

KONINKLIJK NEDERLANDS  
METEOROLOGISCH INSTITUUT

Wetenschappelijk Rapport W.R. 60-5 (III-253)

P.J. Rijkoort

De indringingsdiepte van de vorst in de bodem

De Bilt, 1960

All Rights Reserved

Nadruk zonder toestemming van het K.N.M.I. is verboden

P.J. Rijkooft

De indringingsdiepte van de vorst in de bodem

INHOUD

0. Inleiding
1. Poging tot toetsing van het "Neumann" model
2. De bodemtemperaturen op de diepten 3 en 5 m en de voortplanting van de jaarlijkse temperatuurgolf
  - 2.1. Het materiaal
  - 2.2. De jaarlijkse gang
  - 2.3. Statistische toetsing
  - 2.4. De limietwaarde van de vorstdiepte
3. De isolerende werking van een sneeuwdek
4. Een nieuw model voor de vorstdiepte-tijd-functie
  - 4.1. Het algemene stelsel vergelijkingen voor homogeen medium
  - 4.2. Een onvolledige benaderende oplossing
  - 4.3. Numerieke bewerking en resultaten
5. Een globale kaart voor de extreme vorstdiepten in ons land

Summary

Symbolenlijst

Literatuuropgave

## 0. Inleiding

In het rapport W.R. 56-003 van 1956 [1] is aangetoond, dat de eenvoudige oplossing van het vorstdiepte probleem (de z.g. "Neumann" oplossing, waarbij de vorstdiepte evenredig met de wortel uit de tijd toeneemt), slechts bij benadering bruikbaar is en dan nog alleen als de vorstperiode niet te lang duurt. Het ideale geval, waarvoor deze oplossing geldt, is het geval, waarbij de "bodemconstanten" inderdaad constant zijn, terwijl verder de begintemperatuur op alle diepten gelijk is n.l.  $T_b$  en aan de oppervlakte op het begintijdstip een temperatuur  $T_0$  (beneden nul) wordt ingezet, die constant blijft in de tijd. De vorstdiepte is dan te schrijven als:

$$R_t = 2\beta\sqrt{a_1 t} \quad (0.1)$$

Hierin is  $a_1$  de warmte-uitwisselingscoëfficiënt in de bevroren grond. De factor  $\beta$  moet voldoen aan:

$$\frac{\exp(-\beta^2)}{\operatorname{erf} \beta} + \frac{T_b}{T_0} \sqrt{\frac{\lambda_2 C_2}{\lambda_1 C_1}} \cdot \frac{\exp(-a_1/a_2 \cdot \beta^2)}{\operatorname{erfc} \beta\sqrt{a_1/a_2}} = \frac{Ld \cdot \beta\sqrt{\pi}}{-T_0 \cdot C_1} \quad (0.2) \quad *)$$

De index 1 slaat op het bevroren gedeelte van de bodem, de index 2 op het onbevroren gedeelte.

Voor (0.1) kan geschreven worden:

$$R_t = \frac{2\beta\sqrt{a_1}}{\sqrt{-T_0}} \cdot \sqrt{-T_0 t} = \frac{2\beta\sqrt{a_1}}{\sqrt{-T_0}} \sqrt{S_t} \quad (0.3)$$

We kunnen  $S_t$  beschouwen als de temperatuursom, d.w.z. de som van de absolute waarden van de temperatuur vanaf het begin tot het tijdstip  $t$ . Is de temperatuur niet strikt constant, maar fluctueert deze om een constante waarde  $-T_0$ , dan is met (1.3) dus toch het "Neumann" model toe te passen. Op deze wijze zijn in W.R. 56-003 de bodemtemperatuurgegevens

---

\*) Voor de betekenis der symbolen zie de lijst aan het eind van dit rapport.

van Castricum verwerkt. Hierbij bleek, dat het verband tussen  $R_t$  en  $\sqrt{S_t}$  als lineair beschouwd kan worden, mits de vorstduur niet te groot wordt. Bij de langdurige winter van 1947 bleek n.l. dat op den duur de vorstdiepte niet meer toeneemt ondanks vrijwel constant blijvende  $T_0$ .

Het "Neumann" model is dus beslist niet bruikbaar voor extrapolatie. De oorzaak moet stellig gezocht worden in de onderstelling, dat aan het begin de temperatuur in de bodem op elke diepte  $T_b$  is. Dit is een te grove benadering van de werkelijkheid. Aan het begin is de temperatuur vlak onder de oppervlakte dichtbij nul, maar op enkele meters diepte nog omstreeks  $10^\circ\text{C}$ . Bovendien bevindt zich op grotere diepte het grondwater. De warmtecapaciteit hiervan is groter dan van de bodem zelf en derhalve zal de afkoeling hierin nooit in diezelfde mate plaatsvinden als in de grond boven het grondwater.

In [1] werden, om met het bovenstaande rekening te houden, twee andere modellen gebruikt. Helaas bleek het toen nog niet mogelijk te berekenen hoe hiervoor het verloop van de indringingsdiepte met de tijd is. Slechts de limietwaarde voor  $t \rightarrow \infty$  kon worden bepaald.

Bij het eerste van de twee modellen was  $T(z) = P \cdot z$ , dus er was een lineaire toename met de diepte van de bodemtemperatuur in het begin verondersteld; bij het tweede model blijft de bodemtemperatuur op zekere diepte  $z_c$  constant, namelijk  $T_c$  voor alle tijden. In beide gevallen bleek de limietwaarde slechts afhankelijk te zijn van de verhouding  $\lambda_2/\lambda_1$ , uiteraard afgezien van de vanzelfsprekende afhankelijkheid van  $P$  resp.  $z_c$  en  $T_c$ .

In dit rapport zullen nu de resultaten van de verdere onderzoeken worden behandeld. Deze resultaten zijn samen te vatten in de volgende punten:

- 1) De "Neumann" oplossing is niet alleen onbruikbaar voor grote waarden van  $t$ , maar vermoedelijk ook voor kleine waarden van  $t$ . Het is n.l. niet mogelijk gebleken voor het materiaal van Castricum geschikte waarden voor de parameters te vinden, zodanig dat (0.1) en (0.2) overeenstemmen met de waarnemingen.
- 2) Ten einde redelijke schattingen voor  $z_c$  en  $T_c$  te verkrijgen zijn op een aantal plaatsen weerstandsthermometers op de diepten 3 en 5 m aangebracht. Echte constante waarden zijn voor  $z_c$  en  $T_c$  niet te vinden, wat natuurlijk geen verwondering wekt, want de jaarlijkse gang van de bodem-

temperatuur is nog tot op vrij grote diepte merkbaar. We kunnen hoogstens van quasi-constantheid spreken. Uitgaande van enkele numerieke waarden van deze quasi-constante grootheden kunnen limietwaarden voor de vorstdiepte gevonden worden. Deze blijken, uit praktisch oogpunt gezien, toch nog vrij groot uit te vallen. Als nevenresultaat blijkt uit bestudering van de jaarlijkse gang, dat zeker de bodemlaag van 25 cm tot 500 cm bij benadering als thermisch homogeen beschouwd kan worden; d.w.z. de waarnemingen zijn niet in strijd met de onderstelling, dat de bodemgrootheden  $\lambda$  en  $C$  onafhankelijk van tijd en diepte zijn.

Opmerking: Uit bovenstaande punten volgt, dat het nodig is een mathematisch model te vinden, dat een betere beschrijving van het vorstdiepte verloop geeft, dan de "Neumann" oplossing.

- 3) Het bekende feit, dat een sneeuwlaag sterk isolerend werkt, zal nog eens toegelicht worden aan de hand van waarnemingen te De Bilt. Op grond hiervan moet geconcludeerd worden dat het, voor de oplossing van het vorstindringingsprobleem, slechts van belang is vorstperioden zonder sneeuwdek te beschouwen (winter 1954).
- 4) Voor een homogeen medium is bij gegeven beginvoorwaarde en randvoorwaarde (uitgedrukt resp. in de functies  $f(z)$  en  $\varphi(t)$ ) de oplossing van de warmtegeleidingsdifferentiaalvergelijking bekend en in integraalvorm op te schrijven. Uitgaande van deze oplossing is het mogelijk gebleken een formule te vinden, die het verloop van de indringingsdiepte beter weergeeft, dan het simpele  $\sqrt{t}$ -verband. Helaas is deze oplossing niet geheel rond. Het volledige stel vergelijkingen, dat het gehele proces beschrijft, is niet langs elementaire mathematische weg geheel op te lossen. Slechts één vergelijking is opgelost en de eindformule bevat dan ook nog een constante, die bij volledige oplossing in de bodemconstanten enz. zou worden uitgedrukt, maar nu langs empirische weg moet worden bepaald.

Voor de toepassing van de formule zijn hoofdzakelijk de waarnemingen van 1954 gebruikt op grond van 3).

#### 1. Poging tot toetsing van het "Neumann" model

Zoals reeds in de inleiding werd opgemerkt is, als de vorstperiode niet te lang duurt, het verband tussen de vorstdiepte en de wortel uit

de absolute waarde van de som der vorsttemperaturen  $\sqrt{S}$ , ook wel de vorst-index (I) genoemd ( $I \equiv \sqrt{S}$ ), bij benadering lineair. In W.R. 56-003 zijn voor een aantal winters uit het materiaal van Castricum de vorstdiepten uiteengezet tegen de vorstindex. Het lineaire verband kan bij benadering worden geschreven als  $R = 9 I$ .

Nu moeten we wel bedenken, dat de temperatuursom hier de som is van dagelijkse temperaturen. Willen we dus de factor  $\frac{2\beta\sqrt{a_1}}{\sqrt{-T_0}}$  uit (1\*) uitgedrukt hebben in c.g.s. eenheden, dan moeten we nu de factor  $\sqrt{24 \times 3600} = 120\sqrt{6}$  toevoegen. Dus:

$$\frac{2\beta\sqrt{a_1}}{\sqrt{-T_0}} = \frac{9}{120\sqrt{6}}$$

In het geval van de winter 1954 kunnen we (volgens fig. 13 uit W.R. 56-003) voor  $T_0$  de waarde  $-7^\circ\text{C}$  nemen. Derhalve:

$$\beta\sqrt{a_1} = \frac{3\sqrt{7}}{80\sqrt{6}} = 0,04$$

Uit de literatuur (zie [2]) kennen we de waarden die  $a_1$  ongeveer kan aannemen n.l. variërende tussen 0,001 en 0,020, derhalve varieert  $\sqrt{a_1}$  tussen 0,03 en 0,14 en moet  $\beta$  ergens tussen 1,3 en 0,3 liggen.

Wij schrijven nu (0.2) als volgt:

$$\frac{e^{-\beta^2}}{\beta \operatorname{erf} \beta} + \frac{T_b}{T_0} \sqrt{\frac{\lambda_2 C_2}{\lambda_1 C_1}} \cdot \frac{e^{-a_1/a_2} \beta^2}{\beta \operatorname{erfc} \beta\sqrt{a_1/a_2}} = \frac{Ld\sqrt{\pi}}{-T_0 C_1} \quad (1.1)$$

De tweede term van het linker lid is negatief. Dus volgt uit (1.1):

$$\frac{Ld\sqrt{\pi}}{-T_0 C_1} < \frac{e^{-\beta^2}}{\beta \operatorname{erf} \beta}$$

of

$$d < \frac{-T_0 C_1}{L\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-\beta^2}}{\beta \operatorname{erf} \beta}$$

Uit de literatuur weten wij verder, dat  $C_1$  slechts weinig varieert n.l. tussen 0,25 en 0,4. Derhalve kunnen we schrijven:

$$d < \frac{2,8}{0,8 \cdot 1,77} \frac{e^{-\beta^2}}{\beta \operatorname{erf} \beta} (\%) = 2 \cdot \frac{e^{-\beta^2}}{\beta \operatorname{erf} \beta}$$

en, daar  $\beta > 0,3$  is  $d < 2 \cdot 9,3 \% \approx 19 \%$

Nu is het zo, dat de variatie van  $a_1$  o.a. afhangt van het vochtgehalte en wel is  $a_1$  kleiner naarmate  $d_1$  kleiner is. De waarde 0,020 als bovengrens, die tot  $\beta = 0,3$  als benedengrens voerde, is dus stellig te hoog. Bij hoogstens 18 % vochtgehalte kan  $a_1$  hoogstens 0,01 zijn; derhalve  $\sqrt{a_1} < 0,1$  en  $\beta > 0,4$ . Hieruit volgt dan weer  $d < 2 \cdot 5,0 \% = \underline{10 \%}$ . En zo zijn we in een vicieuze cirkel geraakt, waarbij we al spoedig een zo klein vochtgehalte als bovengrens krijgen, dat we zeker kunnen zeggen: dit kan niet met de werkelijkheid kloppen.

We moeten dus wel het vermoeden uitspreken, dat ook bij kleine waarden van  $t$  het "Neumann" model niet bruikbaar is om de indringing van de vorst in de grond te beschrijven.

## 2. De bodemtemperaturen op de diepten 3 en 5 m en de voortplanting van de jaarlijkse temperatuurgolf

### 2.1. Het materiaal

In [1] werd een poging gedaan om limietwaarden voor de vorstdiepte te berekenen met behulp van de volgende onderstellingen: de bodemtemperatuur aan het begin van de vorstperiode neemt lineair met de diepte toe:  $T = P \cdot z$ , of: op zekere diepte  $z_c$  is de bodemtemperatuur constant ( $T_c$ ) onafhankelijk van de tijd, of althans in eerste benadering als constant te beschouwen.

Ten einde voor  $z_c$  en  $T_c$  redelijke schattingen te verkrijgen zijn op een aantal plaatsen bodemtemperatuurmetingen uitgevoerd op grotere diepten dan de standaarddiepten, n.l. op 3 en 5 m. Als opstellingsplaatsen werden uitgekozen: het waarnemingsterrein van het K.N.M.I. te De Bilt en een drietal plaatsen in Gelderland, te weten Epe, Oene en De Reeven (bij Doetichem).

De opstelling te De Bilt bevindt zich in zandgrond onder een grasmat en met een hoge grondwaterstand (1 à  $1\frac{1}{2}$  m onder maaiveld). De metingen werden uiteraard verricht door personeel van de Afdeling



### Klimatologie van het K.N.M.I.

De opstelling te Epe bevindt zich even buiten het dorp in een terrein met naaldbos en heide (Renderklippen) op zandgrond met een zeer lage grondwaterstand (ca. 8 m).

In Oene zijn de instrumenten opgesteld nabij een boerderij dichtbij de IJssel in rivierklei met een vrij hoge grondwaterstand (40 - 120 cm).

De opstelling in De Reeven ten slotte bevindt zich in gemengde grond op het terrein van een opjaagstation van de Waterleiding Maatschappij Oost-Gelderland; grondwaterstand 1 à 1½ m.

De waarnemingen geschieden op deze drie plaatsen door personeel van de Waterleiding Maatschappij Gelderland, na instructie door K.N.M.I. personeel. De opstelling en de ijking van de instrumenten werden verzorgd door personeel van het K.N.M.I. De meetinstrumenten bestonden uit weerstandsthermometers (Degusa); de metingen werden uitgevoerd met een wheatstone-brug (fabrikaat Bleeker).

In Oene en Epe zijn de metingen vrij regelmatig uitgevoerd; in De Reeven slechts incidenteel. Bovendien bevinden zich te Oene en Epe opstellingen van gewone grondthermometers op standaarddiepten. De waarnemingen werden hiervan resp. verricht door de heren Bijsterbos (boswachter) en J. van As en verzameld door de Waterleiding Maatschappij Gelderland.

Naast deze door de Commissie Vorst van het K.I.W.A. georganiseerde metingen, zijn door het Rijkswegenbouwlaboratorium te Den Haag ook metingen op grote diepten (n.l. 3, 4 en 5 m) uitgevoerd in de tuin van het kantoorgebouw te Scheveningen. De resultaten van deze metingen zijn ons door Dr.Ir. Thoenes ter beschikking gesteld.

### 2.2. De jaarlijkse gang

We zullen voor de bewerking in het bijzonder de jaarlijkse gang in beschouwing nemen. Hiervoor is de "grondtoon" van de harmonische analyse berekend. Gemakshalve hebben wij voor de berekening de maand op 30 dagen gesteld en het jaar dus op 360 dagen. Er werden van de metingen tot 1 m gemiddelden berekend over 15 (eventueel 14 of 16) dagen. Deze gemiddelden werden geacht de temperatuur op de 8ste resp. 23ste van de maand voor te stellen. De berekening van de

"grondtoon" van de harmonische analyse kon hiermede volgens een bekend schema snel plaatsvinden; hierbij konden gelijktijdig ten overvloede de parameters van de 1ste harmonisch worden bepaald. Van de waarnemingen op de diepten 3 en 5 m konden alleen die van De Bilt op dezelfde wijze worden bewerkt. De waarnemingen van de drie stations in Gelderland zijn niet zo regelmatig verricht dat dezelfde weg gevolgd kon worden. Hier is rechtstreeks een aanpassing met een sinuskrumme met behulp van de methode der kleinste kwadraten uitgevoerd.

Het waarnemingstijdvak is voor De Bilt: maart 1957 - april 1959, en voor Epe en Oene: juli 1957 - juni 1959 voor 3 en 5 m en oktober 1957 - juni 1959 voor de metingen tot 1 m. Voor Scheveningen was het van februari 1957 - augustus 1958.

De berekening van de "grondtoon" is uitgevoerd met het materiaal van 1 jaar. Doordat de berekeningen voor de waarnemingen op 3 en 5 m in een veel vroeger stadium van het onderzoek werden uitgevoerd dan de overige, is niet steeds dezelfde periode van één jaar gebruikt. Bovendien speelde het ontbreken van waarnemingen een rol. De gebruikte perioden zijn de volgende:

De Bilt	(25 - 100 cm)	maart	1957 - februari	1958
De Bilt	(300 en 500 cm)	juli	1957 - juni	1958
Oene	(25 - 100 cm)	juni	1958 - mei	1959
Oene	(300 en 500 cm)	juli	1957 - juni	1958
Epe	(25 - 100 cm)	oktober	1957 - september	1958
Epe	(300 en 500 cm)	juli	1959 - juni	1958
Scheveningen		september	1957 - augustus	1958
De Reeve	(300 en 500 cm)	juni	1957 - juli	1958

De overige waarnemingen kunnen als controle gebruikt worden.

In de eerste plaats zal worden nagegaan in hoeverre de bodemlaag van 25 cm tot 500 cm thermisch homogeen is. Volgens de theorie der warmtegeleiding in een homogeen medium, waarbij de voortplanting van de warmtegolf in de richting van de z-as plaatsvindt, is n.l.:

$$\ln A_1/A_2 = \varphi_1 - \varphi_2 = \sqrt{\frac{\pi}{ap}} \cdot (z_2 - z_1) \quad (2.1)$$

Hierin zijn  $A_i$  en  $\varphi_i$  resp. de amplitudo en de phasehoek van de temperatuurgolf op de diepte  $z_i$ . Verder is  $a$  de warmte-uitwisselingscoëfficiënt en  $P$  de periode van de temperatuurgolf. De temperatuur op de tijd  $t$  en diepte  $z$  is immers voor te stellen door:

$$T(t, z_i) = \bar{T} + A_i \cos \left( \frac{2\pi}{P} t + \varphi_i \right) \quad (2.2)$$

met  $A_i = A_0 \exp - z_i \sqrt{\frac{\pi}{ap}}$  en  $\varphi_i = z_i \sqrt{\frac{\pi}{ap}} + \varphi_0$ .

In de figuren 2.1.1 en 2.1.2 zijn de resultaten van de berekeningen samengevat. In deze figuren zijn  $\ln A_i/A_{500}$  en  $\varphi_i - \varphi_{500}$  uitgezet tegen  $z_i$ . Het blijkt, dat in Oene  $\ln A_i/A_{500}$  en  $\varphi_i - \varphi_{500}$  inderdaad vrijwel aan elkaar gelijk zijn. Bovendien is daar het verband met  $z_i$  zeer goed door een rechte door het punt (0,50) voor te stellen. De waarden van de grootheden te Epe stemmen iets minder fraai overeen (in het bijzonder wijken  $\ln A_{300}/A_{500}$  en  $\varphi_{300} - \varphi_{500}$  nogal af). Toch is ook hier een redelijk lineair verband aanwezig. Bij De Bilt vinden we vooral bij  $z \leq 100$  vrij groot systematisch verschil tussen  $\ln A_i/A_{500}$  en  $\varphi_i - \varphi_{500}$ . Ook te Scheveningen is de overeenstemming niet groot. De vraag is echter, of de verschillen die we nog vinden werkelijk iets te betekenen hebben of niet. We nemen daarom aan, dat de verschillen niet "reëel" zijn en dat dus het verband lineair is. Hiervan uitgaande zullen we voor iedere diepte een "overall" gladgestreken jaarlijkse gang bepalen en de waarnemingen hiermede vergelijken.

We hebben door de punten op het oog de beste rechte getrokken. Voor de helling ( $p$ ) van deze rechte en de daaruit via  $p = \sqrt{\frac{\pi}{ap}}$  berekende waarde van  $a$  vinden we achtereenvolgens:

Tabel 2.1

	$\sqrt{\frac{\pi}{ap}}$	$a$
Epe	0,0027	0,013
De Bilt	0,0032	0,010
Oene	0,0037	0,007
Scheveningen	0,0037	0,007
De Reeve	0,0039	0,007

De waarden van  $a$  hebben wel de goede grootte-orde. Zie b.v. tabel 2.2 (die overgenomen is uit [2]).

Tabel 2.2

Temperatuurvereffeningscoëfficiënt $a$ [ $\text{cm}^2 \text{sec}^{-1}$ ]	
graniet	0,021
ijs	0,012
nat zand	0,01
droog zand	0,0013
humus	0,005
natte moerasgrond	0,003
droge moerasgrond	0,0015
water (onbewogen)	0,0015
oude sneeuw	0,0032
verse sneeuw	0,0067

Van de rechten die aldus bepaald zijn worden nu nieuwe waarden van  $\ln A_i/A_{500} = \varphi_i - \varphi_{500}$  afgelezen. Hiermede kunnen, uitgaande van  $A_{500}$  en  $\varphi_{500}$  zoals die uit de berekening volgen, nieuwe waarden  $A_i$  en  $\varphi_i$  bepaald worden. Tabel 2.3 geeft de resultaten.

Tabel 2.3

	Oene		Epe		Scheveningen		De Bilt	
	$\varphi_i$	$A_i$	$\varphi_i$	$A_i$	$\varphi_i$	$A_i$	$\varphi_i$	$A_i$
Opp.	67° 7'	7,62	59° 40'	7,24	71° 20'	9,88	-	-
25	61° 20'	6,89	56° 3'	6,80	-	-	55° 50'	7,17
50	56° 10'	6,30	52° 8'	6,35	-	-	51° 20'	6,62
75	51° 0'	5,76	48° 10'	5,92	-	-	46° 40'	6,11
100	45° 50'	3,63	44° 10'	5,53	50° 30'	6,89	42° 10'	5,64
300	2° 50'	2,48	12° 40'	3,19	8° 10'	3,29	6° 10'	3,01
400	-	-	-	-	- 3° 30'	1,97	-	-
500	-39° 12'	1,20	-18° 52'	1,84	-35° 20'	1,35	-29° 45'	1,61

Om de jaarlijkse gang ten slotte volledig te kunnen bepalen is nog de gemiddelde jaartemperatuur nodig. In tabel 2.4 zijn voor de vier stations en de verschillende diepten jaargemiddelden aangegeven. De periode van één jaar, waarover gemiddeld is, is niet voor alle stations dezelfde, in verband met het ontbreken van waarnemingen; wel is deze periode voor ieder der stations voor alle diepten dezelfde.

Tabel 2.4

	0	25	50	75	100	300	400	500
Epe	8,93	8,79	8,93	8,96	8,98	8,57	-	9,04
Oene	9,25	9,28	10,13	9,91	10,08	10,10	-	10,16
Scheveningen	11,64	-	-	-	11,20	10,86	12,36	11,62
De Bilt	-	10,16	10,34	10,29	10,35	10,12	-	10,28

De vraag is nu: kunnen we voor alle diepten op één station éénzelfde jaargemiddelde aannemen?

Een systematische afwijking die voor alle stations geldt, zou moeten blijken uit tabel 2.3. De getallen in deze tabel wijzen echter niet op een systematische variatie. In Epe is de temperatuur op 300 cm opvallend laag; in Oene zijn dit daarentegen de op 0 en 25 cm gemeten waarden. In Scheveningen is de waarde op 300 cm erg laag, die op 400 cm daarentegen zeer hoog. In De Bilt zijn de onderlinge verschillen zeer gering. Dat in Scheveningen vrij grote onderlinge verschillen optreden, behoeft ons niet te verbazen. Hier wordt immers gemeten in een stad, waar door de gebouwen een zeer onregelmatige verwarming van de grond plaatsvindt.

We zullen nu een constante jaartemperatuur aannemen, behalve voor Scheveningen. We gebruiken:

Tabel 2.5

Epe	9,0 °C
Oene	10,1 °C
De Bilt	10,3 °C

Met de gegevens van de tabellen 2.3 en 2.5 (2.4 voor Scheveningen) is nu de jaarlijkse gang volgens (2,2) berekend voor iedere diepte en ieder station. In de figuren 2.2.1 ... 2.2.7; 2.3.1 ... 2.3.7; 2.4.1 ... 2.4.6; 2.5.1 ... 2.5.5 zijn de resultaten weergegeven. Tevens zijn in deze figuren de waarnemingen genoteerd. Van Epe, Oene en De Bilt zijn voor de diepten van 300 en 500 cm de afzonderlijke meetwaarden aangegeven, voor de overige diepten de gemiddelden per 15 dagen. Te Scheveningen bestaan de waarnemingen uit 6-daagse gemiddelden per week. ('s zondags geen waarneming).

Over het algemeen is de overeenstemming tussen waarnemingen en kromme heel bevredigend. Direct opvallend grote afwijkingen zijn de volgende:

De waarnemingen op 300 en 500 cm te Epe (fig. 2.2.1 en 2.2.2) in augustus - november 1958. Vermoedelijk hangen deze afwijkingen samen met de herijking van de meetelementen op 11 juni 1958. Voor deze herijking moesten de buizen met de meetelementen uit de grond worden gehaald. Na de ijking werden de buizen weer in de grond gebracht, wat zonder moeite gelukte. Blijkbaar is echter het contact van het meetelement met de grond niet direct weer volledig hersteld. Dit is wel begrijpelijk en zal stellig door het feit dat de elementen zich hier nog vrij ver boven het grondwater bevinden worden veroorzaakt. In Oene zijn n.l. op 12 juni 1958 de meetelementen herijkt en hier zien we in het geheel geen afwijking in de maanden erna. De meetelementen bevinden zich hier in het grondwater en de grond is hier op deze diepten stellig zo slap, dat het contact van het element met de grond vrijwel direct is hersteld.

Vervolgens blijken vrijwel overal de temperaturen in voorjaar en zomer 1959 hoger te zijn dan de geëxtrapoleerde jaarlijkse gang aangeeft. Dit is ook te verwachten daar zoals bekend ook de luchttemperatuur in die tijd gemiddeld ca.  $1^{\circ}$  boven normaal was. De meetpunten Oene 0 en 25 cm wijken in dit opzicht af. We hebben echter reeds in tabel 2.3 gezien, dat de jaargemiddelden hier ook afwijken van de overige. We zien trouwens in fig. 2.3.6 en 2.3.7 wel, dat tot omstreeks februari 1959 de waarnemingen overwegend beneden de jaarlijkse gangkromme liggen. We krijgen dus de indruk, dat voor het geheel de waarden te Oene te laag zijn. Is hier misschien een fout in de ijking in het spel?

### 2.3. Statistische toetsing

We willen thans iets meer in statistische zin nagaan of de hypothese, dat de grond thermisch homogeen is, acceptabel is. Nu zijn volgens fig. 2.1 de grootste verschillen tussen  $\ln A_i/A_{500}$  en  $\varphi_i - \varphi_{500}$  in De Bilt voorgekomen. Als de verschillen hier niet significant zijn, zijn de verschillen in Oene en Epe zeker niet significant (Scheveningen laten we even buiten beschouwing).

Verder is het zo, dat de afwijkingen van de jaarlijkse gang van de verschillende diepten onderling sterk afhankelijk zijn. We volstaan daarom met één geval van De Bilt in finesses te beschouwen, n.l. dat der waarnemingen op 25 cm diepte.

In fig. 2.4.6 is naast de "gladgestreken" jaarlijkse gang de cosinus kromme getekend die berust op de waarden van  $\bar{T}$ ,  $A$  en  $\varphi$  die volgen uit de harmonische analyse van de waarnemingen van maart 1957 - februari 1958. In fig. 2.6 hebben we de verschillen  $V_1$  resp.  $V_2$  van beide krommen met de waarnemingen uitgezet. Beschouwen wij nu eerst het gedeelte tot en met februari 1958. Het spreekt vanzelf, dat in dit gedeelte de  $V_1$ -waarden sterker van de 0-waarde afwijken dan de  $V_2$ -waarden. De vraag is echter of de  $V_1$ -waarden zo zeer afwijken, dat we moeten aannemen dat er van een niet toevallig effect sprake is.

Statistisch pakken we dit probleem aan met de "run"-toets. De nulhypothese die we toetsen luidt: De opeenvolging van positieve en negatieve  $V$ -waarden is volkomen toevallig. We beschouwen dus alleen de tekens en noemen een reeks opeenvolgende gelijke tekens een "run". Als we de lengte van de runs bepalen en deze van een + resp. - als index voorzien, al naar we met een run van + resp. - tekens te maken hebben, dan is de tekenreeks van de  $V_1$ -waarden aan te geven door  $9_+$ ,  $1_-$ ,  $1_+$ ,  $9_-$ ,  $4_+$ . Het totaal aantal runs ( $r$ ) is dus 5.

De kritieke waarden van  $r$ , als de nulhypothese geldt, zijn bekend. Voor deze kritieke waarden bestaan tabellen voor het geval het aantal positieve waarden ( $n_1$ ) en het aantal negatieve waarden ( $n_2$ ) kleiner dan 20 is (zie b.v. [2]). Voor grotere aantallen moet een benadering met de normale verdeling worden gebruikt. In ons geval is  $n_1 = 14$  en  $n_2 = 10$ . De eenzijdige kritieke waarde met 5 % drempel blijkt 8 te zijn, m.a.w.: er is 5 % kans dat louter toevallig het aantal runs kleiner dan of gelijk aan 8 is. De gevonden waarde van

r is 5. Dit is kleiner dan 8 en derhalve moeten we de nulhypothese verwerpen. Voor het tijdvak maart 1957 - februari 1958 blijkt voor De Bilt de onderstelling dat de bodem in thermisch opzicht als homogeen is te beschouwen dus niet juist te zijn. Als we echter de waarnemingen vanaf maart beschouwen, dan blijken van  $V_1$  resp.  $V_2$  de runlengtes de volgende waarden te hebben.

	r	$n_1$	$n_2$	N
$V_1$ : 4 <sub>-</sub> , 3 <sub>+</sub> , 1 <sub>-</sub> , 1 <sub>+</sub> , 2 <sub>-</sub> , 5 <sub>+</sub> , 3 <sub>-</sub> , 3 <sub>+</sub> , 2 <sub>-</sub> , 3 <sub>+</sub>	10	15	12	27
$V_2$ : 6 <sub>-</sub> , 1 <sub>+</sub> , 1 <sub>-</sub> , 1 <sub>+</sub> , 1 <sub>-</sub> , 6 <sub>+</sub> , 3 <sub>-</sub> , 1 <sub>+</sub> , 1 <sub>-</sub> , 1 <sub>+</sub> , 2 <sub>-</sub> , 1 <sub>+</sub> , 1 <sub>-</sub> , 1 <sub>+</sub>	14	12	15	27

In beide is de 5 % eenzijdige kritieke waarde 9. Beide r-waarden zijn groter dan 9; dus er is hier geen reden de nulhypothese te verwerpen. De waarnemingen kunnen dus geacht worden geheel toevallig zowel om de geëxtrapoleerd "gladgestreken" jaarlijkse gang, als om de aan maart 1957 - februari 1958 aangepaste jaarlijkse gang te spreiden. Berekenen we nu voor maart 1958 - april 1959 de spreiding van  $V_1$  resp.  $V_2$  om de nul, dan vinden we  $S_{V_1} = 1,07$  en  $S_{V_2} = 1,45$ . Het blijkt dat  $S_{V_1}$  kleiner is dan  $S_{V_2}$ ; het verschil is wel niet erg groot en vermoedelijk niet significant (dit kan niet zonder meer direct getoetst worden wegens de afhankelijkheid tussen  $V_1$  en  $V_2$ ). De conclusie die we kunnen trekken luidt nu:

Er is geen reden te onderstellen, dat de gladgestreken jaarlijkse gang minder goed voor extrapolatie te gebruiken is dan de direct aangepaste.

Tot slot van de beschouwingen voor de jaarlijkse gang geven we in de fig. 2.7, 2.8, 2.9 en 2.10 nog een overzicht van de gladgestreken jaarlijkse gang.

De fig. 2.7 en 2.8 geven de jaarlijkse gang voor Epe en Oene voor alle diepten en de fig. 2.9 en 2.10 geven de jaarlijkse gang voor 300 en 500 cm voor de stations De Bilt, Epe, Oene en De Reeven. (De waarnemingen van De Reeven zijn alleen voor deze figuren gebruikt).

#### 2.4. De limietwaarde van de vorstdiepte

We keren nu nog even terug tot het uitgangspunt, n.l. de schatting van een limietwaarde van de vorstdiepte met de formule



$$(5) \text{ uit [1]: } X_m = \frac{-T_o \cdot z_c}{\lambda_2/\lambda_1 \cdot T_c - T_o}$$

Strikt constante waarden voor  $z_c$  en  $T_c$  zijn in theorie nooit te vinden. Nemen we echter b.v.  $R_i = 0,1^\circ\text{C}$  dan hebben we een zo kleine schommeling dat we wel van een constante bodemtemperatuur kunnen spreken. Uit formule (2.2) zijn met de gegevens van tabellen 2.1 en 2.2 nu de waarden van  $z_c$  en  $T_c$  te bepalen. We vinden voor de verschillende stations de resultaten vermeld in tabel 2.6 waarbij  $T_o = -7^\circ\text{C}$  gekozen is, terwijl aan  $\lambda_2/\lambda_1$  de drie waarden  $\frac{1}{2}$ , 1 en 2 zijn gegeven. Deze waarden steunen op fig. 3 in [3].

Tabel 2.6

	$z_c$ (cm)	$T_c$	$X_m$		
			$\lambda_2/\lambda_1 = \frac{1}{2}$	$\lambda_2/\lambda_1 = 1$	$\lambda_2/\lambda_1 = 2$
Oene	1170	10,1	682	482	303
Epe	1570	9,0	956	687	440
De Bilt	1350	10,3	775	546	342
De Reeve	1040	9,2	628	400	287

Het is duidelijk dat deze uitkomsten volkomen onbruikbaar zijn voor de praktijk. Deze limietwaarden zouden stellig slechts in het, in ons klimaat, fictieve geval van een vele jaren durende vorstperiode benaderd worden.

We kunnen i.p.v. voorgaande constante waarden van  $z_c$  en  $T_c$  ook quasi-constante waarden nemen. Uit fig. 2.9 zien we dat op 3 m het minimum omstreeks maart optreedt. In het algemeen loopt een eventuele vorstperiode in deze maand weer ten einde. Daarom kunnen we deze minimumwaarden (iets naar beneden afgerond) wel als  $T_c$  gebruiken. We krijgen dan de volgende resultaten:

Tabel 2.7

	$z_c$	$T_c$	$R_\infty$		
			$\lambda_2/\lambda_1 = \frac{1}{2}$	1	2
Oene	300	7,5	165	148	95
Epe	300	5,5	215	168	116
De Bilt	300	7,0	200	150	100
De Reeven	300	7,0	200	150	100

Deze uitkomsten vertonen heel plausibele waarden. Ze zijn echter nog vrij sterk afhankelijk van de verhouding  $\lambda_2/\lambda_1$ , die we niet voldoende kennen. Wel is het vermoedelijk zo, dat aan het begin van een vorstperiode het vochtgehalte in de bodem vrij weinig varieert met de diepte zodat  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  niet veel zullen verschillen en de verhouding dichtbij 1 ligt.

Aangezien het ten slotte gelukt is (zie 4) een model te vinden waarmee de indringingsdiepte van de vorst als functie van de tijd te bepalen is, met als resultaat enige verbetering t.o.v. het eenvoudige  $\sqrt{t}$ -verband, zullen we de limietberekeningen tot het bovenstaande beperken.

### 3. De isolerende werking van een sneeuwdek

Het is een vrijwel algemeen bekend verschijnsel, dat een flink sneeuwdek het beste "middel" is om bevriezing van bollen, planten enz. die zich onder of vlakbij de aardoppervlakte bevinden te verhinderen. De warmtegeleidingscoëfficiënt van sneeuw (vooral verse) is bijzonder klein. Voor het vorstdiepte probleem is dit feit vanzelfsprekend ook zeer belangrijk.

Ter illustratie wordt in fig. 3.1 het resultaat gegeven van een serie metingen in het sneeuwdek van 23 januari - 25 januari 1958 te De Bilt. De metingen werden verricht met niet afgeschermd thermokoppels. De meetpunten bevonden zich aan de oppervlakte van de aarde onder het sneeuwdek (grasmat), halverwege het sneeuwdek en vlak boven het sneeuwdek. Er waren vier opstellingen in een vierkant met zijden van ca. 1 m. Bij één van de vier opstellingen was het derde meetpunt niet vlak boven

het sneeuwdek, maar juist even beneden de oppervlakte van het sneeuwdek. De resultaten van de drie overige opstellingen zijn gemiddelde. In fig. 3.1 zijn deze gemiddelden weergegeven. De dikte van het sneeuwdek was in het begin 18 cm. Aan het eind van het in fig. 3.1 aangegeven tijdvak was deze ca. 15 cm.

We zien nu in fig. 3.1, dat aanvankelijk de temperatuur aan de aardoppervlakte en zelfs de temperatuur halverwege de sneeuwlaag even boven nul is, terwijl het aan de oppervlakte en in de lucht duidelijk vriest. Pas toen het in de loop van 24 januari flink begon te vriezen, kwam de temperatuur halverwege het sneeuwdek beneden nul. Aan de aardoppervlakte vond dit pas in de morgen van de 25ste plaats. Dat de temperatuur aan de oppervlakte zelfs boven nul kan blijven, wordt stellig mede veroorzaakt doordat een belangrijk deel van de zonnestraling (ca. 20 % zie [2] pg. 167) door de sneeuwlaag heen dringt en aan de aardoppervlakte geabsorbeerd wordt.

Voor het vorstdiepte-probleem, zoals dit door de waterleidingbedrijven, in verband met de diepte waarop de buizen gelegd moeten worden, gesteld is, is op grond van het bovenstaande alleen een vorstperiode zonder sneeuwdek van belang. We zien dit ook reeds in de waarnemingen van Gastricum, zoals die zijn weergegeven in de fig. 10 - 13 in [1].

De sneeuwrijke winter van 1954 gaf in een vorstperiode van slechts twee weken een even grote vorstdiepte als de langdurige winter van 1947. Het is wel uit fig. 10 van [1] duidelijk, dat een aanhouden van de vorst in 1954 tot aanzienlijk grotere vorstdiepte aanleiding zou hebben gegeven. Het verschijnsel sneeuwrijke vorstperiode is echter zeldzaam. Helaas beschikt het K.N.M.I. niet over voldoende sneeuwgegevens van vroegere jaren om een betrouwbare statistiek hierover op te zetten.

Voor de oplossing van het vorstdiepte-probleem moeten we genoegen nemen met een veronderstelling. Deze zou als volgt kunnen luiden:

"Een sneeuwrijke vorstperiode van vier weken met een gemiddelde temperatuur als in de vorstperiode van 1954 is een dermate zeldzaam verschijnsel, dat de vorstdiepte die dan bereikt wordt als extreme waarde aan de veilige kant is als basis voor de diepte waarop de waterleidingbuizen moeten worden gelegd."

4. Een nieuw model voor de vorstdiepte-tijd-functie

4.1. Het algemene stelsel vergelijkingen voor homogene bodem

We gaan uit van de algemene oplossing in integraal vorm van het warmtegeleidingsprobleem voor een homogeen medium bij gegeven begin- en randvoorwaarde. Deze oplossing is b.v. te vinden in [3]:

Gegeven:

warmtegeleidingsvergelijking  $\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} \quad \left( \begin{matrix} z \geq 0 \\ t \geq 0 \end{matrix} \right) \quad (4.1.1)$

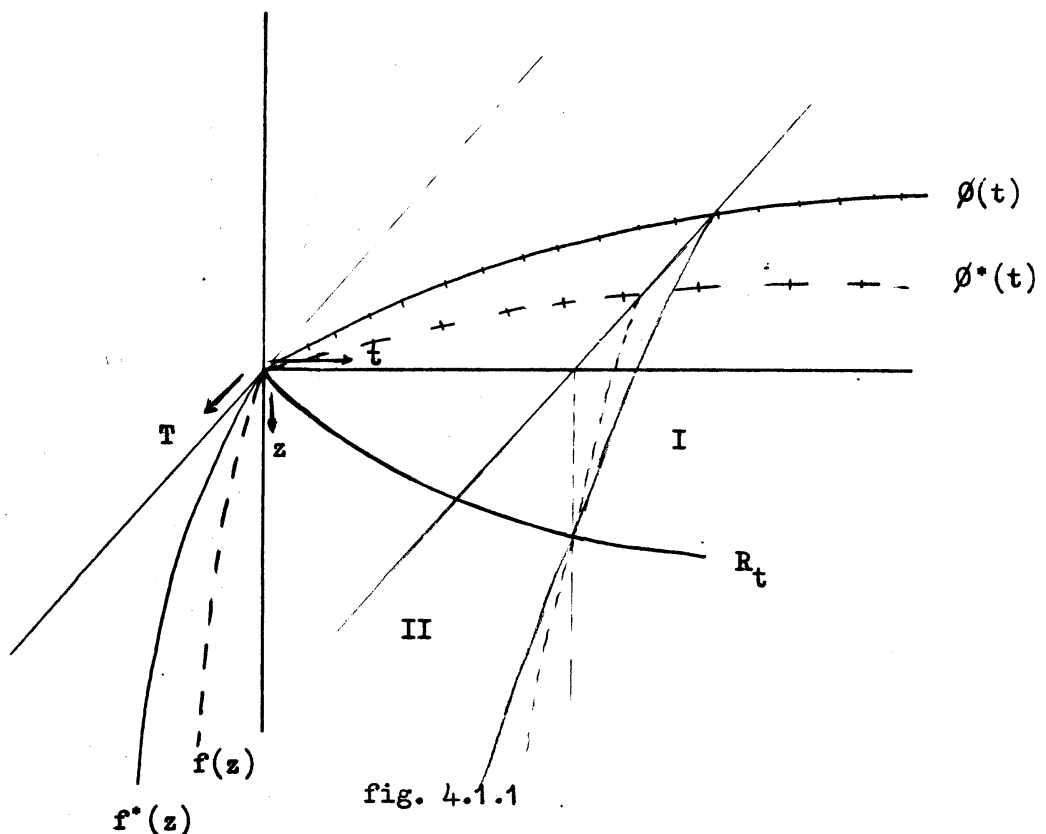
randvoorwaarde  $T(0,t) = \vartheta(t) \quad (4.1.2)$

beginvoorwaarde  $T(z,0) = f(z) \quad (4.1.3)$

Oplossing:

$$T(z,t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} \int_0^\infty f(\zeta) \cdot \left\{ \exp\left(-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\right) - \exp\left(-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\right) \right\} d\zeta + \frac{z}{2\sqrt{a\pi}} \int_0^t \vartheta(\tau) \cdot (t-\tau)^{-3/2} \exp\left(-\frac{z^2}{4a(t-\tau)}\right) d\tau \quad (4.1.4)$$

Het vorstindringingsprobleem laat zich hiermee nu in principe als volgt behandelen:



In bijgaande tekening (fig. 4.1.1) is in het  $t, z$ -vlak de vorstindringingsdiepte door  $R_t$  aangegeven.

$z < R_t$  vormt het gebied I: de bevroren grond. Hiervoor geven we de optredende grootheden in de symbolen met een index 1 aan, dus  $T_1(z, t)$  en de bodemconstanten  $a_1$ ,  $\lambda_1$  en  $C_1$ .

Het gebied II wordt gevormd door  $z > R_t$  met index 2 voor de grootheden, dus  $T_2(z, t)$  en  $a_2$ ,  $\lambda_2$  en  $C_2$ .

Het gebied I wordt nu uitgebreid met een gebied  $I^1$  voor  $z > R_t$  waar de constanten dezelfde waarde hebben als in I. In het gehele gebied  $I + I^1$  nemen we als randvoorwaarde:

$$T_1(0, t) = \vartheta(t) \quad (4.1.5)$$

Dit is de functie die het temperatuurverloop aan de oppervlakte voorstelt. Ze is dus bekend.

Als beginvoorwaarde nemen we een onbekende functie:

$$T_1(z, 0) = f^*(z) \quad (4.1.6)$$

In het gehele gebied  $I + I^1$  geldt de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial T_1(z, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_1(z, t)}{\partial z^2} \quad (4.1.7)$$

De oplossing is dus volgens (4.1.4):

$$T_1(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{a_1\pi t}} \int_0^\infty f^*(\zeta) \cdot \left\{ \exp\left(-\frac{(z-\zeta)^2}{4a_1t}\right) - \exp\left(-\frac{(z+\zeta)^2}{4a_1t}\right) \right\} d\zeta + \frac{z}{2\sqrt{a_1\pi}} \int_0^t \vartheta(\tau) \cdot (t-\tau)^{-3/2} \exp\left(-\frac{z^2}{4a_1(t-\tau)}\right) d\tau \quad (4.1.8)$$

Evenzo breiden we het gebied II uit met een gebied  $II^1$  voor  $z < R_t$  waar de constanten dezelfde waarde hebben als in II. In het totale gebied  $II + II^1$  nemen we als randvoorwaarde de onbekende functie:

$$T_2(0, t) = \vartheta^*(t) \quad (4.1.9)$$

en als beginvoorwaarde:

$$T_2(z, 0) = f(z) \quad (4.1.10)$$

Deze laatste functie is het temperatuurverloop met de diepte aan het begin van de vorstperiode. Deze kunnen we als bekend onderstellen.

In II + II<sup>1</sup> geldt als differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial T_2(z, t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2(z, t)}{\partial z^2} \quad (4.1.11)$$

met als oplossing:

$$T_2(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{a_2\pi t}} \int_0^\infty f(\zeta) \cdot \left\{ \exp\left(-\frac{(z-\zeta)^2}{4a_2t}\right) - \exp\left(-\frac{(z+\zeta)^2}{4a_2t}\right) \right\} d\zeta \\ + \frac{z}{2\sqrt{a_2\pi}} \int_0^t \phi^*(\tau) \cdot (t-\tau)^{-3/2} \exp\left(-\frac{z^2}{4a_2(t-\tau)}\right) d\tau \quad (4.1.12)$$

Het vorstindringingsprobleem is nu bepaald door de z.g. vrije grensvoorwaarden (zie ook [1] p. 10):

$$T_1(R_t, t) = T_2(R_t, t) = 0 \quad (4.1.13)$$

en

$$\lambda_1 \left( \frac{\partial T_1}{\partial z} \right)_{z=R_t} - \lambda_2 \left( \frac{\partial T_2}{\partial z} \right)_{z=R_t} = Ld \frac{\partial R_t}{\partial t} \quad (4.1.14)$$

De eerste voorwaarde volgt direct uit de definitie van vorstgrens. De vorstgrens is immers de diepte waar de temperatuur nul geworden is. De tweede voorwaarde hangt samen met de verplaatsing van de vorstgrens. Als de vorstdiepte toeneemt zal het water in de bodem aan de vorstgrens bevrozen; hierbij komt warmte vrij. Deze warmte stroomt naar boven weg en moet gelijk zijn aan het verschil in warmtestromen aan beneden- en bovenkant van de vorstgrens die het gevolg zijn van de aanwezige temperatuurgradiënten.

De oplossing van het gehele probleem bestaat dus daarin dat

we trachten  $f^*$  en  $\phi^*$  zo te bepalen, dat aan (4.1.13) voldaan is. Hierna zou  $R_t$  uit (4.1.14) opgelost kunnen worden.

Meetkundig gezien (zie tekening) is het zo dat  $T_1(z,t)$  en  $T_2(z,t)$  beide oppervlakken in de  $T,z,t$  ruimte vormen. Deze vlakken snijden elkaar en bovendien het  $t,z$ -vlak. In het algemeen zijn er dus drie snijlijnen.  $f^*$  en  $\phi^*$  moeten zo bepaald worden dat deze snijlijnen samenvallen.

We kunnen het ook zo zeggen:

(4.1.13) en (4.1.14) vormen drie vergelijkingen met drie onbekende functies,  $f^*$ ,  $\phi^*$  en  $R_t$ , die in principe uit deze vergelijkingen kunnen worden opgelost. Aangezien  $f^*$  en  $\phi^*$  op zich zelf ons niet interesseren, kunnen we ook zeggen: elimineer  $f^*$  en  $\phi^*$  uit (4.1.13) en los ten slotte, na substitutie  $R_t$  uit (4.1.14) op.

We schrijven (4.1.13) volledig uit:

$$\frac{1}{2\sqrt{a_1\pi t}} \int_0^\infty f^*(\zeta) \left\{ \exp\left(-\frac{(R_t - \zeta)^2}{4a_1t}\right) - \exp\left(-\frac{(R_t + \zeta)^2}{4a_1t}\right) \right\} d\zeta + \frac{R_t}{2\sqrt{a_1\pi}} \int_0^t \phi(\tau) \cdot (t - \tau)^{-3/2} \exp\left(-\frac{R_t^2}{4a_1(t - \tau)}\right) d\tau = 0 \quad (4.1.15)$$

en

$$\frac{1}{2\sqrt{a_2\pi t}} \int_0^\infty f(\zeta) \left\{ \exp\left(-\frac{(R_t - \zeta)^2}{4a_2t}\right) - \exp\left(-\frac{(R_t + \zeta)^2}{4a_2t}\right) \right\} d\zeta + \frac{R_t}{2\sqrt{a_2\pi}} \int_0^t \phi^*(\tau) \cdot (t - \tau)^{-3/2} \exp\left(-\frac{R_t^2}{4a_2(t - \tau)}\right) d\tau = 0 \quad (4.1.16)$$

Verder is:

$$\frac{\partial T_1(z,t)}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{a_1\pi t}} \int_0^t f^*(\zeta) \cdot \left\{ -\frac{z - \zeta}{2a_1t} \exp\left(-\frac{(z - \zeta)^2}{4a_1t}\right) + \frac{z + \zeta}{2a_1t} \exp\left(-\frac{(z + \zeta)^2}{4a_1t}\right) \right\} d\zeta + \frac{1}{2\sqrt{a_1\pi t}} \int_0^t \phi(\tau) \cdot (t - \tau)^{-3/2} \exp\left(-\frac{z^2}{4a_1(t - \tau)}\right) d\tau - \frac{z^2}{4a_1\sqrt{a_1\pi}} \int_0^t \phi(\tau) \cdot (t - \tau)^{-5/2} \exp\left(-\frac{z^2}{4a_1(t - \tau)}\right) d\tau \quad (4.1.17)$$

Evenzo is  $\frac{\partial T_2(z,t)}{z\partial}$  uit te werken, waarna substitutie in

(4.1.14) een integro-differentiaal vergelijking voor  $R_t$  oplevert.

Helaas is het niet mogelijk  $R_t$  expliciet uit het stelsel vergelijkingen op te lossen. De moeilijkheid is vooral gelegen in het feit, dat in de vergelijkingen (4.1.15) (een z.g. integraal vergelijking van de eerste soort) de onbekende functie  $R_t$  in de kern voorkomt, dat is het gedeelte onder het integraalteken zonder de op te lossen functies  $f^*$  resp.  $\phi^*$ .

#### 4.2. Een onvolledige benaderende oplossing

Het verloop der vorstgrens bepalen uit gegeven waarden van de bodemconstanten en de begin- en randvoorwaarden is helaas niet mogelijk.

Een methode, die toch een mogelijkheid biedt om het verloop van de vorstdiepte te beschrijven, is echter de volgende. Men kan het theoretisch verloop der vorstdiepte weergeven met behulp van een parameter, die op onbekende wijze met de waarden van de bodemconstanten samenhangt. Aanpassing van dit verloop aan de waarnemingsresultaten levert ons dan een waarde van deze parameter van het beschouwde geval.

We zullen in dit verband alleen de vergelijking (4.1.15) oplossen en wel nadat we voor  $\phi(\tau)$  en  $f^*(\zeta)$  functies hebben gevonden die integratie mogelijk maken.

We stellen daartoe

$$\phi(t) = \frac{T_0}{\theta} \{t H(t) - (t - \theta) H(t - \theta)\} \quad (4.2.1)$$

Hierin is  $H(t)$  de Heaviside-functie gedefinieerd door:

$$H(t) \begin{cases} = 0 & \text{voor } t < 0 \\ = 1 & \text{voor } t \geq 0 \end{cases}$$

Deze functie  $\phi(t)$  blijkt in het algemeen geschikt om het temperatuursverloop aan de oppervlakte tijdens een vorstperiode te beschrijven, uiteraard afgezien van de dagelijkse schommeling. Deze interesseert ons echter toch niet in dit probleem.

De functie  $\phi(t)$  stelt een lineaire "afname" van de tempera-



tuur van 0 tot  $T_0$  voor, van het tijdstip 0 tot het tijdstip  $\theta$ . Vanaf het tijdstip  $\theta$  blijft de temperatuur constant gelijk aan  $T_0$ .

$$\text{Verder stellen we } f^*(z) = q + pz \quad (4.2.2)$$

Dit is vanzelfsprekend een slag in de lucht. We weten niet hoe de functie  $f^*(z)$  er moet uitzien als  $f(z)$  en  $\vartheta(t)$  gegeven zijn. Zodra immers  $f(z)$  en  $\vartheta(t)$  gegeven zijn liggen  $f^*(z)$  en  $\vartheta^*(t)$  vast. Nu we echter alleen (4.1.15) zullen oplossen en de vorm van  $f(z)$  buiten beschouwing blijft, kunnen we voor  $f^*(z)$  een keuze doen. Hierdoor liggen omgekeerd  $f(z)$  en  $\vartheta^*(t)$  vast. Of de functie  $f(z)$  het verloop van de bodemtemperatuur met de diepte in het begin redelijk weergeeft, valt niet te zeggen. Het is dan ook niet te verwachten, dat deze meer dan een redelijke benadering is.

De enige rechtvaardiging voor de keuze (4.2.2) zal achteraf blijken te bestaan in een bevredigende aanpassingsmogelijkheid van de theoretische functie  $R_t$  aan de waarnemingen.

De oplossing van (4.1.15) gaat nu als volgt:

$$\int_0^{\infty} f^*(\zeta) \left\{ \exp - \frac{(R_t - \zeta)^2}{4 a_1 t} - \exp - \frac{(R_t + \zeta)^2}{4 a_1 t} \right\} d\zeta =$$

$$p \int_0^{\infty} \zeta \exp - \frac{(R_t - \zeta)^2}{4 a_1 t} d\zeta - \int_0^{\infty} \zeta \exp - \frac{(R_t + \zeta)^2}{4 a_1 t} d\zeta + q \int_0^{\infty} \exp - \frac{(R_t - \zeta)^2}{4 a_1 t} d\zeta - q \int_0^{\infty} \exp - \frac{(R_t + \zeta)^2}{4 a_1 t} d\zeta$$

In de eerste en derde integraal wordt gesubstitueerd:

$$\zeta = R_t - 2\xi\sqrt{a_1 t} \text{ en dus } d\zeta = -2\sqrt{a_1 t} d\xi$$

en in de tweede en vierde integraal:

$$\zeta = -R_t + 2\xi\sqrt{a_1 t} \text{ en } d\zeta = 2\sqrt{a_1 t} d\xi$$

Zo ontstaat:

$$-2\sqrt{a_1 t} \left[ p \left\{ \int_{\frac{R_t}{2\sqrt{a_1 t}}}^{\infty} (R_t - 2\xi\sqrt{a_1 t}) \exp - \xi^2 d\xi + \int_{\frac{R_t}{2\sqrt{a_1 t}}}^{\infty} (-R_t + 2\xi\sqrt{a_1 t}) \exp - \xi^2 d\xi \right\} + q \left\{ \int_{\frac{R_t}{2\sqrt{a_1 t}}}^{\infty} \exp - \xi^2 d\xi + \int_{\frac{R_t}{2\sqrt{a_1 t}}}^{\infty} \exp - \xi^2 d\xi \right\} \right] =$$

$$2p R_t \sqrt{a_1 \pi t} + 2q \sqrt{a_1 \pi t} \cdot \operatorname{erf} \frac{R_t}{2\sqrt{a_1 t}}$$

Hierin is erf  $x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp -\zeta^2 d\zeta$  . (de z.g. foutenintegraal of foutenfunctie).

Het eerste gedeelte van (4.1.15) wordt nu:

$$p R_t + q \operatorname{erf} . \frac{R_t}{2\sqrt{a_1 t}} \quad (4.2.3)$$

De tweede integraal

$$\int_0^t \vartheta(\tau) \cdot (t - \tau)^{-3/2} \exp - \frac{R_t}{4 a_1 (t - \tau)} d\tau =$$

$$\frac{T_0}{\theta} \int_0^t \{ \tau H(\tau) - (\tau - \theta) H(\tau - \theta) \} (t - \tau)^{-3/2} \exp - \frac{R_t^2}{4 a_1 (t - \tau)} d\tau$$

of met  $\gamma = \min (t, \theta)$ :

$$= \frac{T_0}{\theta} \int_0^\gamma (t - \tau)^{-3/2} \exp - \frac{R_t^2}{4 a_1 (t - \tau)} d\tau + T_0 \int_\gamma^t (t - \tau)^{-3/2} \exp - \frac{R_t^2}{2 a_1 (t - \tau)} d\tau$$

We substitueren:

$$\tau = t - \frac{R_t^2}{4 a_1 \zeta^2} \text{ en dus } \frac{4\sqrt{a_1}}{R_t} d\zeta = (t - \tau)^{-3/2} d\tau,$$

met als resultaat:

$$\frac{4\sqrt{a_1}}{R_t} \cdot \frac{T_0}{\theta} \frac{2\sqrt{a_1} (t - \gamma)}{R_t} \int_{\frac{R_t}{2\sqrt{a_1 t}}}^{\frac{R_t}{2\sqrt{a_1 (t - \gamma)}}} \left( t - \frac{R_t^2}{4 a_1 \zeta^2} \right) \exp(-\zeta^2 d\zeta) + \frac{4\sqrt{a_1}}{R_t} T_0$$

$$\int_{\frac{R_t}{2\sqrt{a_1 (t - \gamma)}}}^{\infty} \exp - \zeta^2 d\zeta =$$

$$\frac{4 t T_0 \sqrt{a_1}}{\theta R_t} \frac{2\sqrt{a_1} (t - \gamma)}{R_t} \int_{\frac{R_t}{2\sqrt{a_1 t}}}^{\frac{R_t}{2\sqrt{a_1 (t - \gamma)}}} \exp(-\zeta^2 d\zeta) - \frac{T_0 R_t}{\theta \sqrt{a_1}} \frac{2\sqrt{a_1} (t - \gamma)}{R_t} \int_{\frac{R_t}{2\sqrt{a_1 t}}}^{\frac{R_t}{2\sqrt{a_1 (t - \gamma)}}} \zeta^{-2} \exp$$

$$(-z^2 dz) + \frac{4\sqrt{a_1}}{R_t} T_0 \int_{R_t}^{\infty} \exp - z^2 dz$$

$$\frac{2\sqrt{a_1}(t-\gamma)}{R_t}$$

Nu is:

$$\int_{\alpha}^{\beta} z^{-2} \exp - z^2 dz = \frac{1}{\alpha} \exp - \alpha^2 - \frac{1}{\beta} \exp - \beta^2 + \sqrt{\pi}(\operatorname{erf} \alpha - \operatorname{erf} \beta)$$

Er ontstaat derhalve:

$$\frac{2 t T_0 \sqrt{a_1 \pi}}{R_t} \left( \operatorname{erf} \frac{R_t}{2\sqrt{a_1}(t-\gamma)} - \operatorname{erf} \frac{R_t}{2\sqrt{a_1 t}} \right) - \frac{T_0 R_t}{\theta \sqrt{a_1}} \left\{ \frac{2\sqrt{a_1 t}}{R_t} \right.$$

$$\exp\left(-\frac{R_t^2}{4 a_1 t}\right) - \frac{2\sqrt{a_1}(t-\gamma)}{R_t} \exp\left(-\frac{R_t^2}{4 a_1(t-\gamma)}\right) + \sqrt{\pi} \left( \operatorname{erf} \frac{R_t}{2\sqrt{a_1 t}} \right.$$

$$\left. - \operatorname{erf} \frac{R_t}{2\sqrt{a_1}(t-\gamma)} \right) \left. \right\} + \frac{2\sqrt{a_1 \pi}}{R_t} T_0 \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{R_t}{2\sqrt{a_1}(t-\gamma)} \right) =$$

$$\left( \frac{2 t T_0 \sqrt{a_1 \pi}}{\theta R_t} + \frac{T_0 R_t \sqrt{\pi}}{\theta \sqrt{a_1}} \right) \left( \operatorname{erf} \frac{R_t}{2\sqrt{a_1}(t-\gamma)} - \operatorname{erf} \frac{R_t}{2\sqrt{a_1 t}} \right)$$

$$+ \frac{2 T_0 \sqrt{a_1 \pi}}{R_t} \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{R_t}{2\sqrt{a_1}(t-\gamma)} \right) - \frac{2 T_0 \sqrt{t}}{\theta} \exp - \frac{R_t^2}{4 a_1 t}$$

$$+ \frac{2 T_0 \sqrt{t-\gamma}}{\theta} \exp - \frac{R_t^2}{4 a_1(t-\gamma)}$$

Het tweede deel van (4.1.15) wordt dus:

$$\left( \frac{t T_0}{\theta} + \frac{T_0 R_t^2}{2 a_1 \theta} \right) \left( \operatorname{erf} \frac{R_t}{2\sqrt{a_1}(t-\gamma)} - \operatorname{erf} \frac{R_t}{2\sqrt{a_1 t}} \right) + T_0 \left( 1 - \operatorname{erf} \right.$$

$$\left. \frac{R_t}{2\sqrt{a_1}(t-\gamma)} \right) - \frac{R_t T_0 \sqrt{t}}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} \exp\left(-\frac{R_t^2}{4 a_1 t}\right) + \frac{R_t T_0 \sqrt{t-\gamma}}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} \exp - \frac{R_t^2}{4 a_1(t-\gamma)}$$

(4.2.4)

Vergelijking (4.1.15) gaat nu over in:

$$\begin{aligned}
 p = & -\frac{T_o}{\theta} \left( \frac{t}{R_t} + \frac{R_t}{2a_1} \right) \left( \operatorname{erf} \frac{R_t}{2\sqrt{a_1(t-\gamma)}} - \operatorname{erf} \frac{R_t}{2\sqrt{a_1 t}} \right) - \frac{T_o}{R_t} \\
 & \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{R_t}{2\sqrt{a_1(t-\gamma)}} \right) + \frac{T_o \sqrt{t}}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} \exp - \frac{R_t}{4 a_1 t} - \frac{T_o \sqrt{t-\gamma}}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} \\
 & \exp - \frac{R_t}{4 a_1 (t-\gamma)} - \frac{q}{R_t} \operatorname{erf} \frac{R_t}{2\sqrt{a_1 t}} \quad (4.2.5)
 \end{aligned}$$

Om ten slotte tot een formule te komen die gemakkelijker numeriek te verwerken is, zij het in benadering, ontwikkelen we zowel de e-machten als de foutenfuncties in reeksen.

Er geldt nl.:

$$\exp - x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \quad \text{en} \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n! (2n+1)}$$

We nemen  $t < \theta$  en  $t > \theta$  afzonderlijk.

Voor  $t < \theta$ , dus  $\gamma = t$ , gaat (4.2.5) over in:

$$\begin{aligned}
 p = & -\frac{T_o}{\theta} \left( \frac{t}{R_t} + \frac{R_t}{2a_1} \right) \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{R_t}{2\sqrt{a_1 t}} \right) + \frac{T_o \sqrt{t}}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} \exp - \frac{R_t^2}{4 a_1 t} - \frac{q}{R_t} \\
 & \operatorname{erf} \frac{R_t}{2\sqrt{a_1 t}} = \\
 & -\frac{T_o t}{\theta R_t} - \frac{T_o R_t}{2 a_1 \theta} + \left( \frac{T_o t}{\theta R_t} + \frac{T_o R_t}{2 a_1 \theta} - \frac{q}{R_t} \right) \operatorname{erf} \frac{R_t}{2\sqrt{a_1 t}} + \frac{T_o \sqrt{t}}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} \exp - \frac{R_t^2}{4 a_1 t} \quad (4.2.6)
 \end{aligned}$$

Voor  $t > \theta$ , dus  $\gamma = \theta$ , ontstaat:

$$\begin{aligned}
 p = & \left( \frac{T_o}{R_t} - \frac{T_o t}{\theta R_t} - \frac{T_o R_t}{2 a_1 \theta} \right) \operatorname{erf} \frac{R_t}{2\sqrt{a_1(t-\theta)}} + \left( \frac{T_o t}{\theta R_t} + \frac{T_o R_t}{2 a_1 \theta} - \frac{q}{R_t} \right) \\
 & \operatorname{erf} \left( \frac{R_t}{2\sqrt{a_1 t}} \right) - \frac{T_o}{R_t} + \frac{T_o \sqrt{t}}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} \exp - \frac{R_t^2}{4 a_1 t} - \frac{T_o \sqrt{t-\theta}}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} \exp - \frac{R_t^2}{4 a_1 (t-\theta)} \quad (4.2.7)
 \end{aligned}$$

(4.2.6) gaat na reeksontwikkeling over in:

$$\begin{aligned}
 p = & -\frac{T_o t}{\theta R_t} - \frac{T_o R_t}{2 a_1 \theta} + \left( \frac{T_o t}{\theta R_t} + \frac{T_o R_t}{2 a_1 \theta} - \frac{q}{R_t} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \\
 & \frac{R_t^{2n+1}}{n! (2n+1) 2^{2n+1} (a_1 t)^{n+1/2}} + \frac{T_o \sqrt{t}}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n}}{n! (4 a_1 t)^n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{T_0 t}{\theta R_t} - \frac{T_0 R_t}{2a_1 \theta} - \frac{q}{\sqrt{a_1 \pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n}}{n!(2n+1) 2^{2n} (a_1 t)^n} + \frac{T_0 \sqrt{t}}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} \\
 &\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n}}{n!(2n+1) 2^{2n} (a_1 t)^n} + \frac{T_0}{2a_1 \theta \sqrt{a_1 \pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \\
 &\frac{R_t^{2n+1}}{n!(2n+1) 2^{2n} (a_1 t)^n} + \frac{T_0 \sqrt{t}}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n}}{n! 2^{2n} (a_1 t)^n} \quad (4.2.8)
 \end{aligned}$$

De voorlaatste som laat zich als volgt omvormen:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n+2}}{n!(2n+1) 2^{2n} (a_1 t)^n} = \\
 &\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{R_t^{2n}}{(n-1)! (2n-1) 2^{2n-2} (a_1 t)^{n-1}} = \\
 &-4 a_1 t \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \cdot R_t^{2n}}{n!(2n-1) 2^{2n} (a_1 t)^n}
 \end{aligned}$$

Aangezien deze term van de reeks voor  $n = 0$  toch nul wordt, kunnen we de sommatie ook bij nul laten beginnen en verkrijgen:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n+2}}{n!(2n+1) 2^{2n} (a_1 t)^n} = \\
 &-4 a_1 t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n \cdot R_t^{2n}}{n!(2n-1) 2^{2n} (a_1 t)^n}
 \end{aligned}$$

De laatste drie sommen van (4.2.8) kunnen nu bij elkaar genomen worden tot:

$$\begin{aligned}
 &\frac{T_0 \sqrt{t}}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n}}{n! 2^{2n} (a_1 t)^n} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{2n}{2n-1} + 1 \right) = \\
 &-\frac{2T_0 \sqrt{t}}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n}}{n!(4n^2 - 1) 2^{2n} (a_1 t)^n}
 \end{aligned}$$

Hiermede gaat (4.2.8) over in:

$$p = -\frac{T_o t}{\theta R_t} - \frac{T_o R_t}{2a_1 \theta} - \frac{q}{\sqrt{a_1 \pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n}}{n!(2n+1) 2^{2n} (a_1 t)^n} - \frac{2T_o \sqrt{t}}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n}}{n!(4n^2-1) 2^{2n} (a_1 t)^n} \quad (4.2.9)$$

(4.2.7) gaat over in:

$$p = \left( \frac{T_o}{R_t} - \frac{T_o t}{R_t} - \frac{T_o R_t}{2a_1 \theta} \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n+1}}{n!(2n+1) 2^{2n+1} a_1^{n+1/2} (t-\theta)^{n+1/2}} + \left( \frac{T_o t}{\theta R_t} + \frac{T_o R_t}{2a_1 \theta} - \frac{q}{R_t} \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n+1}}{n!(2n+1) 2^{2n+1} a_1^{n+1/2} t^{n+1/2}} - \frac{T_o}{R_t} + \frac{T_o \sqrt{t}}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n}}{n! 2^{2n} a_1^n t^n} - \frac{T_o \sqrt{t-\theta}}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n}}{n! 2^{2n} a_1^n (t-\theta)^n} = -\frac{T_o}{R_t} - \frac{q}{\sqrt{a_1 \pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n}}{n!(2n+1) 2^{2n} a_1^n t^n} + \frac{T_o}{\sqrt{a_1 \pi}} \left( 1 - \frac{t}{\theta} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n}}{n!(2n+1) 2^{2n} a_1^n (t-\theta)^{n+1/2}} - \frac{T_o}{2a_1 \theta \sqrt{a_1 \pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n+2}}{n!(2n+1) 2^{2n} a_1^n (t-\theta)^{n+1/2}} + \frac{T_o t}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n}}{n!(2n+1) 2^{2n} a_1^n t^{n+1/2}} + \frac{T_o}{2a_1 \theta \sqrt{a_1 \pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n+2}}{n!(2n+1) 2^{2n} a_1^n t^{n+1/2}} + \frac{T_o}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n}}{n! 2^{2n} a_1^n} \left( \frac{1}{t^{n-1/2}} - \frac{1}{(t-\theta)^{n-1/2}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{T_o}{R_t} - \frac{1}{\sqrt{a_1\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n}}{n!(2n+1)2^{2n}a_1^n} \cdot \frac{q}{t^{n+1/2}} + \frac{T_o}{\theta\sqrt{a_1\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \\
 & \frac{R_t^{2n}}{n!(2n+1)2^{2n}a_1^n} \left( \frac{1}{t^{n-1/2}} - \frac{1}{(t-\theta)^{n-1/2}} \right) + \frac{T_o}{2a_1\theta\sqrt{a_1\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \\
 & \frac{R_t^{2n+2}}{n!(2n+1)2^{2n}a_1^n} \left( \frac{1}{t^{n+1/2}} - \frac{1}{(t-\theta)^{n+1/2}} \right) \\
 & + \frac{T_o}{\theta\sqrt{a_1\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n}}{n!2^{2n}a_1^n} \left( \frac{1}{t^{n-1/2}} - \frac{1}{(t-\theta)^{n-1/2}} \right) \quad (4.2.10)
 \end{aligned}$$

De laatste som kunnen we weer omvormen, n.l. tot:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n!(2n-1)2^{2n-2}a_1^{n-1}} \frac{R_t^{2n}}{n!(2n-1)2^{2n-2}a_1^{n-1}} \left( \frac{1}{t^{n-1/2}} - \frac{1}{(t-\theta)^{n-1/2}} \right) = \\
 & + 2a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{-2n \cdot R_t^{2n}}{n!(2n-1)2^{2n}a_1^n} \left( \frac{1}{t^{n-1/2}} - \frac{1}{(t-\theta)^{n-1/2}} \right)
 \end{aligned}$$

(4.2.10) gaat over in:

$$\begin{aligned}
 p = & -\frac{T_o}{R_t} - \frac{1}{\sqrt{a_1\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n}}{n!(2n+1)2^{2n}a_1^n} \cdot \frac{q}{t^{n+1/2}} + \frac{T_o}{\theta\sqrt{a_1\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \\
 & (-1)^n \frac{R_t^{2n}}{n!2^{2n}a_1^n} \left( \frac{1}{t^{n-1/2}} - \frac{1}{(t-\theta)^{n-1/2}} \right) \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{2n}{2n-1} + 1 \right)
 \end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}
 p = & -\frac{T_o}{R_t} - \frac{1}{\sqrt{a_1\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_t^{2n}}{n!(4a_1)^n} \left\{ \frac{1}{2n+1} \frac{q}{t^{n+1/2}} + \frac{2T_o}{\theta(4n^2-1)} \right. \\
 & \left. \left( \frac{1}{t^{n-1/2}} - \frac{1}{(t-\theta)^{n-1/2}} \right) \right\} \quad (4.2.11)
 \end{aligned}$$

Uit numerieke berekeningen blijkt, dat het voldoende is om van de reeksen alleen de termen voor  $n = 0$  te gebruiken. Hierdoor ontstaat uit (4.2.9):

$$p = - \frac{T_o t}{\theta R_t} - \frac{T_o R_t}{2a_1 \theta} - \frac{q}{\sqrt{a_1 \pi t}} + \frac{2T_o \sqrt{t}}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} \quad (4.2.12)$$

en uit (4.2.11):

$$p = - \frac{T_o}{R_t} - \frac{q}{\sqrt{a_1 \pi t}} + \frac{2T_o}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} (\sqrt{t} - \sqrt{t - \theta}) \quad (4.2.13)$$

$R_t$  als functie van  $t$  is dus te schrijven als:

$$R_t = \frac{2\sqrt{a_1 t}}{\sqrt{\pi}} - \frac{pa_1 \theta}{T_o} - \frac{q\theta\sqrt{a_1}}{T_o \sqrt{\pi t}} - \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{a_1 t}}{\sqrt{\pi}} - \frac{pa_1 \theta}{T_o} - \frac{q\theta\sqrt{a_1}}{T_o \sqrt{\pi t}}\right)^2 - 2a_1 t} \quad (4.2.14)$$

$$\approx \frac{a_1 t}{\frac{2\sqrt{a_1 t}}{\sqrt{\pi}} - \frac{pa_1 \theta}{T_o} - \frac{q\theta\sqrt{a_1}}{T_o \sqrt{\pi t}}} \quad \boxed{t < \theta}$$

en

$$R_t = \frac{-T_o}{p + \frac{q}{\sqrt{a_1 \pi t}} - \frac{2T_o}{\theta \sqrt{a_1 \pi}} (\sqrt{t} - \sqrt{t - \theta})} \quad \boxed{t > \theta} \quad (4.2.15)$$

We voeren nu in de symbolen:

$$S = \frac{p}{-T_o} ; \quad Q = \frac{q}{-T_o} \quad (4.2.16)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{a_1 \pi \theta}} \quad \text{en} \quad u = \frac{t}{\theta}$$

Hiermede kan de benaderde oplossing worden geschreven als:

$$R_t \equiv R_u = \frac{u}{S + \frac{Q\alpha}{\sqrt{u}} + 2\alpha\sqrt{u}} \quad 0 \leq u \ll 1 \quad (4.2.17)$$

$$\text{en} \quad R_t \equiv R_u = \frac{1}{S + \frac{Q\alpha}{\sqrt{u}} + 2\alpha(\sqrt{u} - \sqrt{u-1})} \quad u > 1 \quad (4.2.18)$$



$$\text{of } R_u = \frac{uH(1-u) + H(u-1)}{S + \frac{Q\alpha}{\sqrt{u}} + 2\alpha\{\sqrt{u} - \sqrt{u-1} \cdot H(u-1)\}}$$

$$\text{terwijl } R_u \approx \frac{1}{S + \frac{(Q+1)\alpha}{\sqrt{u}}} \quad \text{voor } \underline{\underline{u \gg 1}}$$

Als  $\theta = p = 0$  gaat (4.2.15) over in:

$$R_t = \frac{-T_o}{q} \sqrt{a_1 \pi t} \quad (4.2.19)$$

Dit is het bekende  $\sqrt{t}$ -verband. De randvoorwaarde  $\phi(t)$  is inderdaad overgegaan in  $T_o$  (voor  $t > 0$ ). De onbekende beginvoorwaarde  $f^*(z)$  is overgegaan in  $q$  (voor  $z > 0$ ). Stellen we analoog  $\phi^*(t) = T_o^*$  en  $f(z) = T_b$  dan ontstaat uit (4.1.16):

$$R_t = \frac{-T_o^*}{T_b} \sqrt{a_2 \pi t} \quad (4.2.20)$$

Er moet dus gelden  $\frac{-T_o}{q} = \frac{-T_o^*}{T_b} \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}}$ . Stellen we dit gelijk aan  $\frac{2\beta}{\sqrt{\pi}}$  dan zijn (4.2.19) en (4.2.20) identiek aan de bekende formule

$$R_t = 2\beta\sqrt{a_1 t} \quad (\text{zie [1] pg. 11})$$

De waarde van  $\beta$  volgt uit een formule die uit (4.1.14) en (4.1.17) is af te leiden (zie eveneens [1] pg. 11).

De limietwaarde, waartoe  $R_u$  nadert als  $u \rightarrow \infty$ , is:

$$R_\infty = \frac{1}{S} = \frac{-T_o}{p} \quad (4.2.21)$$

Vergelijken we dit met formule (4) uit [1] dan moet gelden:

$$p = \lambda_2 / \lambda_1 P \quad (4.2.22)$$

Hierin is  $P$  dus de temperatuursgradiënt in de bodem aan het begin van de vorstdiepte. In [1] hebben we eenvoudigheidshalve ge-

steld  $f(z) = P.z$ . Algemener kunnen we schrijven:

$$P = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{df(z)}{dz}$$

Als men wel  $\theta = 0$  stelt, maar  $p \neq 0$  dan gaat (4.2.15) over in:

$$R_t = \frac{-T_0}{p + \frac{q - T_0}{\sqrt{a_1 \pi t}}} \quad (4.2.23)$$

#### 4.3. Numerieke bewerking en resultaten

De beste methode om aan een reeks waarnemingsuitkomsten gegeven functies aan te passen, is in het algemeen die der kleinste kwadraten. Helaas zijn de formules (4.2.17) en (4.2.18) niet geschikt voor deze methode. Er ontstaan dan n.l. zeer onhandelbare vergelijkingen. Daarom is gemakshalve gedeeltelijk grafisch gewerkt. De waarnemingen zijn op grafieken-papier uitgezet ( $R_t$  tegen  $\sqrt{t}$ ) en vervolgens is grafisch (op het oog) voor een drietal waarden van  $\sqrt{t}$  een schatting van de waarde van  $R_t$  gemaakt. Voordat we deze drie stellen waarden ( $R_t$ ,  $\sqrt{t}$ ) kunnen gebruiken om uit de vergelijkingen (4.2.17) en (4.2.18) de waarden van  $\alpha$ ,  $Q$  en  $S$  op te lossen, moeten we eerst van  $t$  op  $u$  overgaan. Hiervoor moet  $\theta$  bekend zijn. Door de gegeven waarde van de oppervlakte-temperatuur tegen de tijd uit te zetten kan grafisch de functie  $\vartheta(t) = T_0/\theta \{t H(t) - (t - \theta) H(t - \theta)\}$  (4.2.1) worden bepaald, waarmee  $\theta$  (en ook  $T_0$ ) dus bekend is. De formules (4.2.17) en (4.2.18) leveren nu met het drietal waarden ( $R_t$ ,  $\sqrt{t}$ ) of ( $R$ ,  $\sqrt{u}$ ) drie vergelijkingen waaruit we  $\alpha$ ,  $Q$  en  $S$  oplossen. Met behulp der formules (4.2.16) zijn dan de waarden van  $a_1$ ,  $p$  en  $q$  te berekenen.

We passen deze methode in de eerste plaats toe op de waarnemingen te Castricum in 1947, namelijk die van de meetplaats nabij lysimeter II (zie ook [1]). In fig. 4.3.1 zijn de oppervlakte-temperaturen uitgezet tegen de tijd in dagen. De getrokken lijn stelt  $\vartheta(t)$  voor. Een vrij ruwe benadering van de werkelijkheid maar voldoende om een bruikbaar model te geven.  $\theta = 7$  dagen = 604.800 sec. en  $T_0 = -3,5$ .

Uit de waarnemingen zijn de drie paren ( $R_t$ ,  $\sqrt{t}$ ) waarden als

volgt gekozen (met  $t$  in seconden): (10, 450), (34, 830), (60, 1408).

Oplossing van de vergelijkingen geeft:  $\alpha = 0,0119$ ,  $Q = 0,731$  en  $S = 0,0047$ , waaruit volgt:  $a_1 = 0,0037$ ;  $q = 2,5$  en  $p = 0,016$ .

Met deze waarden van de constanten is nu het gehele verloop van  $R_t$  te bepalen. Het resultaat is in fig. 4.3.2 gegeven. Het verloop van  $R_t$  volgens de gladde kromme blijkt zeer redelijk bij de punten van de waargenomen vorstdiepten aan te sluiten. De benaderingsformules (4.2.17) en (4.2.18) geven blijkbaar een redelijk bruikbare oplossing van het vorstdiepte-probleem; vooral ook, omdat de waarde die voor  $a_1$  wordt gevonden in ieder geval de goede orde van grootte bezit (zie tabel 2.2).

We zullen nu de waarnemingen van 1954 te Castricum, De Bilt, Epe, Oene en Wassenaar nader onderzoeken.

In de eerste plaats zullen we nagaan of het vorstdiepte-verloop in 1954 in Castricum is af te leiden uit dat in 1947, d.w.z. we veronderstellen, dat de grootheden  $a_1$ ,  $p$  en  $q$  in 1954 dezelfde waarden bezaten als in 1947. Voor  $T_0$  en  $\theta$  zijn uit het temperatuursverloop aan de oppervlakte in 1954 nieuwe waarden gevonden volgens fig. 4.3.3 n.l.  $T_0 = -7,5$  en  $\theta = 5$  dagen = 432.000 sec. Hiermede krijgen we:  $\alpha = 0,0144$ ,  $Q = 0,341$  en  $S = 0,0021$ . Het verloop van de vorstdiepte is nu te berekenen. In fig. 4.3.4 zijn de resultaten weergegeven. In de eerste plaats de streep-kromme, die het uit 1947 afgeleide verloop geeft; de waargenomen waarden en ten slotte de aan de waarnemingen aangepaste kromme. Het blijkt dus dat, als we de nauwkeurigheidseisen niet te hoog stellen, een vrij redelijke schatting van het verloop van de vorstdiepte is te maken. Uiteraard sluit de aangepaste kromme beter bij de waarnemingspunten aan.

De waarnemingsresultaten uit Epe, Oene, Wassenaar en De Bilt in 1954 zijn vervolgens met bovenbeschreven aanpassingsmethoden bewerkt. De resultaten zijn in de fig. 4.3.5 .... 4.3.12 weergegeven. In tabel 4.3.1 zijn de waarden van de parameters samengevat.

tabel 4.3.1  
Parametervoorwaarden vorstdiepte-verloop in 1954

	$T_0$	$\theta$ (dagen)	$a_1$	$p$	$q$	Res.
Castricum	- 7,5	5	0,0076	0,024	5,15	312
Epe	- 11,5 (- 9,0)	4	0,0150	0,018	21,5	625
Oene	- 9,0	6	0,0050	0,041	10,5	217
Wassenaar	- 6,5	4	0,0027	0,028	0,72	233
De Bilt	"- 8,0"	7	0,0144	"0,046"	"16,6"	175

Voor De Bilt is  $T_0$  niet de waarde  $-4^\circ$  uit fig. 4.3.11 genomen, omdat de thermometer in de opstelling in De Bilt zich enkele cm beneden de oppervlakte bevindt. Vergelijking met de andere  $T_0$ -waarden en tevens onderlinge vergelijking van de luchttemperaturen van de termijnstations (zie fig. 5.1) gaf een basis om  $-8^\circ\text{C}$  als schatting van  $T_0$  te nemen.

Overzien wij de figuren dan kan gezegd worden, dat voor alle gevallen de overeenstemming tussen waarnemingspunten en "theoretische" kromme redelijk goed is te noemen. Van de  $a_1$ -waarden zijn die van De Bilt en Epe misschien wat aan de hoge kant, maar overigens bezitten ze wel de goede grootte-orde. Veel meer is waarschijnlijk niet te verwachten. De nauwkeurigheid is stellig veel te gering om verschillen in de waarde van  $a_1$  in verband met verschillen in grondsoort, enz. te kunnen aantonen. Ook de waarden van  $p$  zijn van de grootte-orde die we kunnen verwachten. Immers volgens (4.2.22) is  $p = \lambda_2/\lambda_1 P$ . Als we aannemen dat de verhouding  $\lambda_2/\lambda_1$  betrekkelijk dichtbij één is, krijgen we voor  $P$  een waarde 2 à  $6^\circ\text{C}$  per m. Dit is inderdaad een temperatuurgradiënt zoals we aan het begin van een vorstperiode meten. Bij de waarnemingen van Castricum was b.v. aan het begin op 1 m diepte de temperatuur ongeveer  $\frac{3}{2}^\circ\text{C}$ . Op 3 m waren de temperaturen in de orde van  $10^\circ\text{C}$  (zie hoofdstuk 2). De gradiënt bedroeg dus gemiddeld ca.  $3^\circ\text{C}/\text{m}$ .

In fig. 4.3.13 is ten slotte een samenvatting gegeven van de resultaten. Hierin is het "theoretische" verloop van de vorstdiepte van de verschillende stations getekend, waarbij nu de tijd in dagen in plaats van  $\sqrt{t(\text{sec.})}$  is aangegeven.

Aan het slot van 3 is gesteld, dat een sneeuwrijke winter als in 1954, maar die b.v. 4 weken zou aanhouden, als extreme mogelijkheid geschikt is om een schatting van een praktisch bruikbare extreme vorstdiepte te verkrijgen.

De vorstdiepten, die we bij een sneeuwrijke winter van één maand (30 dagen) kunnen verwachten, zijn voor de verschillende stations de volgende:

tabel 4.3.2

De Bilt	68 cm
Castricum	100 cm
Oene	64 cm
Epe	99 cm
Wassenaar	83 cm

Hierbij moet dus wel bedacht worden, dat deze waarden verkregen zijn voor het geval  $T_0$  de gemiddelde waarden heeft, die in tabel 4.3.1. zijn genoteerd.

We dienen ons thans af te vragen hoe het gesteld is met de nauwkeurigheid van bovenstaande resultaten. In plaats van één enkele kromme zouden we een band om de waarnemingspunten gelegd willen hebben, waarbinnen de ware functie  $R_t$  zich met b.v. 95 % zekerheid zal bevinden. In theorie is het wel mogelijk een dergelijke band te vinden, namelijk door de drie parameters  $a_1$ ,  $p$  en  $q$  alle mogelijke waarden te laten doorlopen en bij iedere combinatie van parameterwaarden de waarden van  $R_t$  te berekenen. Vervolgens moet dan worden nagegaan of de waargenomen  $R_t$ -waarden "toevallig" om de berekende  $R_t$ -kromme spreiden, uitgaande van een onnauwkeurigheid drempel van 5 %. Alle acceptabele krommen  $R_t$  vormen tezamen een betrouwbaarheidsstand, waaruit b.v. voor iedere waarde van  $t$  de betrouwbaarheidsmarge voor  $R_t$  is af te lezen.

Het is duidelijk, dat bovenstaande methode niet is door te voeren. Het aantal mogelijke combinaties  $a_1$ ,  $p$  en  $q$  is zo groot, dat berekening van alle gevallen ontoelaatbaar veel tijd zou kosten. Bovendien is de toetsing of de waarnemingen toevallig om de berekende kromme spreiden op zichzelf een moeilijk punt. In de eerste plaats is het vraag of de afwijkingen om de waargenomen  $R_t$ -waarden van de berekende onderling onafhankelijk zijn; en in de tweede plaats is de standaarddeviatie van de waargenomen  $R_t$  niet bekend.

We hebben verder geen cijfers ter beschikking, die het verschil tussen de thermometeraflezing en de ware temperatuur op de betrokken diepte in de grond aanwijzen<sup>\*)</sup>. Hierbij komt nog, dat de representativiteit van één enkele meting voor een geheel gebied, waar het ten slotte om gaat, eveneens niet goed bekend is. Uit parallel metingen op een drietal punten in het K.N.M.I.-terrein te De Bilt is wel gebleken, dat vrij grote verschillen in temperatuur op betrekkelijk korte afstand (10 .... 100 m) kunnen voorkomen. Op geringe diepten van 10 à 25 cm werden verschillen tot ca. 1°C geconstateerd. Op gro-

---

<sup>\*)</sup> Een onderzoek hiernaar in internationaal (C.C.I.) verband is voor gesteld, maar moet nog worden uitgevoerd.

tere diepten (tot 1 m) zijn de verschillen wat kleiner. Helaas kwamen in de laatste jaren, waarin deze metingen werden gedaan, geen vorstperioden van enig belang voor.

We moeten ons derhalve om een indruk te krijgen van de onnauwkeurigheid beperken tot een globale schatting.

Voor de twee gevallen Castricum 1954 en Epe 1954 hebben we de drie grafisch geschatte waarden  $R_t$ , bij gekozen  $\sqrt{t}$ -waarden enigszins gevarieerd. Hiermede werden een aantal  $R_t$ -krommen verkregen, die tezamen in een band liggen waarin vrijwel alle waarnemingspunten ook liggen (zie de fig. 4.3.14 en 4.3.15).

Gebruiken we deze band als schatting van de ware onbetrouwbaarheidsband, dan kunnen we voor de vorstdiepte na 30 dagen in een sneeuwrijke winter, als die van 1954, de volgende marges aangeven: Epe 97 - 113 cm en Castricum 92 - 113 cm.

De maximale waarde van de vorstdiepte voor een 30-daagstijdvak zonder sneeuw zou voor deze stations globaal 15 % meer zijn dan de waarden van tabel 4.3.2. Nemen we dit percentage ook voor de andere stations aan, dan kunnen we als extreme vorstdiepte de volgende getallen opgeven:

tabel 4.3.3

Castricum	113 cm
Epe	113 cm
Oene	73 cm
Wassenaar	95 cm
De Bilt	78 cm

Bij nadere beschouwing van de tabellen 4.3.1 en 4.3.2 en fig. 4.3.13 vallen enkele bijzonderheden op. In Castricum en Epe is het verloop van de vorstdiepte vrijwel gelijk geweest, ondanks het feit dat  $T_0$  in Epe veel lager was dan in Castricum. De bodemconstanten bezaten in Castricum blijkbaar geheel andere waarden dan in Epe. Het kan zijn dat verschil in structuur hierbij een rol speelt. Het is echter ook niet uitgesloten, dat de  $T_0$  in Epe te laag is. Vergelijken we nl. de te Epe en Oene gemeten luchttemperatuur (resp. - 6,6°C en - 7,2°C) met de kaart fig. 5.2 dan blijkt die van Oene

vrij goed in het patroon te passen, terwijl die van Epe iets aan de hoge kant is. Het is dus wel zeer onwaarschijnlijk dat de oppervlakte-temperatuur te Epe zoveel lager zou zijn. De mogelijkheid bestaat dat de opstelling van de thermometer op 0 cm niet geheel correct was. De thermometer behoort juist met de kwikbol onder de oppervlakte geplaatst te zijn (strikt genomen is de diepte dus niet 0 cm, maar ca. 1 cm); mogelijk is dit niet het geval geweest. Stellen we dat de  $T_0$  in Epe ook  $-9,0^{\circ}\text{C}$  was evenals in Oene, dan zouden we voor p en q resp. 0,014 en 16,8 vinden. Het resterende verschil met Castricum moet dan bovenstaande oorzaak hebben. Deze "gecorrigeerde" waarden zijn eveneens in tabel 4.3.1 vermeld.

In Oene en De Bilt is het verloop van de indringingsdiepten van de grond eveneens vrijwel gelijk; ook hier is de  $T_0$  in de ene plaats (Oene) lager dan in de andere (De Bilt), zodat verschil in bodemconstanten weer compenserend heeft gewerkt. In Oene bevinden de thermometers zich in rivierklei en in De Bilt in zandgrond met humus tot ca. 70 cm. Stellig is ook hier een voorname factor voor het verschil het vochtgehalte van de bodem. Dit is in de rivierklei in Oene ongetwijfeld veel groter dan in de zandgrond van De Bilt.

##### 5. Een globale kaart voor de extreme vorstdiepten in ons land

Tot slot zal een ruwe schatting van de extreme vorstdiepten in verschillende delen van ons land worden gemaakt, waarbij uitdrukkelijk op het enigszins speculatieve karakter dezer schattingen zij gewezen.

We zullen de volgende grondsoorten onderscheiden:

- |                               |                  |
|-------------------------------|------------------|
| I duinzand                    | (b.v. Castricum) |
| II diluviaal zand             | (b.v. Epe)       |
| III zandgrond met enige humus | (b.v. De Bilt)   |
| IV rivierklei                 | (b.v. Oene)      |

We gebruiken de parameterwaarden van de aangegeven stations (van Epe de "gecorrigeerde") voor de vier groepen grondsoorten. Onder deze grondsoorten ontbreekt zeeklei. Te verwachten is, dat deze een kleiner vochtgehalte heeft dan rivierklei en dus wat vorstindringingsdiepte betreft vermoedelijk tussen III en IV in ligt.

Voor de  $T_0$  zullen we schattingen gebruiken die gebaseerd zijn op

een vergelijking van de  $T_0$ -waarden uit tabel 4.3.1 met de 3-daagse gemiddelden voor de termijnstations volgens fig. 5.1. In dit kaartje van ons land zijn de gemiddelde temperaturen van overdag in de periode 26 januari ... 6 februari 1954 van de termijnstations genoteerd. Zeer globaal zijn isolijnen voor - 7,5; - 7,0; - 6,5 en - 6,0°C getrokken. We zullen voor  $T_0$  waarden aannemen die 2° lager zijn.

We berekenen nu voor de vier groepen de  $R_t$  na 30 dagen voor  $T_0 = - 8,0; - 8,5; - 0,9$  en  $- 9,5$ , waarbij we  $\theta$  op 5 dagen stellen.

Volgens formule (4.2.18) heeft  $R_t$  voor 30 dagen de waarden die in tabel 5.1 zijn samengevat.

tabel 5.1  
 $R_t$  in cm voor 30 dagen (berekende waarde + 15 %)

$T_0$	- 8,0	- 8,5	- 9,0	- 9,5
I	117	121	123	129
II	107	114	117	121
III	77	81	84	89
IV	68	71	75	77

Op grond van de nauwkeurigheidsschatting zijn deze getallen nog met 15 % verhoogd. Deze verhoogde cijfers zijn gebruikt om fig. 4.3.17 te construeren, uitgaande van fig. 4.3.16. Voor groep I is de - 7,5 isotherm van fig. 4.3.16 beschouwd als de isolijn van 129 cm; de - 7,0 isotherm van fig. 4.3.16 als de isolijn van 123 cm, enz. Hiermede zijn globaal de isolijnen van 130, 152, 120 en 115 cm voor groep I; de 120, 115 en 110 cm isolijnen voor groep II, de 90, 85 en 75 cm isolijnen voor groep III en de 80, 75 en 70 cm isolijnen voor groep IV bepaald.

We herhalen hetgeen in het begin is opgemerkt. Fig. 4.3.17 geeft slechts een zeer ruw beeld. Afwijkingen zullen ontstaan door plaatselijke omstandigheden, b.v. inhomogeniteit en in het terrein als wegen, kanalen, bebouwing enz. Hiervoor moet van geval tot geval bekeken worden wat het effect is.

In het bijzonder in een winter met sneeuw kunnen op plaatsen waar de sneeuw weggeruimd wordt, langs wegen enz., belangrijke afwijkingen voorkomen. Een vorstperiode met sneeuw zal in het algemeen geen gevaarlijke vorstdiepte geven door de isolerende werking van het sneeuwdek.



Aangezien een vorstperiode met sneeuw vrij lang kan duren, kunnen op sneeuwvrije plaatsen toch grote vorstdiepten voorkomen. Men kan echter dan niet zonder meer de vorstdiepte volgens voorgaande methode schatten, omdat we in dit geval niet met een één-dimensionaal probleem te maken hebben; er is dan namelijk niet alleen warmte-transport in de richting van de z-as maar ook zijdelings van de bodem onder het sneeuwdek uit naar het sneeuwvrije gebied. Hierdoor zal de vorstdiepte minder groot zijn dan bij een volledige sneeuwvrije vorstperiode.

Ten slotte berekenen we nog hoe diep de vorst zal indringen in een ander extreem geval, n.l. dat er wel een sneeuwdek ligt maar dat de vorstperiode zeer lang duurt, b.v. 4 maanden ( $\sqrt{t} = 3220$ ). Wij stellen hierbij  $T_0 = -3^\circ\text{C}$ ,  $-4^\circ\text{C}$  en  $-5^\circ\text{C}$ , en  $\theta = 5$  dagen. Dus  $\sqrt{\theta} = 657$ . Verder nemen we voor de constanten  $a_1$ ,  $p$  en  $q$  dezelfde waarden aan als in het vorige geval.

Formule (4.2.18) geeft weer de resultaten, die in tabel 5.2. zijn samengevat.

tabel 5.2

$T_0$	- 3,0	- 4,0	- 0,5
I	74	94	111
II	71	92	111
III	40	52	64
IV	40	52	62

Uiteraard is extrapolatie voor een dergelijke lange tijd onnauwkeuriger dan voor kortere tijden. Daar een schatting van de onnauwkeurigheid zeer moeilijk is, is geen verhoging van de berekende R-waarden toegepast zoals voor de waarden van tabel 5.1. Willen we met deze waarden vergelijken dan moet dus hiervan eerst weer de 15 % afgetrokken worden. De R-waarden van tabel 5.2 zijn dan globaal gezien ongeveer even groot als die van 5.1.

## Summary

It has been shown in report W.R. 56-003 that the simple solution of the frost-depth problem (frost-depth proportional to the root of the time: the "Neumann" solution) can only be used as a first approximation in case the frost-period is not too long.

The present report contains a study on a method to obtain a solution which is superior to the "Neumann" solution.

It is shown in chapter 1 that the validity of the Neumann solution is even doubtful for the first part of the frost-period; it appears to be impossible to find acceptable values for the thermal constant, which give a value of  $\beta$  (the proportionality-constant in formula (0.1) to be found from formula (0.2)) in accordance with the value of  $\beta$  found empirically from observations in Castricum.

Chapter 2 deals with the observations at depths of 3 and 5 m. These observations were made at De Bilt and at three places in the province of Gelderland, one on the heath near Epe; one in Oene near the river IJssel and one in the neighbourhood of Doetinchem.

The purpose of these observations was to find a depth ( $z_C$ ) at which the soil temperature is constant or quasi-constant (with a value  $T_C$ ) during the frost-period. From the so obtained numerical values of  $T_C$ , it should be possible to compute a limiting value of frost-depth, as explained in W.R. 56-003. The results of these calculations were not completely satisfactory. Moreover the successful attempts in finding a better frost-depth time function as described in chapter 4 has made the use of the method of limiting values superfluous.

We have, however, used the temperature observations at depths of 3 and 5 m, together with those at depths above 1 m, in our study of the annual variations. It turned out that the downward propagation of the annual temperature change could be described by the solution of the well-known heat differential equation for a model with constant values of the heat conductivity  $\lambda$  and the heat capacity  $C$  within the layer between 25 cm and 500 cm.

In chapter 3 the isolating power of a snow cover is demonstrated by some observations made at De Bilt (cf. fig. 3.1). The conclusion as regards damage from frost is that a snow-free frost-period is the most

dangerous case. It is therefore sufficient, to determine extreme frost-depth values for circumstances of which the winter of 1954 is a model example.

Chapter 4 is the main part of this report. It provides an approximative solution for the frost-depth problem. This solution is based on the general solution (4.1.4) of the heat conductivity equation (4.1.1) with the boundary condition (4.1.2) and the initial condition (4.1.3). The frost penetration process is represented in outline by fig. 4.1.1 (on pg. 19;  $T$  = temperature,  $t$  = time and  $z$  = depth). Region I ( $z < R_t$ ) is the frozen part of the soil, region II ( $z > R_t$ ) is the unfrozen part, while  $R_t$  is the frost-depth time function. If region I is extended by a fictitious part I\* for  $z > R_t$  in which the thermal constants have the same values as in I; if the initial condition is represented by  $f^*(z)$  and if, in analogy, region II is extended by a part II\* with the same thermal constants as part II and boundary condition  $\vartheta^*(t)$ , we can write down for the region I + I\* resp. for the region II + II\* the general solution (4.1.4) as (4.1.8) resp. (4.1.12).

At the free boundary  $R_t$  the conditions (4.1.13) and (4.2.14) must be satisfied. If (4.1.8) and (4.2.12) are substituted in (4.1.13) and (4.1.14) it would be possible to eliminate  $\vartheta^*(t)$  and  $f^*(z)$  from the resulting equation and finally to solve for  $R_t$ . Unfortunately the mathematical difficulties are too large to carry through this solution. We must limit ourselves to a partial solution and therefore suppose that the unknown function  $f^*(z)$  can be represented by the simple function (4.2.2). The function  $\vartheta(t)$  is numerically known and can be approximated by (4.2.1). With (4.2.1) and (4.2.2) the equation (4.2.15) can be solved. The exact solution in the form of a series in  $R_t$  is (4.2.9) if  $t < \theta$ , and (4.2.11) if  $t > \theta$ . Numerical calculations prove that a restriction to  $n = 0$  in the series is sufficiently accurate. This leads to the equations (4.2.12) and (4.2.13) from which  $R_t$  can be solved (cf. equations (4.2.14) and (4.2.15)). If the symbols (4.2.16) are used these equations can be written as (4.2.17) and (4.2.18). The final result contains the two constants  $p$  and  $q$  from (4.2.2). Both must be functions of the values of the thermal constants and the given functions  $f(z)$  and  $\vartheta(t)$ . It is possible to show that  $p = \lambda_2/\lambda_1 \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{df(z)}{dz}$ . The value of  $q$  can only be estimated empirically.

If  $\theta = p = 0$ , (4.2.15) changes into (4.2.19) and this is the well-

known "Neumann solution".

In part 4.3. the numerical results are considered. Observations made at the lysimeterstation Castricum and furthermore observations made at Epe, Oene, Wassenaar and De Bilt have been used. The stations Epe and Oene have already been mentioned in chapter 2. In Castricum and Wassenaar the instruments were placed in dune-sand. In De Bilt the soil is sandy with humus and grass-covered.

Figures 4.3.1, 4.3.3, 4.3.5, 4.3.7, 4.3.9 and 4.3.11 give the observations of soil-surface temperature from which the values of  $\theta$  and  $T_0$  in formula (4.2.1) can be estimated. The figures 4.3.2, 4.3.4 ..... 4.3.12 give the observed values of the frost-depth together with the adjusted frost-depth function (4.2.14) and (4.2.15).

In fig. 4.3.4 we find in addition to the adjusted frost-depth line a second frost-depth line (----) which is constructed with the  $T_0$  and  $\theta$  values from 4.3.3 and the  $a_1$ ,  $p$  and  $q$  values from the case 1947 for Castricum. It is an attempt to "predict" frost-depth penetration when only surface temperatures are given.

Fig. 4.3.13 contains the frost-depth lines for the five stations through the frost-period of the year 1954. The time is set here in days and in square root of number of seconds as in the other figures.

In chapter 5 an attempt is made to construct a chart of extreme frost-depths for the Netherlands. As "extreme" frost-period is chosen a snow-free frost-period with a  $T_0$ -value like in 1954, but of a length of 30 days. The other parameters were taken from table 4.3.1. The result is given in fig. 5.2.

Symbolen

T	= temperatuur	[°C]
t, $\tau$	= tijd	[sec]
z, $\zeta$	= diepte vanaf het aardoppervlak	[cm]
$\lambda$	= warmtegeleidingscoëfficiënt	[cal cm <sup>-1</sup> sec <sup>-1</sup> °C <sup>-1</sup> ]
C	= warmtecapaciteit	[cal cm <sup>-3</sup> °C <sup>-1</sup> ]
a ( $\equiv \lambda/C$ )	= warmtevereffeningscoëfficiënt	[cm <sup>2</sup> sec <sup>-1</sup> ]
R <sub>t</sub>	= vorstdiepte op de tijd t	[cm]
L	= latente warmte van water	[cal gr <sup>-1</sup> ]
d	= vochtgehalte van de grond	[gr cm <sup>-3</sup> ]
T <sub>o</sub>	= oppervlakte-temperatuur	[°C]
T <sub>b</sub>	= begintemperatuur	[°C]
A <sub>i</sub>	= amplitudo van de jaarlijkse gang op de diepte z	[°C]
$\varphi_i$	= phase-hoek van de jaarlijkse gang op de diepte z	

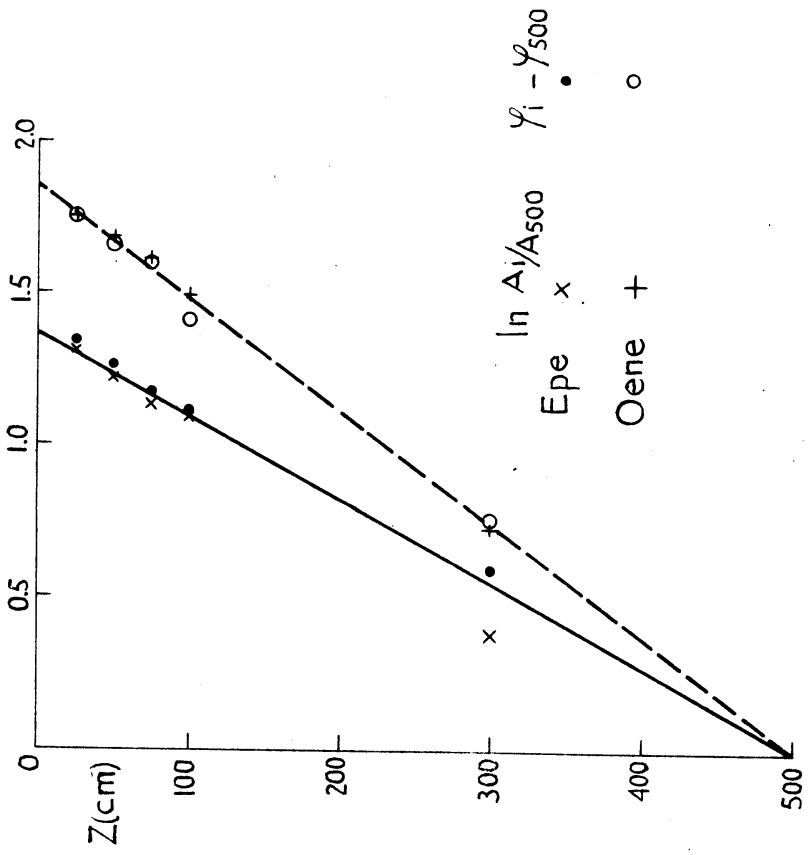
$$\exp x \equiv e^x$$

$$\operatorname{erf} x \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$$

Literatuur

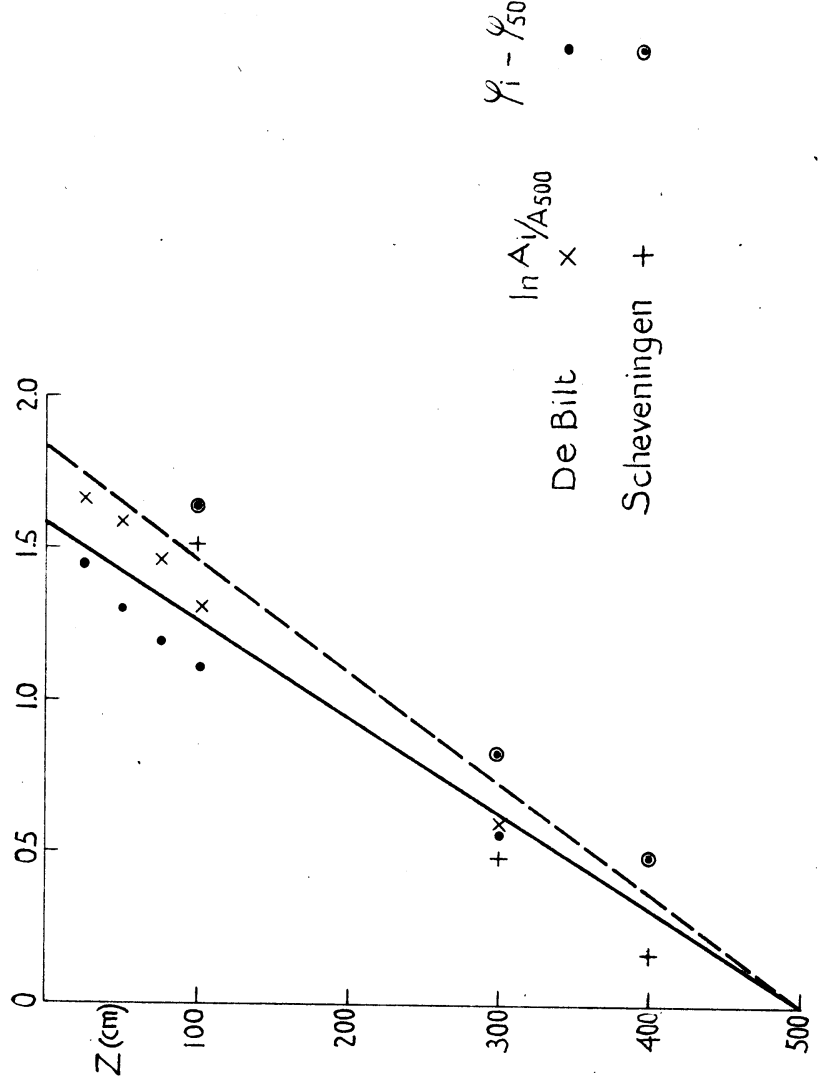
- [1] P.J. Rijkoort : Bijdrage tot het bepalen van de meest gunstige diepte voor het leggen van waterleidingbuizen in verband met het bevroingsrisico.  
K.N.M.I. W.R. 56-003, 1956.
- [2] R. Geiger : Das Klima der Bodenschichten Luftschicht.  
Dritte Auflage, 1958.
- [3] J. Hardebol : Berekening van de indringingsdiepte van vorst in een natte bodem.  
Lab.Warmte-stichting, september 1954.
- [4] H.A. Lauwerier : Mathematische problemen uit de warmtegeleidings-  
theorie.  
Syllabus Cursus van het Mathem.Centrum, 1954 -  
1955.

Fig 2.1.1



Amplitudooverhouding en faseverschuiving

Fig 2.1.2



Amplitudo verhouding en faseverhouding

fig. 2.2.1

Epe grondtemperatuur 500 cm

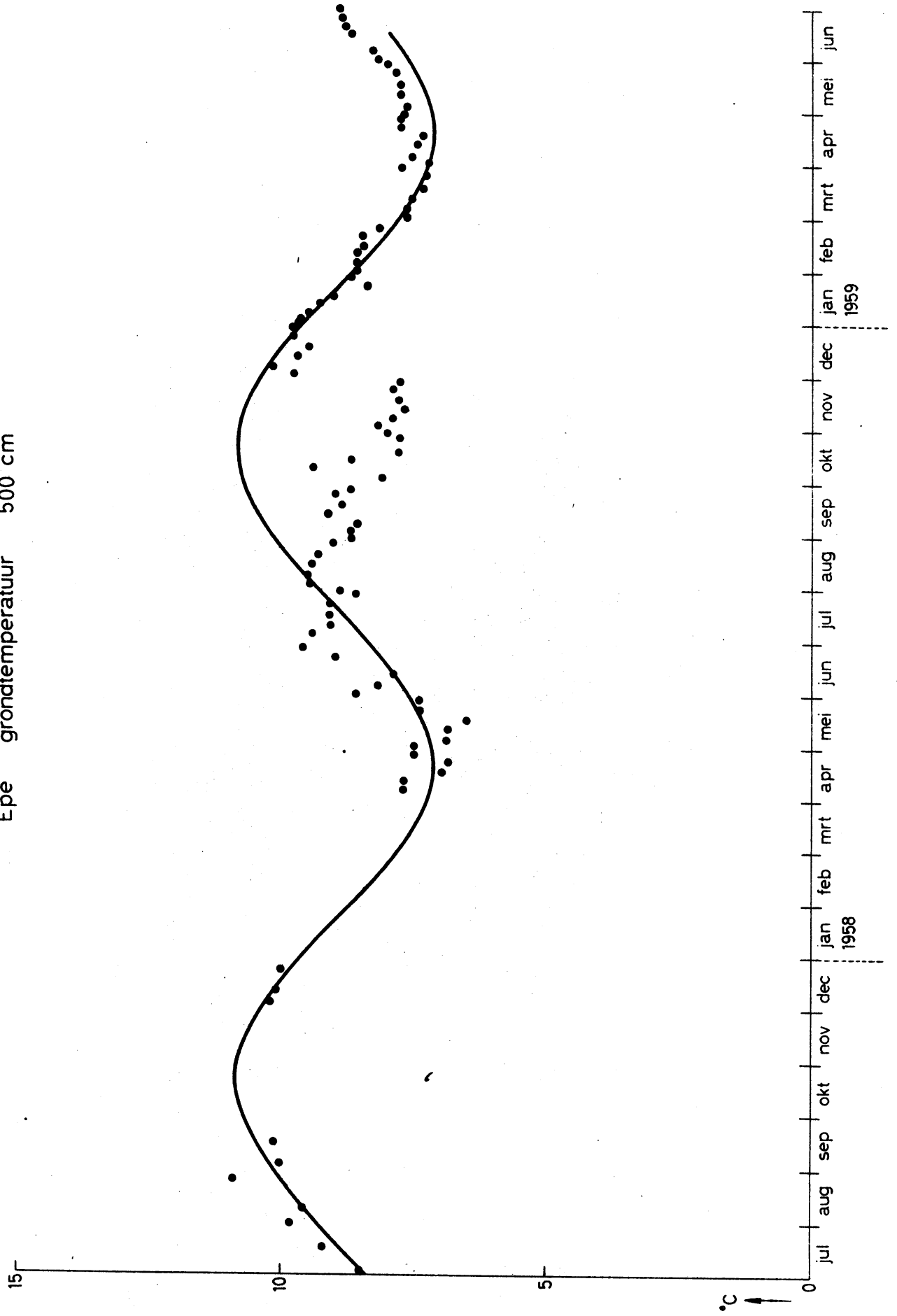




fig. 2.2.2

Epe grondtemperatuur 300 cm

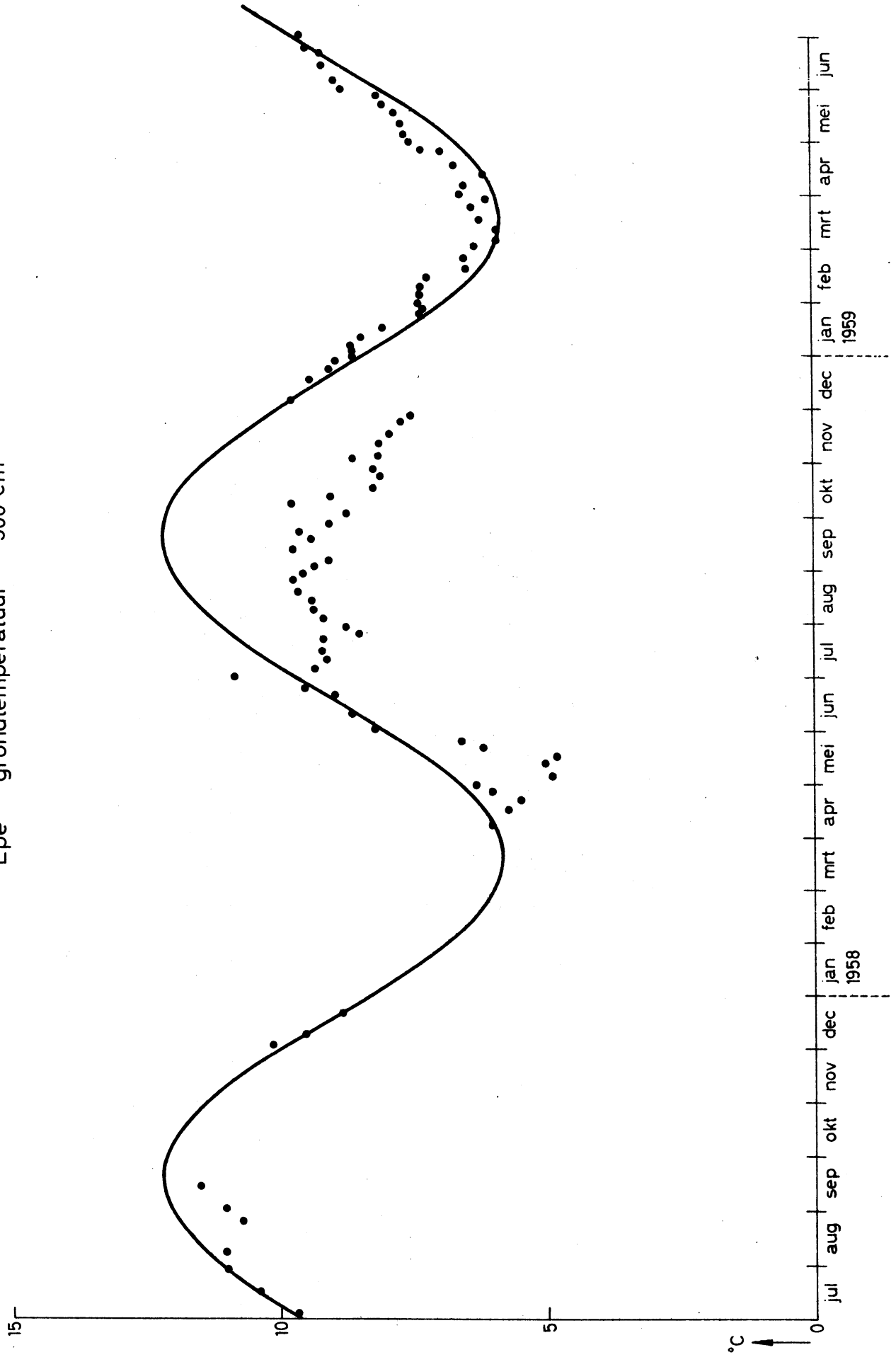


fig. 2.2.3.

Epe grondtemperatuur 100 cm

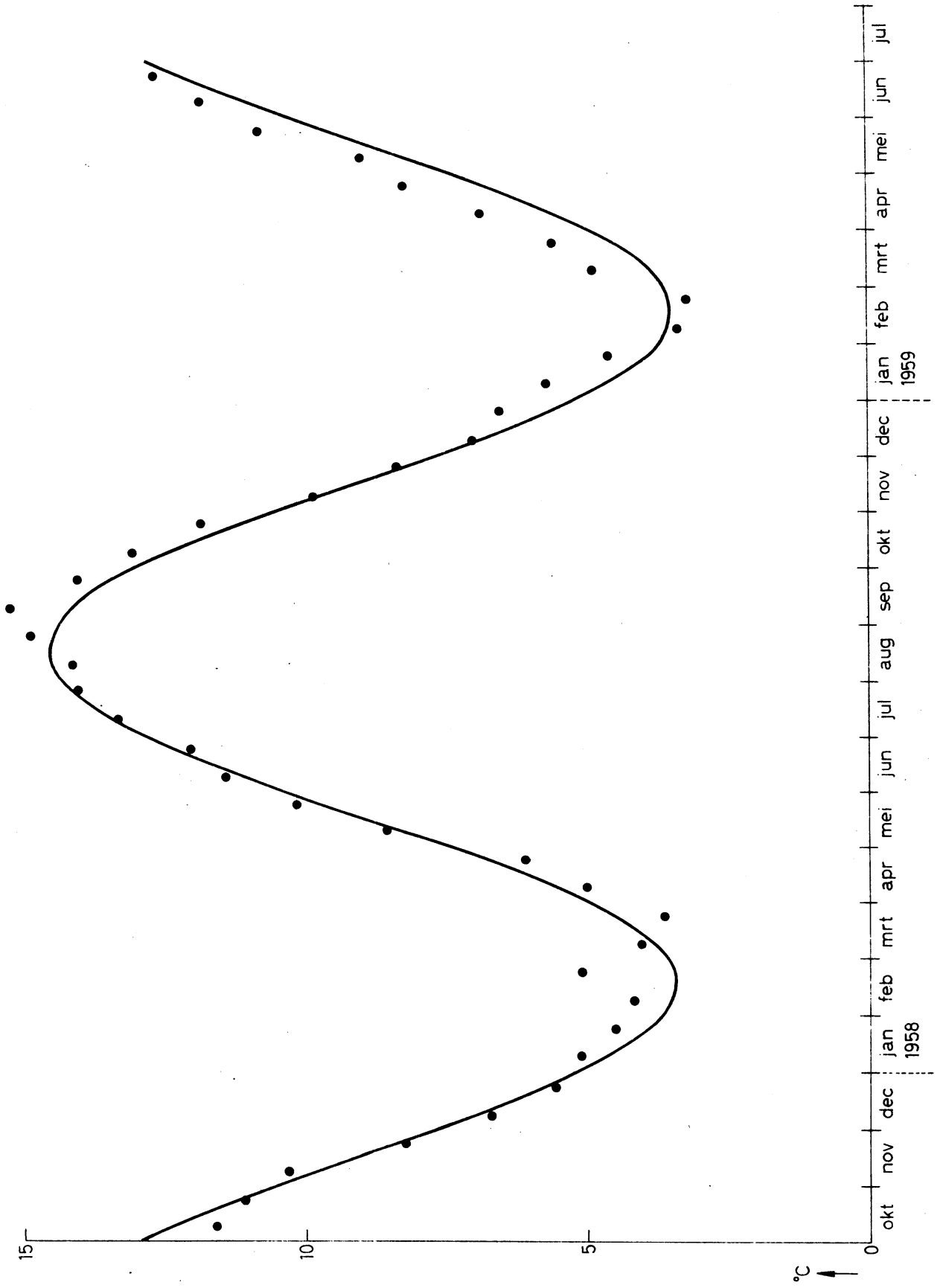


fig. 2.2.4

Epe grondtemperatuur 75 cm

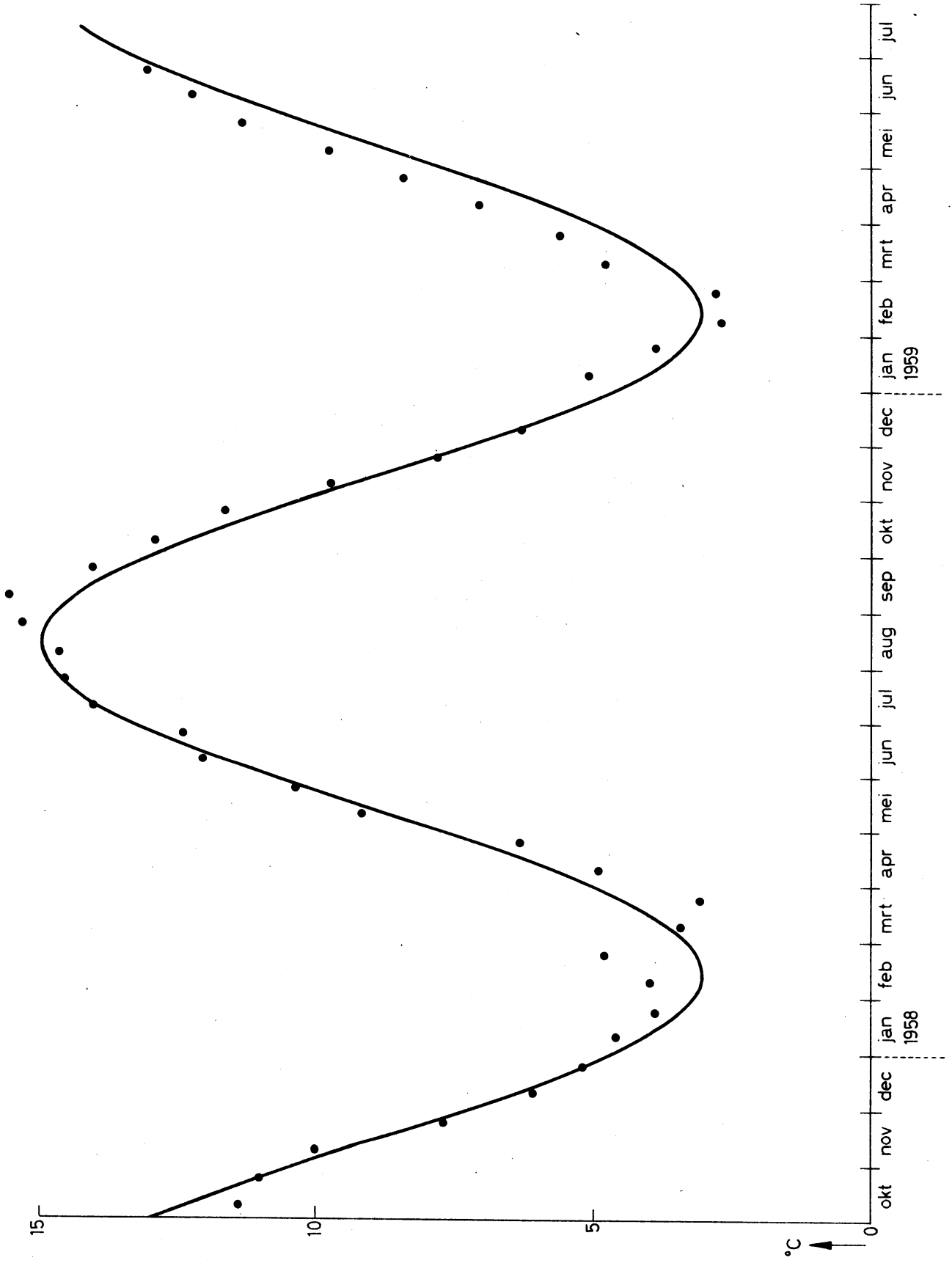


fig. 2.2.5

Epe grondtemperatuur 50 cm

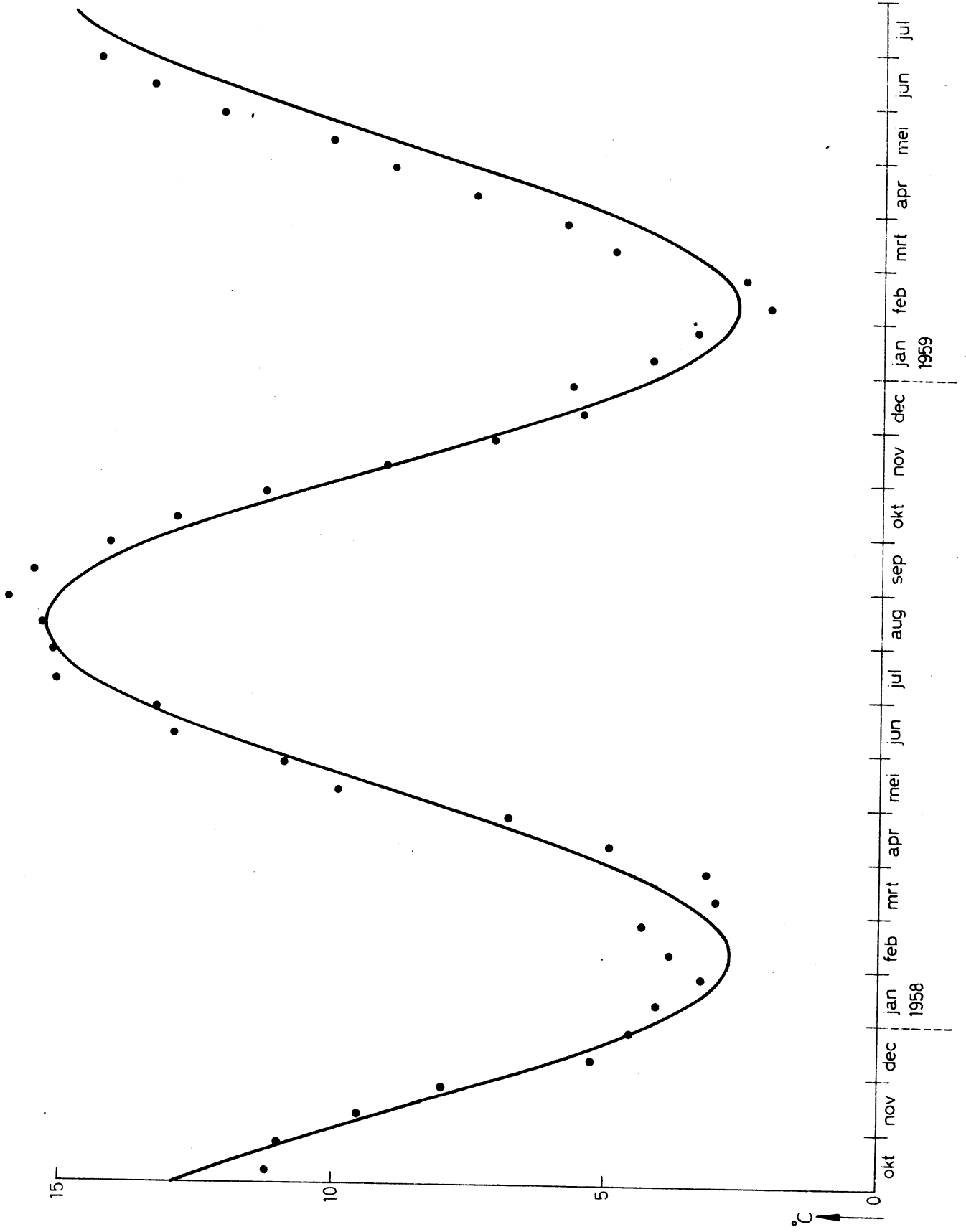
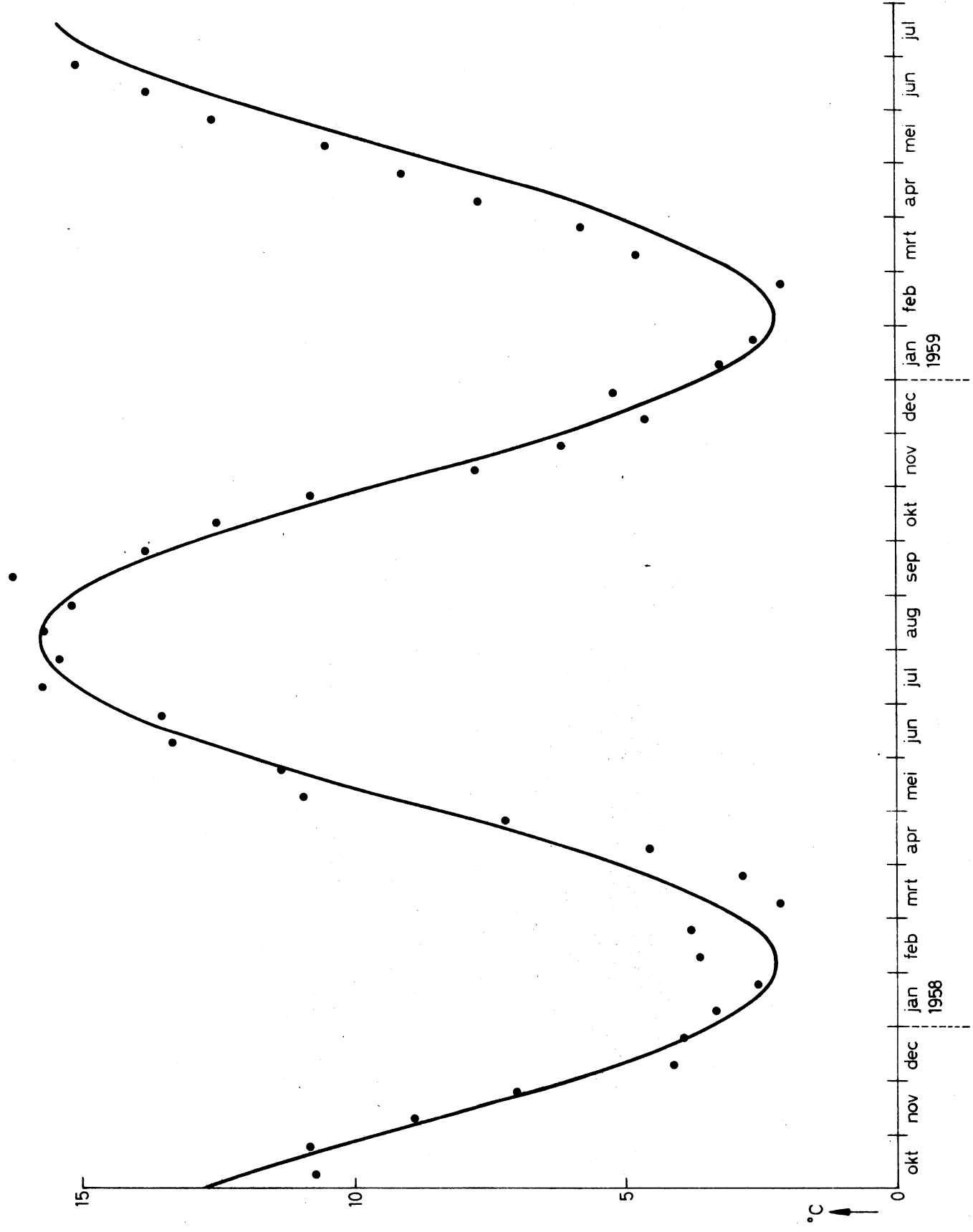


fig. 2.2.6

Epe grondtemperatuur 25 cm



Epe grondtemperatuur oppervlakte

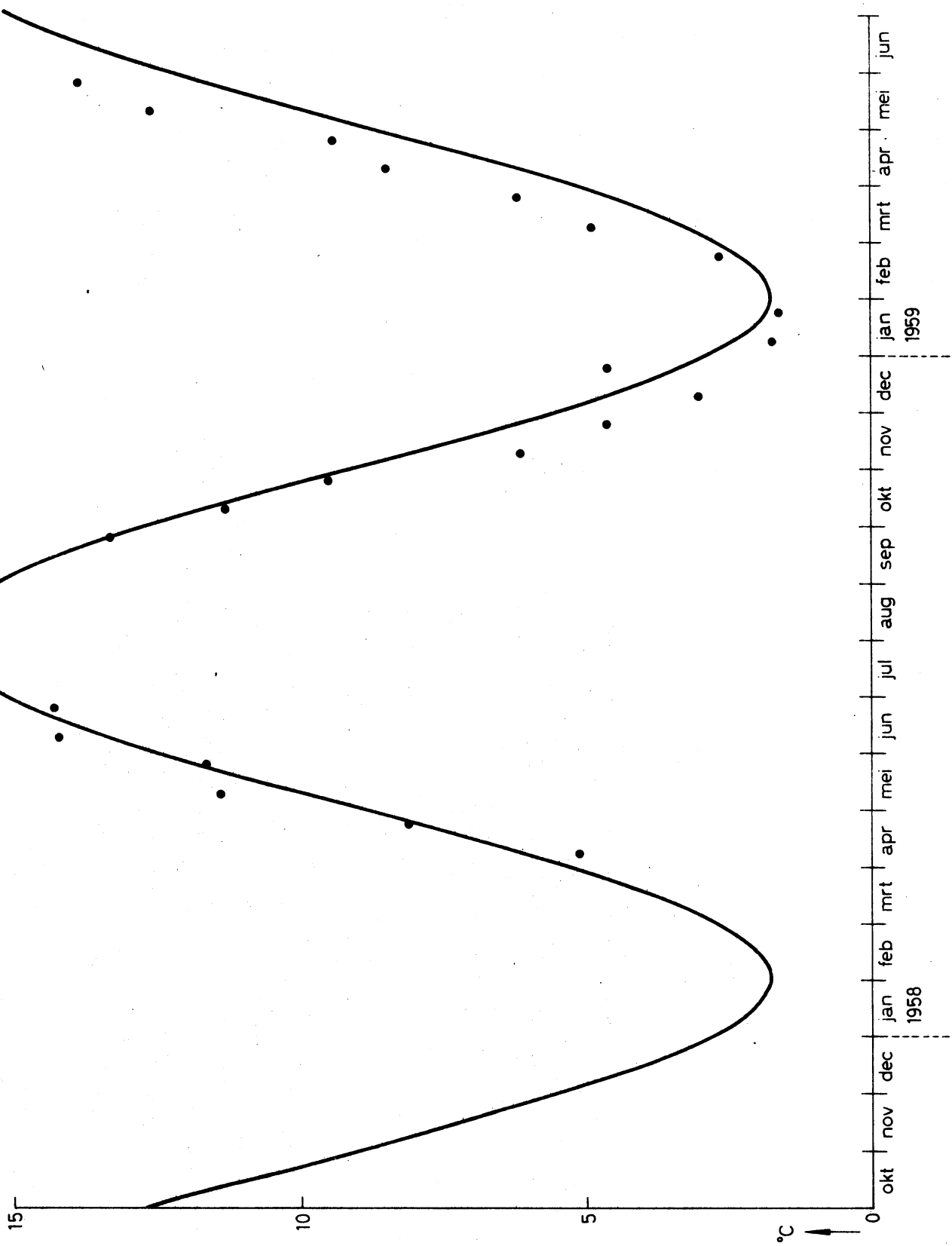


fig. 2.3.1

Oene grondtemperatuur 500 cm

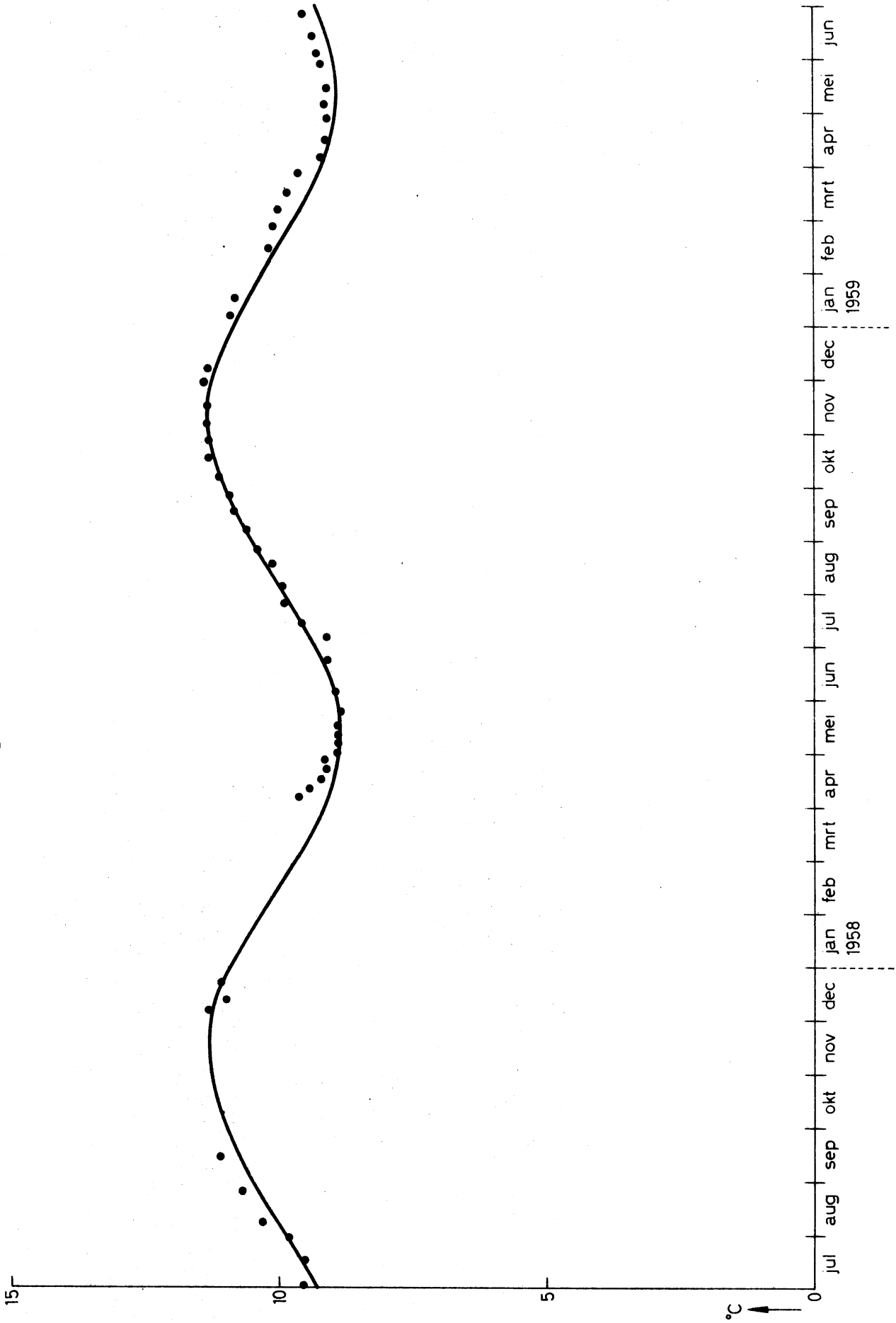


fig. 2.3.2

Oene grondtemperatuur 300 cm

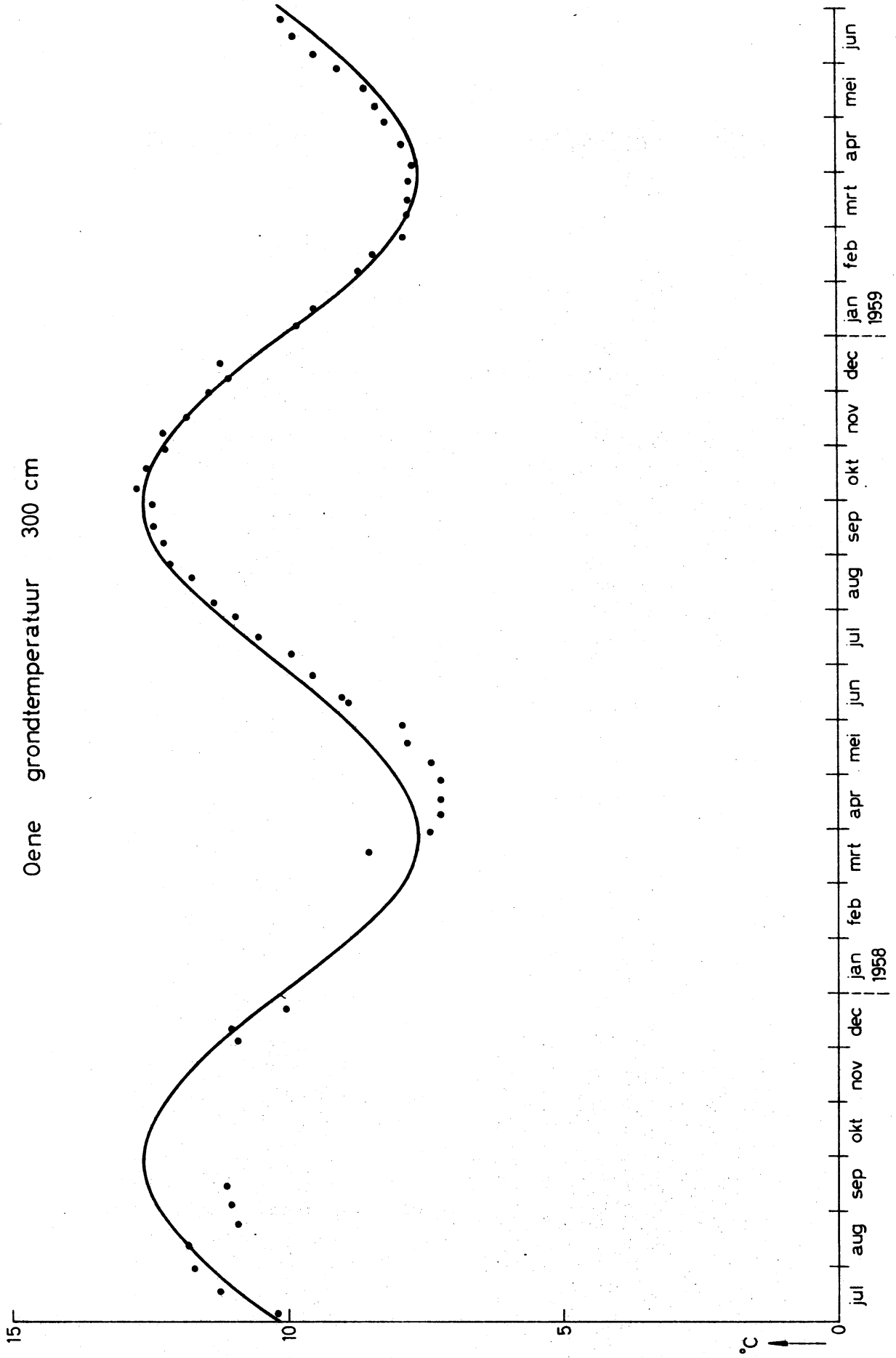




fig. 2.3.3

Oene grondtemperatuur 100 cm

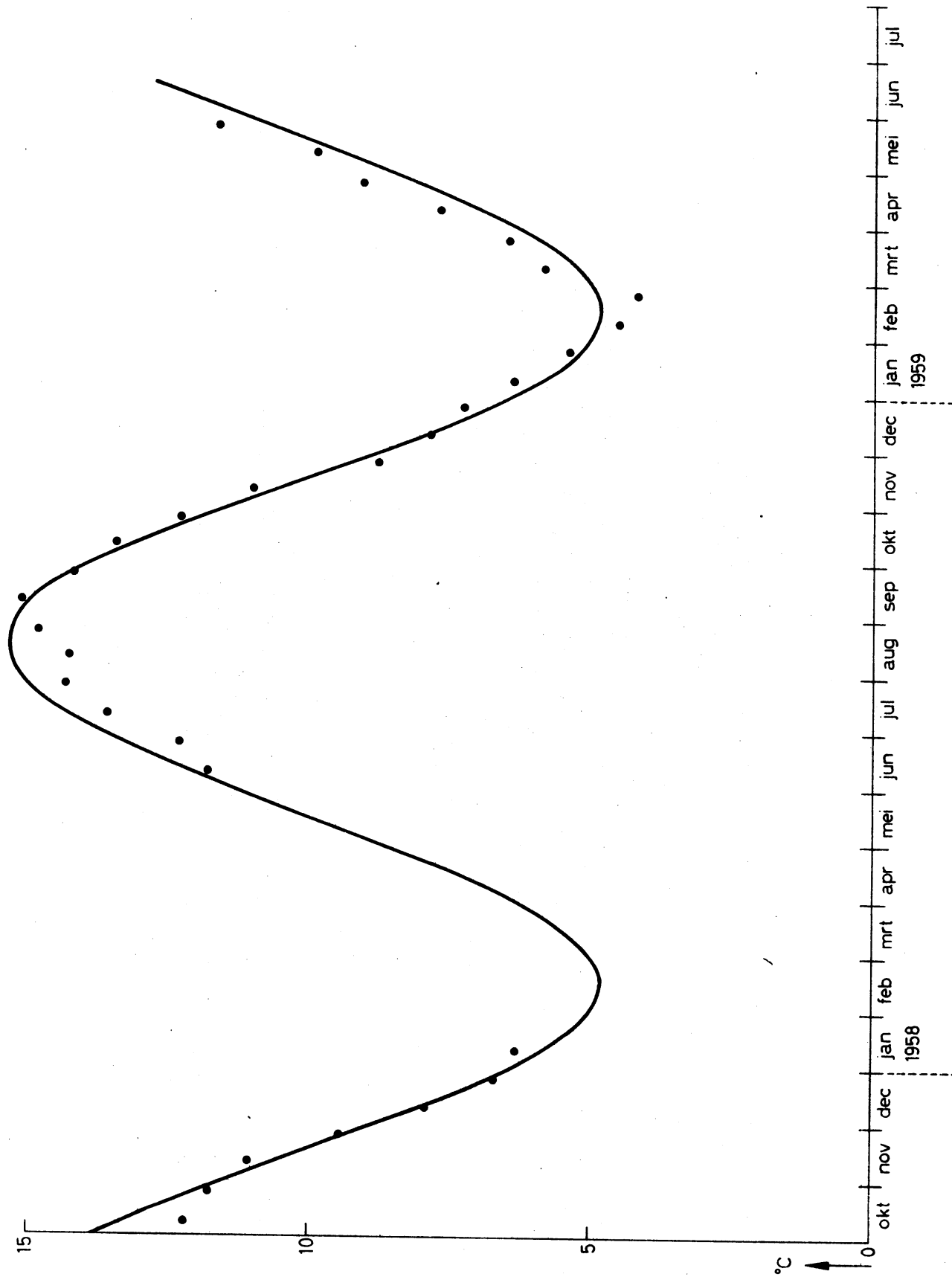


fig. 2.3.4

Oene grondtemperatuur 75 cm

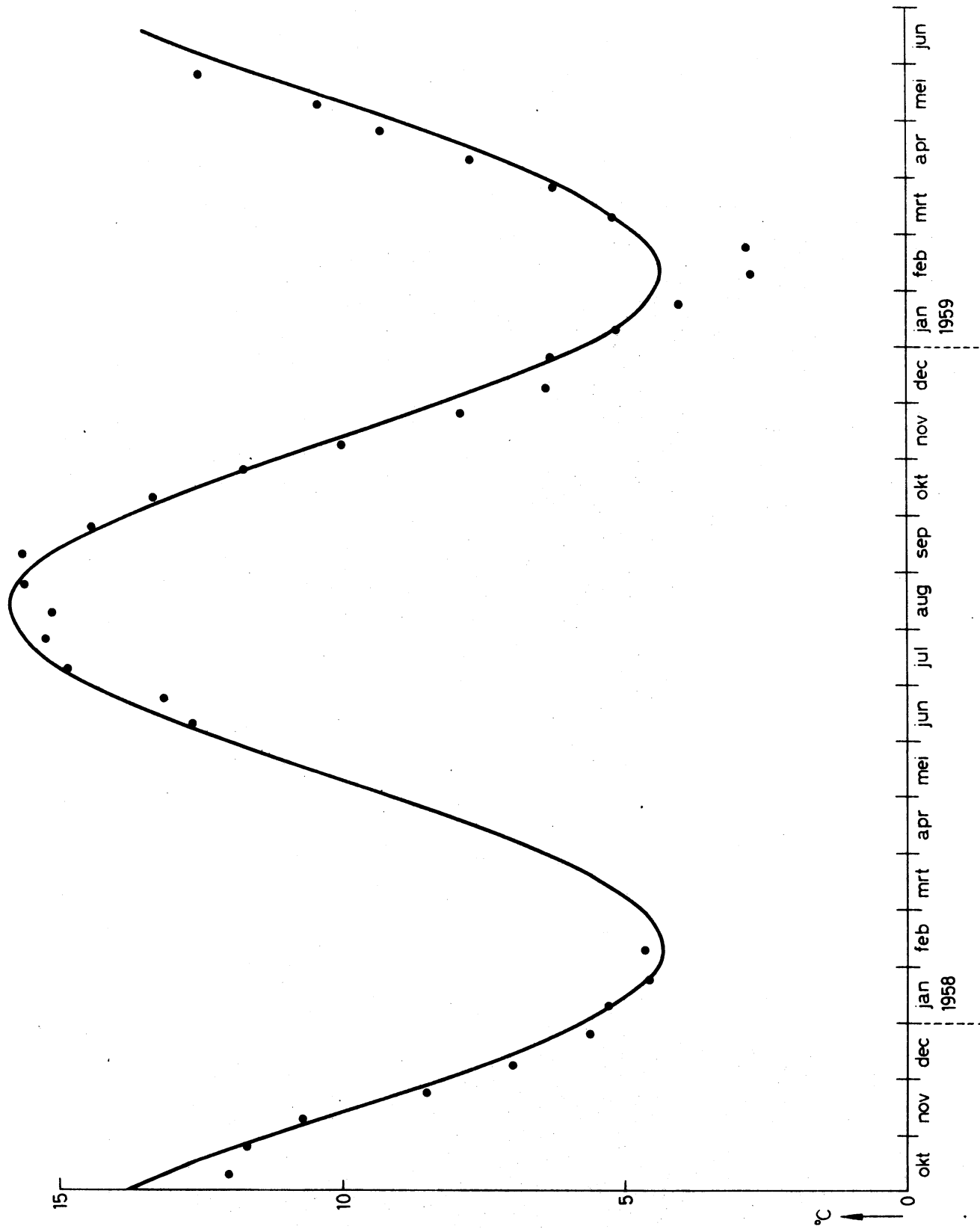


fig. 2.3.5

Oene grondtemperatuur 50 cm

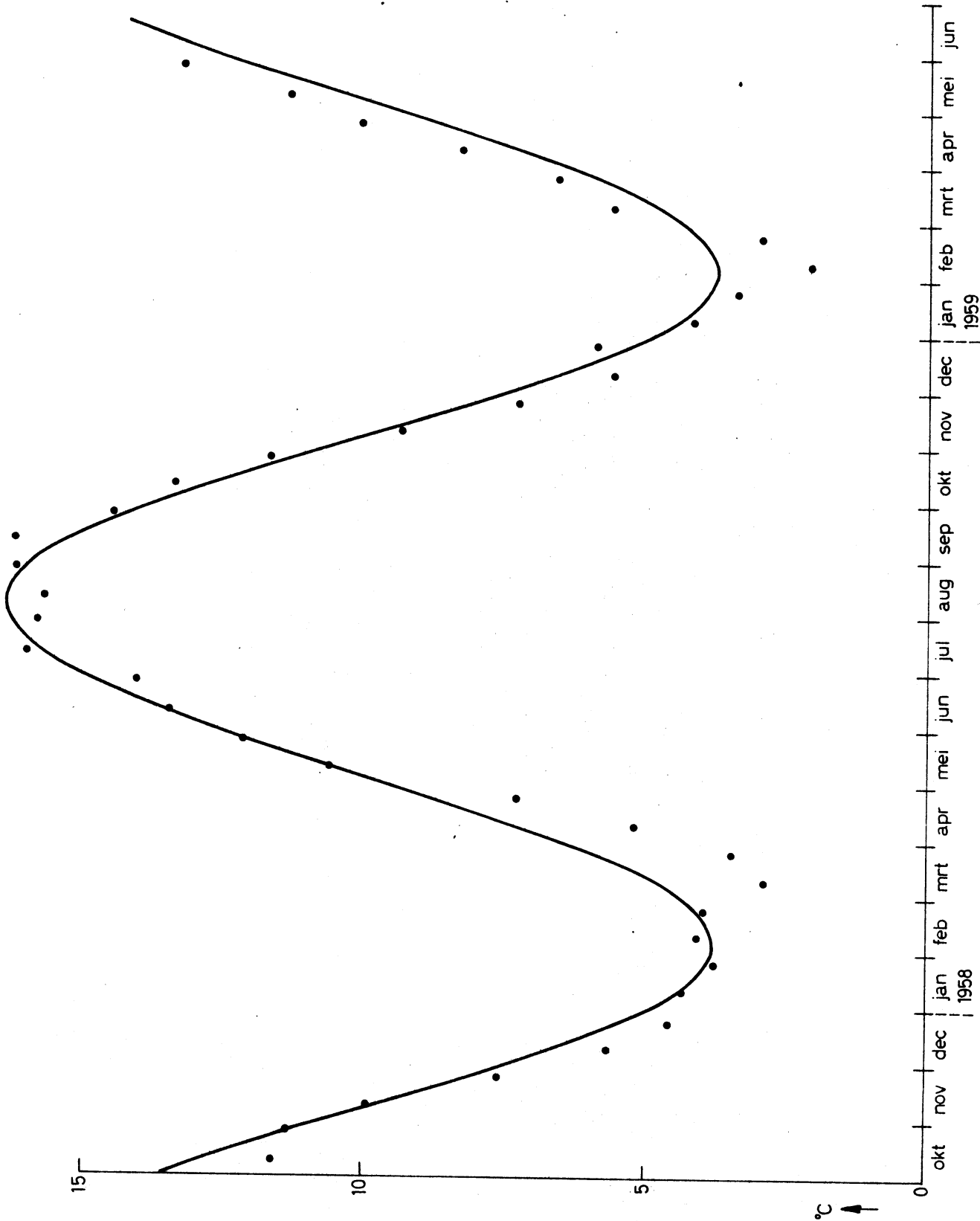
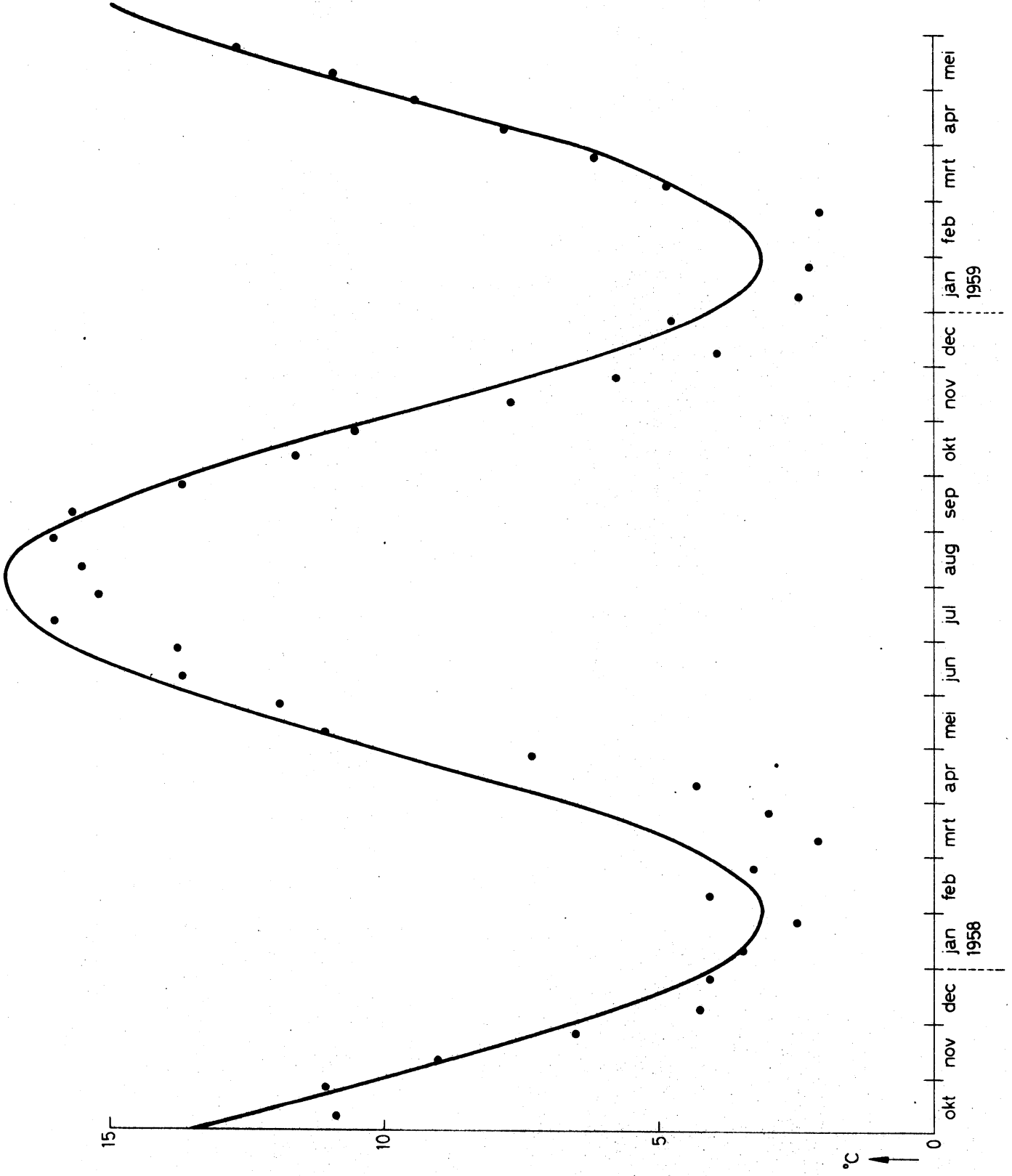


fig. 2.3.6

Oene grondtemperatuur 25 cm



Oene grondtemperatuur oppervlakte

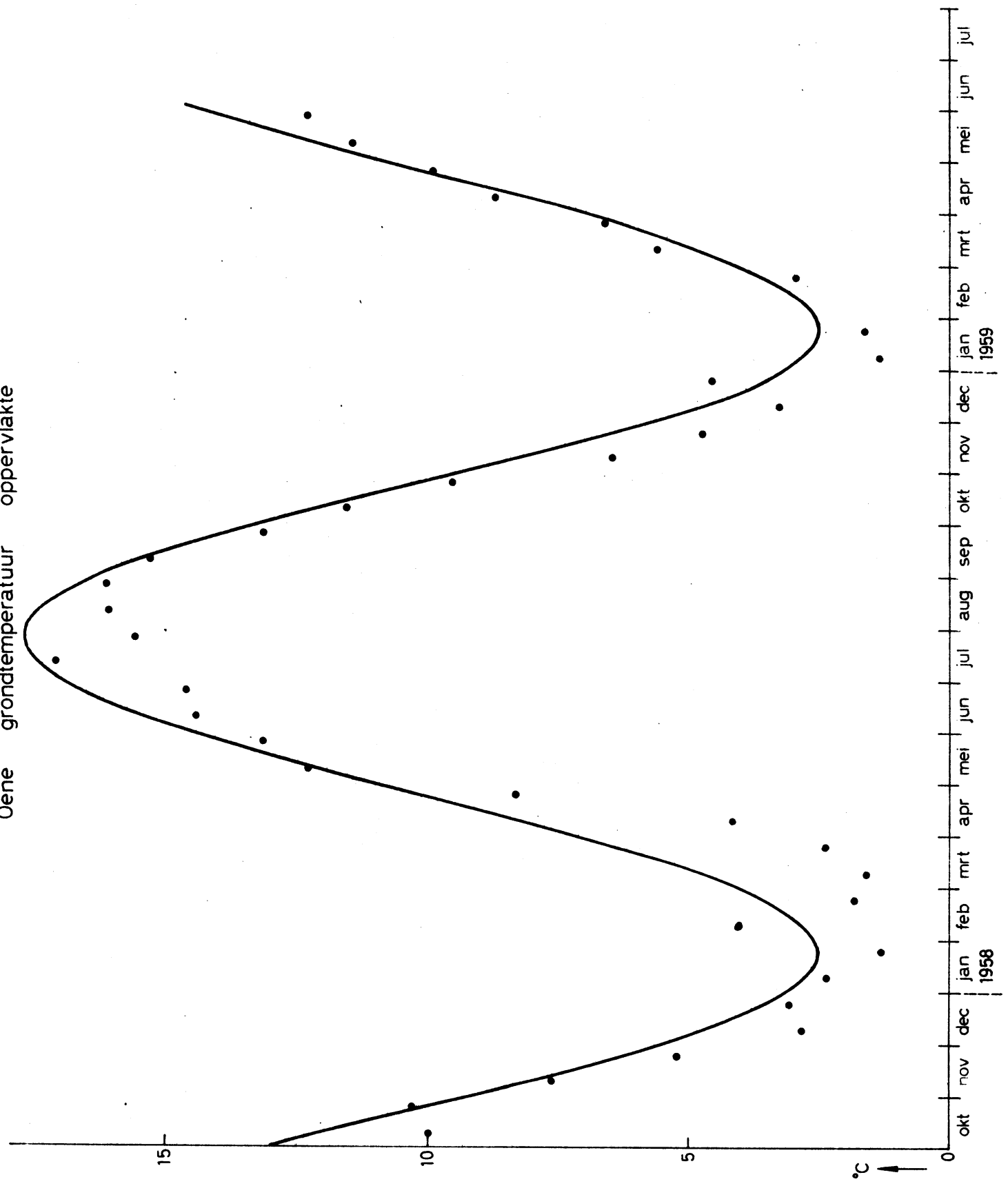


fig. 2.4.1

De Bilt grondtemperatuur 500 cm

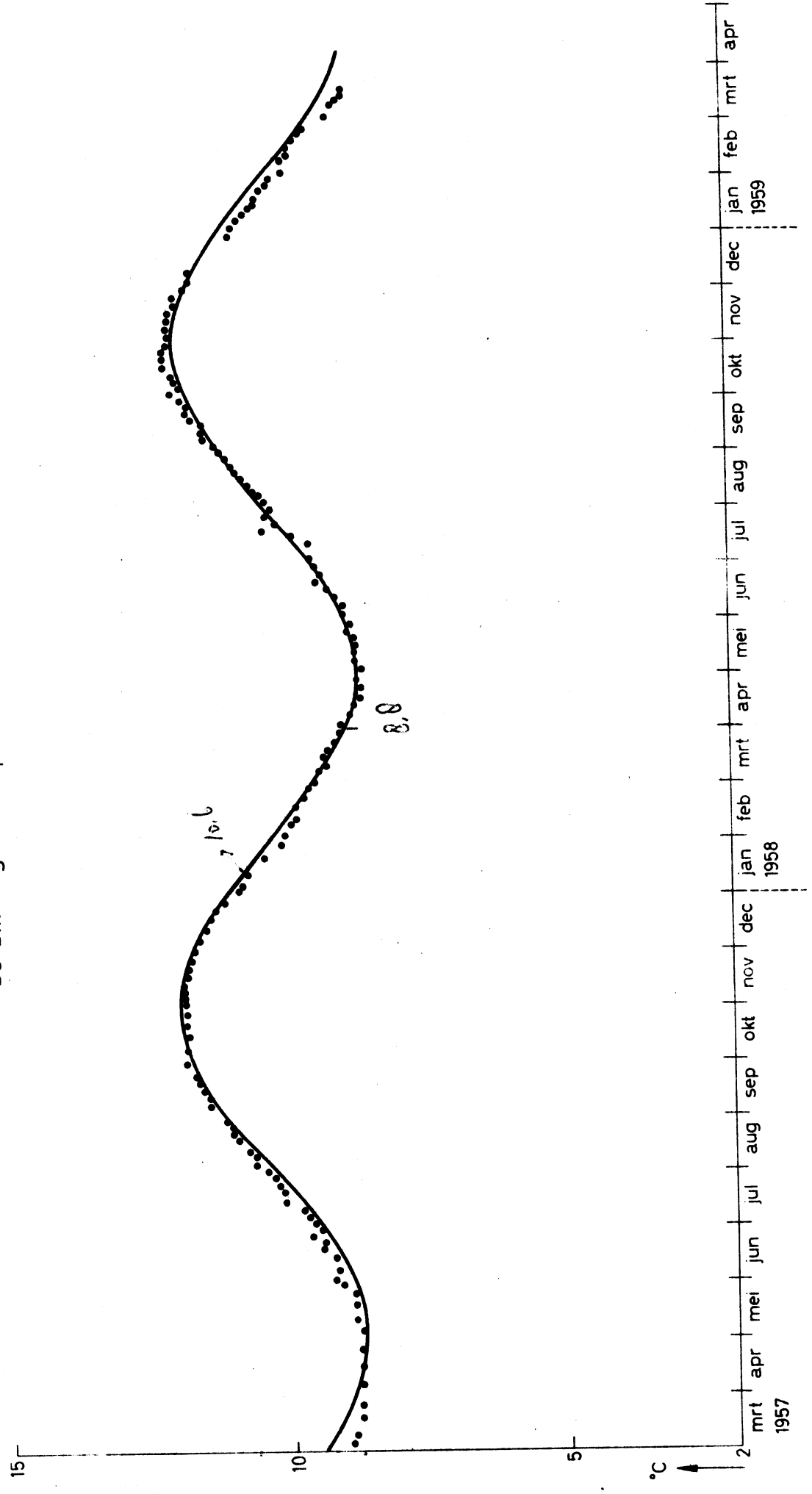


fig. 2.4.2

De Bilt grondtemperatuur 300 cm

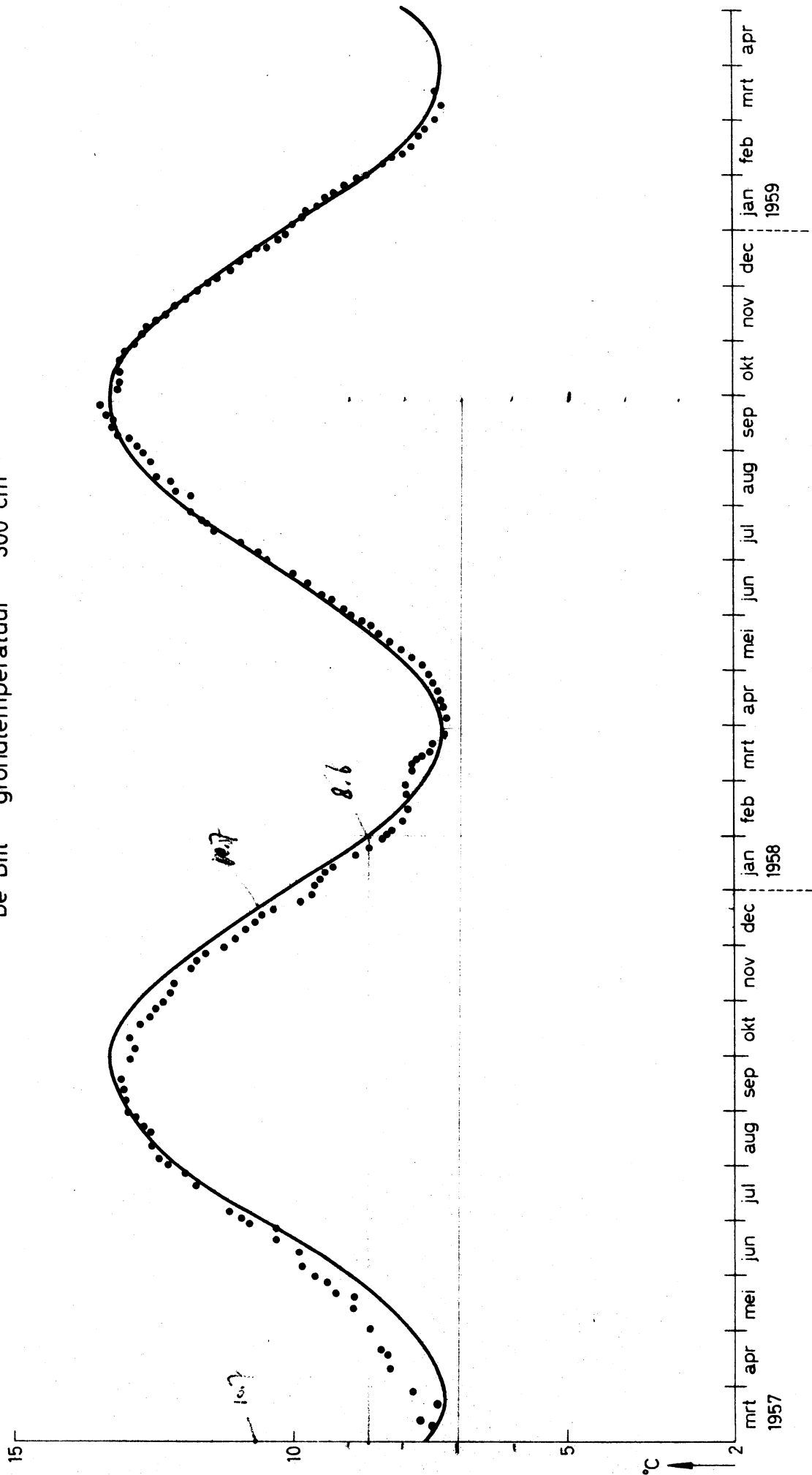


fig. 2.4.3

De Bilt grondtemperatuur 100 cm

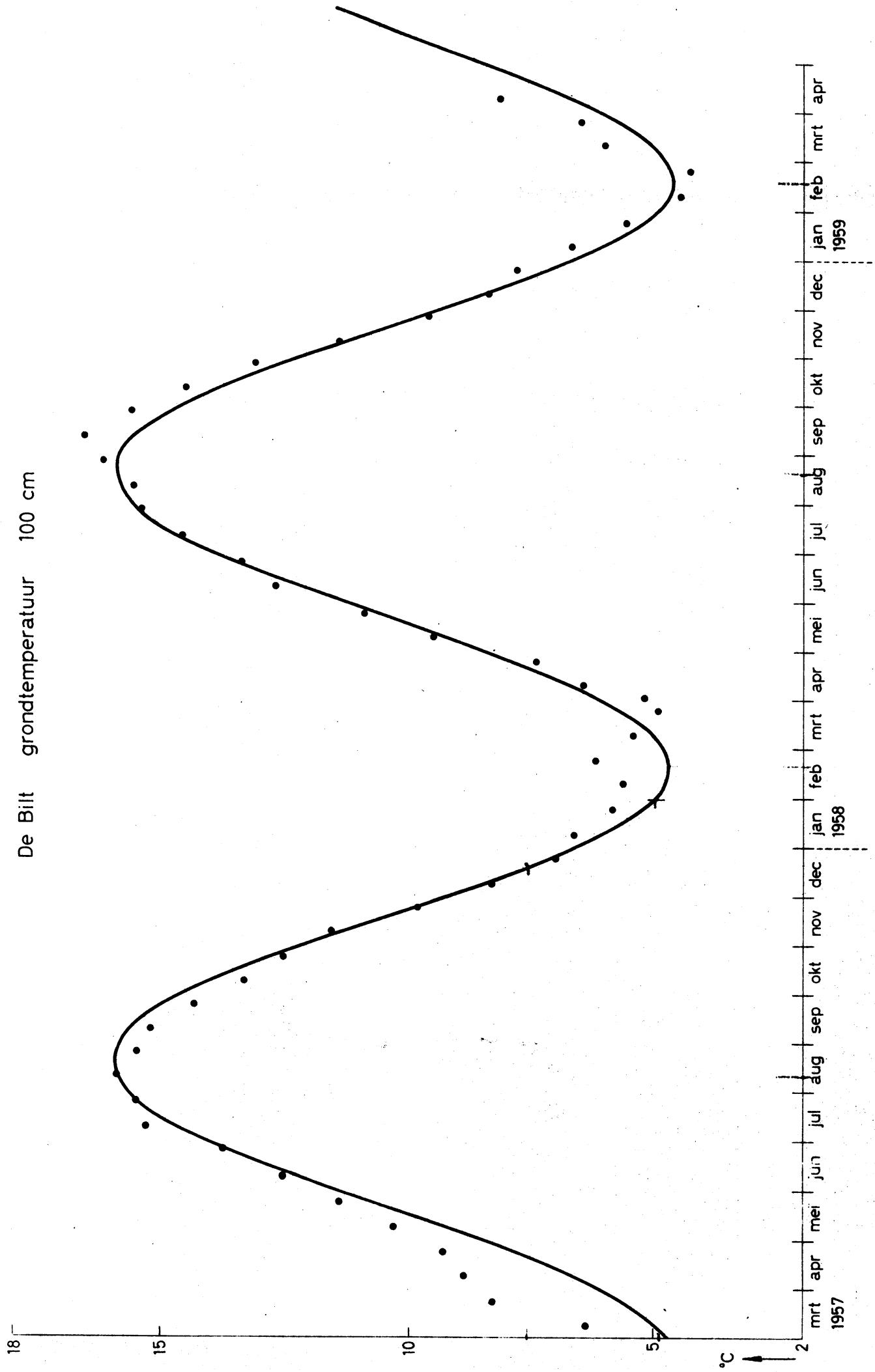




fig. 2.4.4

De Bilt grondtemperatuur 75 cm

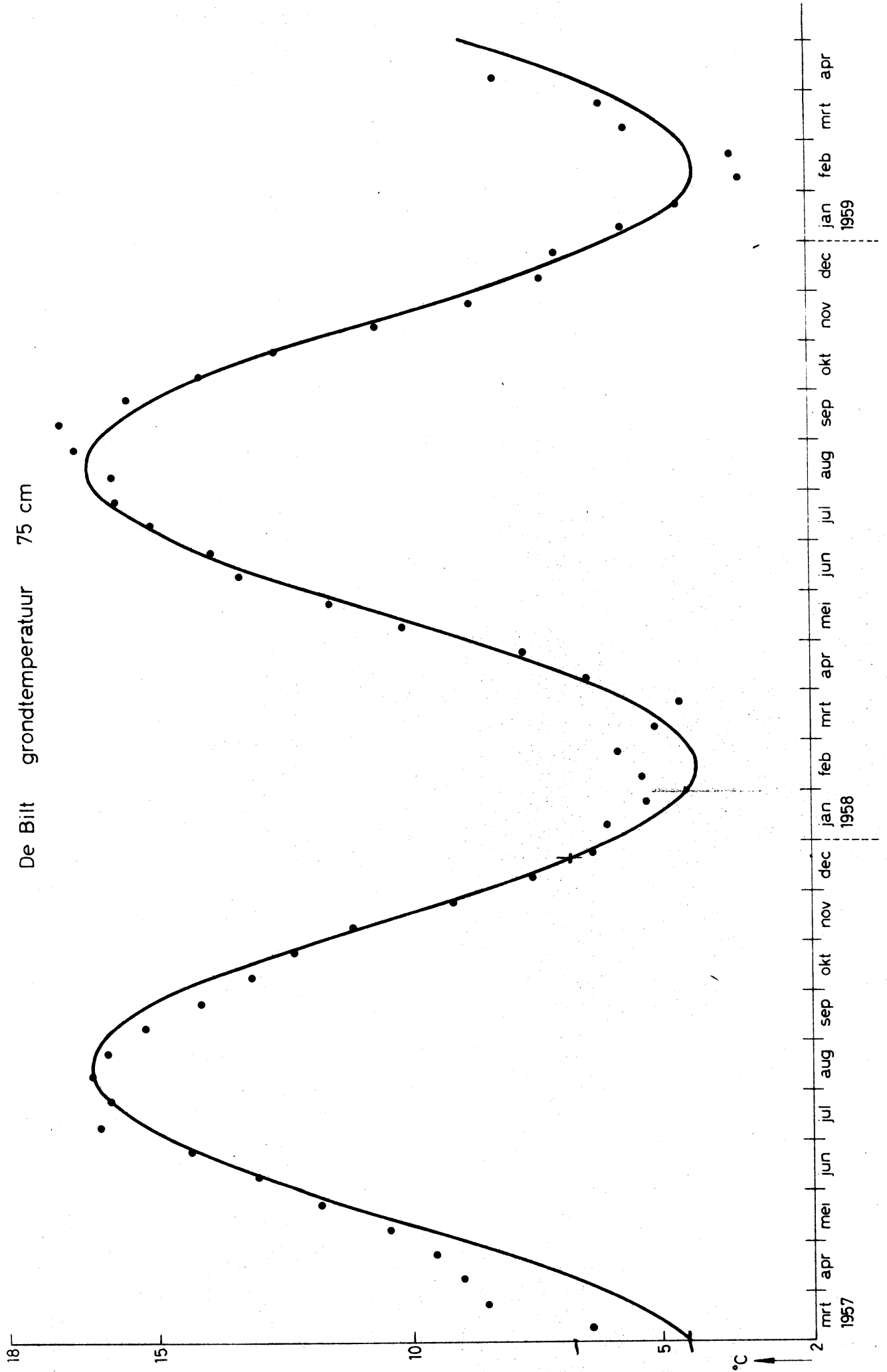


fig. 2.4.5

De Bilt grondtemperatuur 50 cm

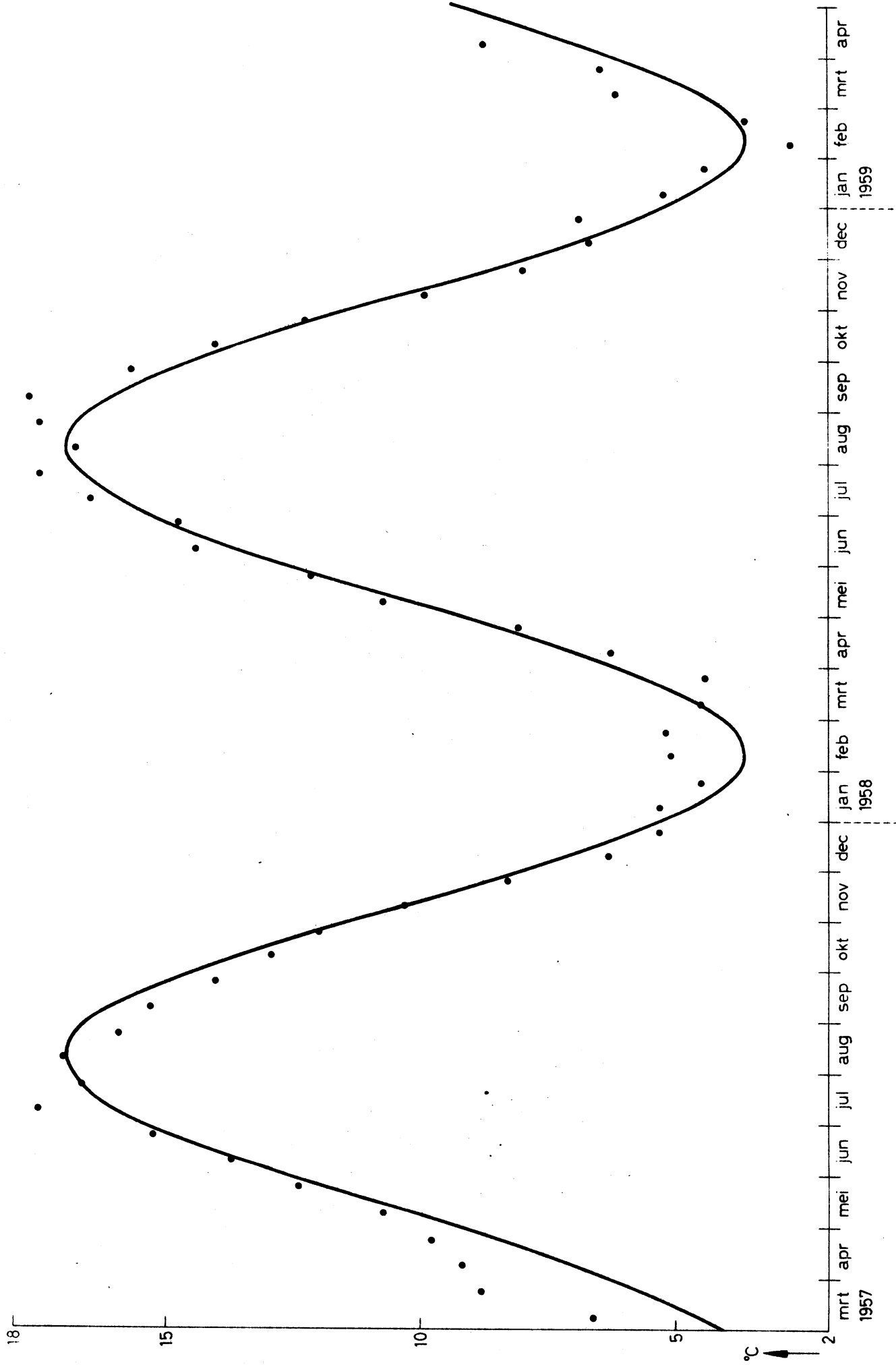


fig. 2.4.6

De Bilt grondtemperatuur 25 cm

— „gladgestreken” kromme  
- - - - - aangepaste kromme

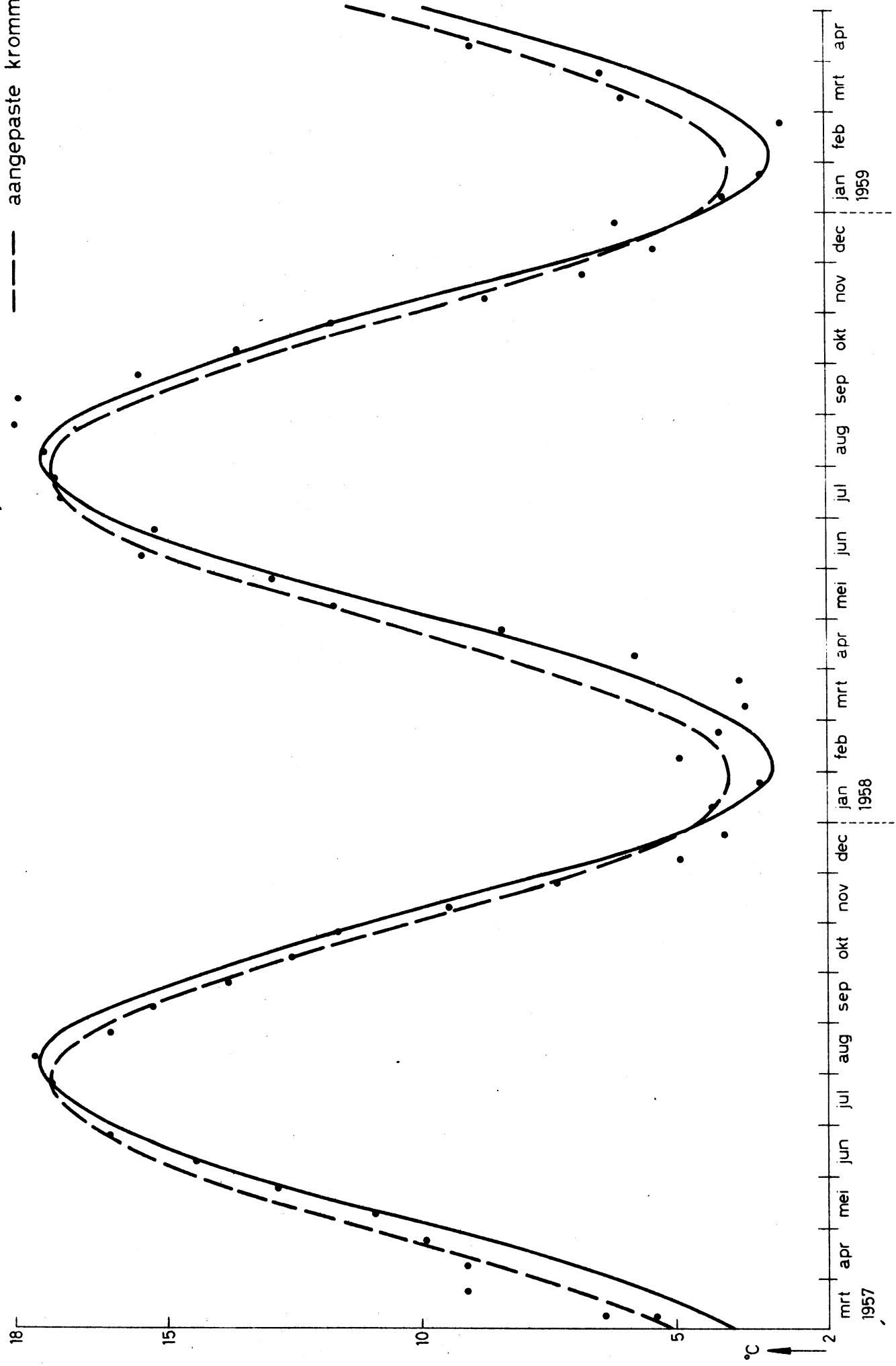


fig. 2.5.1

Rijkswegenbouwlaboratorium Scheveningen grondtemperatuur 500 cm

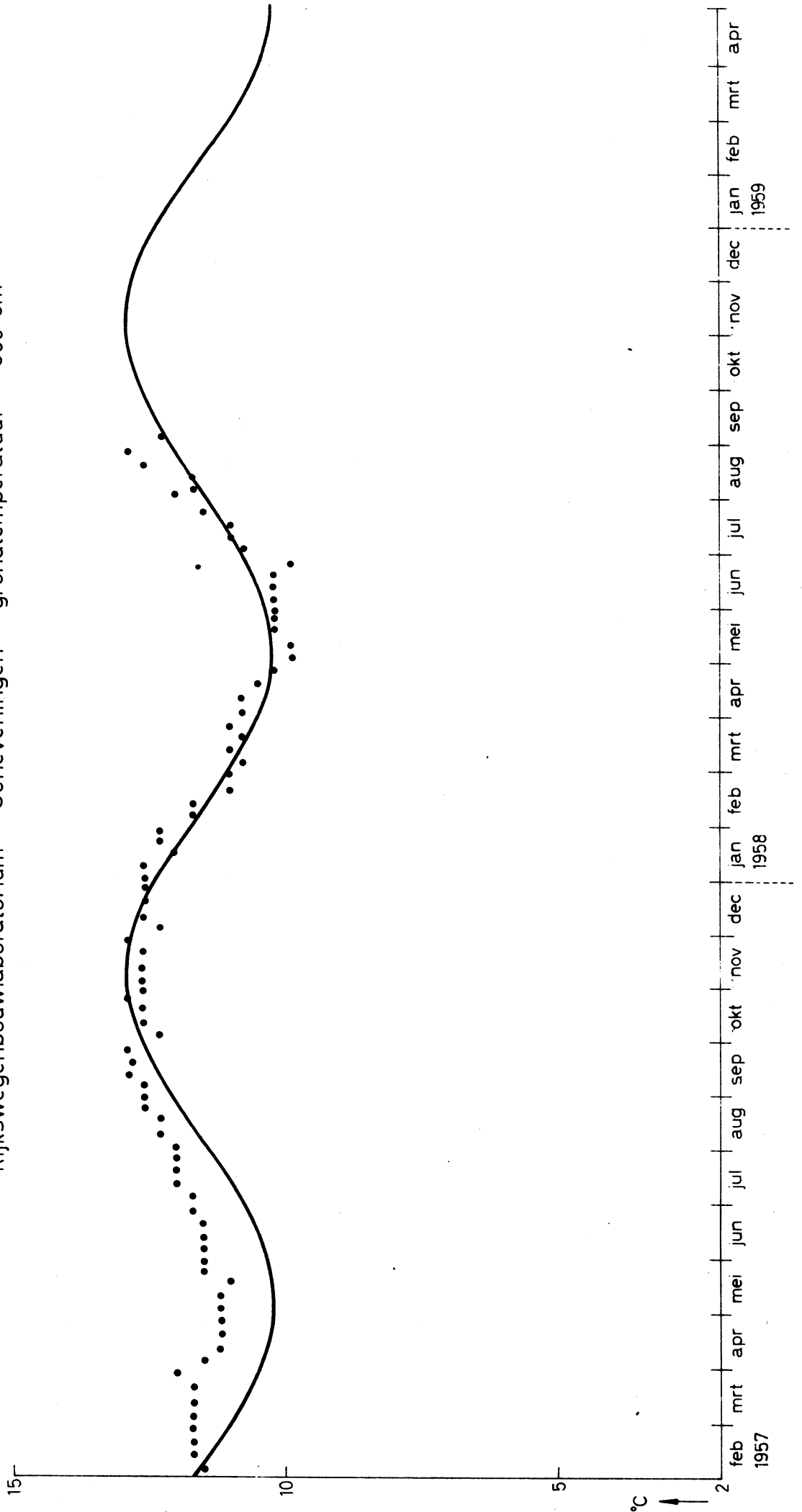


fig.2.5.2

Rijkswegenboulaboratorium    Scheveningen    grondtemperatuur    400 cm

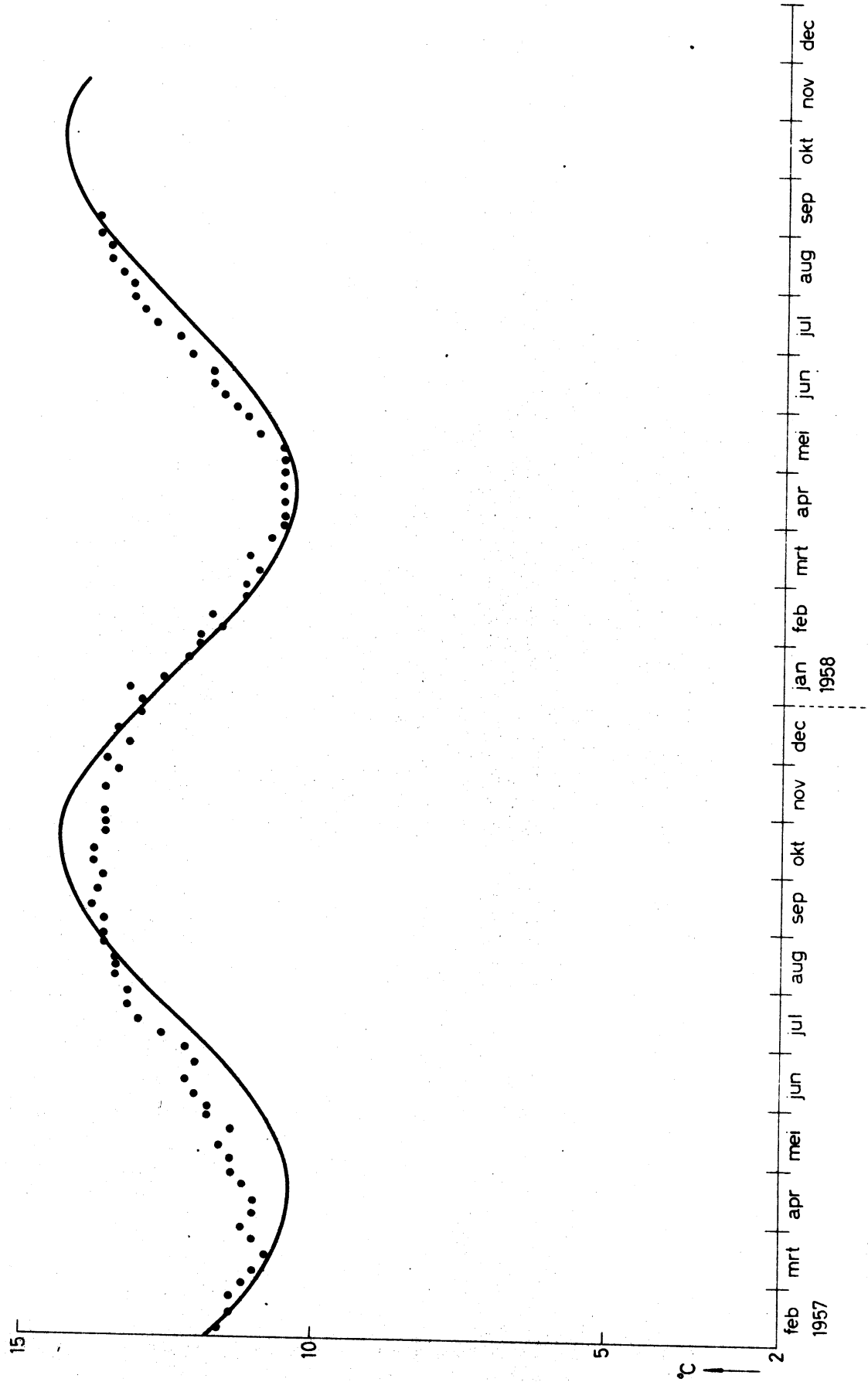
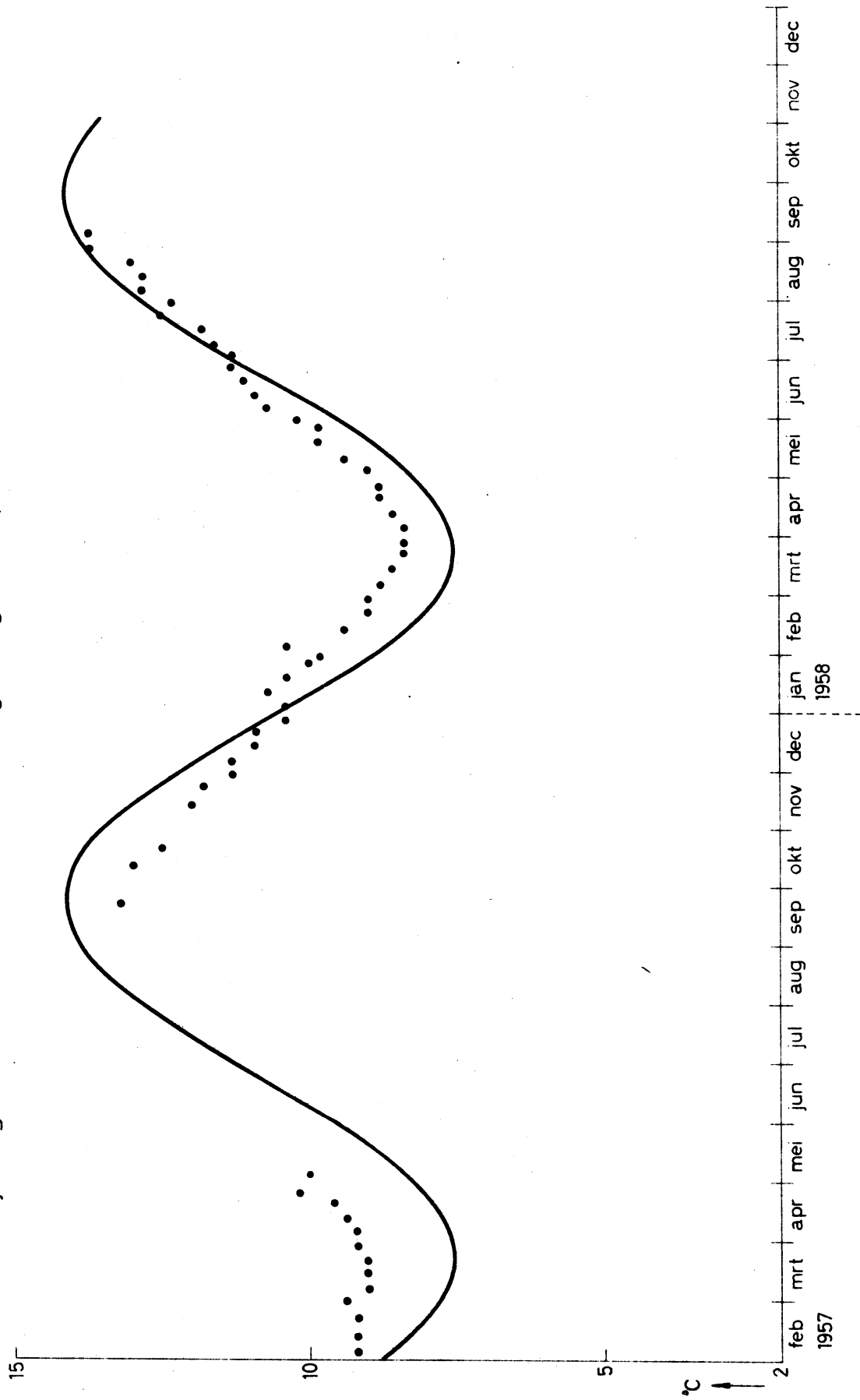


fig. 2.5.3

Rijkswegenbouwlaboratorium Scheveningen grondtemperatuur 300 cm



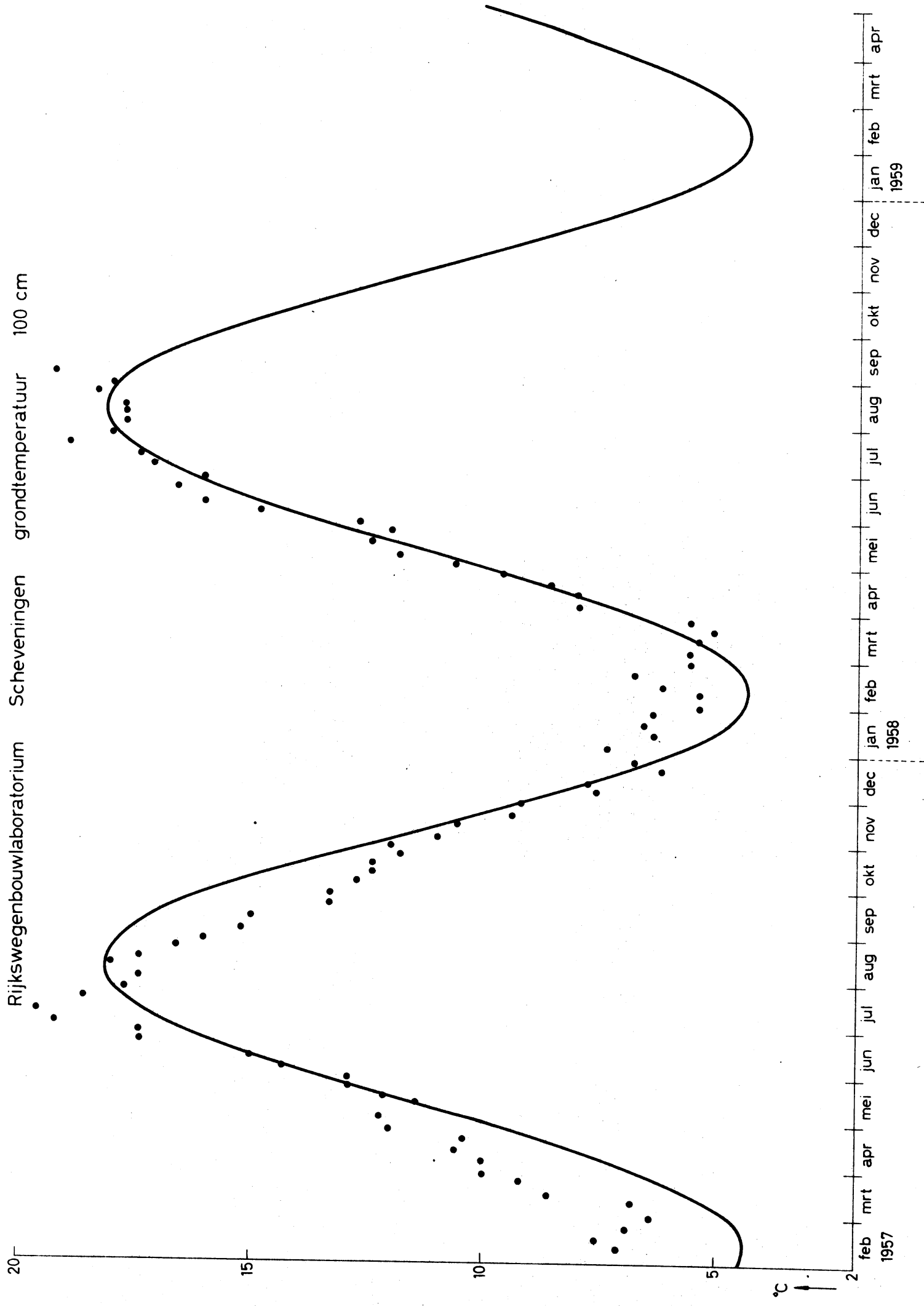


fig. 2.5.5

Rijkswegenbouwlaboratorium    Scheveningen    grondtemperatuur    oppervlakte

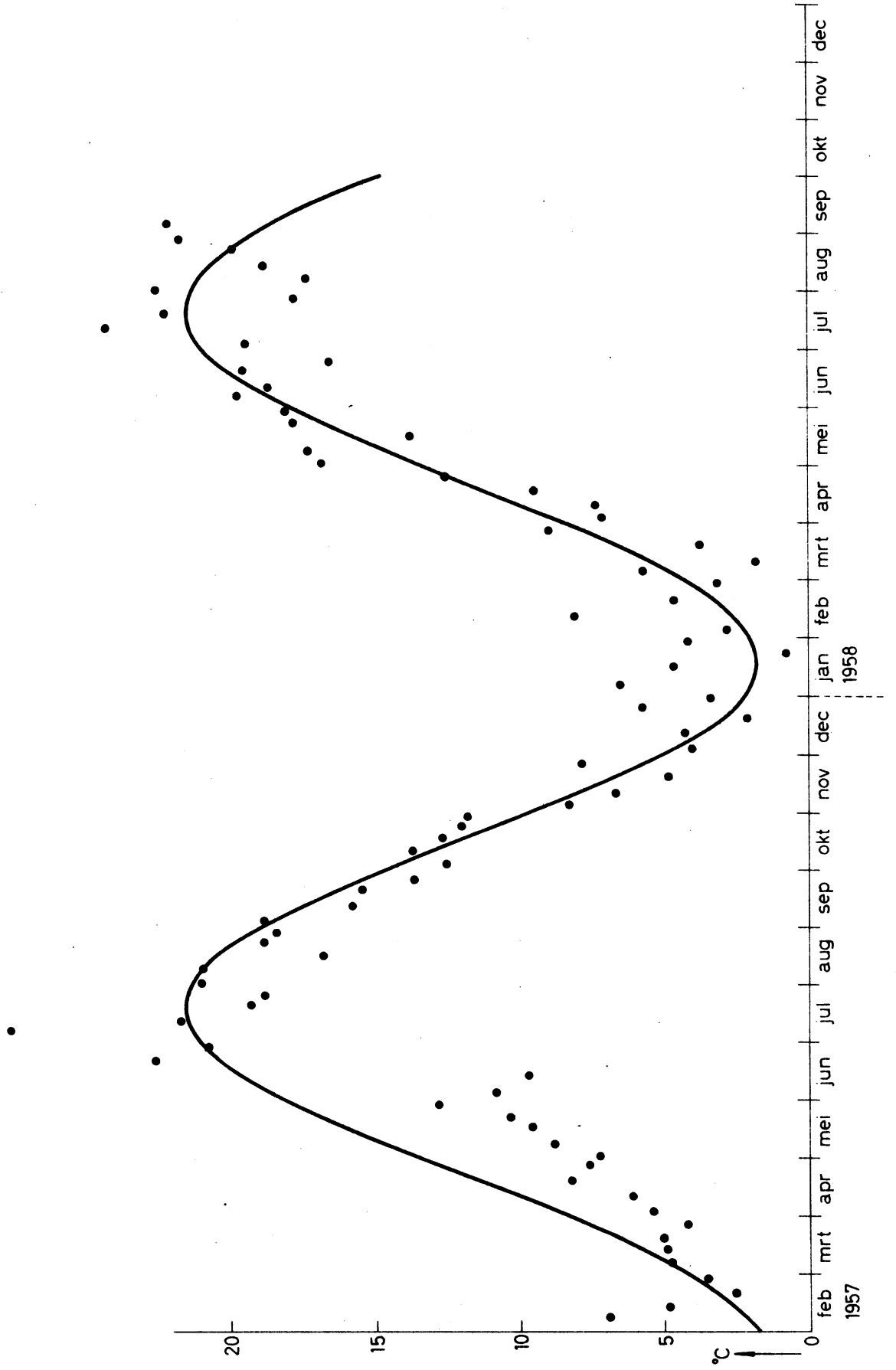






Fig 2.7

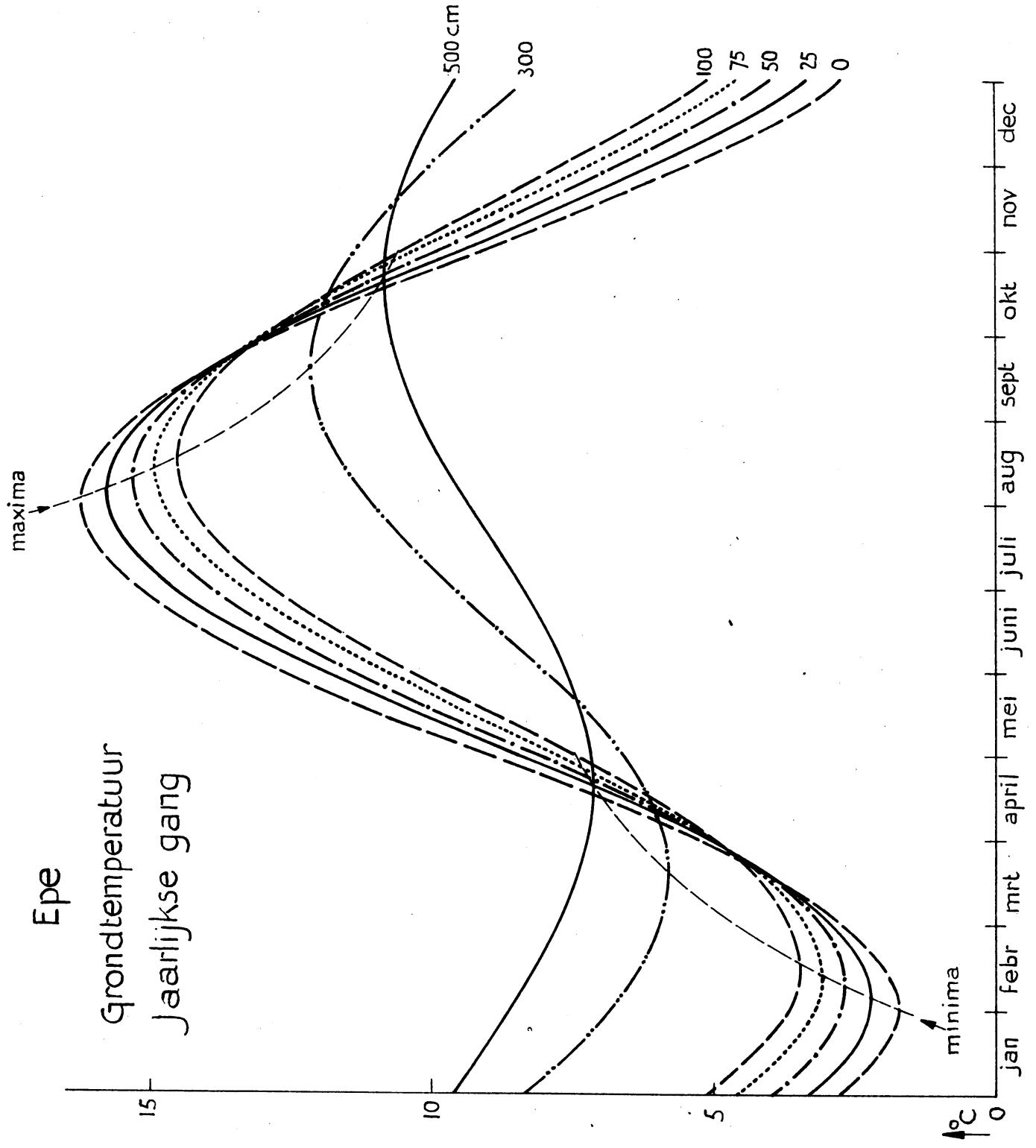


Fig 2.8

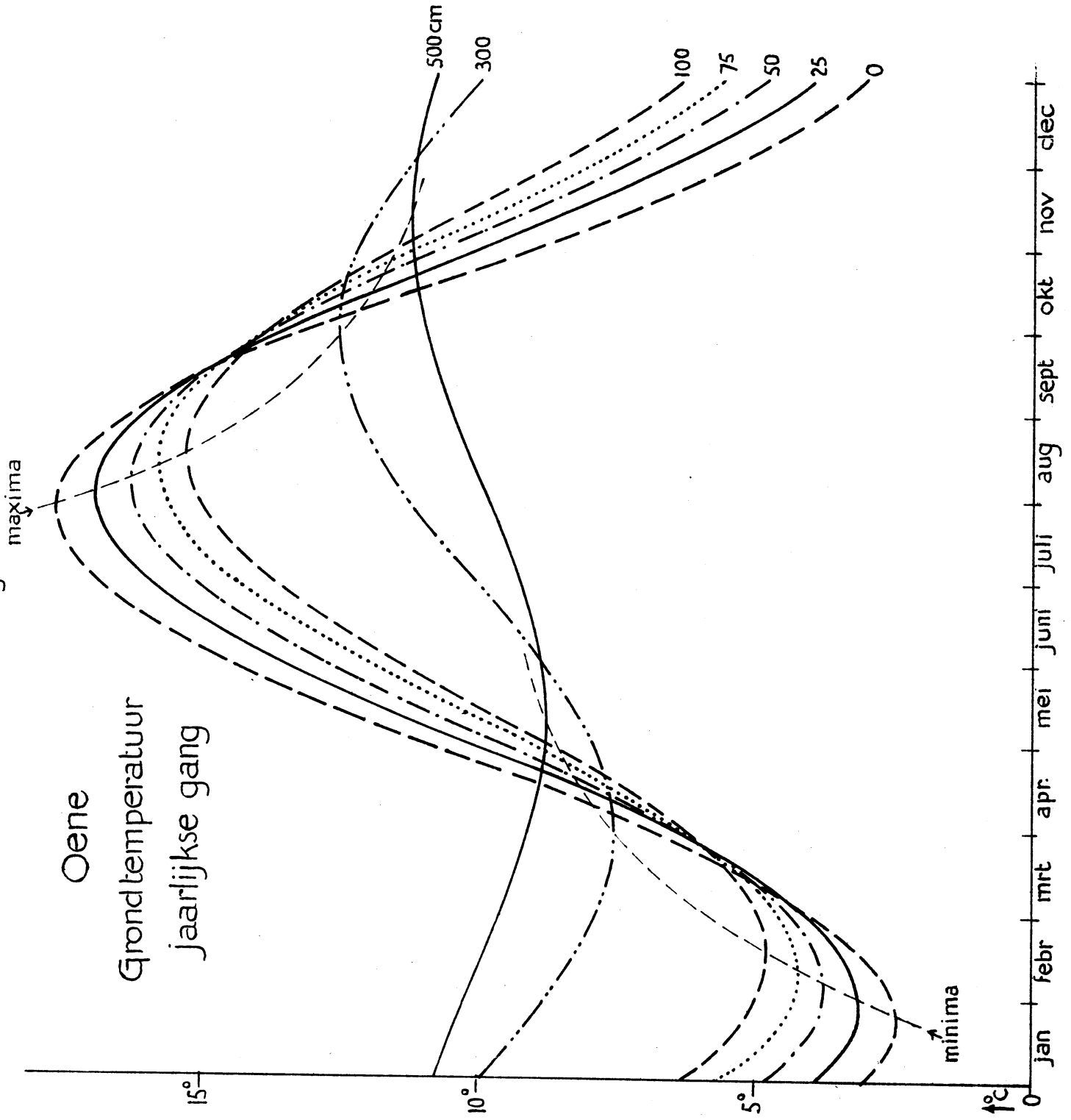


Fig 2.9

Grondtemperatuur  
jaarlijkse gang op 3 m. diepte

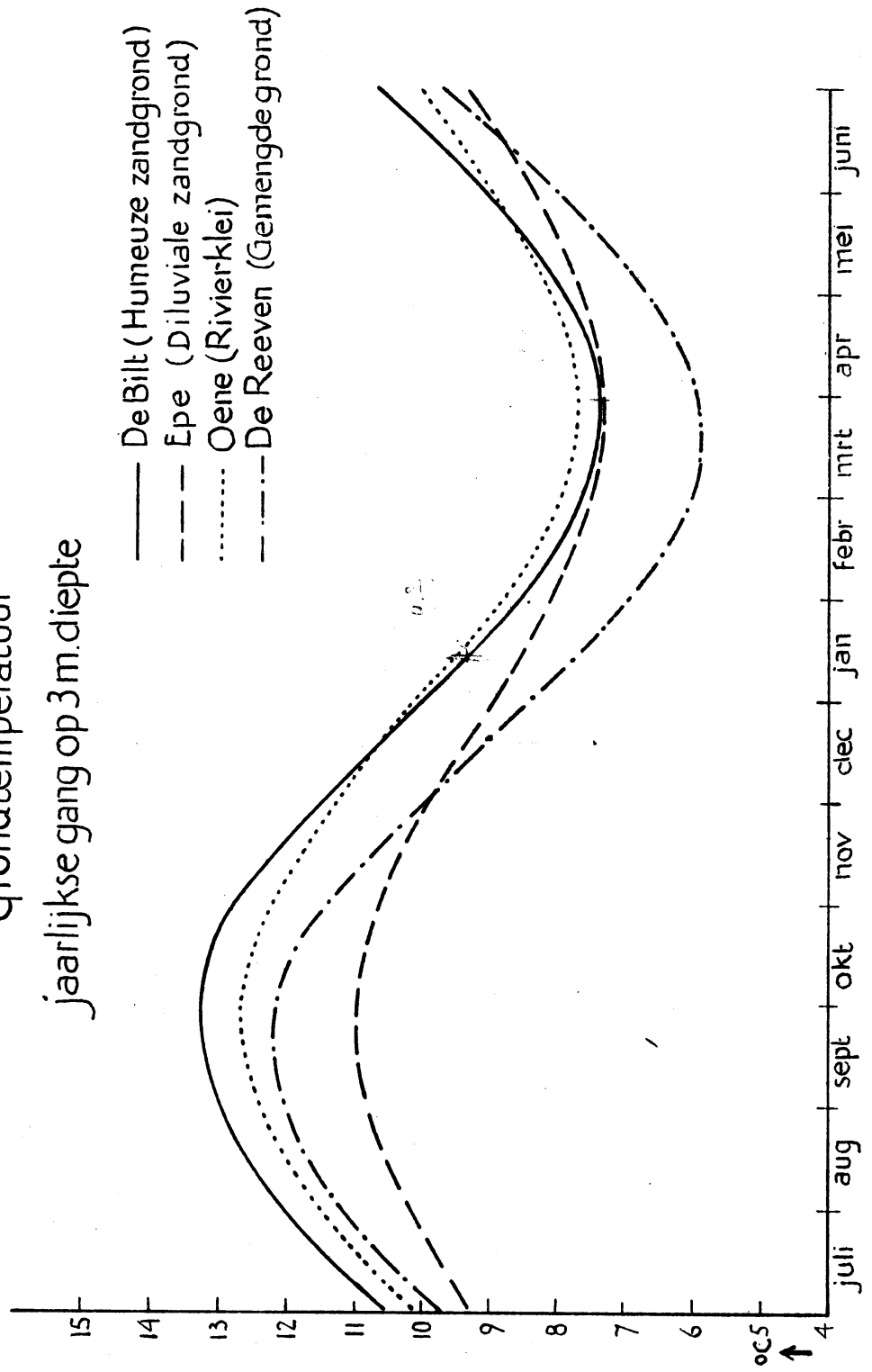


Fig 2.10

# Jaarlijkse gang grondtemperatuur op 5m diepte

- De Bilt humeuze zandgrond
- Epe diluviale zandgrond
- Oene rivierklei
- - - - De Reeven gemengde grond

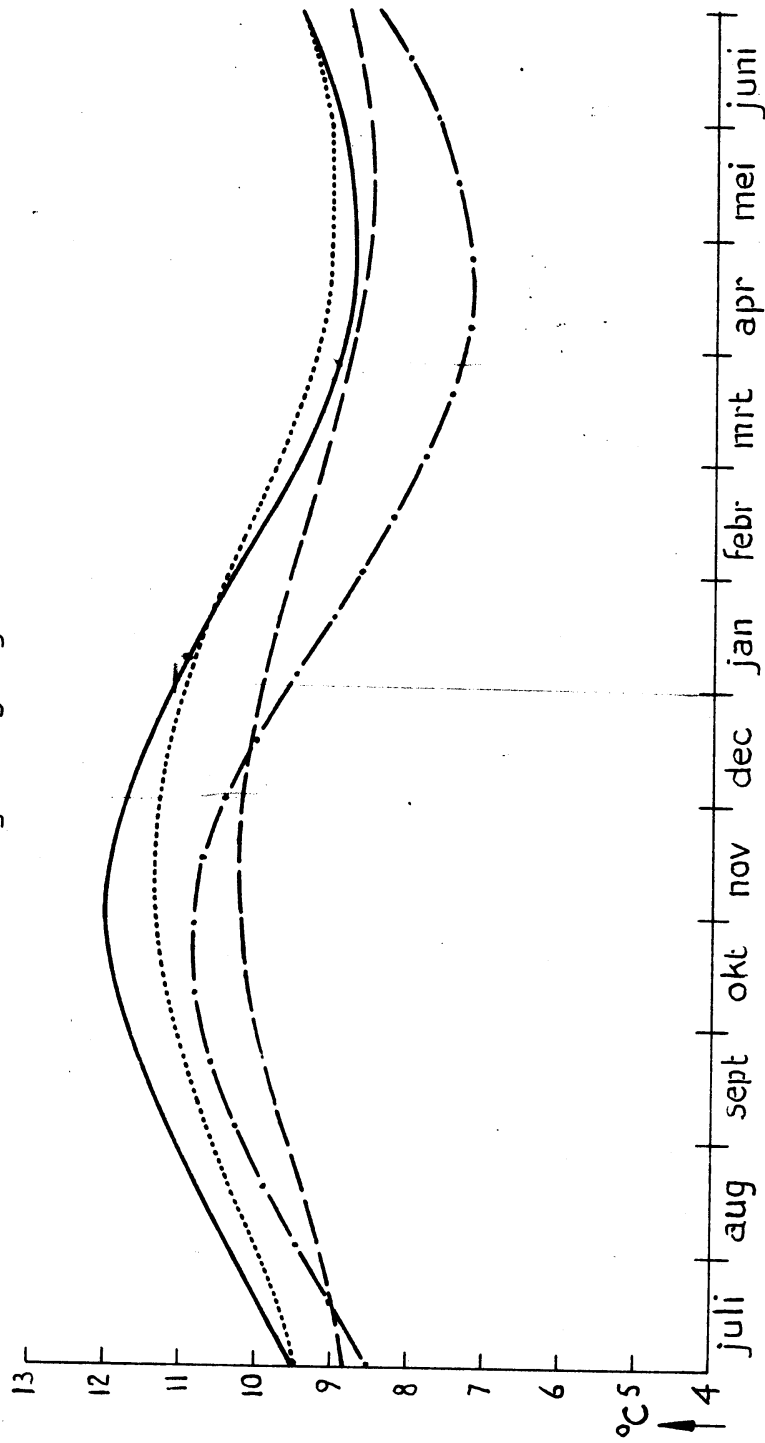


Fig 3.1.  
 Temperatur in een sneeuwdek  
 van 18 tot 15cm dikte

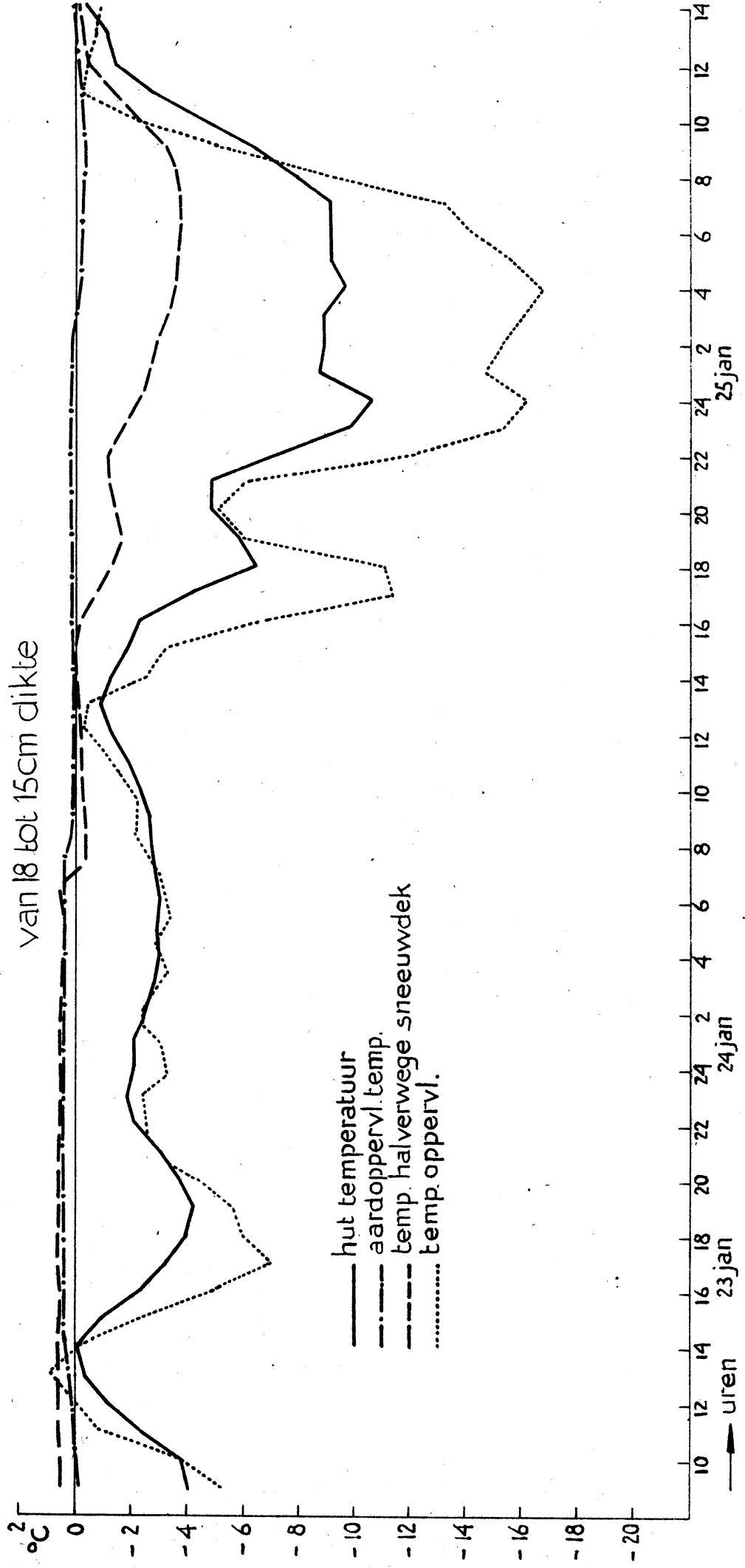


Fig. 4.3.1

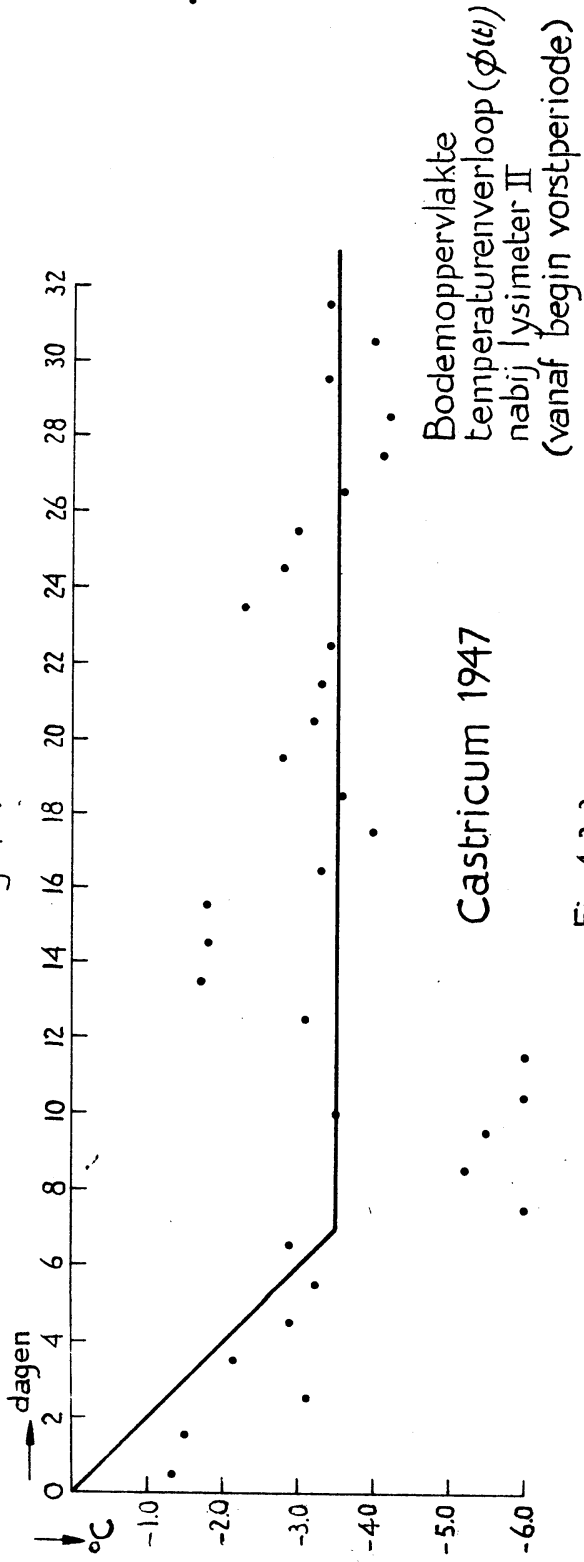


Fig 4.3.3

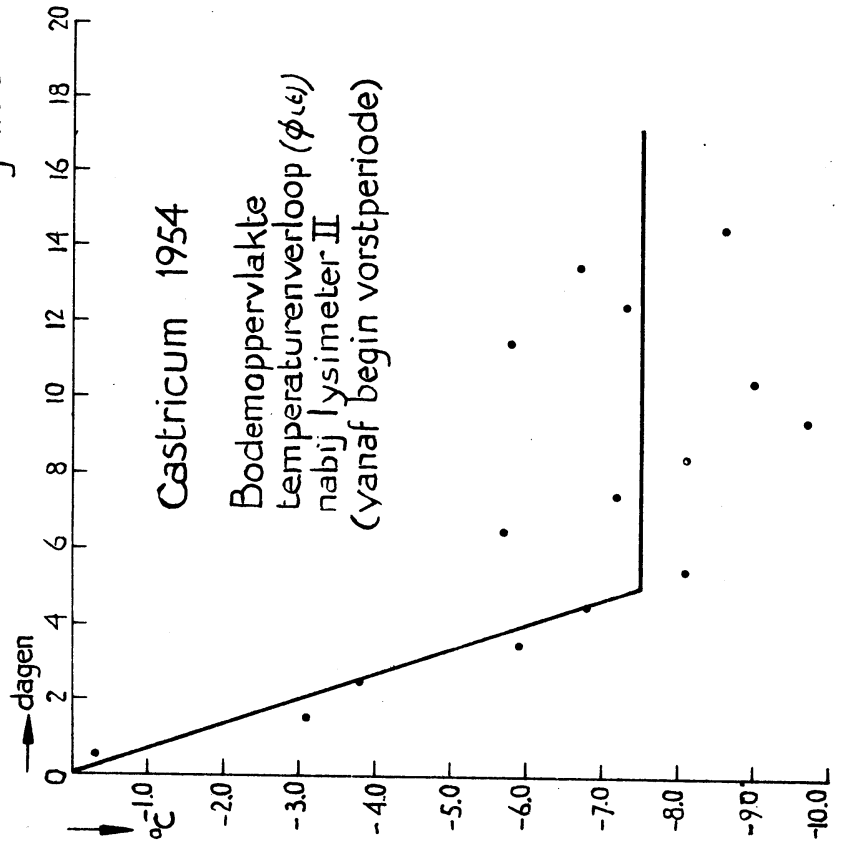
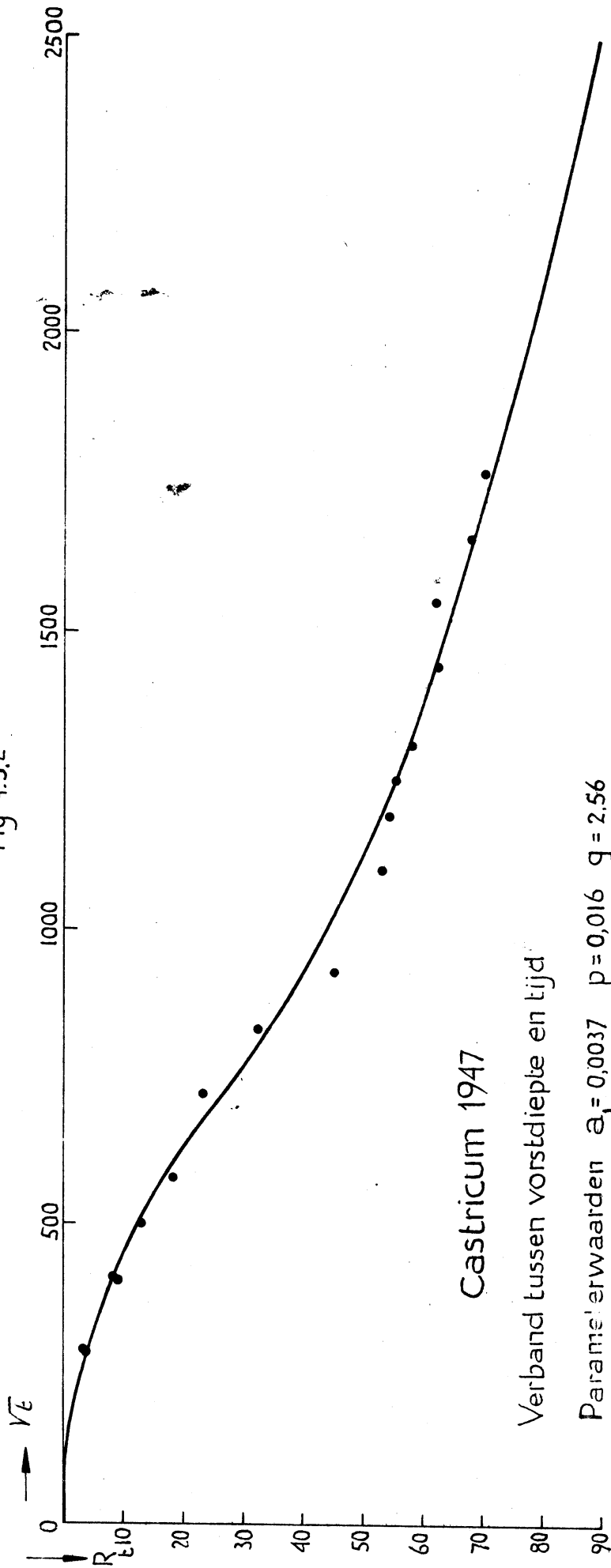


Fig 4.3.2



Castricum 1947

Verband tussen vorstdiepte en tijd

Parameterwaarden  $a_1 = 0,0037$   $p = 0,016$   $q = 2,56$

$T_0 = 3,5$   $\theta = 7$  (dagen) = 609.800 (sec)

$\sqrt{\theta} = 778$



Fig 4.3.4

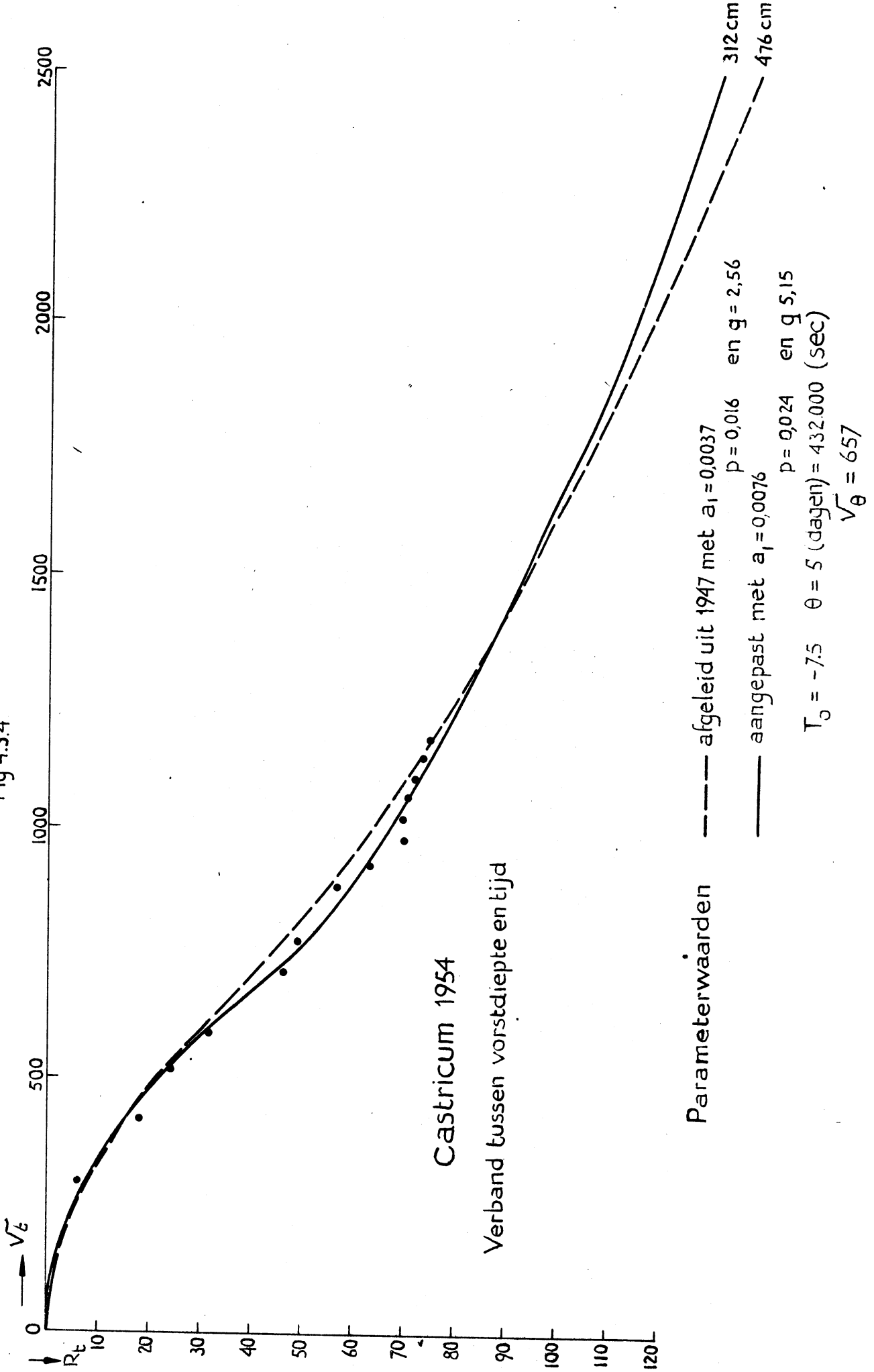


Fig 4.3.6

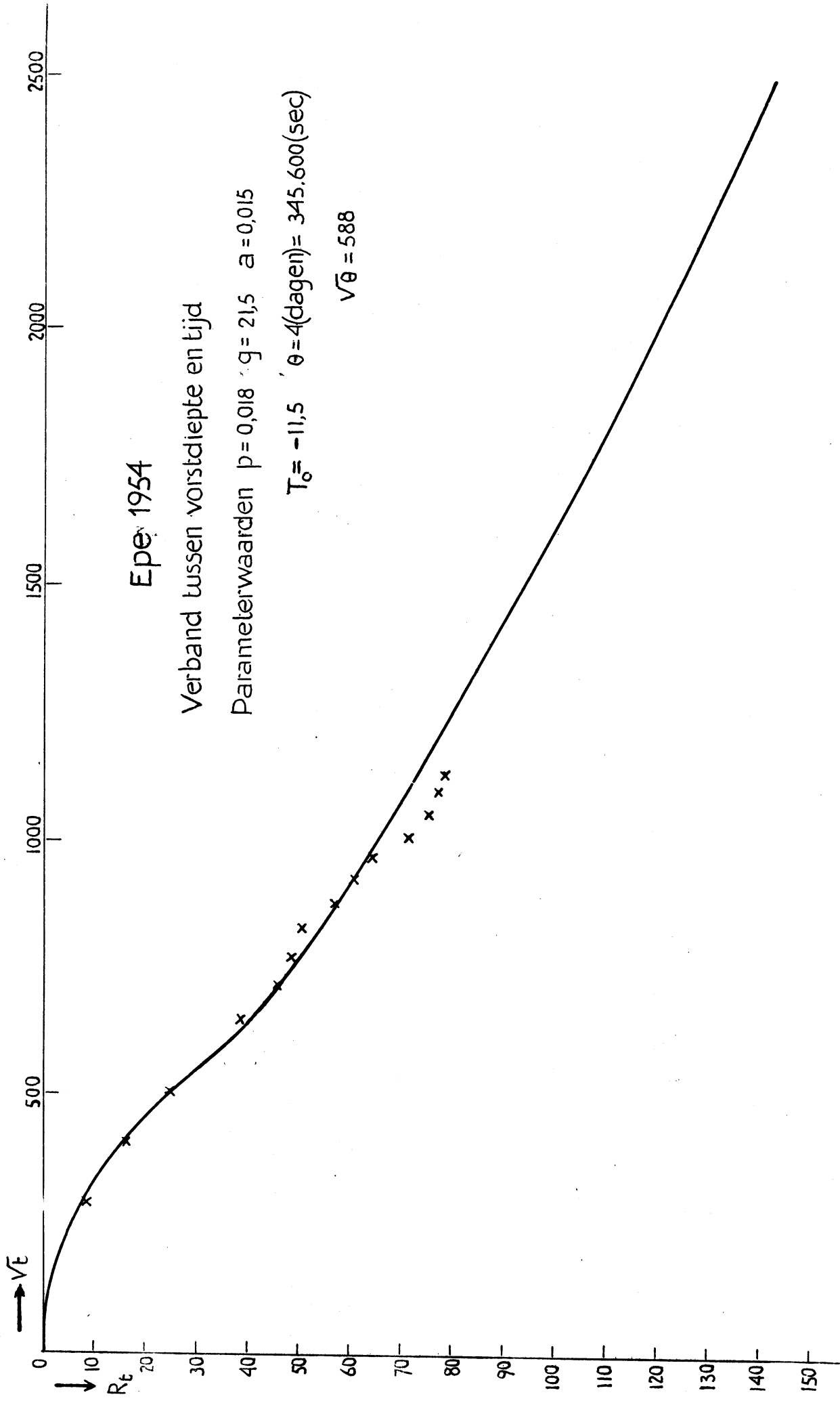


Fig 4.3.5

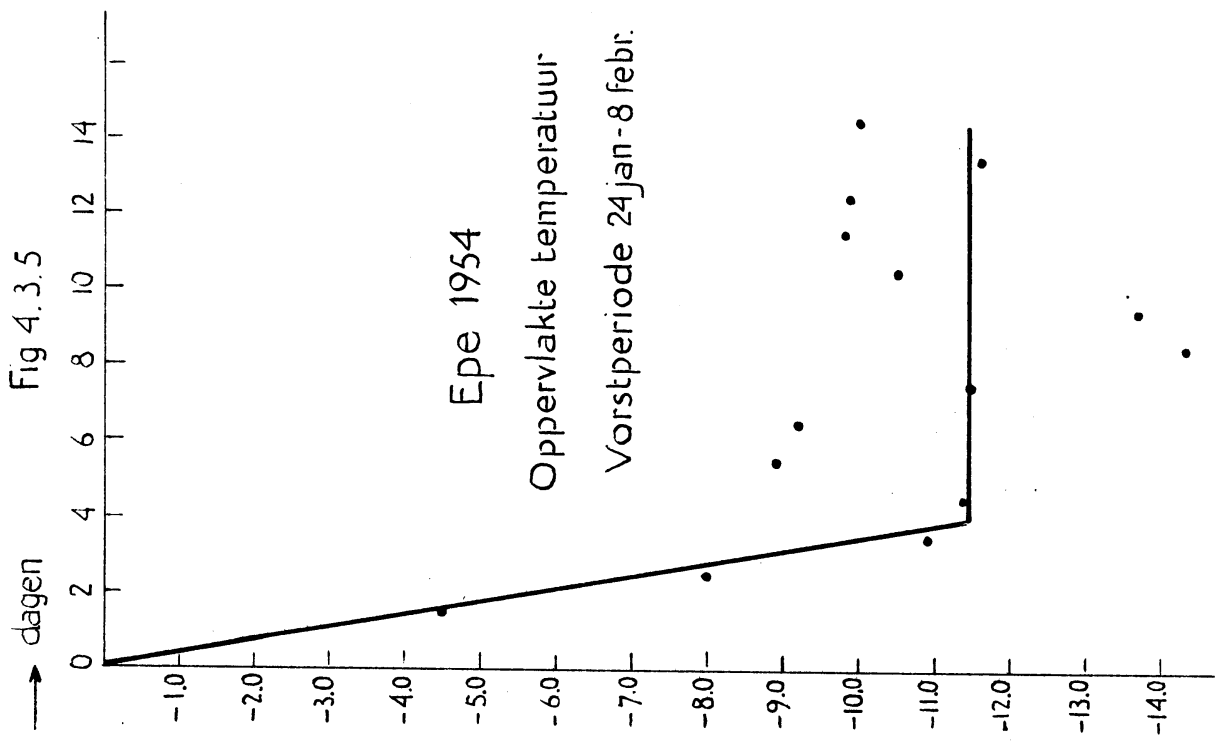


Fig 4.3.7

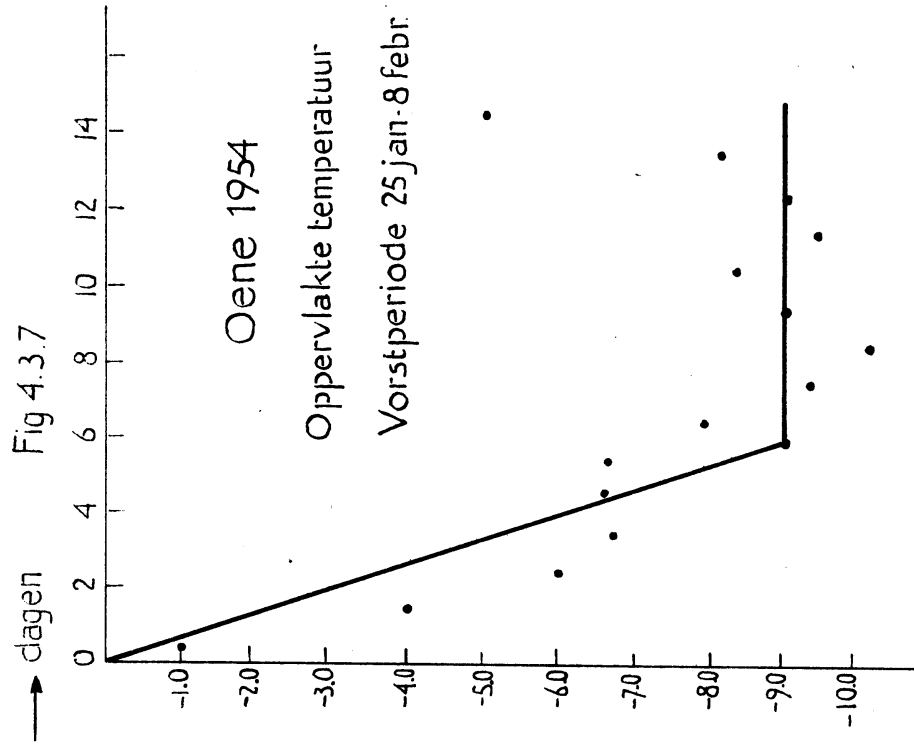


Fig 4.3.8

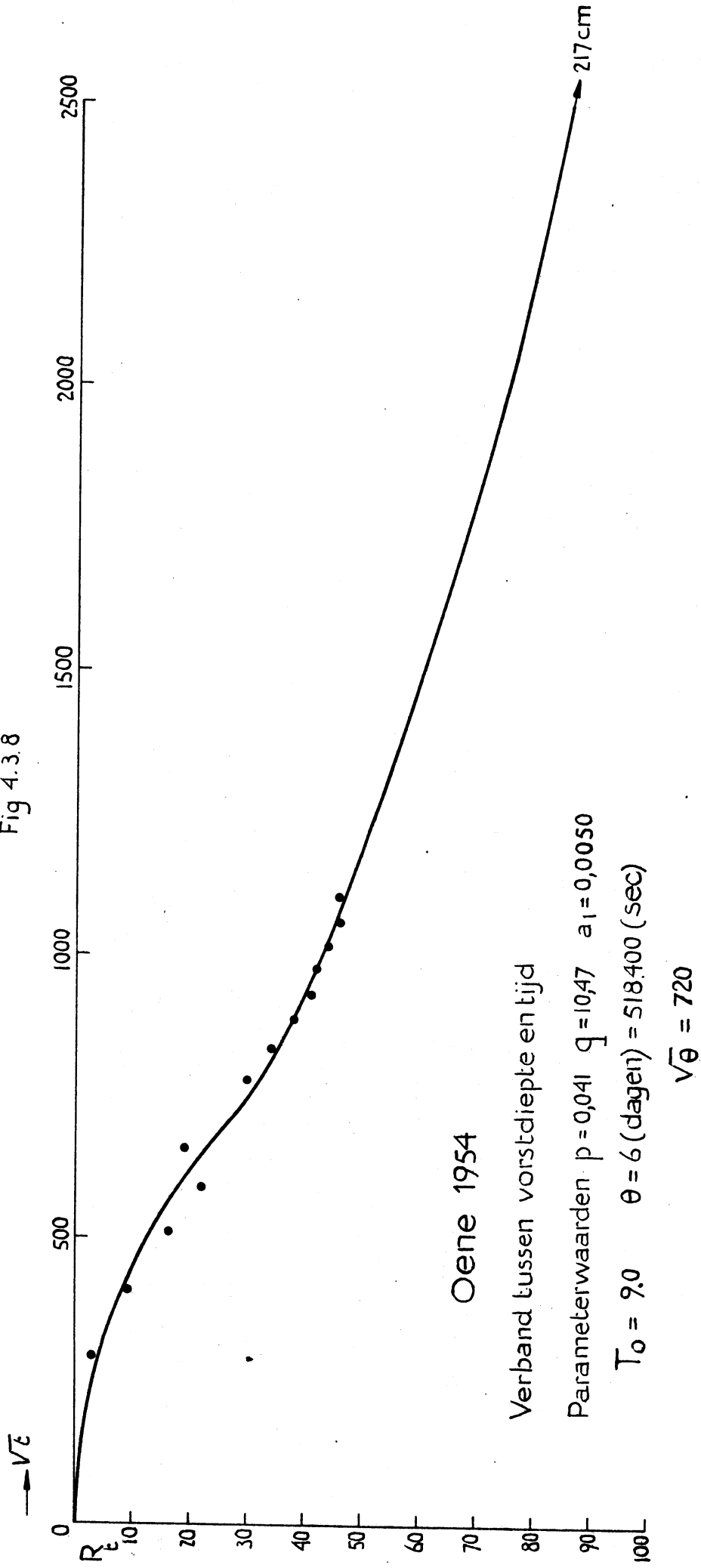
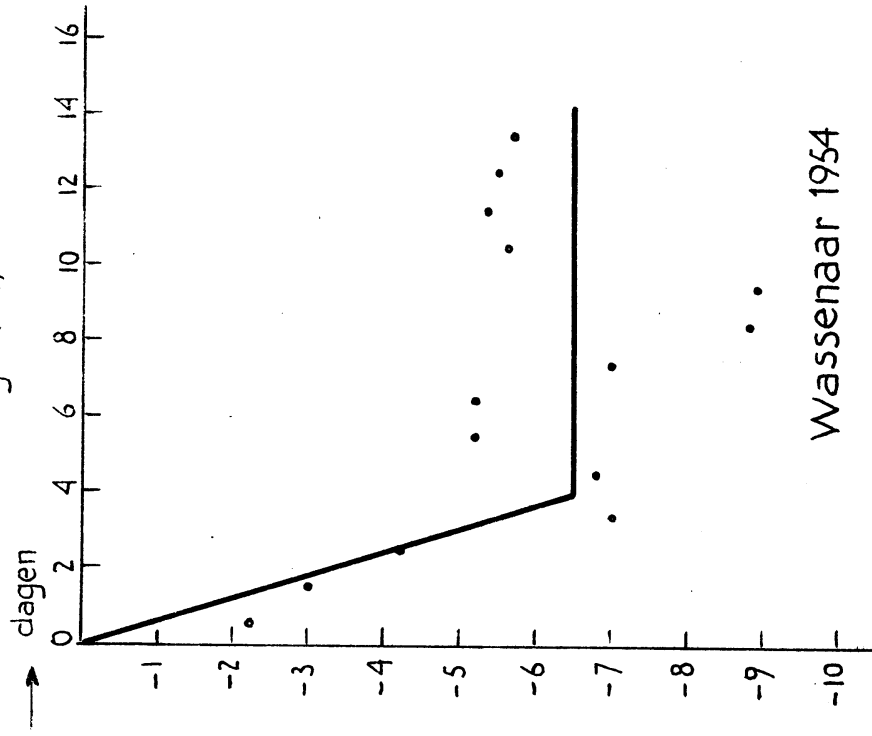


Fig 4.3.9

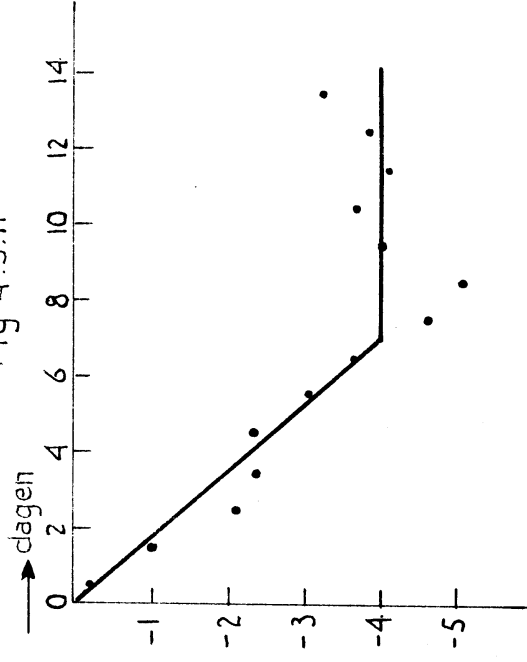


Wassenaar 1954

geschatte luchttemperatuur

Vorstperiode 24 jan - 8 febr.

Fig 4.3.11



De Bilt 1954

bodemtemperatuur op ca. 3 cm.

Vorstperiode 25 jan - 7 febr.

Fig 4.3.10

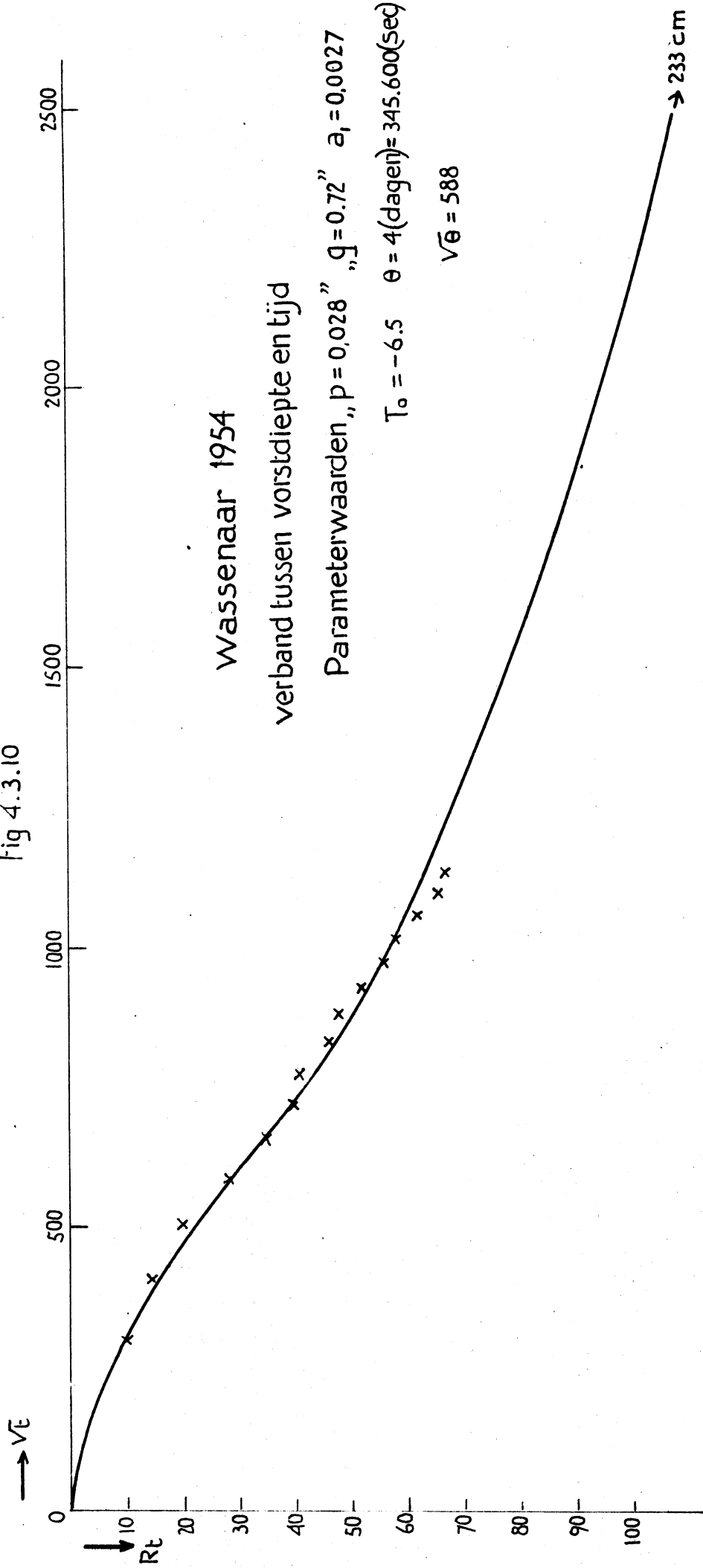


Fig 4.3.12

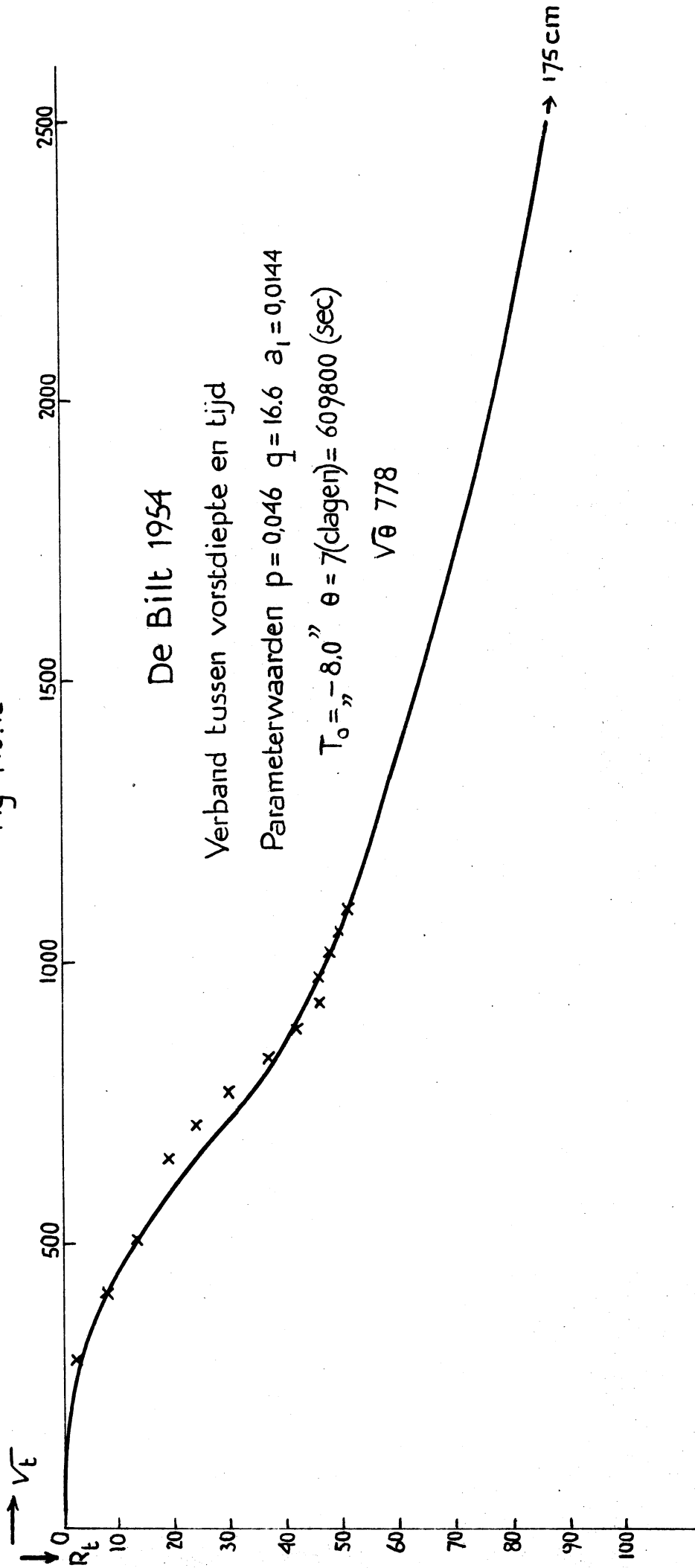


Fig 4. 3. 13

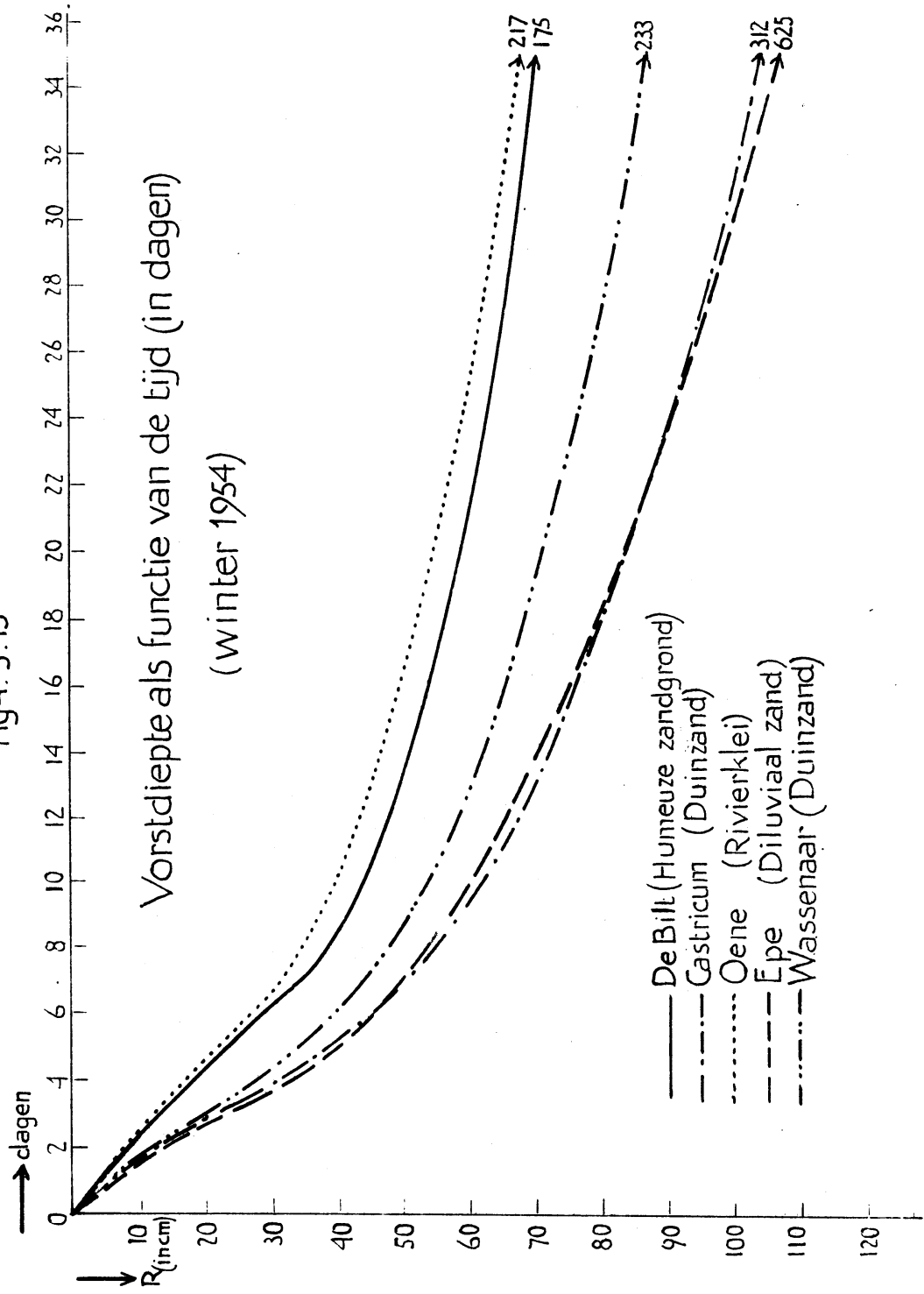




Fig 4-3-14

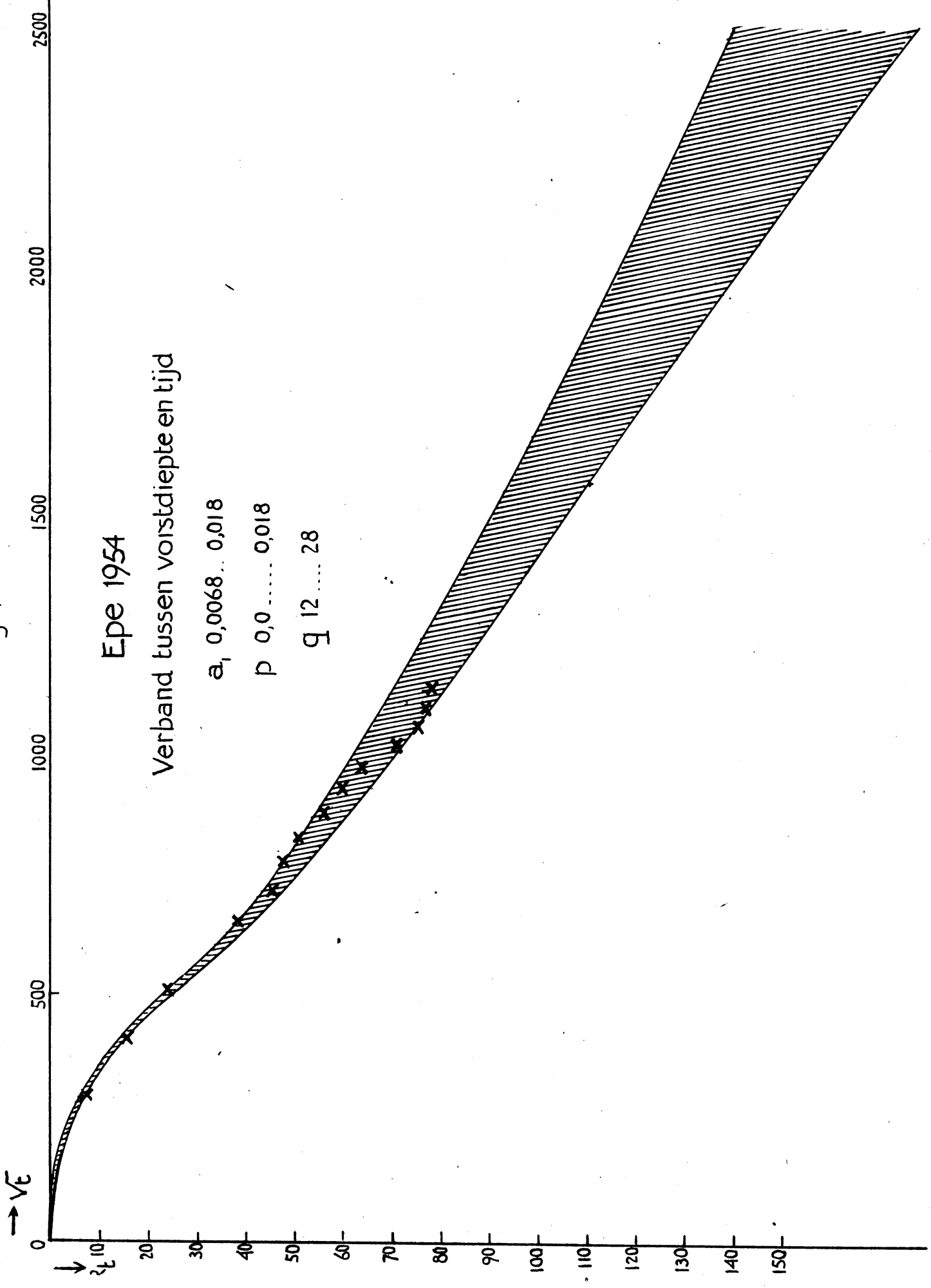


Fig 4.3.15

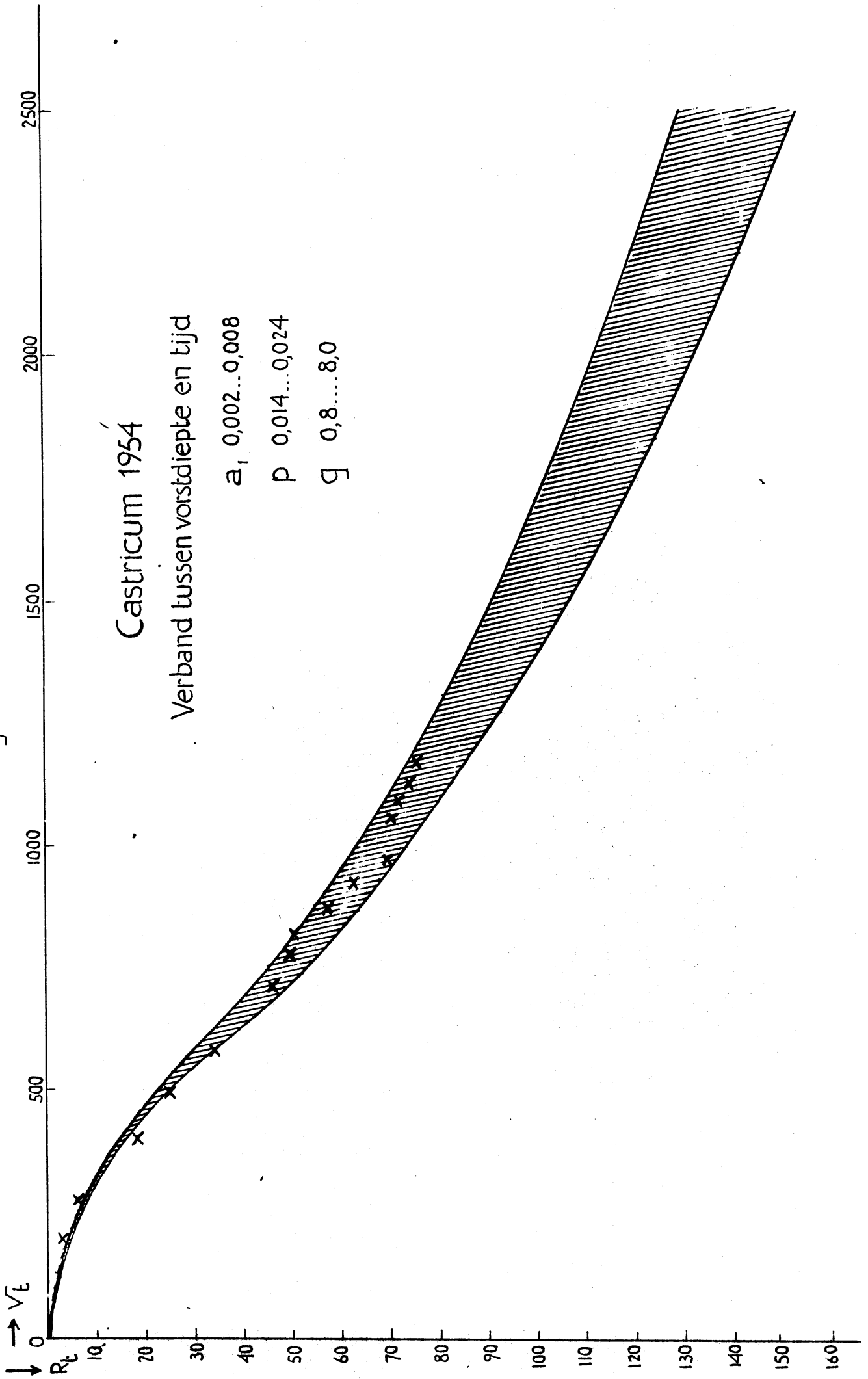


fig. 5.1

Gemiddelde overdag temperatuur 26 jan - 6 feb 1954 (in °C)

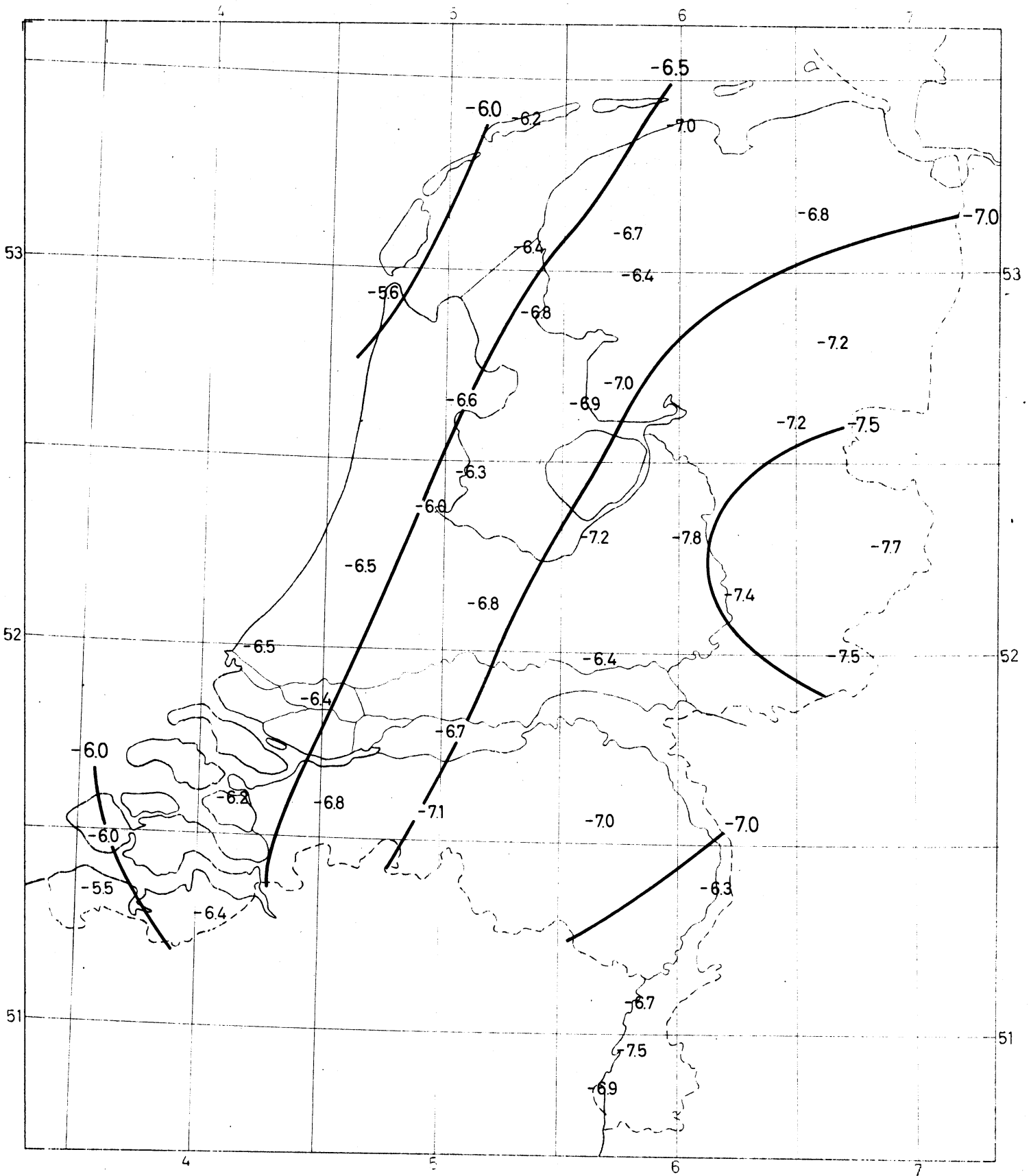


fig.5.2

Schatting van de extreme vorstindringingsdiepte (in cm)

