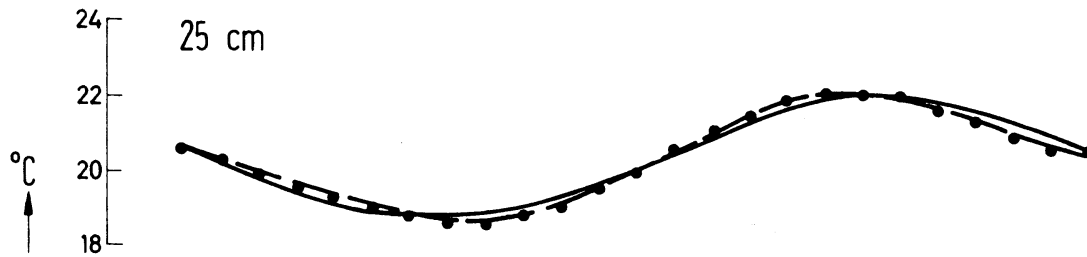
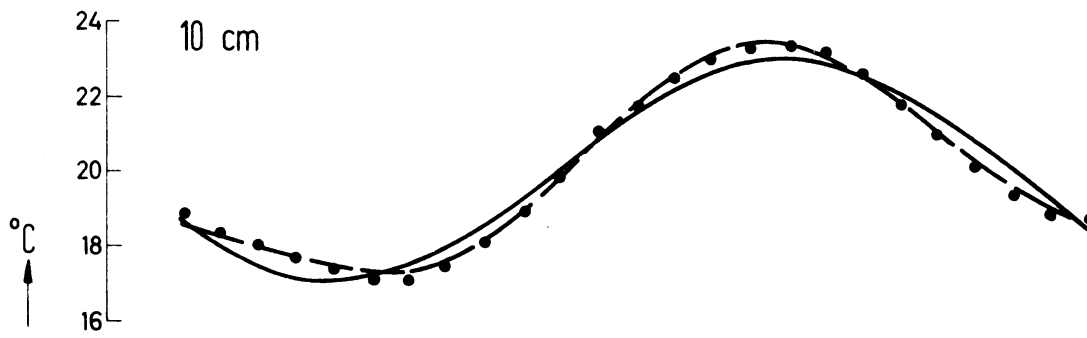
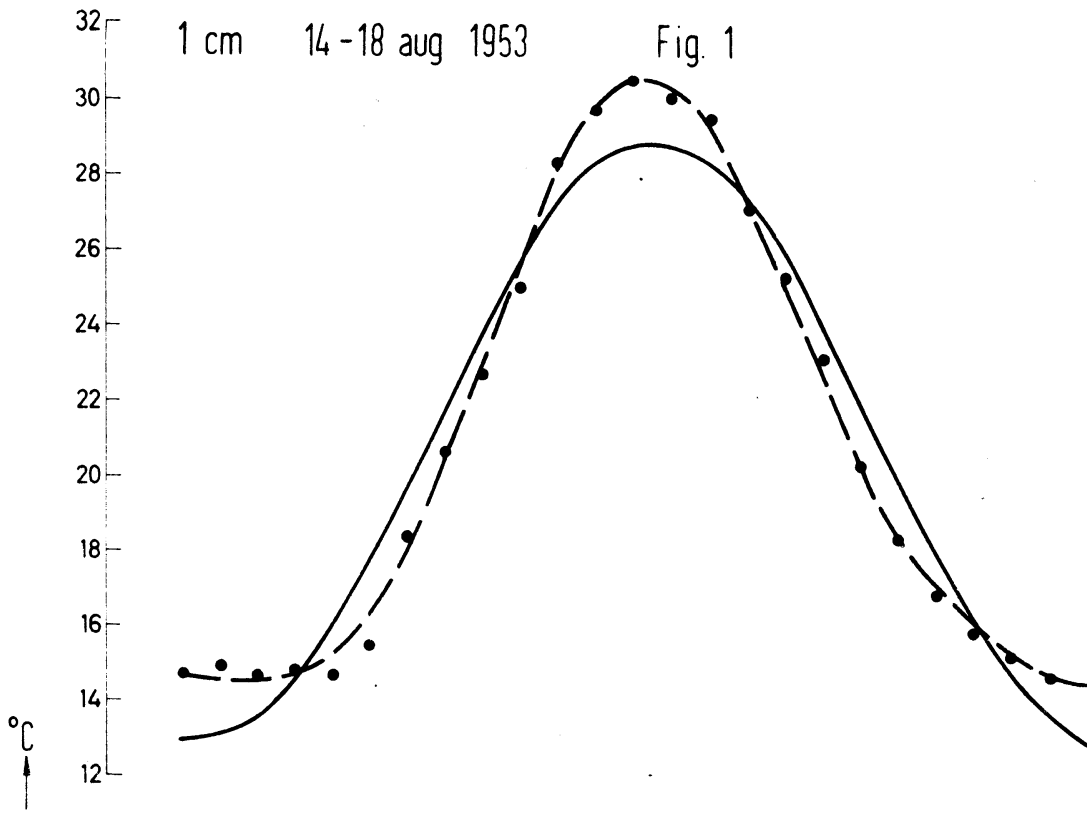
The empirical formulae (4.1) ... (4.4) and their combinations are tested. In fig. 4.2 the mean and the standard deviation of the difference between "observed" daily mean and the value calculated with the formulae are shown. From fig. 4.2 may be deduced that expression (4.5) is the best approximation of the observed daily mean. Therefore this expression is recommended for use.

In para 5 some research concerning the daily course of air temperature is discussed. Azuma (5) has published a formula (5.1) which has some advantages over the formula with the 1st and 2nd harmonic. In our opinion the formula must be extended to (5.2). One of the advantages is that maximum and minimum temperature can be expressed directly in the simple formula (5.3) containing only the constants A and A_0 .

As a description of the diurnal variation the formula gives good results, but not better than formula (2.1). For the estimation of the daily mean from observations at fixed times it turned out that the formula (5.5) gives no better estimates than (4.3): $\bar{T}_3 = \frac{1}{2}(T_M + T_m)$ which is equal to A_0 .

Finally we have mentioned in para 6 some other work (Bultot [2] Schmidt [7] and Utaaker [8]) which is analogous to ours, but a direct comparison is not possible, as their hours of observation are not the same as ours.

1 cm 14-18 aug 1953 Fig. 1



→ UUR

- Waargenomen temperaturen
- 1^e harmonische
- - - 1^e en 2^e harmonische

Fig. 3.1

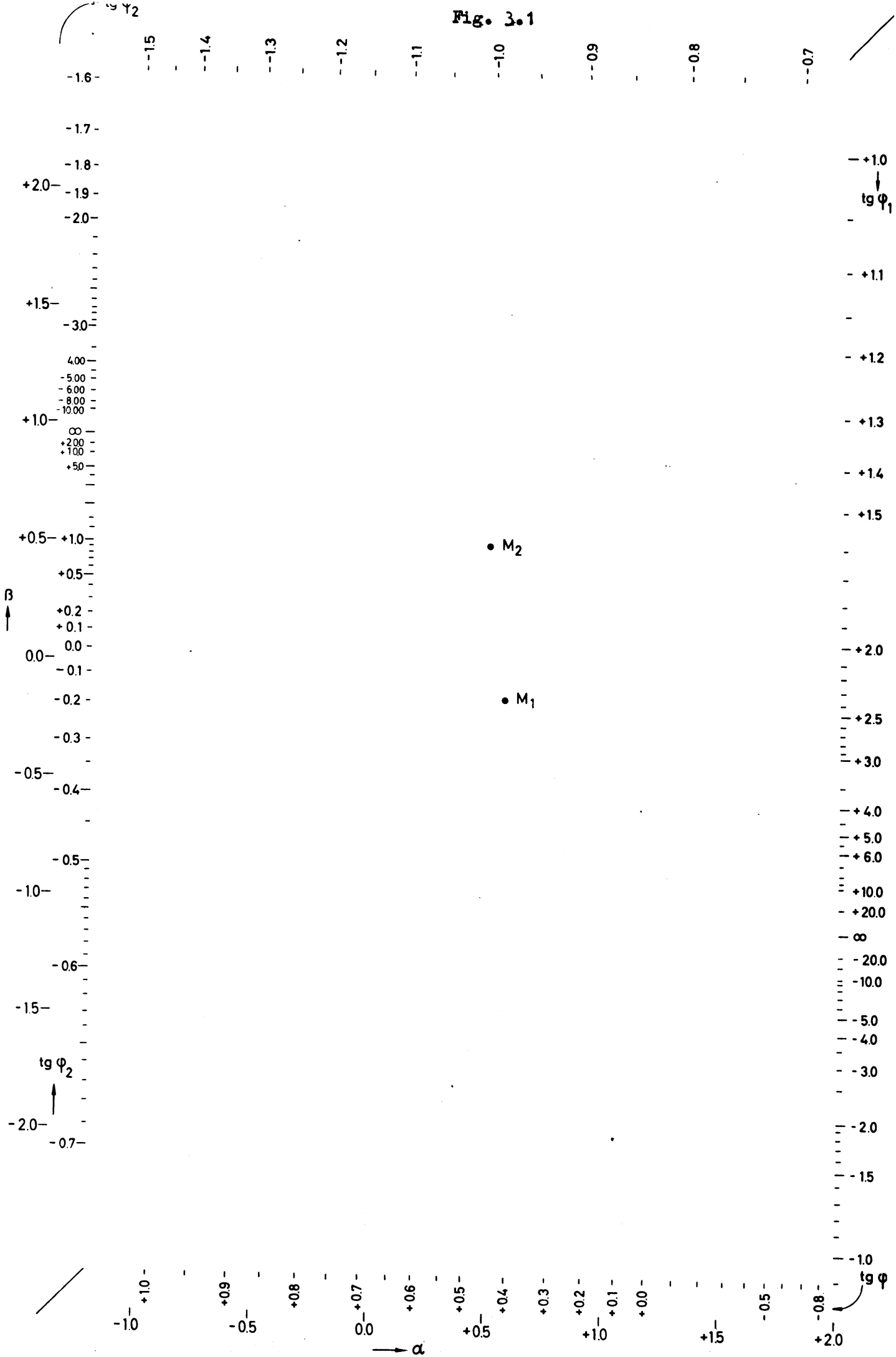


Fig. 3.2

Castricum grondtemperatuur 1 cm
Bepaling α en β uit $\text{tg } \varphi_1$ en $\text{tg } \varphi_2$

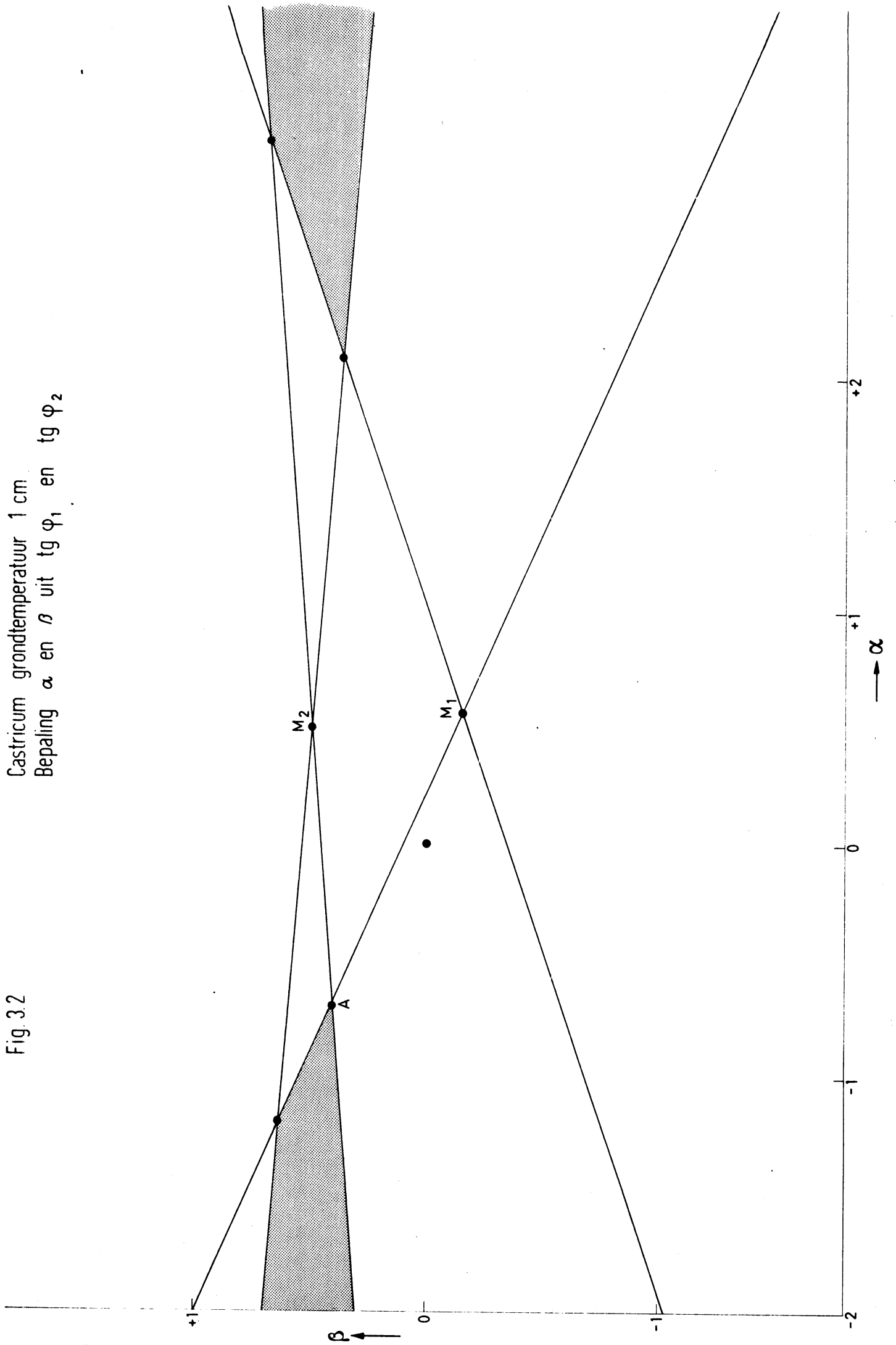


Fig. 3.3

Castricum
grondtemperatuur 10 cm
bepaling α en β
uit $\text{tg } \varphi_1$ en $\text{tg } \varphi_2$

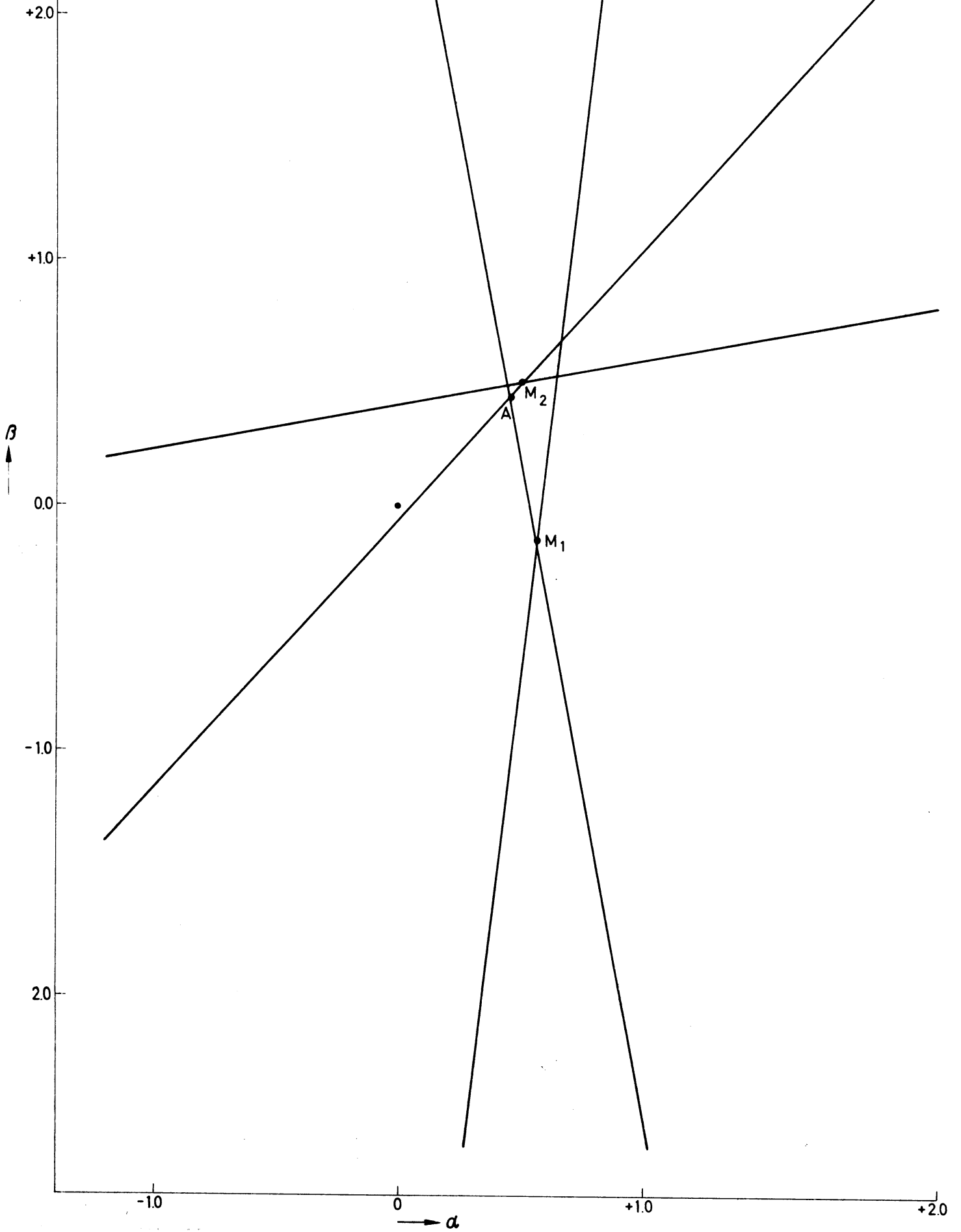


Fig.3.4

Castricum
grondtemperatuur 25 cm

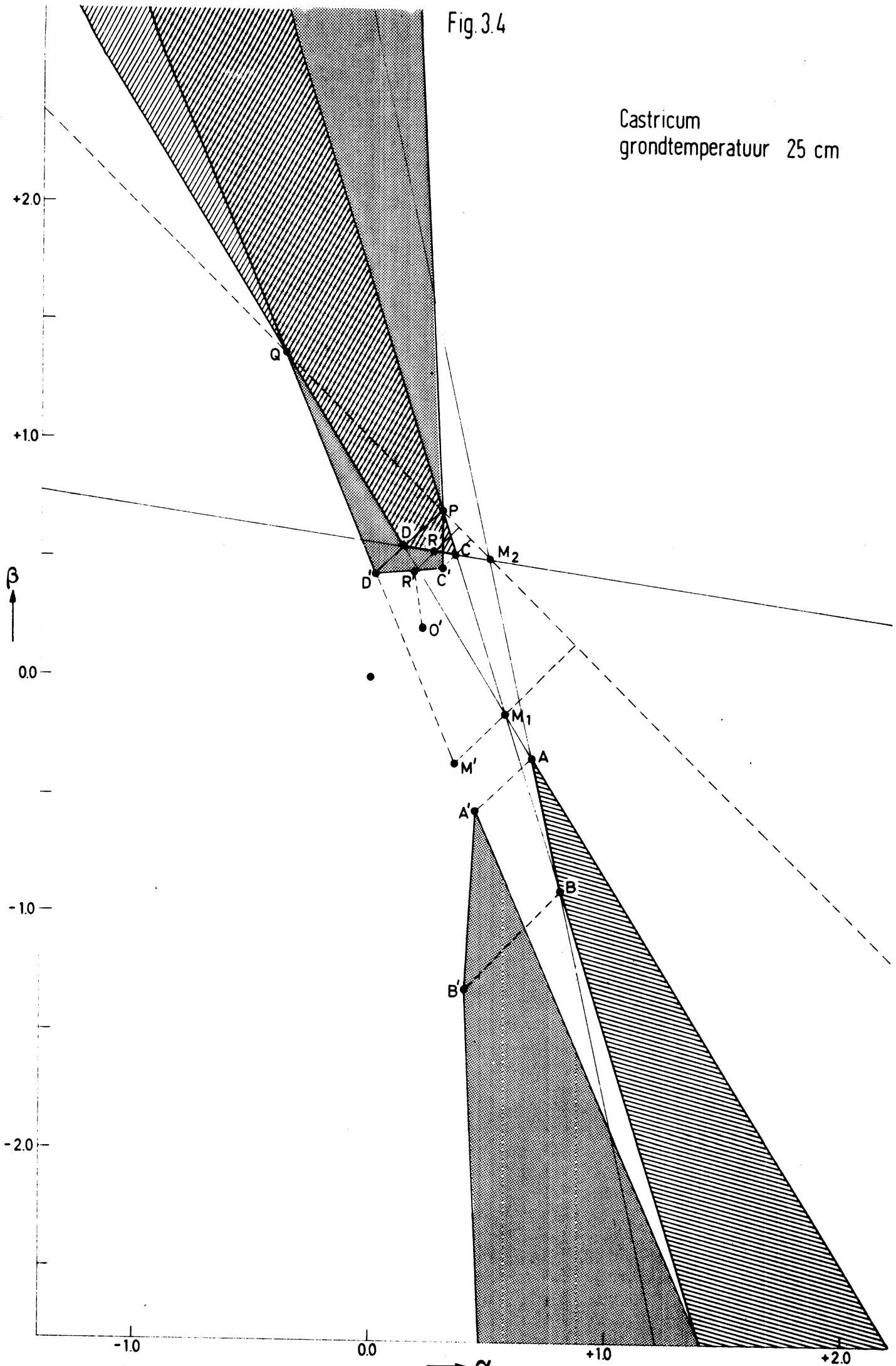


fig. 35

Castricum grondtemperatuur 5 cm
Bepaling α en β uit $\text{tg } \varphi_1$ en $\text{tg } \varphi_2$

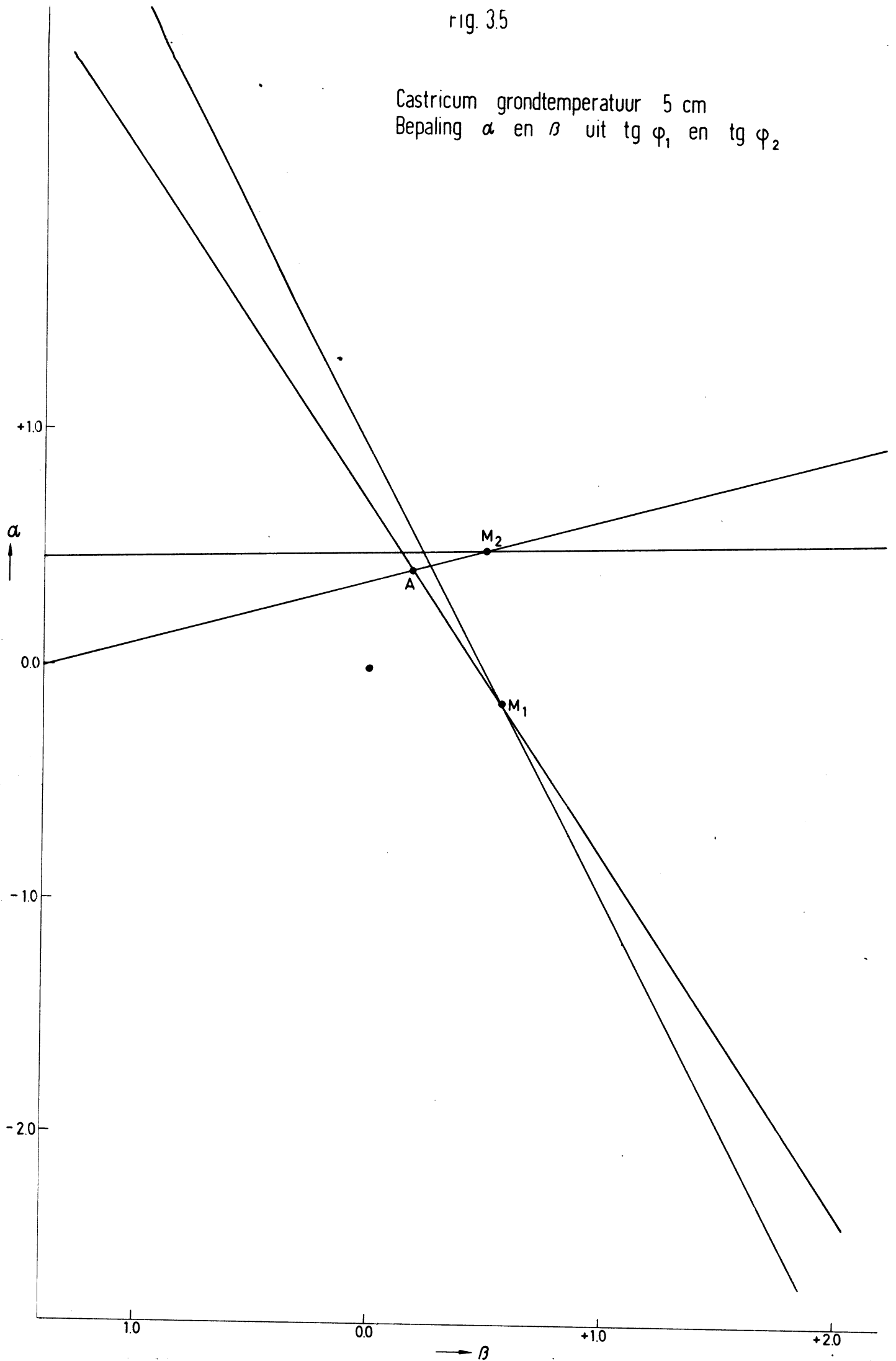


Fig. 3.6

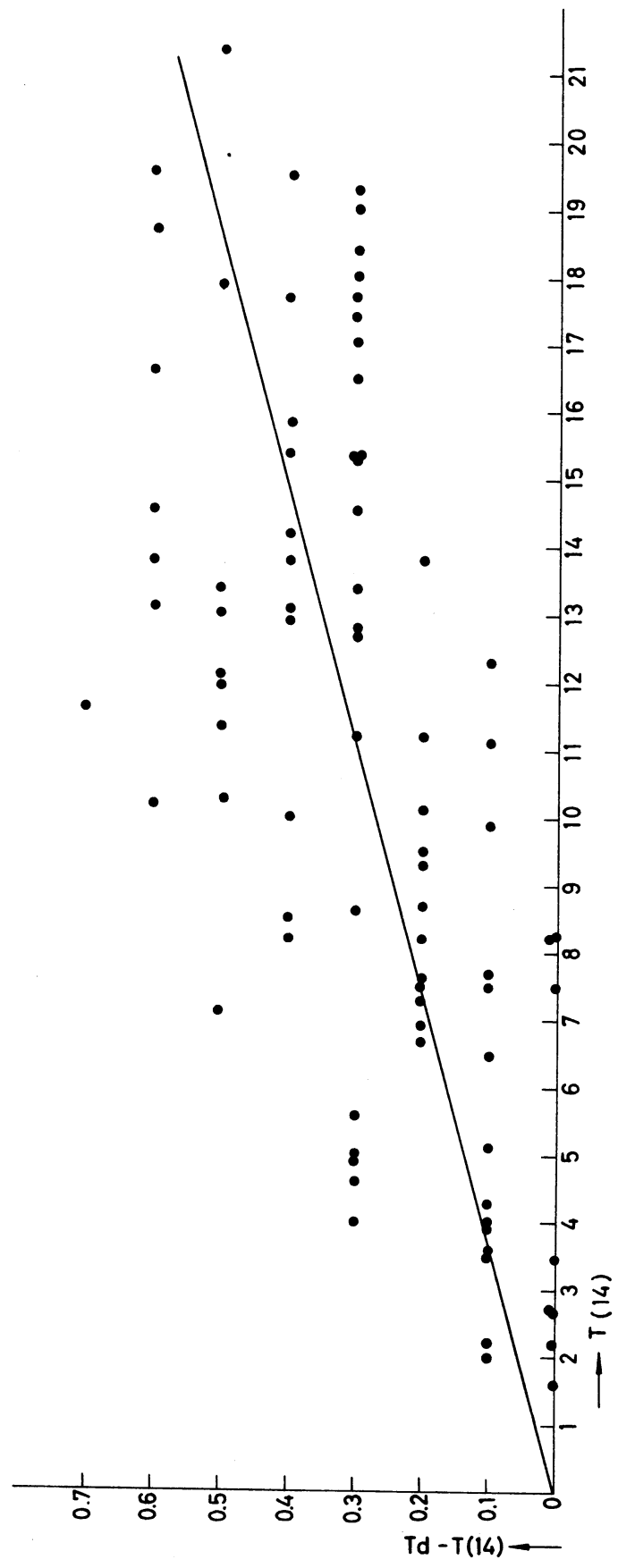


Fig. 4.1

Gewichtscoefficienten α en β voor De Bilt

Luchttemperatuur T_d (24 uur gem.)

uit T_8, T_{14} en T_{19} : $\bar{T}_d = \alpha T_8 + \beta T_{14} + (1 - \alpha - \beta) T_{19}$.

○ 1^{ste} decade ● 2^e decade

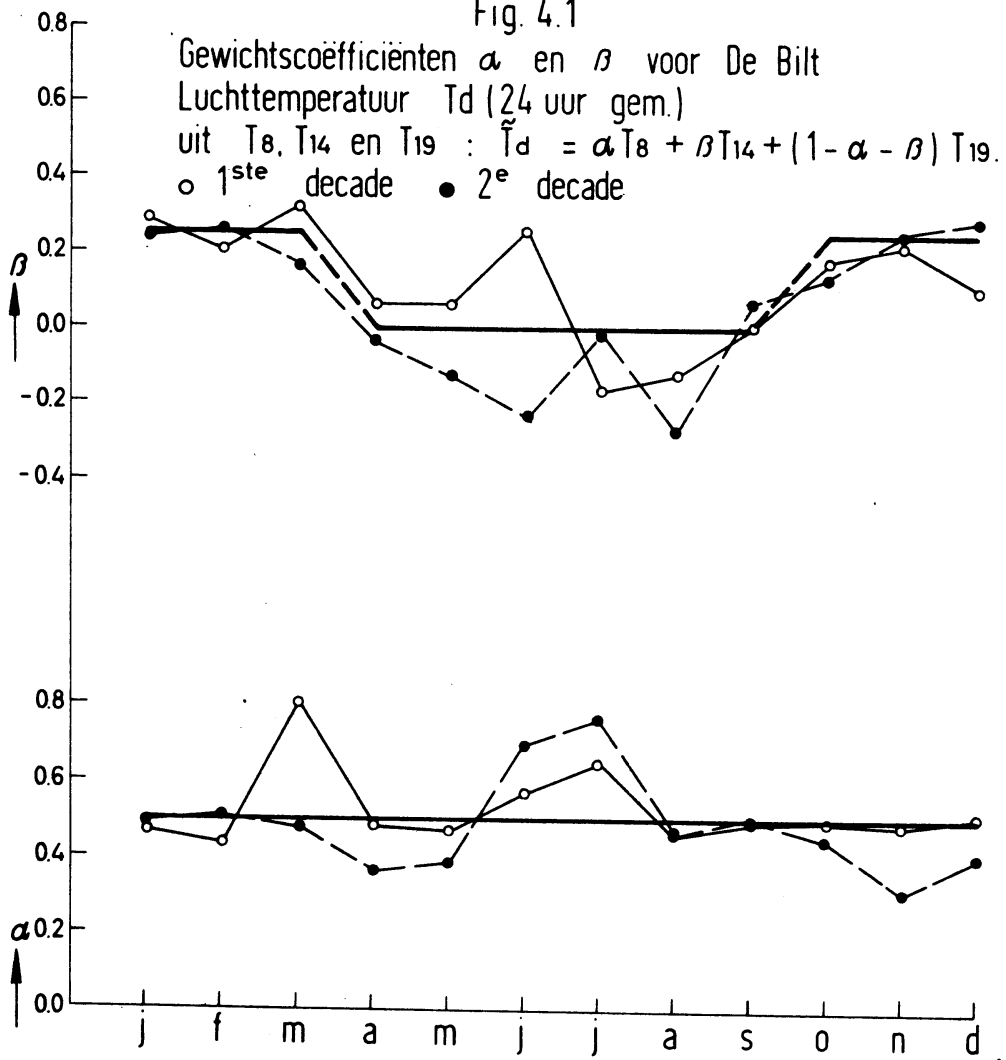
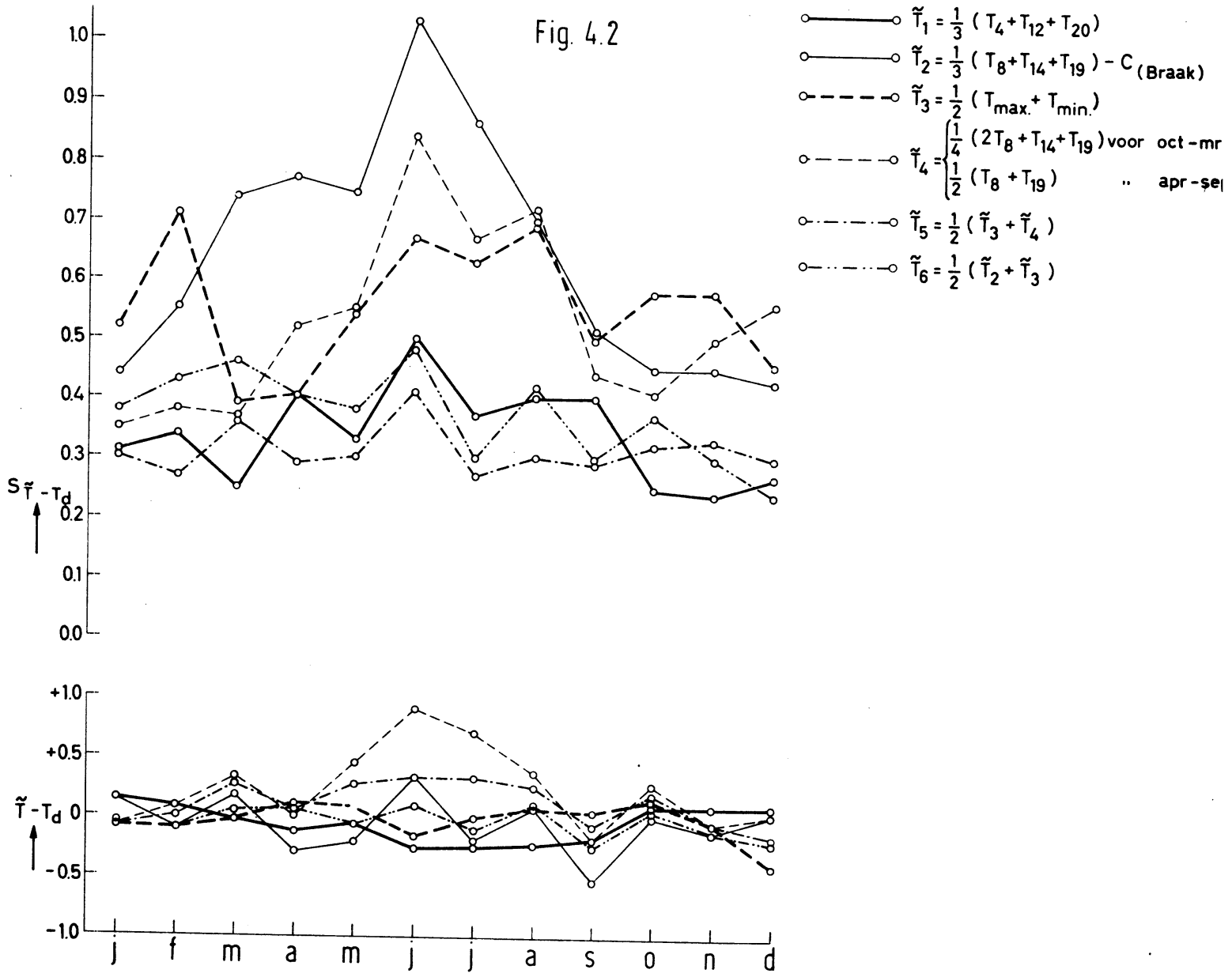


Fig. 4.2



De Bilt 12 mei 1950

Fig. 5.1

