

KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT

Wetenschappelijk Rapport W.R. 60-3 (III 250-1960)

Dr. C. Levert

Een nieuw nomogram ten gebruike
bij de F-toets
(voor grote ν_1 en ν_2)

De Bilt, 1960

All Rights Reserved

Nadruk zonder toestemming van het K.N.M.I. is verboden

Dr. C. Levert

Een nieuw nomogram ten gebruike
bij de F-toets
(voor grote ν_1 en ν_2)

0 Inleiding:

0.1 Ik was bij mijn werk genoodzaakt om vele keren de statistische significantie van de verschillen tussen twee steekproefvarianties te onderzoeken. Daarbij zijn de aantallen graden van vrijheid steeds zeer groot, alle groter dan 300. Het bleek wenselijk niet slechts na te gaan of de varianties s_1^2 en s_2^2 aanleiding gaven de nulhypothese $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (normaal verdeelde populaties) te moeten verwerpen (tegen het alternatief $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$), op basis van zekere onbetrouwbaarheidsdrempel β_0 , doch ook de overschrijdingskans β zelf interesseerde me. Hierbij is $\beta = \int_{F_\beta}^{\infty} \varphi(F) dF$, de overschrijdingskans van F_β geheten, met $F = s_1^2/s_2^2$, terwijl $\varphi(F) dF$ de F-verdeling met ν_1 en ν_2 graden van vrijheid voorstelt. Men kan dan de bekende F-tabellen raadplegen. In de meeste F-tabellen echter gaan de aantallen graden van vrijheid niet hoog genoeg en bovendien zijn zij gewoonlijk voor een klein aantal onbetrouwbaarheidsdrempels β_0 opgesteld. Het wordt dan moeilijk door interpolatie de β te schatten. Het nomogram van Rijkooft [1] is helaas ook niet te gebruiken voor het omschreven doel; zodra ν_1 en ν_2 boven 60 komen, kan het zo goed als niet meer afgelezen worden.

Men moet dan zijn toevlucht nemen tot formules met behulp waarvan benaderingen van de F-drempels F_{β_0} berekend kunnen worden.

Ik noem er hier enkele:

0.2 Dixon and Massey [2] vermelden bij hun fraaie F-tabellen, dat men voor ν_1 en ν_2 , beide groter dan 30, vrij goede benaderingen van de percentielen F_β van de F-verdeling krijgt via de formule

$$\log F(\nu_1; \nu_2) = a(h - b)^{-\frac{1}{2}} - cg, \quad (1)$$

waarin
$$h = 2 \frac{\nu_1 \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \quad \therefore \frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} \right)$$

en $g = \frac{v_2 - v_1}{v_1 v_2}$. Daarbij zijn a, b en c functies van β_0 .

We nemen hier hun tabel over.

Tabel 1

β_0	0.50	0.25	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001	0.0005
a	0	0.5859	1.1131	1.4287	1.7023	2.0206	2.2373	2.6841	2.8580
b	-	0.58	0.77	0.95	1.14	1.40	1.61	2.09	2.30
c	0.270	0.355	0.527	0.681	0.846	1.073	1.250	1.672	1.854

0.3 Fisher and Yates [3] maken een analoge opmerking. Zij geven tabellen voor slechts 5 onbetrouwbaarheidsdrempels β_0 , zowel voor $F = s_1^2/s_2^2$ als voor $z = \frac{1}{2} \ln F$, en merken op dat men voor grote v_1 en v_2 een benadering voor F_{β_0} vinden kan volgens

$$z = \frac{A}{\sqrt{h - B}} - Cg, \quad (2)$$

waarin de constanten A, B en C met β_0 samenhangen volgens tabel 2.

Tabel 2

β_0	0.20	0.10	0.05	0.01	0.001
A	0.8416	1.2816	1.6449	2.3263	3.0902
B	0.6	0.8	1	1.4	2.1
C	0.4514	0.6071	0.7843	1.235	1.925

0.4 Graf and Henning [4] zeggen, dat met voldoende nauwkeurigheid de significantiedrempels van F berekend kunnen worden uit

$$\log F = 0.4343\lambda \sqrt{2 \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}} \quad (3)$$

met $\lambda = 1.645$ als $\beta_0 = 0.05$

$\lambda = 2.326$ $\beta_0 = 0.01$

$\lambda = 3.090$ $\beta_0 = 0.001$

Daarin gehoorzaamt λ aan $1 - 2\beta_0 = \int_{-\lambda}^{+\lambda} \psi(\underline{m})d\underline{m}$, als $\psi(\underline{m})d\underline{m}$ de standaardnormale verdeling ($\mu = 0$; $\sigma = 1$) voorstelt.

De auteurs raden aan deze formule te gebruiken als men in hun F-tabellen wil interpoleren voor $\nu_1 > 24$ en $\nu_2 \geq 120$ (wij zouden dit liever extrapoleren noemen). Deze tabellen kennen slechts drie onbetrouwbaarheidsdrempels: 0,05, 0,01 en 0,001.

Het is duidelijk, dat (2) weer een benadering van (1) is, want in (1) is de term cg weggelaten, hetgeen, onverschillig welke waarde β bezit, slechts geoorloofd is als ν_1 en ν_2 zeer groot zijn. Hoe goed of slecht de benaderingen zijn, wordt niet toegelicht; in paragraaf 3 willen we hierover enige getallen verstrekken. In werkelijkheid is altijd, d.i. voor elke F , de overschrijdingskans \hat{P} van een gegeven F , indien $\nu_1 > \nu_2$, groter dan de overschrijdingskans \check{P} van dezelfde F , indien $\nu_1 < \nu_2$. Tevens ligt de via (2) berekende P tussen \hat{P} en \check{P} in.

0.5 Aroian [5] heeft aangetoond, dat voor voldoende grote ν_1 en ν_2 de variabele $W = z/\kappa$ met $z = \frac{1}{2} \ln F$ en $\kappa^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} \right)$ in goede benadering volgens Student's t verdeeld is met $\nu_1 + \nu_2 - 1$ graden van vrijheid. Men ziet, dat dit met het resultaat van Graf en Henning overeenkomt, als men bedenkt, dat de t -verdeling met toenemend aantal graden van vrijheid in de normale overgaat.

0.6 Paulson [6] heeft een normaliserende transformatie voor de F -verdeling gevonden. Hij toonde aan dat

$$u = \frac{(1 - \frac{2}{9\nu_2}) F^{1/3} - (1 - \frac{2}{9\nu_1})}{\sqrt{\frac{2}{9\nu_2} F^{2/3} + \frac{2}{9\nu_1}}} \quad (4)$$

ongeveer $N(0;1)$ verdeeld is, mits $\nu_2 \geq 3$ (dus eigenlijk voor alle ν_1, ν_2 -paren).

Wanneer wij hierin $\nu_1 \gg 1$ en $\nu_2 \gg 1$ stellen, zodat $1 - \frac{2}{9\nu_2} \approx 1$ en $1 - \frac{2}{9\nu_1} \approx 1$ staat er

$$u \approx \frac{F^{1/3} - 1}{\sqrt{\frac{2}{9\nu_2} F^{2/3} + \frac{2}{9\nu_1}}} \quad (4a)$$

Voor de vorm onder het wortelteken mogen wij $\frac{2}{9v_2} F^{2/3}$ schrijven als ook nog $F \gg k^{2/3}$, als $k = v_1/v_2$.

Nu is aan deze voorwaarde helaas niet steeds voldaan, zeker niet in de gevallen, waarmee wij in onze praktijk te maken hadden.

Met deze vereenvoudiging zou er tenslotte gekomen zijn

$$u \approx \frac{F^{1/3} - 1}{F^{2/3} \sqrt{\frac{2}{9v_2}}} = \frac{1 - F^{-1/3}}{\sqrt{\frac{2}{9v_2}}} \tag{5}$$

Deze u is ongeveer $N(0;1)$ -verdeeld, hetgeen betekent dat, onder de bovengenoemde voorwaarden, $F^{-1/3}$ ongeveer normaal verdeeld is rondom 1, met een standaarddeviatie $\sqrt{\frac{2}{9v_2}}$.

1. De constructie van het nomogram

Ofschoon de formules (3) en (3a) de voorkeur verdienen, besloten wij voor (2) een nomogram te maken. De normalisatie-transformatie van Paulson heeft zulk een ingewikkelde gedaante, dat het verre van gemakkelijk zal zijn ook (4) en (4a) in een nomogram af te beelden.

Schrijf

$$\log F = \lambda^* \sqrt{\frac{1}{v}} \tag{6}$$

waarin

$$\lambda^* = 0.4343 \lambda \sqrt{2} \quad \text{en} \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \tag{7}$$

$2v$ is harmonisch middelevenredig tussen v_1 en v_2 .

Wij maken eerst een nomogram voor (6) en daarna voor (7).

Het nomogram bij $u + v = p$, waarin $u = \log \sqrt{\frac{1}{v}}$, $v = \log \lambda^*$, terwijl u en v in lineaire schaal staan, bestaat uit een schaar parallelle rechten in een Cartesiaans assenstelsel, die $p = \log \log F$ als parameter hebben. De theorie van de transformatie van grafische voorstellingen, welke in rechthoekige coördinaten staan, in die in parallel-coördinaten, leert, dat zich de vergelijking $x \cdot y = z$ (leidende tot $\log x + \log y = \log z$, d.i. $u + v = p$), van welke gedaante (6) is, grafisch laat afbeelden op drie vertikaal geplaatste equidistante rechten. De linkse draagt dan een logaritmische schaal voor x; de rechtse idem voor y en de middelste idem voor z. Terwijl de moduli

langs de x en y-dragers gelijk zijn (de modulus is de lineaire afstand tussen de punten 1 en 10 in cm), is die langs de z-rechte half zo groot. In ons geval staan langs de rechten A, B en C de $\sqrt{\frac{1}{v}}$, de log F en de λ^* , elk in logarithmische schaal. Vanzelfsprekend zetten we er echter de waarden van v, F en de β bij.

Hiermee is eigenlijk (3) in beeld gebracht. Het is namelijk een kleine moeite voor de gebruiker om zelf v uit te rekenen als v_1 en v_2 gegeven zijn. Doch ook hiervoor werd een nomogram geconstrueerd, dat gemakkelijk met het reeds behandelde kon worden verenigd. Wij schrijven:

$$\sqrt{\frac{1}{v}} = \sqrt{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

waaruit volgt

$$\sqrt{v_1 v_2} \cdot \sqrt{1/v} = \sqrt{v_1 + v_2} \quad (8)$$

Ook deze betrekking heeft de gedaante $x \cdot y = z$ en is derhalve op drie vertikale equidistante rechten af te beelden. Van rechts naar links in de figuur: rechte A_1 : de $\sqrt{v_1 v_2}$; de rechte A_2 : de $\sqrt{v_1 + v_2}$ en de reeds genoemde rechte A : de $\sqrt{1/v}$, alle in logarithmische schaal. We zetten er echter de waarden van $v_1 v_2$, $v_1 + v_2$ en v naast.

2. Getallen-voorbeelden, die het gebruik van het nomogram toelichten

2.1 Een gefantaseerd voorbeeld

Men geeft: $s_x^2 = 4.70$ ($v_1 = 12$) en $s_y^2 = 2.06$ ($v_2 = 20$) en vraagt met welke kans β de F-waarde, $4.70/2.06 = 2.28$, onder de nulhypothese H_0 (d.i. $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$), wordt overschreden en of de nulhypothese H_0 (onbetrouwbaarheidsdrempel $\beta_0 = 0.05$) moet worden verworpen?

Antw.: formule (3) leidt tot $\lambda = 1.0598$ en aldus tot $\beta = 0.055$; H_0 wordt delhalve niet verworpen. In ons nomogram leggen wij een rechte lijn door het punt $v = v_1 v_2 / (v_1 + v_2) = 7.5$ (op drager A) en het punt $F = 2.28$ (op drager B) en snijden deze met de drager C. Het snijpunt heeft $\beta = 0.055$. Men kan ook een rechte lijn trekken door de punten $v_1 + v_2 = 32$ en $v_1 v_2 = 240$ (op de dragers A_2 en A_1) en deze snijden met de A-drager (snijpunt $v = 7.5$) enz.

Zoals gezegd: ons nomogram, d.i. formule (3), beschouwt de ν_1 en ν_2 gelijkwaardig, d.w.z. wij zouden eveneens tot $\beta = 0.055$ gekomen zijn als $\nu_1 = 20$ en $\nu_2 = 12$ geweest zouden zijn, bij dezelfde varianties. Natuurlijk behoren met deze twee gevallen twee verschillende β -waarden overeen te komen, die, aangezien ν_1 en ν_2 hier sterk verschillen, ver uiteen zullen liggen (althans in relatieve maat). Inderdaad, via de tabellen van Dixon and Massey komen we tot $\hat{P} = 0.050$ en $\hat{P} = 0.084$ en derhalve blijkt: $0.050 < 0.055 < 0.084$.

2.2 Een voorbeeld uit de praktijk

In verband met het "Tuinbouwvestigingsplan", dat o.m. beoogt verschillende streken van het land klimatologisch te vergelijken, werd op het K.N.M.I. een onderzoek verricht inzake de zg. interdiurne variabiliteit (korthedshalve: I.V.) en wel voor een drietal stations Naaldwijk (1931-1956), Gemert (1931-1956) en Groningen (1931-1950) o.a. voor de dagelijkse minimumtemperatuur. In dit onderzoek werden de dekaden afzonderlijk beschouwd. Duiden wij de minimumtemperatuur gedurende de dag i aan met t_i , dan heet $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ de interdiurne verandering. De dekade april III bevat 10 Δ -waarden; de dekaden april III der 26 jaren derhalve 260 stuks. Deze leveren voor Naaldwijk een standaarddeviatie $s_1 = 2.59^\circ\text{C}$ en voor Groningen $s_2 = 2.50^\circ\text{C}$. Wij konden aantonen, dat de Δ -populaties normaal verdeeld zijn. Verschillen s_1 en s_2 significant? De aantallen graden van vrijheid (zie addendum) zijn hier niet $26 \times 10 = 260$ resp. $20 \times 10 = 200$ (of zo men wil één minder), doch veel groter en wel vanwege het feit, dat de chronologisch successieve Δ -waarden negatief gepersisterd zijn (de autocorrelatie-coëfficiënten zijn negatief; negatieve persistentie is betrekkelijk zeldzaam). Deze negatieve persistentie heeft twee oorzaken. Ten eerste lette men op de constructie der Δ 's zelf (stelling: de correlatie-coëfficiënt tussen $y - x$ en $z - y$ is $-\frac{1}{2}$, als x, y, z ongecorrleerd zijn). Ten tweede zijn bovendien de t_i -waarden zwaar positief gepersisterd: de autocorrelatie-coëfficiënten van de orden 1, 2 zijn resp. 0.71, 0.71^2 , 0.71^3 enz. Het gevolg van een en ander is, dat $\nu_1 = 850$ (en niet 260) en $\nu_2 = 650$ (en niet 200). Bijgevolg is $\nu = \nu_1 \nu_2 / (\nu_1 + \nu_2) = 370$. Verder is $F = 2.59^2 : 2.50^2 = 1.037$. Het nomogram voert tot $\beta = 0.31 \gg 0.05$; H_0 behoeft daarom niet verworpen te worden. Klimatolo-

(in apr. III)
 gisch is er derhalve t.a.v. de I.V. tussen Naaldwijk en Groningen geen verschil. Voor november I is echter $s_1 = 2.66^\circ$ ($\nu_1 = 820$) en $s_2 = 2.24^\circ$ ($\nu_2 = 630$). Nu is $F = 1.42$ en $\beta \ll 0.001$. Thans is er een zeer markant verschil tussen Naaldwijk en Groningen. De minimumtemperatuur verandert op het eerste station blijkbaar veel sterker van dag op dag dan op het tweede.

Opmerking: hoe groter ν_1 en ν_2 , hoe kleiner de fout door voor ν de waarde $\nu^* = \frac{1}{4}(\nu_1 + \nu_2)$ te nemen i.p.v. $\nu_1 \nu_2 : (\nu_1 + \nu_2)$. Precieser gezegd:

als $\nu_1 : \nu_2 \leq (1 + q) : (1 - q)$ dan is het relatieve verschil tussen ν^* en ν hoogstens q .

Bijv.: als

$$\begin{array}{ll} \nu_1 : \nu_2 \leq 1.105 & \text{dan } |\nu^* - \nu| : \nu^* \leq 0.05 \\ \leq 1.22 & \leq 0.10 \end{array}$$

3. De nauwkeurigheid van het nomogram

De nauwkeurigheid van het nieuwe nomogram leek ons het beste gedemonstreerd te worden door wat uiteenlopende getallenvoorbeelden uit te werken. Dit is gebeurd in tabel 3.

Wij kozen bij de paren van aantallen van graden van vrijheid 5,10; 12,20; 40,60 en 120,200 zeer uiteenlopende F-waarden, waarvan de toevalsoverschrijdingskansen in de buurt van 0.50; 0.25 en 0.05 gelegen zijn. Voorbeeld: de tabel van Dixon and Massey levert bij $\nu_1 = 12$ en $\nu_2 = 20$ en $F = 0.977$ exact $\beta = 0.500$, genoemd $\tilde{P}(D)$. Daarna lazen wij van ons nomogram de β af: 0.518, genoemd $P(L)$. Ook werd $\tilde{P}(D)$, d.i. bij dezelfde F, doch met $\nu_1 = 20$ en $\nu_2 = 12$, uit de tabel van Dixon, interpolerende (en daardoor natuurlijk niet zeer nauwkeurig), afgelezen: 0.531. Bijgevolg is $\Delta(D) = (\tilde{P} - \tilde{P}) : \frac{1}{2}(\tilde{P} + \tilde{P}) = 0.06$. In deze 6% komt het gevolg van verwisselen van ν_1 en ν_2 tot uiting.

Vervolgens willen wij weten hoeveel $P(L)$ groter dan \tilde{P} en kleiner dan \tilde{P} is; daarvoor berekenen wij $\tilde{a} = (P - \tilde{P}) : \tilde{P} = 0.04$ en $\tilde{a} = (\tilde{P} - P) : \tilde{P} = 0.03$.

Als wij de tabel overzien lijken er "onregelmatigheden" in te zitten. Men zou verwachten, dat de Δ met groter wordende F glad zou toenemen,

doch dat komt helaas niet fraai tot uiting, hoewel de tendens er wel is. De oorzaak zal wel gelegen zijn, o.a. in het feit, dat de in de tabel niet onderstreepte \hat{P} of \check{P} -waarden door interpolatie gevonden moesten worden, die wij eenvoudigheidshalve lineair uitvoerden. Een onnauwkeurigheid in deze interpolatie werkt zich uit in òf de \hat{P} òf de \check{P} en aldus in Δ , \hat{a} , \check{a} . Wij achtten het niet nodig naar betere interpolatie-methoden uit te zien. Voor ons zijn de volgende conclusies, waartoe de getallen in de tabel in elk geval leiden, voldoende:

- a) het relatieve verschil Δ tussen \hat{P} en \check{P} neemt voor ieder stel ν_1 , ν_2 toe met toenemende F , d.i. met afnemende overschrijdingskans β en af met toenemende ν_1 en ν_2 . Het is reeds voor $\nu_1 = 120$, $\nu_2 = 200$ "onbelangrijk" geworden in berekeningen (als de onze), die geen grote nauwkeurigheid eisen (zo is bij $F = 1.32$ de $\hat{P} = 0.044$, de $\check{P} = 0.050$).
- b) Zowel \hat{a} als \check{a} neemt toe, en wel voor ieder stel ν_1 , ν_2 , met toenemende F en af met toenemende ν_1 en ν_2 . De relatieve verschillen tussen $P(L)$ en \hat{P} of tussen $P(L)$ en \check{P} zijn onbelangrijk voor ν_1 en ν_2 groter dan zegge 200.

De slotconclusie zou kunnen luiden: als men een nomogram gebruiken wil, kies dan

- a) dat van Rijkoort voor de lage ν_i -waarden (dit nomogram kwam langs empirische weg tot stand);
- b) het boven besprokene voor de hoge ν_i -waarden, zegge $\nu_i > 200$ (dit nomogram is gebaseerd op een benaderingsvorm van de F -verdeling).

In het gebied van - laat ons zeggen - $\nu_1, \nu_2 = 60$ à 200 , gebruike men een der in de Inleiding beschreven F -tabellen (in- en extrapoleren) of benaderingsformules.

Tabel 3

graden van vrijheid	F	P(L)	$\overset{<}{P}(D)$	$\overset{>}{P}(D)$	$\Delta(D)$ %	$\overset{<}{a}$ %	$\overset{>}{a}$ %
5 en 10	0.932	0.536	<u>0.500</u>	0.578	14	7	7
	1.97	0.465	0.448	<u>0.500</u>	11	4	7
	1.59	0.27	<u>0.250</u>	0.346	16	8	2
	1.89	0.21	0.202	<u>0.250</u>	21	4	16
	3.33	0.059	<u>0.050</u>	0.097	64	18	40
	4.74	0.022	0.20	<u>0.050</u>	86	10	56
12 en 20	0.977	0.518	<u>0.500</u>	0.531	6	4	3
	1.02	0.485	0.474	<u>0.500</u>	5	3	3
	1.39	0.261	<u>0.250</u>	0.294	16	4	11
	1.47	0.228	0.226	<u>0.250</u>	14	1	9
	2.28	0.055	<u>0.050</u>	0.077	42	10	29
	2.54	0.035	0.034	<u>0.050</u>	62	3	30
40 en 60	0.004	0.508	<u>0.500</u>	0.522	4	2	3
	1.01	0.486	0.481	<u>0.500</u>	4	1	3
	1.21	0.2543	<u>0.250</u>	0.262	5	1	3
	1.22	0.2454	0.244	<u>0.250</u>	2	1	0.2
	1.59	0.0544	<u>0.050</u>	0.065	25	9	2
	1.64	0.0432	0.042	<u>0.050</u>	17	3	14
120 en 200	1.00	0.500	<u>0.500</u>	<u>0.500</u>	0	0	0
	1.114	0.2543	<u>0.250</u>	0.262	5	2	3
	1.12	0.2439	0.2427	<u>0.2500</u>	3	0.5	2
	1.303	0.0521	<u>0.050</u>	0.061	2	4	15
	1.32	0.0446	0.044	<u>0.050</u>	12	1	12

Toelichting: $\Delta(D) = (\overset{>}{P} - \overset{<}{P}) : \frac{1}{2}(\overset{>}{P} + \overset{<}{P})$ in %
 $\overset{<}{a} = (P - \overset{<}{P}) : \overset{<}{P}$ "
 $\overset{>}{a} = (\overset{>}{P} - P) : \overset{>}{P}$ "

Onderstreept: regelrecht afleesbaar in de tabellen van Dixon and Massey, bijv:

$$P [F > 1.47 | 20; 12] = 0.250$$

$$P [F > 1.59 | 40; 60] = 0.050$$

4. Literatuur

- [1] Nomogram No. 14.1 in "Statistische Tabellen en Nomogrammen", uitgegeven onder redactie van de Vereniging voor Statistiek.
- [2] Dixon, W.J. and F.J. Massey: "Introduction to Statistical Analysis", 1957. De F-tabellen leveren voor $\nu_1 = 1(1)12, 15, 20, 24, 30(10), 60, 100, 120, 200, 500$ en ∞ en $\nu_2 = 1(1)12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120$ en ∞ de F-waarden, voor β_0 -waarden = 0.0005 0.001 0.005 0.01 0.025 0.05 0.10 0.25 0.50 0.75 0.90 0.95 0.975 0.99 0.995 0.999 0.9995.
- [3] Fisher, R.A. and F. Yates: "Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research", 1949. De β_0 -waarden zijn 20, 10, 5, 1 en 0.1%; $\nu_1 = 1(1)6, 8, 12, 24, \infty$ en $\nu_2 = 1(1)30, 40, 60, 120, \infty$.
- [4] Graf, U. and H.J. Henning: "Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik", 1953. De β_0 -waarden zijn 5, 1 en 0.1%. De $\nu_1 = 1(1)6, 8, 12, 24$ en ∞ en $\nu_2 = 1(1)30, 40, 60, 120, \infty$.
- [5] Aroian, A.: "The relationship of Fisher's Distribution to Student's t Distribution". Ann. Math. Stat. 13 451 1942.
- [6] Paulson, E.: "An approximate Normalization of the Analysis of Variance Distribution". Ann. Math. Stat. 13 233 1942.

Addendum

In een voordracht door Prof. Kuiper, Afdeling Wiskunde, Landbouwhogeschool Wageningen, over de statistische gevolgen van autocorrelatie in tijdreeksen in schattingskwesaties, welke voordracht ik hoorde na het schrijven van dit rapport, werd uiteengezet, dat in zulke tijdreeksen het universum-gemiddelde μ en de universum-variantie σ^2 niet meer op de gebruikelijke wijze, d.w.z. als $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_1^n x_i$ resp. $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2$ ($x_1, x_2 \dots x_n$ zijn de metingen), geschat mogen worden, althans wanneer men doeltreffendste, zuivere schattingen nastreeft (hier niet nader gedefinieerd). De correcte uitdrukkingen (te ingewikkeld om hier genoemd te worden) bevatten natuurlijk de, bekend onderstelde, autocorrelatie-coëfficiënten ρ_k . Deze uitdrukkingen zijn machine-technisch onhandelbaar, zeker met het op het K.N.M.I. beschikbare machinepark. Daarbij komt, dat in ons geval de ρ_k 's, niet bekend zijn doch ook geschat moeten worden met hetzelfde materiaal, dat \bar{x} en s^2 levert. Het is niet bekend, hoe de uitdrukkingen zich wijzigen als ook met deze omstandigheid rekening gehouden wordt. Bovendien werd door ons de s geschat via de "mean deviation" $\frac{1}{n} \sum |x - \bar{x}|$. Kortom wij berekenden de s^2 op de "ouderwetse" wijze, doch rekenden met een effectief aantal graden van vrijheid $\nu = n_e$ (om daarmee de F-tabellen in te gaan), volgende uit het nominale aantal n , door in een, hier niet genoemde, uitdrukking $n_e = f(n; \rho_k \text{'s})$ de geschatte ρ 's te substitueren.

Summary

A new nomogram for use in the F-test

0. Introduction

0.1 This report deals with the construction of a new nomogram for the F-test in case the numbers of degrees of freedom ν_1 and ν_2 are sufficiently large and their difference is sufficiently small.

Generally the well known F-tables are valid for a small number of significance levels β_0 and for each of these levels for ν_1 -values, increasing in the lower regions with steps of 1, or 2 or 10, but then mounting suddenly from, say, 50 or 100 to ∞ .

In case there is a special interest for the actual exceeding probabilities β (and not only for the question whether the level of significance is surpassed or not), written

$$\beta = P [\underline{F} > F | \nu_1, \nu_2] ,$$

then it is necessary to use special formulas with the aid of which it is possible to make approximative computations of β , in particular for large ν_1 and ν_2 .

0.2 Let the F-distribution be defined by $\varphi(\underline{F} | \nu_1, \nu_2) d\underline{F}$, $0 \leq F < \infty$.

Let F_β be defined by

$$\beta = \int_{F_\beta}^{\infty} \varphi(\underline{F}) d\underline{F},$$

denoting the exceeding probability of F_β .

Dixon and Massey [2] give, for $\nu_1, \nu_2 > 30$, approximations for F_β (1). The parameters a, b and c depend on β (table 1).

0.3 Fisher and Yates [3] give for $z_\beta \equiv \frac{1}{2} \ln F_\beta$, in case ν_1 and ν_2 are sufficiently large, an approximation (2). The coefficients A, B and C depend on β (table 2). These approximations are identical.

0.4 Graf and Henning [4] propose, if $\nu_1 > 24$, $\nu_2 > 120$, the approximation

(3), where $1 - 2\beta_0 = \int_{-\lambda}^{+\lambda} \psi(\underline{m}) \underline{d}m$. Here $\psi(\underline{m}) \underline{d}m$ represents the standardized normal distribution (mean 0; variance 1).

Evidently (3) is a new approximation of (1).

0.5 Aroian [5] proved that for sufficiently large ν_1 and ν_2 the variable $W = z/\kappa$, with $z = \frac{1}{2} \ln F$ and $\kappa^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2})$, follows approximately the Student's t-distribution with $\nu_1 + \nu_2 - 1$ degrees of freedom. This is in accordance with the result of Graf and Henning, since the t-distribution grows asymptotically normally if $\nu_1 + \nu_2 - 1$ increases infinitely.

0.6 Paulson [6] proved that a transformation of F to u (4), renders u distributed approximately normally. We have tried to simplify the expression. This is possible only if $\nu_1 \gg 1$, $\nu_2 \gg 1$, $F \gg (\nu_1 : \nu_2)^{2/3}$. Then $\sqrt[3]{F^{-1}}$ is normally distributed around a mean value 1 and with a variance $\frac{2}{9} \nu_2$. This would enable us to construct a simple nomogram. However, the third condition is not fulfilled in our investigations.

1. Construction of the new nomogram

Since (4) is unmanageable, we decided to choose (3) for the construction of a nomogram in two steps, see (6) and (7).

The resulting nomogram consists of two sets of vertical axes: A, B, C and A_1, A_2 .

The axes A, B and C bear the scales for ν , F and β ; the basic scales, however, are: on A logarithmical for $\sqrt{1/\nu}$; on B logarithmical for $\log F$ and on C logarithmical for λ^* . The axes A_1 and A_2 bear the scales for $\nu_1 \cdot \nu_2$ and $\nu_1 + \nu_2$.

The procedure is as follows: compute the sample variances s_1^2 and s_2^2 and $F = s_1^2 : s_2^2$. Let their degrees of freedom be ν_1 and ν_2 . The straight line passing through the points $\nu_1 \nu_2$ (on A_1) and $\nu_1 + \nu_2$ (on A_2) cuts the axis A in ν . The straight line through ν (on A) and F (on B) cuts axis C in β , the exceeding probability of F in the F -distribution on ν_1 and ν_2 d.o.f. This β may be compared with the significance level β_0 which is, for instance, 0.05.

2. Numerical illustrations

2.1 Suppose $s_x^2 = \sum_1^{13} (x_i - \bar{x})^2 : (13 - 1) = 4.70$ and $s_y^2 = \sum_1^{21} (y_i - \bar{y})^2 : (21 - 1) = 2.06$. Then $F = 2.28$. The null hypothesis H_0 is: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$. Formula (3) gives $\lambda = 1.060$ and consequently $\beta = 0.055$. Since $0.055 > 0.05$, H_0 must not be rejected (on the 0.05 level).

Using the new nomogram (although the degrees of freedom certainly are not sufficiently large) we come to $\beta = 0.055$, but an interchange of the ν 's leads to $\beta = 0.084$; mind $0.050 < 0.055 < 0.084$.

It should be stressed that the new nomogram requires such large values of ν_1 and ν_2 and such a small difference $\nu_1 - \nu_2$ that an interchange of ν_1 and ν_2 (F being constant) causes a practically unimportant change in β .

2.2 A climatological investigation may lead to very large degrees of freedom of the variances. For the first decade of november - for instance - for the stations Naaldwijk and Groningen, the standarddeviations s_1 and s_2 of the interdiurnal variations of the daily minimum temperatures (these variations follow a normal distribution around zero) became 2.66 and 2.24°C. As a consequence of a large positive autocorrelation in the time series of daily minimum temperatures and of the natural negative autocorrelation in the series of interdiurnal variations, the degrees of freedom of these variances became 820 and 630. The nomogram, when applied with $F = 1.42$, $\nu_1 = 820$ and $\nu_2 = 630$, gives $\beta \ll 0.001$. This result implies a markedly large difference between the interdiurnal variabilities of these stations in this part of the year.

Provided that ν_1 and ν_2 are sufficiently large, the error, when using $\nu^* = \frac{1}{4}(\nu_1 + \nu_2)$ in stead of $\nu = \nu_1 \nu_2 : (\nu_1 + \nu_2)$, becomes small. For $\nu_1 : \nu_2 \leq (1 + q) : (1 - q)$ the relative difference between ν^* and ν is less than q .

3. The accuracy of the new nomogram

In this section the accuracy of the new nomogram is discussed. We used the very extensive tables of Dixon and Massey [1] and computed β for 4 pairs of ν_1 , ν_2 and 6 values of F (table 3).

Example: $\nu_1 = 12$, $\nu_2 = 20$, $F = 0.977$ give (table of D. and M.)
 $\beta = 0.500$, here denoted by $\overset{<}{P}(D)$. The new nomogram gives $\beta = 0.518$,
 say $P(L)$. When the ν 's are interchanged, the D.-M. table gives, with
 $F = 0.977$, a $\beta = 0.531$, say $\overset{>}{P}(D)$.

Consequently

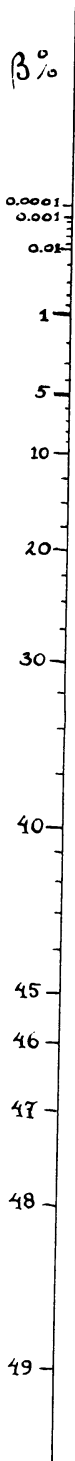
$$\begin{aligned} \Delta(D) &\equiv (\overset{>}{P} - \overset{<}{P}) : \frac{1}{2}(\overset{>}{P} + \overset{<}{P}) = 0.06 \\ \overset{<}{a} &\equiv (P(L) - \overset{<}{P}) : \overset{<}{P} = 0.04 \\ \overset{>}{a} &\equiv (\overset{>}{P} - P(L)) : \overset{>}{P} = 0.03. \end{aligned}$$

These quantities are assembled in table 3.

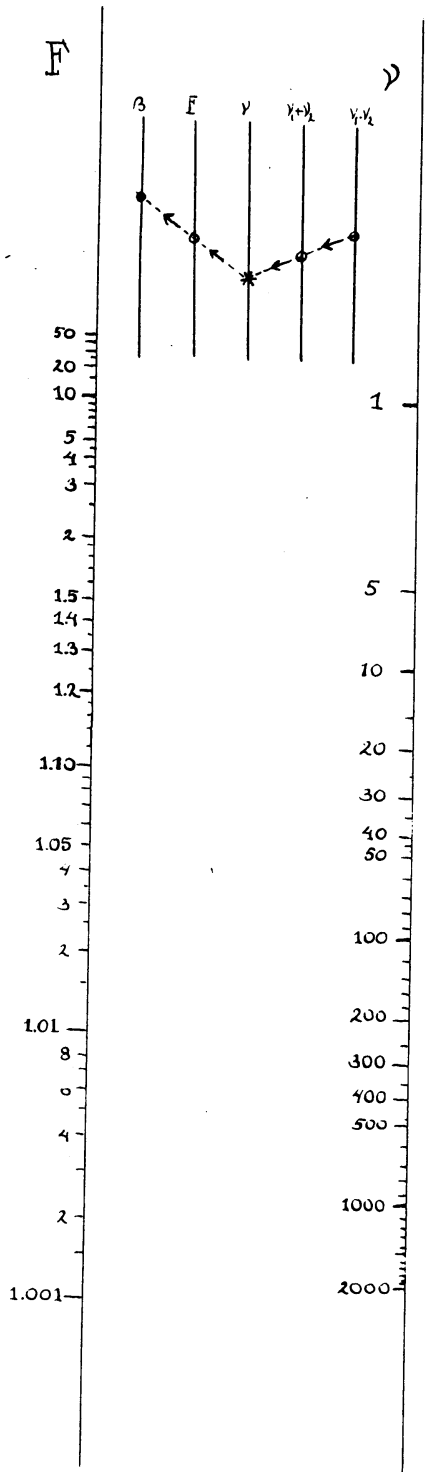
4. Conclusions

- a) $\Delta(D)$ increases for increasing F (decreasing β), and decreases for increasing ν_1, ν_2 .
 This difference Δ becomes "unimportant" for $\nu_1 > 120$, $\nu_2 > 200$ if the investigator is content with rather small accuracies.
- b) The quantities $\overset{<}{a}$ and $\overset{>}{a}$ increase for increasing F , and decrease for increasing ν_1, ν_2 .
 They become unimportant (neglectable) for, say, $\nu_1, \nu_2 > 200$.
- c) In [1] P.J. Rijkoort has published a very useful F -nomogram, constructed in a purely empirical way; it is, however, hardly applicable for ν_1, ν_2 larger than, say, 60. The new nomogram covers the regions, say, $\nu_1, \nu_2 > 200$.
 In the intermediate region of ν_1, ν_2 between 60 and 200, the approximative formulas may be used.

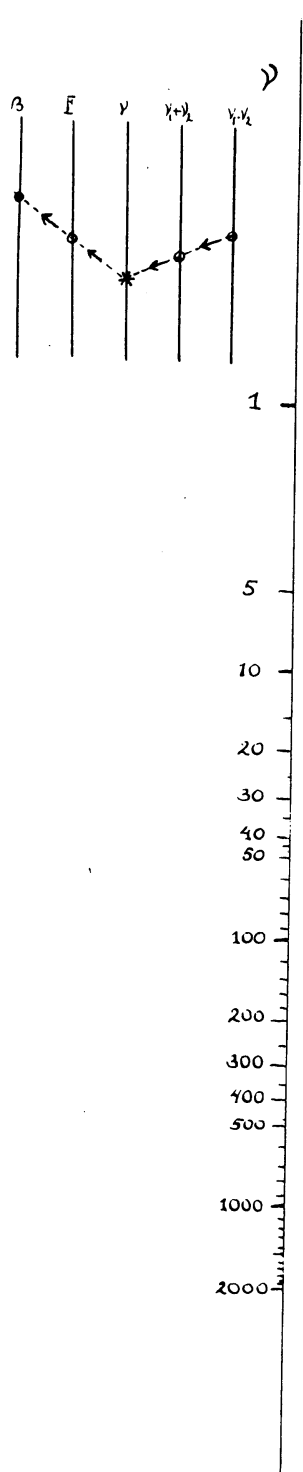
F-nomogram



C



B



A

$$\log F = 0.4343 \lambda \sqrt{2/\nu}$$

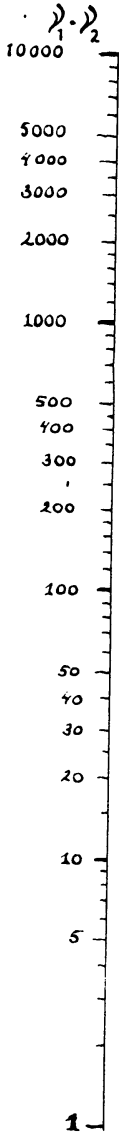
$$1/\nu = 1/\nu_1 + 1/\nu_2$$

$$\beta = \int_{F_\beta}^{\infty} \gamma(F; \lambda_1, \lambda_2) dF$$

$$= \int_{\lambda}^{\infty} (\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Great λ_1, λ_2 $\nu \cong \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2)$

A₂



A₁

K.N.M.I. 1959