

KONINKLIJK NEDERLANDS  
METEOROLOGISCH INSTITUUT

Wetenschappelijk Rapport W.R. 62-3

Dr. B. Heyna.

Een objectieve methode voor het tekenen van stroomlijnkaarten.

An objective method of constructing streamline charts.  
(with English summary)

De Bilt, 1962.

All Rights Reserved.

Nadruk zonder toestemming van het K.N.M.I. is verboden.

1. Inleiding

Dit wetenschappelijk rapport heeft zijn ontstaan te danken aan de wens, om in de atlas van de Atlantische Oceaan kaarten met stroomlijnen op te nemen. Hoewel, zowel door het K.N.M.I. alsook daarbuiten, wel eerder stroomlijnkaarten geconstrueerd zijn (al dan niet gepubliceerd) bleken alle gebruikte methoden bezwaren te bezitten. Deze bezwaren zijn van verschillende aard zowel theoretisch als praktisch en betreffen o.a. het uitgebreide rekenwerk, dat aan de bedoelde methoden inhérent is. Het K.N.M.I. beschikt thans echter over een elektronische rekenmachine, zodat methoden die vroeger vanwege het omvangrijke rekenwerk verworpen moesten worden, nu wel binnen het bereik der mogelijkheden liggen.

Bij het zoeken naar een proces dat geschikt is voor bewerking met behulp van een elektronische rekenmachine kwam een methode voor het construeren van stroomlijnen naar voren die ook met eenvoudiger hulpmiddelen (rekenlineaal of tafelrekenmachine) goed uitvoerbaar is.

Deze methode wordt beschreven in paragraaf 5. Vooraf wordt echter een overzicht van enkele andere methoden gegeven, waarbij wij ons beperken tot de objectieve, daar de subjectieve zich i.h.a. niet lenen voor elektronische berekening.

2. De probleemstelling.

Zij een vector-veld  $W$  gegeven door zijn componenten  $u = u(x,y)$  en  $v(x,y)$ , waarin  $u$  de  $x$ -component en  $v$  de  $y$ -component is;  $u(x,y)$  en  $v(x,y)$  zijn gegeven functies van  $x$  en  $y$  is een bepaald gebied;  $x$  en  $y$  zijn cartesische coördinaten.

In de wiskunde verstaat men dan onder een stroomlijn een oplossing (indien aanwezig)

$$\psi(x,y) = c \quad (1)$$

van de differentiaal vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x,y)}{u(x,y)} \quad (2)$$

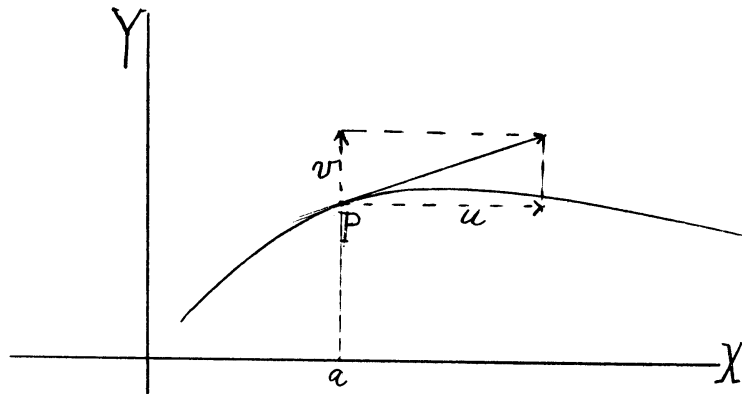


fig. 1

(1) stelt in het algemeen een kromme voor in het  $x,y$  vlak. De raaklijn aan deze kromme in een punt  $P$  maakt een hoek met de  $x$ -as, waarvan de tangens wordt gegeven door  $\frac{dy}{dx}$ , terwijl  $\frac{v}{u}$  de tangens is van de hoek, die de vector  $\vec{w}$  maakt met de  $x$ -as. Dus valt in elk punt van de kromme de raaklijn langs de vector in dat punt, m.a.w.: de kromme raakt in elk punt aan de vector door dat punt.

Het bovenstaande kan men toepassen op elke fysische grootheid, die door een vector wordt voorgesteld. In verband met ons doel willen we ons beperken tot het geval, dat de vectoren snelheidsvectoren voorstellen in een bewegend medium. We denken hierbij blijkens vgl (2), waarin de tijd niet optreedt of aan een stationair veld, of aan een moment-opname van het stromingsveld.

Denken we ons het veld stationair, dan vallen de trajectoriën samen met de stroomlijnen, dus de banen van de vloeistofdeeltjes zijn tevens stroomlijnen. Dit betekent echter nog niet dat banen en stroomlijnen identiek zijn. Als we onder de baan van een deeltje verstaan de weg die dit aflegt dan kan het geval zich voordoen dat meerdere banen tezamen één stroomlijn vormen, zoals bijvoorbeeld in fig. 2.

Om de baan te berekenen schrijven we (2) als

$$v(x,y) \frac{dx}{dt} - u(x,y) \frac{dy}{dt} = 0 \quad (3)$$

en de oplossing hiervan als

$$x = f_1(t) \quad , \quad y = f_2(t) \quad (4)$$

Als  $t$  varieert doorlopen  $x$  en  $y$  elk een bepaald interval. De meetkundige plaats van het punt  $(x,y)$  is de baan van het deeltje.

Uit (4) kan men  $t$  elimineren, men krijgt dan een betrekking als (1). Echter kan het voorkomen, dat een deeltje dat op tijd  $t = 0$  zich in A bevindt (zie fig. 2), nooit punt B kan passeren, en dus niet de gehele stroomlijn doorloopt.

Het vector-veld kan op verschillende manieren gegeven zijn:

- a. analytisch, d.w.z.  $u(x,y)$  en  $v(x,y)$  zijn als analytische uitdrukkingen in  $x$  en  $y$  gedefinieerd, in een bepaald gebied;
- b. discreet:  $u$  en  $v$  zijn alleen bekend in een aantal discrete punten, b.v. in de roosterpunten van een vierkantsnet.

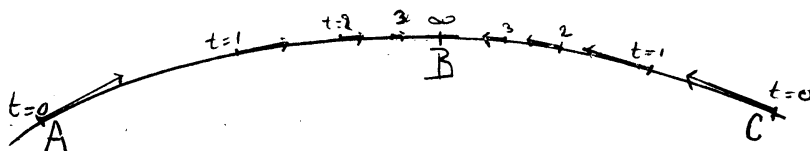


fig. 2

In het geval a kunnen de waarden van u en v in ieder punt uit het beschouwde gebied met elke gewenste nauwkeurigheid berekend worden.

In de meteorologie en de oceanografie hebben we te maken met het geval b, waarbij bovendien de waarden van u en v als meetresultaten slechts met beperkte nauwkeurigheid bekend zijn. Doordat u en v slechts in discrete punten bekend zijn, kunnen we bovendien niet integreren en differentiëren op de manier zoals het in geval a wel mogelijk is, maar moeten we ons beperken tot benaderingen, die een integraal of een differentiaal quotiënt vervangen door een uitdrukking waarin alleen de functie-waarden in een beperkt aantal punten voorkomen (zie par. 3). Dit is echter nauwelijks een bezwaar te noemen, daar voor elektronische berekeningen tóch op zulke uitdrukkingen overgegaan moet worden.

Wel dient men zich bewust te zijn van het feit, dat in geval a (zie boven) veel meer informatie aanwezig is dan in geval b; de uiteindelijke resultaten in het geval b kunnen dus nooit zo gedetailleerd zijn als in geval a mogelijk is.

3. Enkele grepen uit de numerieke wiskunde.

Een typisch kenmerk van de numerieke wiskunde is, dat de resultaten van de bewerkingen steeds gegeven worden in de vorm van een aantal getallen. Een voorbeeld moge dit verduidelijken.

Stel de differentiaal vergelijking (2) heeft in een bepaald geval de vorm:

$$\frac{dy}{dx} = y \sin x. \quad (5)$$

Het is gemakkelijk in te zien, dat een oplossing hiervan is

$$\cos x + \log y = 0. \quad (6)$$

Vergelijking (6) is inderdaad van de vorm (1) en stelt dus een stroomlijn voor. Toch is (6) nog niet voldoende om zonder meer die stroomlijn te tekenen; daartoe is beter geschikt een tabel in de vorm

<u>x</u>	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	(7)
y	2.718	2.406	1.716	1.074	0.660	0.449	0.372	

Het doel van de numerieke wiskunde is nu om de oplossingen van de daarin voorkomende problemen te geven in een vorm als (7). Hierbij kan soms ge-

bruik gemaakt worden van een oplossing in analytische vorm (als hierboven (6)), speciaal wanneer in die oplossing alleen bekende (dwz in tabelvorm gegeven of daartoe te herleiden) functies voorkomen.

In vele gevallen is echter een oplossing in analytische vorm niet mogelijk, of is de analytische vorm zo ingewikkeld, dat deze voor de praktische berekening weinig waarde heeft. Vaak is het dan mogelijk om langs een andere weg toch een oplossing in de vorm (7) te berekenen. De voornaamste hulpmiddelen daarvoor zijn: reeksontwikkeling en rekenen met eindige differenties.

We voeren eerst enige notaties in. Zij gegeven een functie  $y = f(x)$  in tabelvorm; dus voor een aantal waarden  $x_j$ ,  $j = \dots -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots$ , is de waarde van de functie gegeven:

$$\dots y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3 \dots,$$

waarin dus  $y_j = f(x_j)$

In het algemeen neemt men de waarden van het argument  $x_j$  aequidistant:

$$x_j = x_0 + jh, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (8)$$

$h$  heet de intervallengte.

### 3.1. Notaties .

We definiëren nu de operatoren  $\Delta$ ,  $\nabla$ ,  $\delta$ ,  $\mu$  en  $E$ :

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \Delta y_j = y_{j+1} - y_j \quad (9)$$

$$\nabla y_0 = y_0 - y_{-1}, \quad \nabla y_1 = y_1 - y_0, \quad \nabla y_j = y_j - y_{j-1} \quad (10)$$

$$\delta y_{\frac{1}{2}} = y_1 - y_0, \quad \delta y_{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - y, \quad \delta y_{j+\frac{1}{2}} = y_{j+1} - y_j \quad (11)$$

$$\mu y_{\frac{1}{2}} = (y_0 + y_1), \quad \mu y_{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad \mu y_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_j + y_{j+1}) \quad (12)$$

$$E y_0 = y_1, \quad E y_1 = y_2, \quad E y_j = y_{j+1} \quad (13)$$

Opmerking: Hoewel niet gebruikelijk, zijn voor  $j$  ook gebroken waarden toegestaan. We mogen desgewenst dus schrijven  $\delta y_0 = y_{\frac{1}{2}} - y_{-\frac{1}{2}}$  etc.

De eerste drie operatoren geven elk na deling door de intervallengte een benadering voor het differentiaal quotiënt, de vierde geeft na vermenigvuldiging met de intervallengte een benadering voor de integraal, terwijl de vijfde het mogelijk maakt om desgewenst het symbool  $y_j$  uit de formules te laten vervallen, bv.:

$$\Delta = E - 1.$$

Dit is als volgt op te vatten:

Zowel het linker- als het rechterlid is een operator. Laat deze operatoren werken op  $y_j$ , dan geven beide hetzelfde resultaat, n.l.  $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ ; en  $(E-1) y_j = E y_j - y_j = y_{j+1} - y_j$

We kunnen ook combinaties van de operatoren op  $y$  laten werken, b.v.:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$$

Met behulp van deze symbolen is het mogelijk de verschillende formules uit de numerieke wiskunde in compacte en overzichtelijke vorm op te schrijven.

### 3.2. Interpolatie formules.

Er bestaat een groot aantal interpolatieformules, waarvan we er slechts enkele vermelden. Bijvoorbeeld: Newton's interpolatie formules:

voor voorwaartse differenties:  $y_s \approx y_0 + s \Delta y_0 + \dots + \binom{s}{n} \Delta^n y_0$  (14)

voor terugwaartse differenties:  $y_s \approx y_0 + s \nabla y_0 + \dots + \binom{s+n-1}{m} \nabla^m y_0$  (15)

Sterling's centrale differentie-interpolatieformule:

$$y_s = y_0 + s \mu \delta y_0 + \frac{s^2}{2!} \delta^2 y_0 + \frac{s(s^2-1)}{3!} \mu \delta^3 y_0 + \frac{s^2(s^2-1)}{4!} \delta^4 y_0 + \dots$$
 (16)

In het algemeen verdient het gebruik van (16) de voorkeur; aan het begin resp. eind van een tabel (of aan de rand van een gebied bieden (14) resp. (15) voordelen, omdat anders waarden van  $y$  in de formules optreden (via de differenties) die buiten de tabel (c.q. het gebied) vallen.

### 3.3. Numeriek differentiëren:

Met behulp van de eerder gedefiniëerde operatoren kan men gemakkelijk een paar benaderingen voor het differentiaal-quotient opschrijven:

$$y'_0 \approx \frac{1}{h} \Delta y_0$$
 (17)

$$y'_0 \approx \frac{1}{h} \nabla y_0$$
 (18)



De uitdrukkingen (17) en (18) leveren i.h.a. een verschillend resultaat op voor  $y'$ : (17) vervangt de raaklijn in B (zie fig. 3) door de koorde BC, (18) vervangt hem door de koorde AB.

Een betere benadering is i.h.a. het gemiddelde van beide:

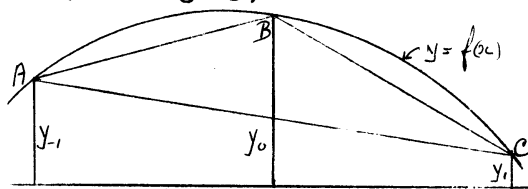


Fig 3

$$y'_0 \approx \frac{1}{2h} (\Delta y_0 + \nabla y_0) = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}, \quad (19)$$

waarbij dus de richting van de raaklijn door die van de koorde AC wordt vervangen. Om aan te tonen, dat (19) beter is dan (17) en (18), gaan we de fout bepalen en nemen daarbij aan dat  $f(x)$  in een Taylor reeks ontwikkeld kan worden:

$$y_1 = y_0 + h \cdot y'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 + \dots \quad (20)$$

Hieruit volgt: 
$$\frac{1}{h} \Delta y_0 = y'_0 + \frac{h}{2} y''_0 + \dots;$$

dus (17) is een eerste orde benadering in  $h$ , en hetzelfde geldt voor (18). Uit (20) en

$$y_{-1} = y_0 - h y'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 - \frac{h^3}{3} y'''_0 + \dots \quad (21)$$

volgt:

$$\frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = y'_0 + \frac{h^2}{6} y'''_0 + \dots;$$

dus (19) is een tweede orde benadering in  $h$ . Nu is dit op zichzelf geen verdienste; het is gemakkelijk om een formule op te schrijven, die een benadering van een willekeurige orde in  $h$  geeft (hiervoor heeft men slechts een der interpolatieformules, b.v. (16), te differentiëren naar  $S$  en dan  $S = 1$ , of 2, of 3..., te stellen); (19) vereist echter niet meer rekenwerk dan (17) of (18), maar geeft een benadering van één orde hoger dan elk van beide. Formule (19) is daarom een veelgebruikte formule, die echter aan de rand van het bekende gebied (waar b.v. wel  $y_0$  en  $y_1$ , maar niet  $y_{-1}$  bekend zijn) niet toegepast kan worden.

Overigens moet een grote voorzichtigheid in acht genomen worden bij het gebruik van de formules van deze paragraaf.

Wanneer van een functie alleen de waarden in een aantal discrete punten  $x_0$ ,

$x_1, x_2 \dots$  gegeven zijn, dan kan het differentiaalquotient van deze functie niet gedefinieerd worden. Er moet dan nog een gegeven bij, b.v. een analytische uitdrukking, waarvan bekend is dat deze de gegeven functie met voldoende nauwkeurigheid benadert. Het woord voldoende moet hierbij wel nader omschreven worden: niet voldoende is dat overal in het beschouwde gebied, als bijv.  $f(x)$  de gegeven en  $g(x)$  de benaderende functie is, voor iedere  $\varepsilon > 0$  geldt

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon. \quad (21)$$

Ook al is aan (22) voldaan, dan nog kan  $f'(x) - g'(x)$  willekeurig groot worden. Dit is van bijzonder belang wanneer  $f(x)$  door meetresultaten voorgesteld wordt, dus elke waarde van  $f(x)$  van nature een zekere onnauwkeurigheid bezit.

### 3.4. Numeriek integreren.

Voor een continue functie  $y = f(x)$  geldt:  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{j=0}^{n-1} y_j = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n y_j$ , (23)

waarin  $nh = b-a$  en  $y_j = f(a+bj)$ . Hieruit volgt dat zowel  $h \cdot \sum_{j=0}^{n-1} y_j$  als  $h \cdot \sum_{j=1}^n y_j$  een benadering is van  $\int_a^b f(x) dx$ . Het gemiddelde van beide sommen is in het algemeen een nauwkeuriger benadering, dit levert de formule

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x) dx = h \cdot \left( \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right). \quad (24)$$

Dit noemt men wel de trapezium formule; (24) komt er n.l. op neer, dat men tussen elke twee deelpunten  $x_i$  en  $x_{i+1}$  de functie  $f(x)$  door een lineaire functie vervangt; grafisch betekent dit dat het oppervlak onder de kromme (zie fig. 4) wordt vervangen door de som van de aldus gevormde trapezia.

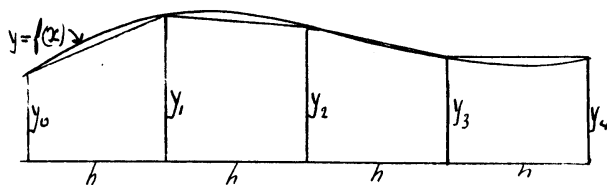


Fig 4

Men kan nauwkeuriger formules verkrijgen door  $f(x)$  door polynomia van een hogere dan de 1e graad te vervangen, maar dit heeft feitelijk alleen dan zin, wanneer de getallen  $y_i$  uit een analytische functie berekend zijn met voorgescreven nauwkeurigheid. Aangezien wij de formule juist willen toepassen op meetuitkomsten (met beperkte nauwkeurigheid), is formule (24) ruimschoots nauwkeurig genoeg.

In verband met par. 4.1 wordt hier nog vermeld de formule van Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) \quad (25)$$

die berust op het vervangen van  $f(x)$  door een kwadratische functie, die juist in de drie gegeven punten met  $f(x)$  samenvalt.

#### 4. Twee bestaande methoden voor het numeriek bepalen van stroomlijnen.

Men kan stroomlijnen berekenen door de differentiaal vergelijking (2) op te lossen. Als het rechterlid van (2) alleen in de roosterpunten van een vierkantsnet zijn gegeven, is een numerieke methode van oplossen de aangewezen weg. Hiervoor kan men gebruik maken van de formules van par. 3. Aangezien er vele mogelijkheden zijn om een differentiaal quotient met een numerieke formule weer te geven zijn er ook vele manieren om de differentiaal vergelijking (2) numeriek op te lossen. Wij zullen hier alleen die vermelden, die bij het K.N.M.I. al eens geprobeerd zijn.

##### 4.1. De Picard techniek.

Hierbij wordt, uitgaande van een gegeven punt, de stroomlijn door dat punt berekend. Als de berekening klaar is, neemt men een volgend beginpunt en krijgt dan een tweede stroomlijn, enz.

Stel dat  $x_0, y_0$  de coördinaten van het beginpunt zijn. Gezocht is dan een oplossing van de differentiaal vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad , \quad (26)$$

met als beginwaarde  $y_0$ . We kiezen nu als eerste benadering voor deze oplossing een functie  $g_1(x)$ , die continue is en waarvoor

$$g_1(x_0) = y_0 \quad .$$

Bij de keuze van  $g_1(x)$  kunnen we ons laten leiden door onze kennis van  $f(x, y)$ . Als bijvoorbeeld overal  $f(x, y) > 0$  is, zie (26), dan zullen we  $g_1(x)$  monotoom stijgend kiezen. Noodzakelijk is <sup>dit</sup> echter niet, we mogen ook  $g_1(x) = y_0$  kiezen, dus  $g_1(x)$  constant.

We kunnen (26) als volgt schrijven:

$$y = \int_{x_0}^x f(t, y) dt + y_0 \quad (27)$$

Hieruit volgt dan een tweede benadering voor  $y$ :

$$g_2(x) = \int_{x_0}^x f\{t, g_1(t)\} dt + y_0$$

en achtereenvolgens een derde, vierde enz. uit

$$g_{n+1}(x) = \int_{x_0}^x f\{t, g_n(t)\} dt + y_0 \quad (28)$$

Wanneer  $g_{n+1}(x)$  een limiet heeft voor  $n \rightarrow \infty$ , dan is dit een oplossing van (26).

Wil men dit proces analytisch doorvoeren, dan moeten alle functies  $f\{x, g_n(x)\}$  in gesloten vorm integreerbaar zijn. In de praktijk is dit zelden het geval. Numeriek echter is het rechterlid van (28) altijd wel te bepalen. Hiervoor kan men b.v. de formule van Simpson gebruiken (zie (25)).

We kiezen daartoe een aantal aequidistante punten op de  $x$ -as (zie (8))

$$x_j = x_0 + j h, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

en berekenen dan successievelijk  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_j$ , de waarde van de stroomfunctie in deze punten.

De waarde van  $y_0$  is bekend als beginwaarde. Stel, men kent eveneens de waarde  $y_1$  (zie hierover later). Men kiest dan een eerste benadering voor  $y_2$  en vindt dan volgens (28) en (25) een tweede benadering voor  $y_2$ , n.l.:

$$y_0 + \frac{h}{3} \{ f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \} \quad (29)$$

Met deze 2e benadering en (29) berekent men dan een derde benadering door opnieuw formule (29) toe te passen, maar nu met de verbeterde waarde van  $y_2$  enz., en gaat zolang door tot men een benadering vindt, die gelijk is aan de voorgaande. Dan is daarmee de waarde van  $y_2$  gevonden.

Nu maakt men een schatting van  $y_3$  (waarbij uiteraard gebruik kan worden gemaakt van de bekende waarde van  $y_1$  en  $y_2$ ) en berekent weer opeenvolgende benaderingen van  $y_3$ , totdat de waarde hiervan niet meer verandert, en gaat dan verder met  $y_2, y_3$  en de eerste benadering van  $y_4$ , enz.

Heeft men aldus de gehele stroomlijn berekend, dan start men met een nieuwe waarde van  $y_0$  en vindt aldus de volgende stroomlijn.

Het gehele procedé is nogal bewerkelijk, het aantal benodigde iteraties is n.l. gelijk aan het aantal stroomlijnen maal het aantal stappen per stroomlijn maal het aantal iteraties per stap en zal dus liggen in de orde van grootte van  $N^3$ . Bovendien vereist het bepalen van  $y_1$  nog een afzonderlijke bewerking.

Deze waarde kan n.l. niet op boven beschreven methode berekend worden, maar moet afzonderlijk berekend worden, b.v. door een Taylor ontwikkeling in het punt  $x = x_0$  of door interpolatie wanneer een aantal waarden  $y_2 y_3 \dots$  berekend zijn. In het laatste geval moet dan met de nieuw gevonden waarde van  $y_1$  de berekening voor  $y_2 y_3$  nog eens herhaald worden.

Een ander bezwaar van deze methode is, dat de stroomlijnen onafhankelijk van elkaar berekend worden. In elke stap blijven n.l. onvermijdelijk kleine fouten bestaan t.g.v. de gebruikte benaderingen; voortgaande langs een stroomlijn accumuleren zich nu deze fouten. Voor twee opvolgende stroomlijnen neemt daardoor de onzekerheid in hun onderlinge ligging toe, vanwege de vermelde onafhankelijke berekeningen. Het is zelfs denkbaar, dat twee stroomlijnen, die min of meer aequidistant behoren te lopen, elkaar tengevolge van deze voortplanting van fouten op enige afstand van het beginpunt snijden. In dit opzicht zijn de methoden van par. 4.2 en par. 5 superieur aan die van par. 4.1. Voor verdere bijzonderheden hierover zie par. 6.

#### 4.2. De methode Pritchard. <sup>‡</sup>

Deze berust op het numeriek berekenen van een stroomfunctie. Nu impliceert het bestaan van een stroomfunctie dat het vectorveld divergentievrij is. Zij n.l.  $\psi(x,y)$  de stroomfunctie, dan volgen de componenten van het vectorveld uit (zie ook par. 2)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v(x,y) \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u(x,y) \quad , \quad (30)$$

en hieruit volgt

$$\operatorname{div} \vec{w} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (31)$$

mits  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}$ , een voorwaarde die voor in de praktijk voorkomende functies altijd vervuld is.

De oplossing van (30) kan geschreven worden als lijnintegraal.

$$\psi(x,y) = \int_{a,b}^{x,y} (-v dx + u dy) \quad (32)$$

<sup>‡</sup>D.W. Pritchard: Streamlines from a discrete vector field; with application to ocean currents. Journal of Marine Research VII (1948), 296 - 303.

Hierbij is (32) onafhankelijk van de integratieweg, als aan (31) voldaan is, en stelt onder die omstandigheden dus inderdaad een eenduidige funktie van  $x$  en  $y$  voor. Om deze funktie te bepalen, gaat Pritchard (32) numeriek integreren. Hij voert daartoe twee hulpfuncties in:

$$\begin{aligned} r_{l, k+\frac{1}{2}} &= \sum_{j=0}^k u_{l,j} \cdot h_2, \\ s_{l+\frac{1}{2}; k} &= - \sum_{i=0}^l v_{i,k} \cdot h_1 \end{aligned} \quad (33)$$

Hierbij is aangenomen, dat de componenten van de snelheid in de roosterpunten van een net bekend zijn, d.w.z. in de punten  $x = i \cdot h_1$ ;  $y = j \cdot h_2$ ;  $i$  en  $j$  zijn gehele getallen, terwijl  $u_{ij} = u(i \cdot h_1, j \cdot h_2)$  en  $v_{ij} = v(i \cdot h_1, j \cdot h_2)$ ; de funkties  $r$  en  $s$  stellen dan sommen voor van deze waarden, resp. langs lijnen  $x = \text{const.}$  en  $y = \text{const.}$  De funkties  $r$  en  $s$  kunnen gemakkelijk berekend worden met een schrijvende handtelmachine. Telkens nadat er een term van de som bijgeteld is, laat men de machine een subtotaal afdrukken, deze subtotaal zijn de waarden van  $r$  in opeenvolgende punten en op analoge manier verkrijgt men de waarden van  $s$ .

Door (33) zijn de waarden van  $r$  en  $s$  niet in de roosterpunten gedefinieerd, maar juist daartussen, bovendien vallen de definitiepunten van  $r$  en  $s$  niet samen. Door interpolatie kunnen echter de waarden van  $r$  en  $s$  in de roosterpunten gevonden worden.

Door differentiëren volgt uit (33)

$$\left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{r_{i,j+\frac{1}{2}} - r_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_2} + O(h_2^2) = u_{i,j} + O(h_2^2) \quad (34)$$

Met  $O(h^2)$  wordt bedoeld een term, die klein wordt van de orde  $h^2$ . Numeriek differentiëren (zie par. 3.3) van  $r$  in de  $y$  richting geeft dus reeds de goede component van de snelheid in de  $x$  richting. Differentiëren van  $r$  in de  $x$  richting levert echter nog niet het goede resultaat. Dit zien we b.v. langs de lijn  $y = \frac{1}{2}$ , hiervoor is overal  $r = 0$  en dus ook  $\left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{y=\frac{1}{2}} = 0$ , terwijl  $v_{x,\frac{1}{2}}$  i.h.a. niet nul is. Dit kunnen we in orde maken door het invoeren van integratie constanten. Wanneer we in elk punt van de lijn  $x = i$  een constante  $a_i$  optellen bij  $r$ , dan blijft (34) gelden. We voeren nu in  $R_{i,j}$

$$= r_{i,j} + a_i, \quad (35)$$

waarbij we voor elke lijn (dus voor elke waarde van  $i$ ) een andere constante  $a_i$  mogen kiezen.

De waarde van deze constanten moet nog nader bepaald worden. De functie  $s_{i,j}$  behandelen we op analoge wijze, dus  $S_{i,j} = s_{i,j} + b_j$  (36)

We krijgen dan in elk roosterpunt twee funktiewaarden, n.l.  $R_{i,j}$  en  $S_{i,j}$ , waarvan de eerste de goede differentie in de  $y$  richting heeft, en de tweede in de  $x$  richting. Wanneer we er in slagen de nog onbekende constanten  $a_i$  en  $b_j$  zodanig te kiezen, dat voor elk roosterpunt

$$R_{ij} = S_{ij}, \text{ d.w.z. } r_{ij} + a_i = s_{ij} + b_j \quad (37)$$

dan voldoet  $R_{ij}$  (of  $S_{ij}$ , wat wegens (37) hetzelfde is) aan (30) en hebben we dus een stroomfunctie.

Nu is een stroomfunctie slechts bepaald op een additieve constante na, dus mogen we in één punt, b.v.  $x = 0, y = 0$ , de waarde van de stroomfunctie willekeurig voorschrijven. Het blijkt, dat er juist één stelselwaarde van  $a_i$  en  $b_j$  is dat aan (37) voldoet en met de gekozen beginwaarde van de stroomfunctie in overeenstemming is, mits het veld divergentievrij is.

In de praktijk zal aan laatstgenoemde voorwaarde niet voldaan zijn. Zelfs al is het veld exact divergentievrij, dan zullen de gemeten waarden van  $u$  en  $v$ , i.g.v. meetfouten enz. niet volkomen divergentievrij zijn. Dit laatste kan overigens niet eens exact getest worden aan gemeten waarden, omdat deze slechts in een eindig aantal punten bekend zijn.

Doordat meetfouten nooit geheel geëlimineerd kunnen worden zal dus bij een empirisch gevonden veld ook nooit exact aan (37) kunnen worden voldaan. Wanneer echter de meetresultaten het vermoeden wettigen, dat de werkelijke divergentie kleiner is dan de schijnbare, die ons door toevallige fouten wordt voorgespiegeld, zoeken we langs statistische weg een stel constanten, dat zo goed mogelijk aan (37) voldoet. We passen daarvoor de methode van de kleinste kwadraten toe op het verschil  $(r_{ij} + a_i) - (s_{ij} + b_j)$  en vinden aldus een stel waarden voor de constanten  $a_i$  en  $b_j$  en daaruit volgens de hierboven aangegeven manier een stroomfunctie.

Deze methode werkt zeer bevredigend wanneer de divergentie klein is en, over een groter gebied gezien, vaak van teken verwisselt. Is echter de divergentie groot, of over een groot gebied overal van hetzelfde teken, dan

is een andere methode gewenst. Het principe hiervan is door Pritchard aangegeven in bovengenoemd artikel, met de vermelding, dat het uitwerken ervan zoveel rekenwerk kost, dat hiervoor een elektronische rekenmachine nodig is. Dit laatste nu blijkt nogal mee te vallen; in par. 5 is een methode aangegeven die ook voor velden met divergentie geldt en waarvoor de hoeveelheid rekenwerk in dezelfde orde van grootte ligt als bij de methode Pritchard voor "quasi-divergentievrije" velden.

5. Stroomlijnen in een veld met divergentie.

5.1. De integrerende factor.

Hoewel een niet divergentievrij veld geen stroomfunctie heeft, kan het wel degelijk stroomlijnen bezitten: De vgl (2) kan n.l. zeer goed een oplossing toelaten ook als

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \neq 0$$

Zij  $f(x,y) = c$  (c als constante) (38)

zulk een oplossing, dan noemen we  $f(x,y)$  de stroomintegraal. Differentiëren van (38) geeft n.l.:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) dx + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) dy = 0 ; \quad (39)$$

als (38) een oplossing is van (2), dus van

$$v(x,y) dx - u(x,y) dy = 0 , \quad (40)$$

dan moet voldaan zijn aan

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\lambda(x,y) \cdot v(x,y) \text{ en } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lambda(x,y) \cdot u(x,y) . \quad (41)$$

Hierin is  $\lambda$  een nog te bepalen functie van  $x$  en  $y$ , de "integrerende factor". Het bepalen van  $\lambda$  leidt tot het oplossen van de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial(\lambda u)}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda v)}{\partial y} = 0 \quad (42)$$

zoals bewezen wordt in de leerboeken over differentiaalvergelijkingen.

Het oplossen van (42) is in het algemeen een moeilijker opgave dan het oplossen van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking (2). Toch blijkt in ons geval de integrerende factor goed bruikbaar te zijn voor het bepalen van de stroomintegraal.

Bekijken we n.l. (41) eens nader. We zien dat de snelheidscomponenten  $u$  en  $v$  beide met een zelfde factor (n.l.  $\lambda$ ) vermenigvuldigd worden.



Dit komt erop neer, dat het oorspronkelijke veld, met componenten  $u$  en  $v$ , vervangen wordt door een getransformeerd veld, met componenten  $\hat{u}$  en  $\hat{v}$ , waarbij

$$\hat{u} = \lambda \cdot u \quad ; \quad \hat{v} = \lambda \cdot v \quad (43)$$

Omdat  $u$  en  $v$  beide met dezelfde factor vermenigvuldigd worden, verandert wel de grootte van de vector  $w$ , maar niet zijn richting. D.w.z.: een stroomlijn in het getransformeerde veld is ook een stroomlijn in het oorspronkelijke veld. Voldoende is dus om de stroomlijnen in het getransformeerde veld te bepalen. Uit (42) en (43) volgt echter:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = 0 \quad , \quad (44)$$

dus het getransformeerde veld is divergentievrij en bezit dus een stroomfunctie, die we kunnen vinden door numeriek integreren van (41) na berekening van de functie  $\lambda(x, y)$ .

## 5.2. Oplossing.

Zoals in par. 3 uiteengezet is, worden bij numerieke berekeningen differentiaalquotienten vervangen door differentie-quotienten. Daarbij worden dan termen, die klein zijn van een zekere, vooraf te kiezen orde van  $h = \Delta x = \Delta y$  verwaarloosd. Dit betekent, dat de differentievergelijking die we krijgen, slechts nauwkeurig is tot op termen van de orde  $h^n$ . Dit is geen bezwaar; de taak van de numeriek-wiskundige is juist om  $h$  zo klein en/of zo groot te kiezen, dat de fout in de einduitkomst zo klein is, dat alle berekende decimalen exact zijn.

Doordat in ons geval  $\lambda$  nog bepaald moet worden hebben we de keus: we kunnen zorgen, dat (44) exact geldt, zodat de corresponderende differentievergelijking een benadering is, of we kunnen juist de differentievergelijking exact laten gelden (dan is aan (44) slechts bij benadering voldaan). Hier is doelbewust de tweede mogelijkheid gekozen, aangezien het verkrijgen van een eenduidige stroomfunctie het hoofddoel was. Dat daardoor het getransformeerde veld slechts bij benadering divergentievrij is, is geen bezwaar, want dit veld was toch slechts hulpmiddel.

De voorwaarde voor het bestaan van een eenduidige stroomfunctie is, dat de lijnintegraal (32) voor het getransformeerde veld over een willekeurig gesloten kromme nul is. De kleinste kromme in ons geval is de omtrek van een vierkant met zijde  $h$ . De integraal wordt berekend met de trapeziumformule (zie par. 3.4.).

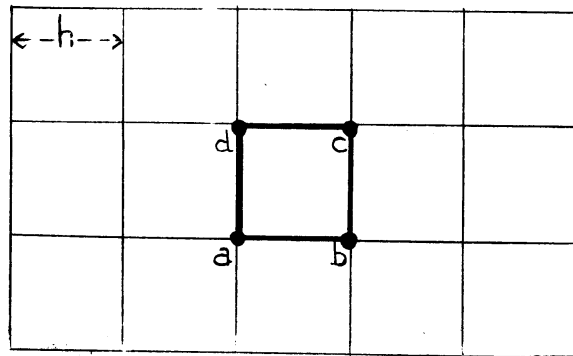


Fig. 5

Voor het in figuur 5 aangegeven vierkant krijgen we dan:

$$\begin{aligned} f_b - f_a &= -\frac{h}{2}(\hat{v}_a + \hat{v}_b) \\ f_c - f_b &= +\frac{h}{2}(\hat{u}_b + \hat{u}_c) \\ f_d - f_c &= +\frac{h}{2}(\hat{v}_c + \hat{v}_d) \\ f_a - f_d &= -\frac{h}{2}(\hat{u}_a + \hat{u}_d) \end{aligned}$$

optellen

$$0 = -(\hat{u}_a + \hat{v}_a) + (\hat{u}_b - \hat{v}_b) + (\hat{u}_c + \hat{v}_c) - (\hat{u}_d - \hat{v}_d) \quad (45)$$

In (45) komen  $\hat{u}$  en  $\hat{v}$  alleen als som en verschil voor, we stellen daarom

$$s = \hat{u} + \hat{v}, \quad t = \hat{u} - \hat{v}; \quad (46)$$

$u$  en  $v$  zijn in alle roosterpunten bekend en daaruit kunnen dus in elk roosterpunt  $s$  en  $t$  berekend worden.

We krijgen dan uit (44), (45) en (46) de volgende vergelijking ter bepaling van  $\lambda$  :

$$\lambda_a s_a + \lambda_d t_d = \lambda_b t_b + \lambda_c s_c \quad (47)$$

Elk vierkant van het net geeft één zo'n vergelijking.

Hierin zijn  $s$  en  $t$  de bekenden,  $\lambda_a, \dots, \lambda_d$  de onbekenden.

Wanneer het net een rechthoek is van  $m$  vierkanten breed en  $n$  vierkanten hoog, dan zijn er  $m \cdot n$  lineaire vergelijkingen en  $(m+1)(n+1)$  onbekenden. We kunnen dus een aantal  $\lambda$ 's nog vrij kiezen, b.v.  $= 1$  in alle punten van de linker en de onderste rand (in fig. 6 aangegeven met een dikke stip).

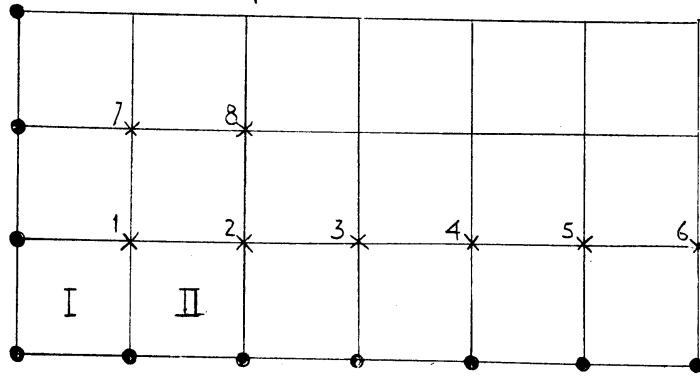


Fig. 6

Van het vierkant links onder (aangegeven met I) is nu in 3 punten de waarde van  $\lambda$  bekend; met behulp van formule (47) kan nu  $\lambda$  in het vierde hoekpunt berekend worden. Dit punt is in fig. 6 aangegeven met het cijfer 1. Is  $\lambda_1$  berekend, dan is van vierkant II in 3 hoekpunten de waarde van  $\lambda$  bekend, dus kan, weer met (47),  $\lambda_2$  berekend worden en zo successievelijk de waarde van  $\lambda$  in de punten 3, 4, 5, 6. Zijn deze berekeningen uitgevoerd, dan kan  $\lambda$  in de punten 7, 8 enz. berekend worden tot uiteindelijk  $\lambda$  in alle punten van het veld bekend zijn. Hieruit kunnen met behulp van (43) de waarden van  $\hat{u}$  en  $\hat{v}$  in elk punt berekend worden; gemakkelijker is echter om bij elk roosterpunt de waarden van  $\lambda_s$  en  $\lambda_t$  (die we toch nodig hebben voor (47) te noteren. Dan volgen  $\hat{u}$  en  $\hat{v}$  uit:

$$2\hat{u} = \lambda_s + \lambda_t ; \quad 2\hat{v} = \lambda_s - \lambda_t . \quad (48)$$

De deling door 2 (die in (48) uitgevoerd zou moeten worden om  $\hat{u}$  en  $\hat{v}$  zelf te krijgen) is niet essentieel en wordt daarom achterwege gelaten; we werken verder met  $2\hat{u}$  en  $2\hat{v}$ .

De stroomfunctie  $f$  vinden we dan als volgt. In één punt van het net kiezen we  $f$  willekeurig (dit mag vanwege de additieve constante in de stroomfunctie).

De waarde van  $f$  in de roosterpunten geven we aan met  $f_{i,j}$  ( $i$  constant langs lijnen  $y = \text{const.}$ ,  $j$  constant langs lijnen  $x = \text{const.}$ ) We mogen bijv. dus kiezen  $f_{0,0} = 0$ . Dan vinden we langs de onderste lijn successievelijk  $f_{0,0}$ ,  $f_{0,1}$ ,  $f_{0,2}$  uit de formule:

$$f_{i,j+1} = f_{i,j} - (2\hat{v}_{i,j} + 2\hat{v}_{i,j+1}) = f_{i,j} - 4 \frac{v_{i,j} + v_{i,j+1}}{2} , \quad (49)$$

hetgeen betekent, dat we uiteindelijk

als integrerende factor niet de boven berekende  $\lambda$  maar  $4\lambda/h$  nemen, waarin  $h = \Delta x = \Delta y$ .

Langs verticale lijnen gebruiken we de formule:

$$f_{i+1,j} = f_{i,j} + (2\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{i,j+1}) \quad (50)$$

Hiermee zou het probleem opgelost zijn, ware het niet dat een of meer van de coëfficiënten in vergelijking (47) gelijk aan nul kunnen zijn. In zo'n geval stopt het procédé wanneer in (47) juist die term wegvalt, waaruit men de  $\lambda$  zou willen bepalen. In sommige gevallen kan een andere keuze van de volgorde, waarin men de  $\lambda$ 's berekent, nog uitkomst brengen. Er is echter nog een andere complicatie, die nader bekeken moet worden, n.l. de mogelijkheid, dat  $\lambda$  negatief wordt (we beginnen steeds met een positieve  $\lambda$ ). Dit laatste wordt behandeld in par. 5.3; het daar aangegeven procédé blijkt tevens deze oplossing te geven voor het geval dat coëfficiënten in (47) gelijk aan nul zijn.

5.3. Singuliere punten.

Bij sommige velden blijkt de integrerende factor, bepaald volgens de methode van par. 5.2. overal positief te zijn. Dat dit niet altijd het geval behoeft te zijn, toont het veld van fig. 7.

Wiskundig is er geen enkel bezwaar tegen om ook negatieve waarden van toe te laten. Fysisch ligt de zaak echter anders.

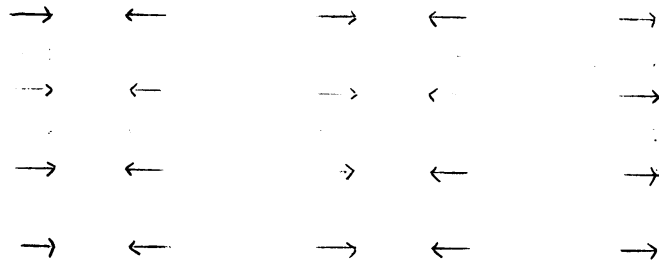


fig. 7

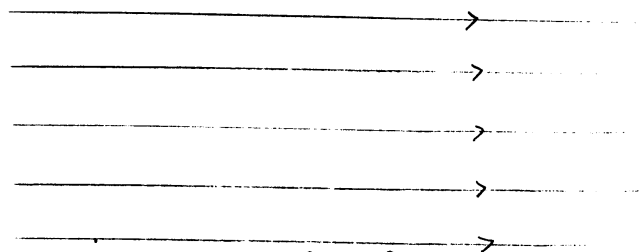


fig. 8

Bepaalt men n.l. de stroomlijnen, die bij het veld van fig. 7 behoren, dan verkrijgt men een stelsel aequidistante, evenwijdige lijnen. De pijlen krijgen de aangegeven richting als men met een positieve  $\lambda$  begint links in fig. 7. (zie fig. 8). Inderdaad raakt iedere vector van fig. 7 aan de bijbehorende stroomlijn, maar tóch zijn de stroomlijnen van fig. 8 geen fraaie weergave van het veld in fig. 7. Fig. 8 suggereert een homogeen stromingsveld, en dit is heel wat anders dan fig. 7. Nu is de bewering, dat vermenigvuldiging van de beide componenten van een vector met eenzelfde getal, de richting daarvan niet verandert, in feite alleen maar correct als dat getal positief is. Is het negatief, dan verandert de richting met  $180^\circ$ , dus de grootst mogelijke verandering.

We stellen daarom de eis, dat de integrerende factor altijd positief moet zijn; dus  $\lambda > 0$ . Maar dan is er niet altijd een oplossing van (47) mogelijk. Een eenvoudig voorbeeld, waarbij het niet gaat, is aangegeven in fig. 9.

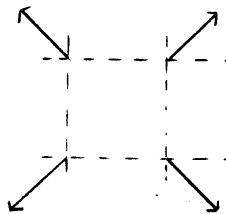


fig. 9

Een dergelijk patroon noemen we een "singulier vierkant" en het middelpunt een singulier punt. Voor de singuliere vierkanten vervangen we nu de vgl. (47) door

$$\lambda_a s_a + \lambda_d t_d - \lambda_b t_b - \lambda_c s_c = r ; \quad (51)$$

$r$  noemen we het residu. Dit residu mag positief of negatief zijn; het is altijd mogelijk om  $r$  zodanig te kiezen, dat alle  $\lambda$ 's in (51) positief zijn. Om dit te bereiken beginnen we volgens het procédé van par. 5.2. en gaan zo lang door, tot (47) voor de eerste maal een niet positieve waarde van  $\lambda$  zou opleveren. Voor het desbetreffende vierkant vervangen we dan (47) door (51). Voor de toepassing van (47) moest de waarde van  $\lambda$  in 3 van de 4 punten bekend zijn; ditzelfde geldt dus voor (51). Stel dat  $\lambda_c$  de nog onbekende waarde is. Dan volgt uit (51), als  $s_c \neq 0$ ,

$$\lambda_c = \frac{\lambda_a s_a + \lambda_d t_d - \lambda_b t_b - r}{s_c} \quad (52)$$

Door nu  $r$  maar groot genoeg of klein genoeg (dwz. negatief met voldoende grote absolute waarde) te kiezen, kan steeds bereikt worden, dat de teller in (52) hetzelfde teken heeft als de noemer, dus dat  $\lambda_c > 0$  is.

Wanneer  $s_c = 0$ , dan stellen we willekeurig  $\lambda_c = 1$  en  $r = \lambda_a s_a + \lambda_d t_d - \lambda_b t_b$ , zodat ook in dat geval aan (51) is voldaan met  $\lambda_c > 0$ . Hiermee is ook het reeds in par. 5.2. genoemde geval, dat de coëfficiënt van de te bepalen  $\lambda$  nul is, opgelost.

Het heeft zelfs voordelen om (51) wat ruimer toe te passen, dan hierboven is aangegeven en aldus te zorgen dat steeds bijvoorbeeld

$$0.5 < \lambda < 1.5 \quad (53)$$

In de eerste plaats wordt door (53) bereikt, dat de berekening voor alle punten van het veld met eenzelfde aantal decimalen doorgevoerd kan worden. Dit zou niet het geval zijn als  $\lambda$  willekeurig klein (dicht bij nul) zou kunnen worden. In dat geval zou, om geen nauwkeurigheid te verliezen de berekening met een steeds groter aantal decimalen moeten worden uitgevoerd. Verder is er een praktisch voordeel. Wanneer namelijk  $\lambda$  constant zou zijn (voor alle punten van het veld) dan zou de afstand van de stroomlijnen omgekeerd evenredig met de snelheid ter plaatse zijn; wanneer  $\lambda$  niet constant is, dan geldt deze eigenschap niet meer. Wanneer echter  $\lambda$  slechts tussen bepaalde grenzen varieert, zoals aangegeven in (53), dan kan men zeggen, dat genoemde eigenschap (gradient van  $f$  omgekeerd evenredig met de snelheid) in ruwe benadering blijft gelden, zodat het stroomlijnen beeld, althans in grove trekken, een indicatie van de snelheid geeft.

Het invoeren van de singuliere punten maakt het berekenen van de stroomfunctie iets ingewikkelder. Berekent men n.l. uitgaande van de bekende waarde  $f_a$  van  $f$  in punt  $a$  (fig. 9), achtereenvolgens  $f_b$ ,  $f_c$ ,  $f_d$  en daaruit weer  $f_a$  met behulp van (49) en (50), dan krijgt men niet de oorspronkelijke waarde terug, maar volgens (51),

$$f_a - 2(\lambda_a s_a + \lambda_b t_b + \lambda_c s_c - \lambda_d t_d) = f_a - 2z \quad (54)$$

De stroomfunctie is dus niet meer eenduidig.

We kunnen dit euvel verhelpen door het aanbrengen van een aantal sneden (zoals ook wel gedaan wordt in de theorie van de complexe functies).

We nemen daarbij aan, dat de singuliere punten door een beperkt aantal lijnen, die zonodig tot aan de rand van het veld verlengd worden, verbonden kunnen worden <sup>1)</sup>, dus b.v. als aangegeven in fig. 10, waarin de roosterpunten van het net door stippen en de singuliere punten door kruisjes zijn aangegeven.

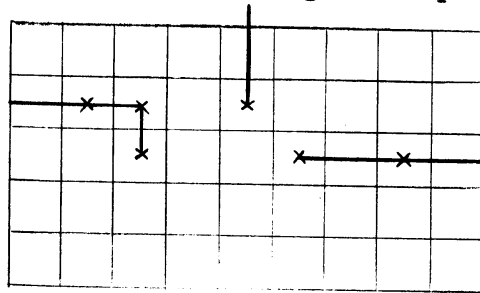


Fig. 10

We behoeven dan bij de numerieke integratie de integratieweg slechts zodanig te kiezen, dat hij geen singuliere lijn (= getrokken verbindinglijn van singuliere punten) snijdt, om een eenduidige stroomfunctie te verkrijgen.

Bij het tekenen van stroomlijnen zal het echter in het algemeen niet vermeden kunnen worden, dat deze singuliere lijnen snijden. Verder is het bij elektronische berekening prettig, als de stroomfunctie langs rechte (horizontale of verticale) lijnen berekend kan worden; ook hierbij zal in het algemeen snijding met singuliere lijnen niet vermeden kunnen worden. Het is daarom nuttig om het gedrag van de stroomfunctie in de buurt van singuliere punten nader te onderzoeken.

We beginnen met een eenvoudig geval, n.l. de aanwezigheid in het desbetreffende gebied van slechts een enkel singulier punt (fig. 11). Uit (54) volgt dan, dat  $f$  een sprong van  $+2r$  vertoont als de singuliere lijn in de richting van de pijl overschreden wordt.

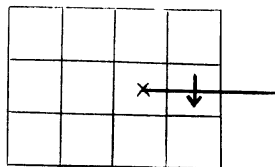


fig. 11

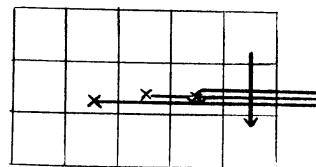


fig. 12

<sup>1)</sup> Voor velden, als aangegeven in fig. 7, is de hier aangegeven methode niet bedoeld.

Wanneer er meer dan één singulier punt aanwezig is, dan kunnen we deze altijd door een of meer lijnen verbinden (zoals b.v. is gedaan in fig. 10). Liggen daarbij een aantal singuliere punten op een lijn, dan is de sprong gelijk aan de dubbele som van de residuen tussen het eindpunt van de singuliere lijn en de plaats waar deze overschreden wordt. Dit ziet men gemakkelijk in door de singuliere lijnen meervoudig te tekenen, zoals in fig. 12 is gedaan.

Deze regel maakt het mogelijk om de stroomlijnen continu te tekenen, ook als ze een singuliere lijn overschrijden. Slechts de erbij behorende waarde van  $f$  maakt dan een sprong.

De residuen hangen samen met de divergentie in het bijbehorende vierkant. Dit kunnen we als volgt inzien. Volgens de bekende stelling van Gauss is de totale uitstroming door een gesloten kromme gelijk aan de totale divergentie binnen die kromme; in formule:

$$\oint w_n dl = \int_{\text{op } b} \text{div } \vec{w} dO, \quad (55)$$

waarin  $dl$  het lijnelement van de kromme voorstelt en  $dO$  het oppervlakte element.

In par. 5.2. is een numerieke uitdrukking, n.l. het rechterlid van (45), afgeleid voor de integraal in het linkerlid van (55). We kunnen uit (45) dus afleiden, dat de divergentie binnen het betrokken vierkant  $a b c d$  nul is. Dit klopt ook, want in par. 5.2. was het gehele getransformeerde veld divergentievrij verondersteld.

Voor een niet divergentievrij veld zal het rechterlid van (45) ongelijk aan nul zijn. Voor dit rechterlid kunnen we schrijven, met behulp van (45) en (46),

$$-(\lambda_a s_a + \lambda_d t_d - \lambda_f t_f - \lambda_c s_c). \quad (56)$$

De waarde van de uitdrukking in (56) is volgens (51) gelijk aan  $-r$ ;  $-2r$  stelt de divergentie, geïntegreerd over het desbetreffende vierkant, voor. Dit is ook in overeenstemming met het stromingsbeeld van fig. 9 (de oor-



spronkelijke aanleiding tot het invoeren van residuen), welke figuur duidelijk een bron ongeveer in het midden van het vierkant suggereert. Het tekenen van sneden in fig. 10 is ook geïnspireerd door de hoedanigheden van een puntbron. De vergelijking voor een veld, dat in de oorsprong een bron bezit, maar overigens divergentievrij is, kunnen we gemakkelijk vinden met behulp van de theorie van de complexe functies. Zij n.l.  $F(z)$  een analytische functie van de complexe veranderlijke  $z = x + iy$ , dan stelt het reële deel van  $F(z)$  de stroompotentiaal, het imaginaire deel de stroomfunctie van een divergentievrij, rotatievrij, twee-dimensionaal stroomveld voor.

Neem nu  $F(z) = \ln z$ , dan is het imaginaire deel van  $F(z)$ :

$$\psi(x, y) = \arctg \frac{x}{y} \quad (57)$$

$F(z)$  is analytisch in het gehele complexe vlak, met uitzondering van de oorsprong;  $\psi(x, y)$  is dan ook een stroomfunctie in elk enkelvoudig samenhangend gebied, dat de oorsprong niet bevat en het bijbehorende stroomveld is divergentievrij in zulk een gebied. De stroomlijnen zijn lijnen  $\psi = \text{constant}$ , en zijn dus rechten, die door de oorsprong gaan. De oorsprong zelf is een bron. Rond de oorsprong kunnen we wel stroomlijnen definiëren, maar geen stroomfunctie;  $\psi(x, y)$  is niet ondubbelzinnig bepaald in een gebied, dat de oorsprong bevat: bij een rondgang om 0 heen verandert  $\psi$  met  $\pm 2\pi$ . Deze dubbelzinnigheid kunnen we opheffen door een snede aan te brengen, vanuit 0 gaande naar oneindig. In het overblijvende gebied is dan  $\psi(x, y)$  wel ondubbelzinnig bepaald en is dan een stroomfunctie. In naburige punten, die aan weerszijden van de rand (de snede) liggen heeft  $\psi$  verschillende waarden; het verschil van deze waarden heeft als limiet  $2\pi$  wanneer de afstand van de punten tot nul nadert.

Dit is de situatie, die we ook in het meer algemene geval van figuur 10 aantreffen. De sprong van  $\psi$  langs de rand van een snede verandert n.l. niet als we bij het veld (57) een divergentievrij veld optellen. Een eenvoudig voorbeeld moge dit verduidelijken.

Stel we hebben een veld met slechts één singulier punt, dat we in de oor-

sprong denken. We trekken hiervan af een veld  $C \cdot \arctg \frac{x}{y}$  (zie (57)), waarin  $c$  een constante is die zodanig gekozen is, dat de divergentie van het af te trekken veld in 0 dezelfde waarde heeft als het oorspronkelijke veld. Dan is het verschilveld divergentievrij. Dit bezit dus een stroomfunctie  $\psi(x,y)$  die geschreven kan worden als

$$\psi(x,y) = \text{Im}[g(z)] \quad (58)$$

waarin  $g(z)$  een analytische functie is van de complexe variabele  $z$ .

Dus  $g(z)$  kan in een Taylor reeks ontwikkeld worden:

$$g(z) = g(0) + g'(0) \cdot z + \frac{1}{2} g''(0) \cdot z^2 + \dots \quad (59)$$

In de buurt van de oorsprong hebben de termen met hogere machten van  $z$  relatief weinig invloed, daarom laten we in (59) de termen met  $z^2$  en volgende weg. Dan heeft het oorspronkelijke veld de stroomfunctie

$$\psi = c \arctg \frac{x}{y} + \text{Im}[g(0) + g'(0) \cdot z] \quad (59)$$

In (59) kunnen we  $g'(0)$  reëel veronderstellen (is altijd te bereiken door een rotatie om de oorsprong); dan komt er:

$$\psi(x,y) = c \arctg \frac{x}{y} + a_0 + a_1 y \quad (60)$$

waarbij  $(x,y)$  weer éénwaardig gemaakt kan worden door het aanbrengen van een geschikte snede.

Het veld gedefinieerd door (60) is de som van twee velden:

een radiaal veld:  $\psi_1 = c \cdot \arctg \frac{x}{y}$  (zie fig. 13) en

een homogeen veld:  $\psi_2 = a_0 + a_1 y$  (zie fig. 14)

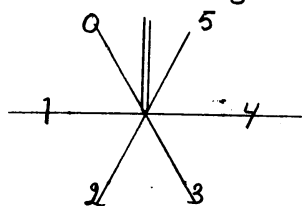


fig. 13

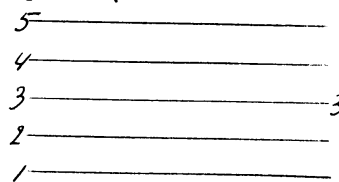


fig. 14

Door beide velden op te tellen (dit is hier grafisch gedaan) verkrijgt men het veld van fig. 15.



Het nummeren van de isolijnen in fig. 15 vereist enige attentie. Op voldoende afstand van de oorsprong is het veld bij benadering gelijk aan een homogeen veld, en vormen de stroomlijnen een stel vrijwel evenwijdige, aequidistante lijnen. Deze zijn in fig. 15 aan de linkerrand genummerd van 0 t/m 8. Ook aan de rechterrاند is het veld bijna homogeen, de lijnen zijn hier dienovereenkomstig genummerd, d.w.z. uitgaande van de isolijnen genummerd 2 en 3 komen we rechtsboven tot de nummers 11 en 12. Deze isolijnen hebben echter aan de linkerkant van de tekening de nummers 5 en 6, zodat eenzelfde lijn twee verschillende nummeringen zou hebben. Hier brengt de snede uitkomst (de dik getrokken lijn in fig. 15). De sprong in de stroomfunctie is hier 6, de "12 lijn" wordt bij het passeren van de snede een "6 lijn" enz., waarmee een sluitend geheel wordt verkregen.

Fig. 15, die afgeleid is van een analytische uitdrukking, geeft veel meer details in de omgeving van de singulariteit dan men in de praktijk kan verkrijgen, waar men alleen maar de waarden kent van de snelheid in de hoekpunten van een vierkant, dus b.v. in de punten aangegeven met een kruisje in fig. 15. Zelfs als men de snelheden in de vier hoekpunten exact zou weten (wat in de praktijk nooit het geval is, dan is het nog mogelijk om een aantal andere velden te tekenen (zie b.v. fig. 16), die evengoed bij de waarnemingen aansluiten als het veld van fig. 15. Essentieel in beide figuren is, dat links per lengteëenheid minder stroomlijnen voorkomen dan rechts het geval is. Tengevolge van de divergentie in het vierkant moet men daarin een aantal stroomlijnen laten ontspringen. Dit aantal is gelijk aan de sprong in de stroomfunctie, als men de stroomlijnen tekent behorende bij waarden van de stroomfunctie die telkens een eenheid verschillen. Voor een minder sterke bron is dit aangegeven in fig. 17.

Met deze basisfiguren in gedachten is het niet moeilijk, op grond van de berekende waarden van de stroomfunctie en de getekende snelheidsvectoren de stroomlijnen te tekenen.

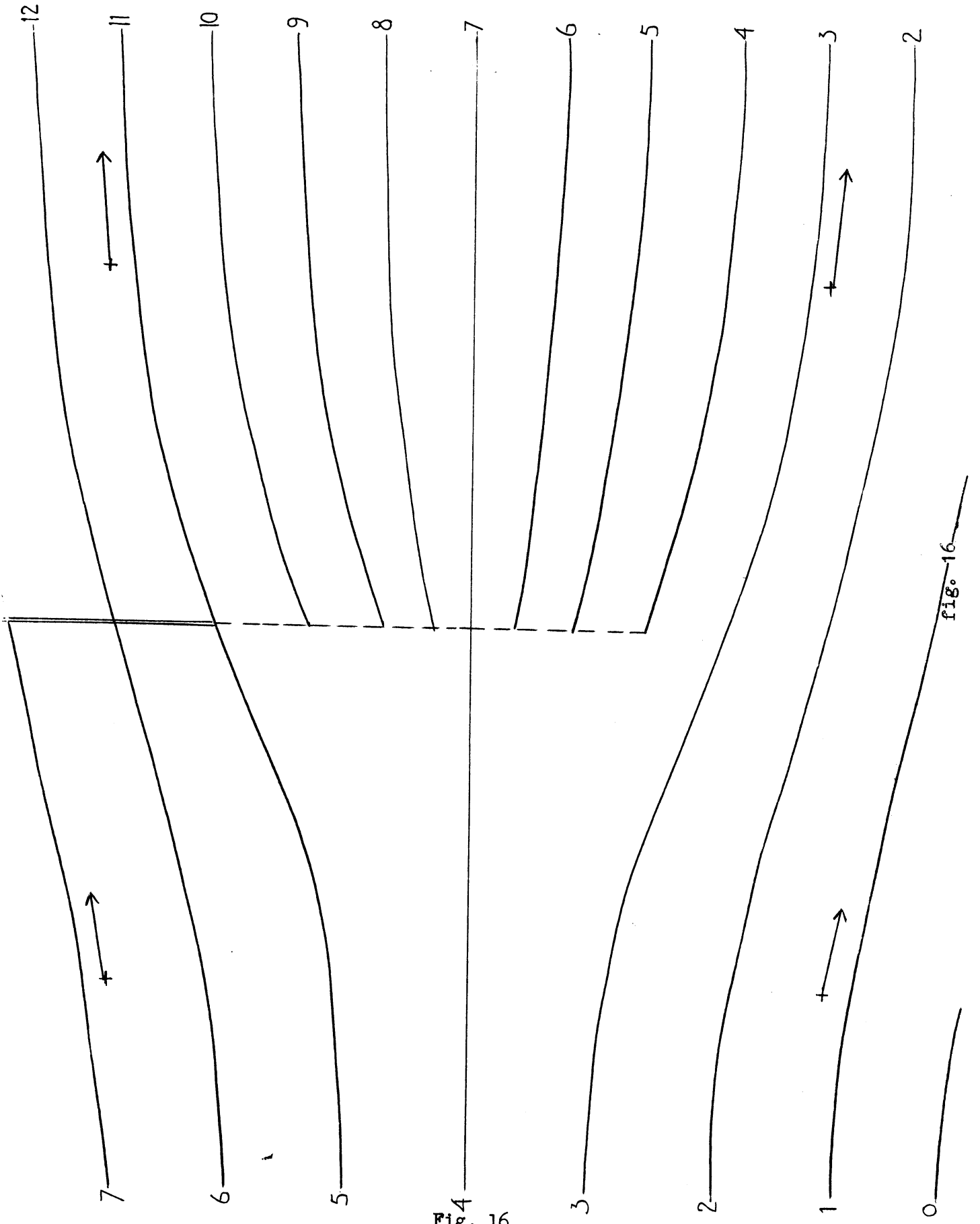


Fig. 4  
16

Fig. 16

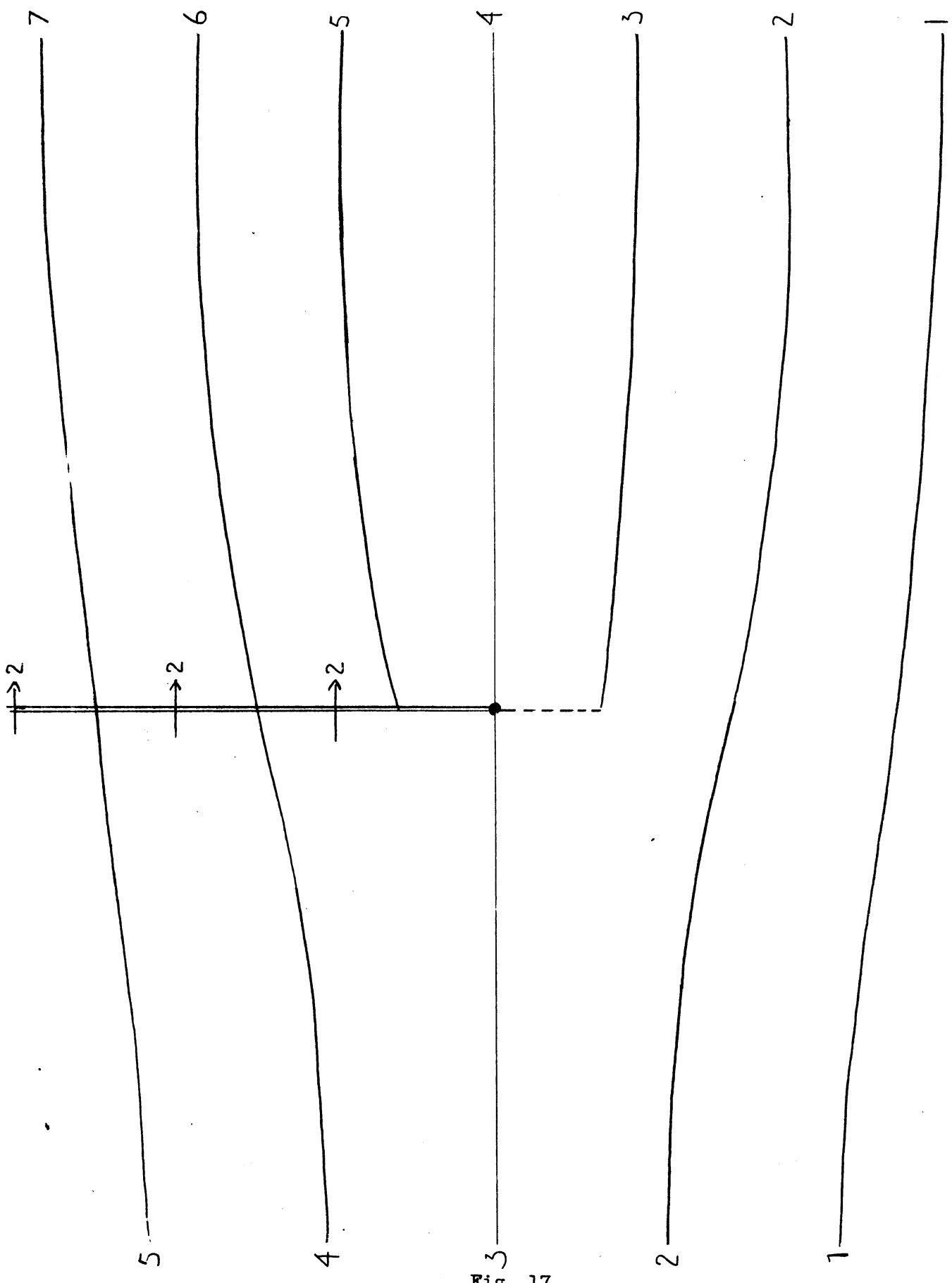


Fig. 17

fig. 17

## 6. Foutendiscussie.

### 6.1. Waarnemingsfouten.

Wanneer men - zoals in ons geval - uitgaat van gegevens die door meten of schatten bepaald zijn, dan zijn deze gegevens altijd behept met waarnemingsfouten. Bovendien zijn de waarnemingsreeksen vaak inhomogeen. Aan dit feit is op zichzelf weinig te doen. Wel is het soms mogelijk de fouten in het eindresultaat, ontstaan tengevolge van de waarnemingsfouten, te verkleinen, n.l. door keuze van een andere bewerkingsmethode. In dit opzicht is b.v. de methode van par. 5 superieur aan die van par. 4.1. Dit kunnen we het duidelijkst zien aan twee stroomlijnen, die ongeveer evenwijdig aan een coördinaatas lopen (fig. 18).

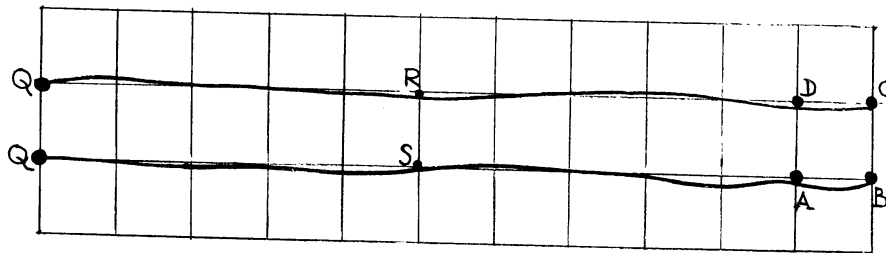


fig. 18

Ons interesseren n.l. niet in de eerste plaats de absolute waarden van de stroomfunctie, maar wel onderlinge afstand en richting van de stroomlijnen, en die worden weer bepaald door de gradient van de stroomfunctie, dus door de verschillen  $\psi_B - \psi_A$ ,  $\psi_C - \psi_B$  enz. Blijkens par. 5 hebben op deze verschillen alleen invloed de richtingen van de gemeten vectoren in A, B en C. Berekent men echter de stroomlijnen volgens de Picard techniek (par. 4.1.) dan wordt de waarde van  $\psi_C$  mede beïnvloed door de vectoren in elk van de knooppunten tussen Q en C, en  $\psi_B$  door de vectoren in de punten tussen P en B. (P en Q zijn de beginpunten voor de berekening van de stroomlijnen). Het verschil  $\psi_C - \psi_B$  wordt dus beïnvloed door alle genoemde vectoren, waarbij opgemerkt dient te worden dat de meetfouten in twee naburige punten, zoals b.v. R en S, elkaar in het algemeen niet zullen opheffen.

## 6.2. Afrondingsfouten.

Bij numerieke berekeningen is men wel gedwongen de getallen, die tijdens de bewerking berekend worden, telkens af te ronden op een bepaald aantal decimalen. Niet alleen omdat zowel tafel- als elektronische rekenmachines slechts een beperkt aantal decimalen kunnen bevatten, maar vooral omdat zonder afrondingen het aantal decimalen dat men mee moet nemen snel aangroeit, waardoor ook het rekenwerk buiten alle proporties zou aangroeien. Bij elke afronding ontstaat echter een fout, die maximaal 5 eenheden van de eerste verwaarloosde decimaal kan bedragen. Teneinde het eindresultaat niet nadelig te beïnvloeden, moet men daarom bij elke tussenberekening zoveel decimalen behouden, dat de fout in het eindresultaat, ontstaan tengevolge van afronding, kleiner is dan de fout, die tengevolge van andere oorzaken ontstaat.

Wanneer het probleem slechts een klein aantal deelbewerkingen vereist, kan men het aantal decimalen voor de deelbewerkingen het beste zo kiezen, dat het eindresultaat nog de voorgeschreven nauwkeurigheid bezit, ook als alle afrondingsfouten in dezelfde richting werken. Voor problemen die een groot aantal tussenbewerkingen vergen (b.v. in de orde van  $10^3$  tot  $10^6$ ) is bovengenoemde eis te zwaar. In zulke gevallen is uit proefberekeningen (toegepast op enkele specifieke problemen) gebleken dat de afrondingsfouten zich als statistische grootheden gedragen. Moet men b.v.  $N$  getallen optellen, elk met een afrondingsfout  $\varepsilon$ , dan is de maximale fout in de som  $N\varepsilon$ , de waarschijnlijkheid echter dat de fout groter is dan  $3\varepsilon\sqrt{N}$  is al zeer klein. Voor grote  $N$  geldt dat  $3\varepsilon\sqrt{N}$  aanzienlijk kleiner is dan  $\varepsilon N$ , zodat laatstgenoemd getal tot onnodig veel rekenwerk zou leiden.

## 6.3. Afkappingsfouten.

Hiermede verstaan we de fouten, die ontstaan, doordat in reeksontwikkelingen slechts een eindig aantal termen behouden worden en de z.g. "resttermen" verwaarloosd worden. Deze resttermen zijn meestal van de vorm

$$C_n \cdot h^n \cdot f^{(n)}(x), \quad (61)$$

waarin  $C_n$  een constante is (d.w.z. onafhankelijk van  $x$ ) en  $h = \Delta x$  de intervallengte, gebruikt bij de differenties. Men kan, bij een gegeven probleem, de uitdrukking (61) op twee manieren verkleinen:

- a. door het interval  $h$  te verkleinen;
- b. door  $n$  groter te nemen, dus door meer termen in de reeksontwikkeling te laten staan.



Beide methoden vermeerderen het rekenwerk; aan welke methode men de voorkeur geeft zal, behalve van persoonlijke smaak, afhangen van het probleem en de eventueel beschikbare rekenmachines.

In par. 5 is een 2e orde benadering gekozen. Dit betekent dat voor een kwadratische functie de afkappingsfout nul is; of, met andere woorden, dat in de stroomfunctie 3e graadstermen worden verwaarloosd. Aangezien het de bedoeling is om met de hand isolijnen te tekenen op grond van de berekende waarden van de stroomfunctie, kan deze methode als voldoende nauwkeurig beschouwd worden. Hij is in staat om de karakteristieke bijzonderheden, zoals maxima en minima, troggen en zadelpunten juist weer te geven.

De verwaarloosde fenomenen, die dus klein zijn van de 3e graad in  $h$ , kunnen met de gebruikte methode van analyseren toch niet weergegeven worden. Een derdegraads term kan n.l. betekenen dat de stroomfunctie tussen twee naburige roosterpunten eerst toeneemt, dan afneemt en dan weer toeneemt en dit kan toch niet op een verantwoorde manier getekend worden. Om misverstand te voorkomen zij nog opgemerkt, dat het bovenstaande alleen geldt voor het verloop van de stroomfunctie tussen twee naburige roosterpunten in. In een groter gebied (waarvan de afmetingen meer dan 2 rooster-intervallen beslaan) kunnen natuurlijk zeer goed stroomfuncties van hogere dan de 2e graad voorgesteld worden (in het bijzonder kunnen op de gehele kaart meerdere maxima en minima weergegeven worden).

## 7. Een voorbeeld uit de praktijk.

Om de methode van par. 5 in de praktijk te toetsen, is deze toegepast op de gemiddelde wind over het eerste kwartaal (januari, februari, maart) op de Noord-Atlantische Oceaan. Hiervan waren voor elk tweegraads vak de componenten van de gemiddelde wind langs meridiaan en breedtecirkel reeds bepaald.

### 7.1. Keuze van de roosterpunten.

De breedtecirkels en meridianen vormen geen vierkantsnet. Daar ook overigens het werken op een boloppervlak ingewikkelder is dan in een plat vlak, is besloten de berekening uit te voeren voor een afbeelding van de aarde op een plat vlak (landkaart). Er zijn vele soorten van zulke afbeeldingen (kaart-

projecties) bekend. Gekozen is een conforme afbeelding, waarbij meridianen en breedtecirkels beide als rechten worden afgebeeld: de Mercatorprojectie. Zoals bekend heeft de conforme afbeelding de prettige eigenschap, dat een aantal grootheden invariant voor de transformatie zijn. In ons geval is speciaal van belang dat de hoeken in de kaart gelijk zijn aan de overeenkomstige hoeken op het aardoppervlak.

Terloops zij nog opgemerkt, dat de divergentie niet invariant is voor deze afbeelding. Men kan dit narekenen, maar ook onmiddellijk zien aan een wind, die overal Noord is en van gelijke snelheid. Deze stroming is divergentievrij in de kaart, maar niet op het aardoppervlak.

Het is dan ook een wat gewaagde veronderstelling, dat de stroming in de kaart divergentievrij zal zijn: dan moet er op het aardoppervlak juist zo'n convergentie aanwezig zijn, dat deze de door de transformatie geïntroduceerde divergentie opheft. Deze veronderstelling is hier bewust niet gemaakt.

Nu de keuze van de kaart gemaakt is, kunnen we de roosterpunten kiezen. Op de evenaar kiezen we als roosterpunten de snijpunten met de meridianen van  $(2n)^{\circ}$ ,  $n$  geheel. Hiermee liggen de verdere roosterpunten vast.

## 7.2. Het construeren van de stroomlijnen.

Allereerst zijn de oostcomponenten van de gemiddelde wind in een kaart geplott en de noordcomponenten in een tweede kaart. In deze kaarten zijn isolijnen getrokken. Eventuele slecht in het patroon passende gegevens werden nagegaan op waarnemings- en/of berekeningsfouten en zonodig gecorrigeerd. (Blijkens (46) en (47) hebben we in de roosterpunten nodig de som en het verschil van de componenten. Aangezien verder de roosterpunten, behalve langs de evenaar, niet samenvallen met de middelpunten van de 2 graadvakken, moeten de waarden in de roosterpunten door interpolatie gevonden worden. Daarom zijn de kaarten met oost- en noordcomponenten grafisch opgeteld en afgetrokken, en hieruit de waarden van  $s$  en  $t$  in de roosterpunten door grafische interpolatie bepaald. Deze waarden zijn in een volgende kaart gezet. Hieruit werden, indien mogelijk met (47), anders met (51), in elk roosterpunt  $\lambda_s$  en  $\lambda_t$  berekend en genoteerd. Volgens (48) zijn hieruit  $2 \hat{u}$  en  $2 \hat{v}$  gemakkelijk te berekenen. Een deel van de kaart is getoond in figuur 19. De berekeningen zijn uitgevoerd langs breedtecirkels (beginnende bij de evenaar), gaande van oost naar west.

De bovenste rij in fig. 19 is nog niet voltooid.

Verder ziet men op de onderste rij een vak waarvoor (51) is gebruikt i.p.v. (47); de waarde van het residu is, omcirkeld, ook in kaart weergegeven.

+6	+19	+5	+21	+4	+20	+4	+22	+4	+25	+4	+29	Plotschema
						3	16	3	19	3	19	
+5	+19	+4	+24	+4	+25	+4	+26	+5	+27	+7	+28	
5	20	4	21	4	25	4	27	3	17	5	19	S 6
25	-15	25	-17	29	-21	31	-23	20	-14	24	-14	$\lambda 5, \lambda 6$
						120						$2\hat{u}, 2\hat{v}$
+6	+18	+7	+26	+8	+29	+9	+28	+10	+26	+12	+25	
5	16	6	21	6	23	9	27	5	13	8	17	
21	-11	27	-15	29	-17	36	-18	18	-8	25	-9	

fig. 19.

Uit  $2\hat{u}$  en  $2\hat{v}$  volgen m.b.v. (49) en (50) tenslotte de waarden van de stroomfunctie in de roosterpunten. Ook deze waarden werden weer in een kaart gezet. In deze kaart werden eerste de singuliere punten door lijnen verbonden en daarna de stroomlijnen getekend, rekening houdend met hetgeen in par. 5.3. over het snijden van stroomlijnen en singuliere lijnen gezegd is.

Een deel van deze kaart is weergegeven in fig. 20. De stroomlijnen zijn hier met kleinere intervallen getekend dan nodig is om het stromingspatroon weer te geven; dit maakt het tekenen ervan in de buurt van de singuliere punten gemakkelijker.

De uiteindelijke kaart is weergegeven in fig. 21. Uiteraard zijn hierin de singuliere lijnen weggelaten, daar deze slechts een rekentechnisch hulpmiddel waren.

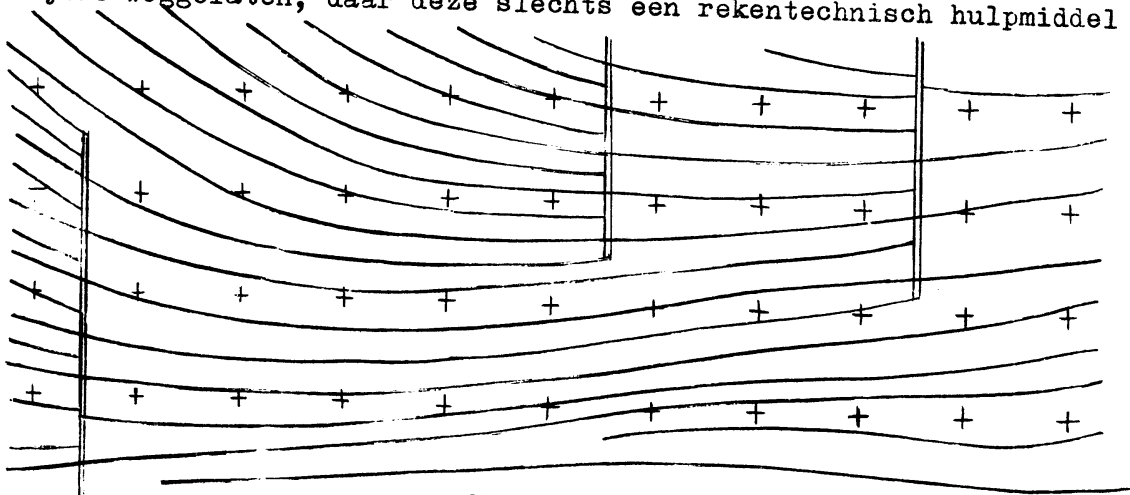


fig. 20.

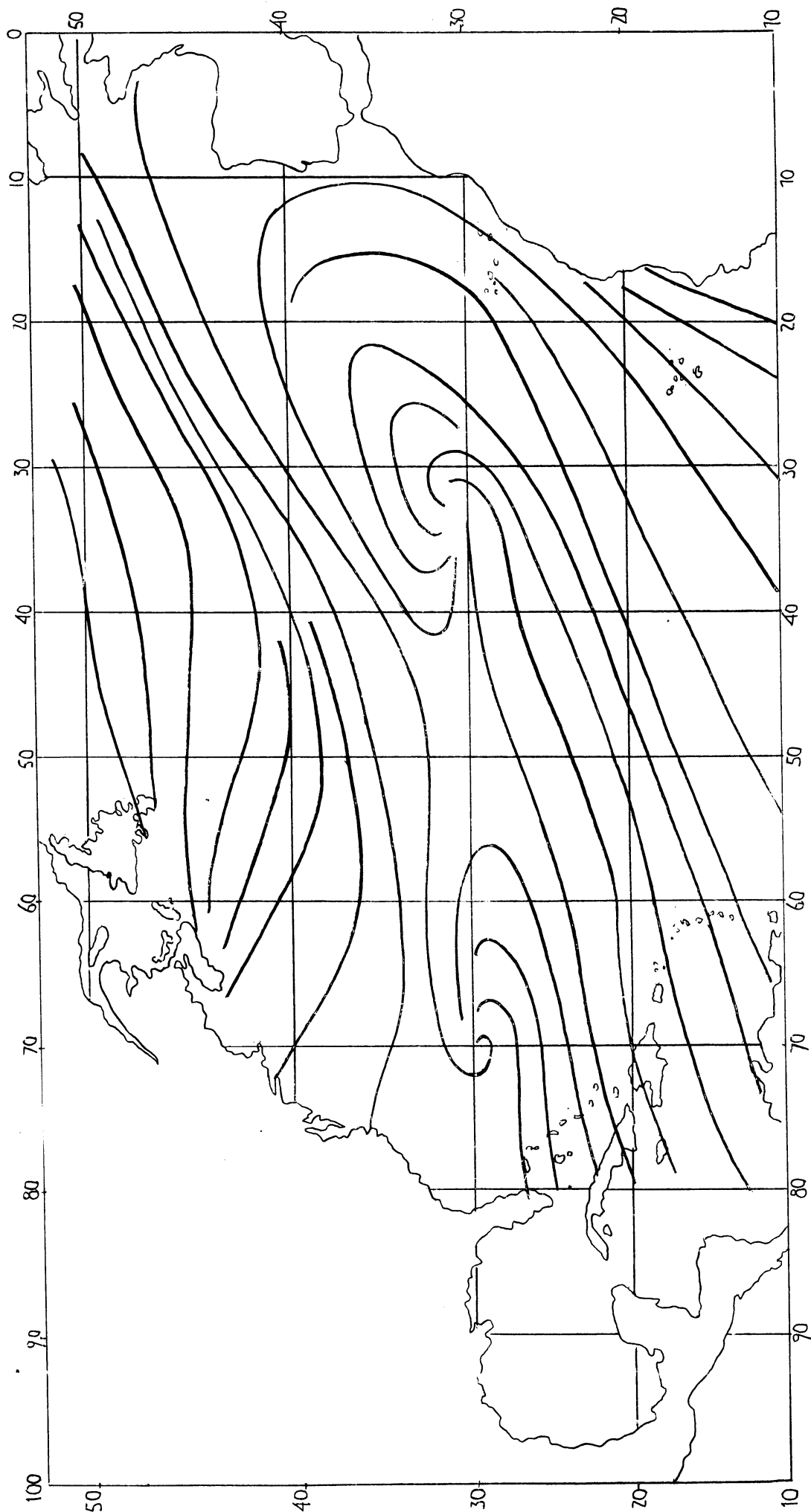


fig. 21 Stroomlijnen.

SUMMARY.

The present investigation was started for the purpose of automatization of the construction of streamlines of a vector field. Although it is applicable to vector fields given in analytical form, it is primarily intended for fields where the values are obtained by observation. Thus the vectors are only known in the grid points of a net and only to a certain degree of accuracy.

For the purpose of those readers which are not familiar with numerical methods, a short introduction to such methods is given (section 3). In section 4 two existing methods for the construction of streamlines are discussed. Of these, the first one is called after Picard. It suffers from the accumulation of random errors. The second one was devised by Pritchard and is only applicable to non-divergent fields. In section 5 a new method is described, which is applicable to fields with divergence. The method is based on the introduction of an integrating factor. In contrast to analytical methods, in which the introduction of an integrating factor in general complicates the problem, it leads in our case to a rather simple calculating scheme. This scheme has the effect that the divergence is concentrated in isolated points. For these points a different, but still simple calculation scheme is presented.

INHOUD.

1. Inleiding.
  2. De probleemstelling.
  3. Enkele grepen uit de numerieke wiskunde.
    - 3.1. Notaties.
    - 3.2. Interpolatieformules.
    - 3.3. Numeriek differentieren.
    - 3.4. Numeriek integreren.
  4. Twee bestaande methoden voor het numeriek bepalen van stroomlijnen.
    - 4.1. De Picard techniek.
    - 4.2. De methode Pritchard.
  5. Stroomlijnen in een veld met vergentie.
    - 5.1. De integrerende factor.
    - 5.2. De numerieke integratie.
    - 5.3. Singuliere punten.
  6. Foutendiscussie.
    - 6.1. Waarnemingsfouten.
    - 6.2. Afrondingsfouten.
    - 6.3. Afkappingsfouten.
  7. Een voorbeeld uit de praktijk.
    - 7.1. Keuze van de roosterpunten.
    - 7.2. Het construeren van de stroomlijnen.
- Summary.
- Inhoud.