

7 MEI 1958

KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT

Wetenschappelijk Rapport W.R. 58-1 (III-212)

Drs. P.J. Rijkoort

Vergelijking van m-minuten gemiddelden van de windsnelheid
met de aflezingen van de registraties met een recorder
met grote tijdconstante

De Bilt, 1958

Kon. Ned. Meteor. Inst.
De Bilt

All Rights Reserved.

Nadruk zonder toestemming van het K.N.M.I. is verboden.

Drs. P.J. Rijkooft

Vergelijking van m-minuten gemiddelden van de windsnelheid
met de aflezingen van de registraties met een recorder
met grote tijdconstante.

I N H O U D

0	Inleiding
1	Theoretische behandeling van het probleem
1.1	Sinusvorming windverloop
1.2	Een niveauverandering in het windverloop
2	Resultaten van enkele metingen
	Summary

0. Inleiding:

Bij de registratie van de windsnelheid met een dynamoanemometer wordt tegenwoordig gebruik gemaakt van een metrawatt-recorder met een tijdconstante, die ongeveer $\frac{1}{2}$ sec. bedraagt.

Zoals bekend is, worden voor de weerdienst de gemiddelde windsnelheden per 10 minuten genoteerd. Deze gemiddelden moeten in het diagram op het oog worden geschat; hierbij kan een belangrijke persoonlijke fout optreden. Het zou veel gemakkelijker zijn, als een continue registratie van de 10 minuten-gemiddelden beschikbaar was, zodat een aflezing in één enkel punt de juiste waarde van dit gemiddelde geeft. In beginsel kan een registreertoestel worden geconstrueerd dat dit mogelijk maakt. Het is echter veel eenvoudiger de tijdconstante van een metrawatt-recorder te vergroten. Dan wordt een registratie verkregen, die in zekere opzichten vergelijkbaar is met een "gemiddelden"-kromme.

De bedoeling van dit rapport is na te gaan, wat het verschil is tussen de registratie van een echt gemiddelde en die met een grote tijdconstante en welke waarde aan de tijdconstante, bij gegeven middelingstijd, moet worden gegeven opdat het verschil tussen beide methoden zo klein mogelijk zij.

De verkregen resultaten kunnen verder van belang zijn bij het probleem van de definitie van windstoten. Bij de definitie van een windstoot ("gust") ligt het voor de hand de momentane windsnelheden te vergelijken met een of ander gemiddelde. Misschien kan een gemiddelde afgelezen worden uit de registratie met een grote nader te bepalen - tijdconstante.

1. Theoretische behandeling van het probleem.

1.1 Sinusvorming windverloop.

1.1.1 We gaan er van uit, dat de "input" van de registreerinrichting d.w.z. de door de anemometer geleverde fluctuerende stroom (dus in feite de fluctuerende wind) kan worden voorgesteld door een som van sinusgolven:

$$v(t) = \bar{v} + \sum_{i=1}^N a_i \sin\left(\frac{2\pi t}{T_i} + \varphi_i\right) \quad (1.1.1.1)$$

In deze formule is t de tijd (in minuten), P_i de periode, a_i de amplitudo en φ_i de phasehoek van de i -de golf.

Het gemiddelde over de afgelopen m -minuten is

$$v_m(t) = \bar{v} + \frac{1}{m} \int_{t-m}^t \sum_{i=1}^N a_i \sin\left(\frac{2\pi T}{P_i} + \varphi_i\right) d\tau =$$

$$\bar{v} + \sum_{i=1}^N A_i \sin\left(\frac{2\pi t}{P_i} + \varphi_i + \alpha_i\right) \quad (1.1.1.2)$$

waarin $A_i = \frac{a_i P_i}{m \pi} \sin \frac{\pi m}{P_i}$ en $\alpha_i = -\frac{\pi m}{P_i}$

Het gemiddelde is dus een som van sinus golven met dezelfde perioden als de oorspronkelijke sinus golven, maar met gewijzigde amplitudines ($a_i \rightarrow \frac{a_i P_i}{m \pi} \sin \frac{\pi m}{P_i}$) en phasehoeken ($\varphi_i \rightarrow \varphi_i - \frac{\pi m}{P_i}$).

Alvorens de registratie met een tijdconstante k in formule te brengen, volgt eerst een verduidelijking van het begrip tijdconstante:

Een tijdconstante gelijk k seconden wil zeggen, dat, bij een plotselinge inzet op zeker tijdstip van een constante snelheid van a m/sec, na k seconden de aanwijzing $(1 - e^{-1}) a$ m/sec (ca. 0,63 a m/s) bedraagt.

We kunnen het, bij een willekeurig snelheidsverloop, ook als volgt uitdrukken: De registrator heeft een zeker "geheugen" en registreert op een bepaald tijdstip datgene wat hij zich van het verleden herinnert. Daarbij is het zo, dat hij zich van wat $t - \tau$ seconden geleden gebeurd is slechts een fractie $\frac{1}{k} \exp -\frac{t-\tau}{k}$ herinnert. De volledige aanwijzing vindt men dus door $\frac{1}{k} v(\tau) \exp -\frac{t-\tau}{k}$ te integreren tot het tijdstip t . Dus:

$$w_k(t) = \frac{1}{k} \int_0^t \left\{ \bar{v} + \sum_{i=1}^N a_i \sin\left(\frac{2\pi T}{P_i} + \varphi_i\right) \right\} \exp -\frac{t-\tau}{k} d\tau =$$

$$= \bar{v}(1 - \exp -\frac{t}{k}) + (\exp -\frac{t}{k}) \int_0^{\frac{t}{k}} \sum_{i=1}^N a_i \sin\left(\frac{2\pi k}{P_i} u + \varphi_i\right) \exp u \cdot du =$$

$$= \bar{v}(1 - \exp -\frac{t}{k}) + (\exp -\frac{t}{k}) \sum_{i=1}^N a_i \int_0^{\frac{t}{k}} \sin\left(\frac{2\pi k}{P_i} u + \varphi_i\right) d \exp u.$$

Nu is:

$$\int_0^{\frac{t}{k}} \sin\left(\frac{2\pi k}{P_i} u + \varphi_i\right) d \exp u = \exp \frac{t}{k} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{P_i} + \varphi_i\right) - \sin \varphi_i$$

$$- \frac{2\pi k}{P_i} \int_0^{\frac{t}{k}} \cos\left(\frac{2\pi k}{P_i} u + \varphi_i\right) d \exp u =$$

$$= \exp^{t/k} \sin\left(\frac{2\pi t}{P_i} + \varphi_i\right) \sin \varphi_i - \frac{2\pi k}{P_i} \exp^{t/k} \cos\left(\frac{2\pi t}{P_i} + \varphi_i\right) + \frac{2\pi k}{P_i} \cos \varphi_i$$

derhalve
$$- \frac{4\pi^2 k^2}{P_i^2} \int_0^{t/k} \sin\left(\frac{2\pi k}{P_i} u + \varphi_i\right) d \exp u.$$

$$\int_0^{t/k} \sin\left(\frac{2\pi k}{P_i} u + \varphi_i\right) d \exp u = \frac{1}{1 + \frac{4\pi^2 k^2}{P_i^2}} \left[\exp^{t/k} \left\{ \sin\left(\frac{2\pi t}{P_i} + \varphi_i\right) - \frac{2\pi k}{P_i} \cos\left(\frac{2\pi t}{P_i} + \varphi_i\right) \right\} - \sin \varphi_i + \frac{2\pi k}{P_i} \cos \varphi_i \right]$$

Hiermede:

$$w_k(t) = \bar{v} (1 - \exp^{-t/k}) + (\exp^{-t/k}) \sum_{i=1}^N \frac{a_i P_i^2}{P_i^2 + 4\pi^2 k^2} \left(\frac{2\pi k}{P_i} \cos \varphi_i - \sin \varphi_i \right) + \sum_{i=1}^N B_i \sin\left(\frac{2\pi t}{P_i} + \varphi_i + \beta_i\right)$$

met

$$B_i = \frac{a_i P_i}{\sqrt{P_i^2 + 4\pi^2 k^2}}, \quad \sin \beta_i = -\frac{2\pi k}{\sqrt{P_i^2 + 4\pi^2 k^2}}, \quad \cos \beta_i = \frac{P_i}{\sqrt{P_i^2 + 4\pi^2 k^2}}$$

Nemen we nu aan, dat $t \gg k$. (d.w.z. er wordt reeds zolang geregistreerd, dat de "aanlooptijd" voorbij is) dan zijn de termen met $\exp^{-t/k}$ te verwaarlozen en we vinden:

$$w_k(t) = \bar{v} + \sum_{i=1}^N B_i \sin\left(\frac{2\pi t}{P_i} + \varphi_i + \beta_i\right) \quad (1.1.1.3)$$

Ook nu dus weer de som van een aantal sinus golven met dezelfde perioden als de oorspronkelijke, maar met gewijzigde amplitudines ($a_i \rightarrow \frac{a_i}{\sqrt{P_i^2 + 4\pi^2 k^2}}$) en fasen ($\varphi_i \rightarrow \varphi_i - \frac{2\pi k}{P_i}$)

1.1.2. Het probleem is dus nu: hoe moeten we k kiezen, als m gegeven is, opdat $v_m(t) - w_k(t)$ zo klein mogelijk zij. We gaan daartoe het verschil $v_m(t) - w_k(t)$ nader beschouwen en vinden uit (1.1.1.2) en (1.1.1.3):

$$w_k(t) - v_m(t) = \sum_{i=1}^N B_i \sin\left(\frac{2\pi t}{P_i} + \varphi_i + \beta_i\right) - A_i \sin\left(\frac{2\pi t}{P_i} + \varphi_i + \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^N C_i \sin\left(\frac{2\pi t}{P_i} + \varphi_i + \delta_i\right)$$

met

$$\left. \begin{aligned} C_i &= \sqrt{A_i^2 + B_i^2 - 2 A_i B_i \cos(\alpha_i - \beta_i)} \\ \sin \delta_i &= \frac{1}{C_i} (B_i \sin \beta_i - A_i \sin \alpha_i) \\ \cos \delta_i &= \frac{1}{C_i} (B_i \cos \beta_i - A_i \cos \alpha_i) \end{aligned} \right\} (1.1.2.1)$$

Het verschil is dus ook weer een periodieke functie van t ; een som van sinus functies met dezelfde perioden als de oorspronkelijke.

Als we onafhankelijk van t het verschil zo klein mogelijk willen houden, moeten we wegens $|v_m(t) - w_k(t)| \leq \sum_{i=1}^N C_i$ zorgen dat $\sum_{i=1}^N C_i$ zo klein mogelijk blijft.

De C_i 's zijn functies van P_i , m en k . We onderzoeken voor een vaste i , het gedrag van C_i nader en voeren daartoe in, de dimensioneloze grootheden:

$$x = P_i/m \quad \text{en} \quad r = k/m \quad (1.1.2.2)$$

noemen we C_i/a_i als functie van x en r : $f(x, r)$ dan is

$$f^2(x, r) = \frac{x^2}{x^2 + 4\pi^2 r^2} + \left(\frac{x^2}{\pi^2} - \frac{4x^2 r}{x^2 + 4\pi^2 r^2} \right) \sin^2 \frac{2\pi}{x} - \frac{x^3}{\pi(x^2 + 4\pi^2 r^2)} \sin \frac{2\pi}{x} \quad (1.1.2.3)$$

of

$$f^2(x, r) = \frac{1}{1 + \frac{4\pi^2 r^2}{x^2}} + \left(1 - \frac{4\pi^2 r}{x^2 + 4\pi^2 r^2} \right) \left(\frac{\sin \frac{2\pi}{x}}{\frac{2\pi}{x}} \right)^2 - \frac{2\pi}{x + \frac{4\pi^2 r^2}{x}} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{x}}{\frac{2\pi}{x}} \quad (1.1.2.3^I)$$

of

$$f^2(x, r) = \frac{x^2}{2\pi^2(x^2 + 4\pi^2 r^2)} \left\{ x^2 + 4\pi^2 r^2 - 4\pi^2 r + 2x^2 - 2\pi x \sin \frac{2\pi}{x} - (x^2 + 4\pi^2 r^2 - 4\pi^2 r) \cos \frac{2\pi}{x} \right\} \quad (1.1.2.3^{II})$$

Uit (1.1.2.3) volgt $\lim_{x \rightarrow \infty} f^2(x, r) = 0$.

Het gedrag van $f(x, r)$ is verder zo, dat er bij kleine x -waarden een groot aantal maxima en minima zijn, terwijl er (bij $r \approx 1$) een laatste maximum is voor $x \approx 1$ waarna de functie monotoon tot nul nadert. De exacte posities van de opeenvolgende maxima en minima laten zich helaas niet bepalen daar $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ tot een 5^e graadskromme in x voert, waarin de coëfficiënten nog goniometrische functies van $\frac{1}{x}$ bevatten. Hieruit is x niet expliciet oplosbaar.

We moeten er mee volstaan $f(x, r)$ numeriek en grafisch te bepalen voor een aantal r -waarden. Voor $x < 1$ kunnen uit (1.1.2.3^{II}) de grenzen, waar tussen $f(x, r)$ zich beweegt, als volgt bepaald worden:

We schrijven voor (1.1.2.3^{II}):

$$f^2(x, r) = M(x, r) - N_1(x, r) \sin \frac{2\pi}{x} - N_2(x, r) \cos \frac{2\pi}{x}$$

met
$$M(x, r) = \frac{x^2(x^2 + 4\pi^2 r^2 - 4\pi^2 r + 2\pi^2)}{2\pi^2(x^2 + 4\pi^2 r^2)}$$

of
$$N_1(x, r) = \frac{x^3}{\pi(x^2 + 4\pi^2 r^2)} \quad N_2(x, r) = \frac{x^2(x^2 + 4\pi^2 r^2 - 4\pi^2 r)}{2\pi^2(x^2 + 4\pi^2 r^2)}$$

$$f^2(x, r) = M(x, r) - A(x, r) \sin \varphi(x)$$

met

$$A(x, r) = \sqrt{N_1^2(x, r) + N_2^2(x, r)}$$

dus

$$M(x, r) - A(x, r) \leq f^2(x, r) \leq M(x, r) + A(x, r)$$

In fig. 1 is het resultaat van de numerieke berekening, voor $r = 0, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 1$, en 2 weergegeven. Voor $x < 1$ is de functie $\sqrt{M(x, r) + A(x, r)}$ gebruikt, die dus in $f(x, r)$ overgaat bij toenemende x .

Bij $x \geq$ ca 2 blijkt een r -waarde in de buurt van $\frac{1}{2}$ het meest gunstig te zijn. Bij kleine x -waarden is het niet zonder meer duidelijk welke r waarden het gunstigst is.

1.1.3

We willen nu nagaan voor welke r $f(x, r)$, bij vaste x , minimaal is en bepalen daartoe $\frac{\partial^2 f(x, r)}{\partial \beta^2}$ na substitutie van $\cos \beta = \frac{x^2}{x^2 + 4\pi^2 r^2}$ (waardoor het rekenen vereenvoudigd wordt).

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^2(x, r)}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \cos^2 \beta + \left(\frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x}{\pi} \sin 2\beta \right) \sin^2 \frac{\pi}{x} - \frac{x}{\pi} \sin \frac{2\pi}{x} \cos^2 \beta \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \left(1 - \frac{x}{\pi} \sin \frac{2\pi}{x} \right) \cos^2 \beta + \left(\frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x}{\pi} \sin 2\beta \right) \sin^2 \frac{\pi}{x} \right\} = \\ &= - \left(1 - \frac{x}{\pi} \sin \frac{2\pi}{x} \right) \sin 2\beta - \frac{2x}{\pi} \sin^2 \frac{\pi}{x} \cdot \cos 2\beta \end{aligned}$$

Nulstelling geeft:

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \sin^2 \frac{\pi}{x}}{\sin \frac{2\pi}{x} - \frac{x}{\pi}}$$

of
$$\frac{\frac{4\pi \cos^2 \beta}{x}}{1 - \frac{4\pi^2 r^2}{x^2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\pi}{x}}{\sin \frac{2\pi}{x} - \frac{x}{\pi}} \quad 1)$$

1) r^* is dus de bijzondere waarde van r waarvoor $f(x, r)$ bij vaste x minimaal is.

dus $4\pi^2 \sin^2 \frac{\pi}{x} \cdot r^{*2} + 2\pi x \left(\sin \frac{2\pi}{x} - \frac{\pi}{x} \right) r^* - x^2 \sin^2 \frac{\pi}{x} = 0$ (1.1.3.1)

of $r^* = \frac{1}{4\pi \sin^2 \frac{\pi}{x}} \left(\pi - x \sin \frac{2\pi}{x} + \sqrt{\pi^2 - 2\pi x \sin \frac{2\pi}{x} + 4x^2 \sin^2 \frac{\pi}{x}} \right)$ (1.1.3.2)

Daar slechts $r \geq 0$ zinvol is, komt alleen het plusteken vóór de wortelvorm in aanmerking.

Als $x = \frac{1}{k}$ ($k = 1, 2, \dots$) dan is $r = \infty$; dit is ook direct in te zien, immers in dit geval wordt gemiddeld over een veelvoud van de periode, hetgeen wil zeggen dat, het resultaat een constante n.l. \bar{v} is. $w_k(t)$ wordt gelijk aan \bar{v} als de tijdconstante naar oneindig gaat. In dit geval is dus $v_m - w_k = 0$.

Als $x \rightarrow \infty$ dan wordt $r^{\infty} = \frac{1}{2}$ zoals 't eenvoudigste is in te zien door (1.1.3.1) te schrijven als:

$$4 \frac{\pi^4}{x^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi}{x}}{\frac{\pi^2}{x^2}} r^{*2} + \left(4\pi^2 \frac{\sin \frac{2\pi}{x}}{\frac{2\pi}{x}} - 2\pi^2 \right) r^* - \pi^2 \frac{\sin^2 \frac{\pi}{x}}{\frac{\pi^2}{x^2}} = 0$$

waarna limiet overgang geeft: $2\pi^2 r^* - \pi^2 = 0$

Als x tussen $\frac{1}{k+1}$ en $\frac{1}{k}$ ligt, dan blijkt r als minimum de waarde $\frac{1}{2}$ aan te nemen. Dit kunnen we als volgt inzien:

We schrijven nu voor (1.1.3.1)

$$4r^{*2} \pi^2 \sin^2 \frac{\pi}{x} + 4r^* \pi x \sin \frac{2\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x} - 2\pi^2 r^* - x^2 \sin^2 \frac{\pi}{x} =$$

$$4r^{*2} \pi^2 - 4r^{*2} \pi^2 \cos^2 \frac{\pi}{x} + 4r^* \pi x \sin \frac{2\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x} - x^2 \sin^2 \frac{\pi}{x} - 2\pi^2 r^* = 0$$

of

$$2\pi^2 (2r^{*2} - r^*) = (2r^* \pi \cos \frac{\pi}{x} - x \sin \frac{\pi}{x})^2$$

Het rechterlid is steeds groter dan of gelijk aan nul derhalve:

$$2r^{*2} - r^* \geq 0 \quad \text{of} \quad r^* \geq \frac{1}{2}$$

De waarde $r^{\infty} = \frac{1}{2}$ wordt bereikt als

$$\pi \cos \frac{\pi}{x} = x \sin \frac{\pi}{x} \quad \text{of} \quad \text{tg} \frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{x} \quad (1.1.3.3)$$

De waarden x die aan (1.1.3.3) voldoen, kunnen bijv. grafisch bij benadering bepaald worden. Tussen $\frac{1}{2}$ en 1 is de x waarde waarvoor $r^{\infty} = \frac{1}{2}$ ongeveer 0,7. enz. (zie fig. 2).

Het blijkt dus niet mogelijk uit de beschouwing van het verschil in de vervorming van een enkele sinus golf een meest gunstige r-waarde te bepalen. Het hangt er van af met welke perioden in de windfluctuaties we te maken hebben. Hierbij moet echter ook nog bedacht worden, dat de grootte van de amplitudo een rol speelt. In 't algemeen zullen de amplitudina bij fluctuaties van korte periode kleiner zijn dan die bij langere periode. Dit pleit er voor de r-waarde toch in de buurt van $\frac{1}{2}$ te houden. In een aantal voorbeelden uit registraties in 2. zullen we dit toelichten.

1.1.4 Er volgt thans nog een poging het probleem iets algemener aan te pakken en wel met behulp van een statistische beschouwing.

We beschouwen een universum van elementen $v(t)$. We onderstellen dat, bij vaste t , iedere $v(t)$ is opgebouwd uit een som van onderling onafhankelijke elementen $a_i \sin(\frac{2\pi t}{P_i} + \varphi_i)$ volgens formule (1.1.1.1). Dan zijn in het universum der functies $v_m(t) - w_k(t)$ de elementen

$$y = C_i \sin\left(\frac{2\pi t}{P_i} + \varphi_i + \delta_i\right) \quad (1.1.4.1)$$

ook onderling onafhankelijk. Deze elementen zelf kunnen we opvatten als stochastische grootheden met een gemiddelde nul en variantie $\frac{1}{2} C_i^2$

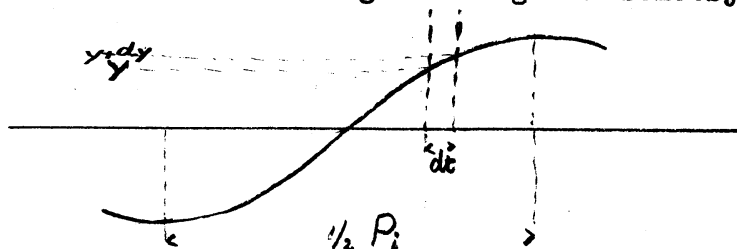
Volledigheidshalve laten we de afleiding hiervan zien: Uit (1.1.3.3) volgt

$$dt = \frac{P_i}{2\pi \sqrt{C_i^2 - y^2}} dy$$

De kans, dat y tussen y en $y+dy$ ligt, is:

$$\frac{dt}{\frac{1}{2} P_i} = \frac{1}{\pi \sqrt{C_i^2 - y^2}} dy \quad (1.1.4.2)$$

y kan immers tijdens een $\frac{1}{2}$ periode alle waarden tussen $+ C_i$ en $- C_i$ aannemen. Zie ter toelichting het volgende schetsje:



(1.1.4.2) is de dichtheidsfunctie van y .

De verdelingsfunctie is

$$F(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-C_i}^y \frac{dn}{\sqrt{C_i^2 - n^2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{y}{C_i}$$

(Zoals behoort is $F(C_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$)

verder is

$$\bar{y} = \frac{1}{2} \int_{-c_i}^{+c_i} \frac{y dy}{\sqrt{c_i^2 - y^2}} = \frac{1}{2} \pi \left[-\sqrt{c_i^2 - y^2} \right]_{-c_i}^{+c_i} = 0$$

$$\text{var } y = \frac{1}{\pi} \int_{-c_i}^{+c_i} \frac{y^2 dy}{\sqrt{c_i^2 - y^2}} = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{2} \sqrt{c_i^2 - y^2} + \frac{c_i^2}{2} \arcsin \frac{y}{c_i} \right]_{-c_i}^{+c_i} = \frac{1}{2} c_i^2$$

Als we het rechterlid van (1.1.4.2) met $z = \frac{y + c_i}{2 c_i}$ transformeren ontstaat:

$$\frac{dz}{\pi z^{1/2} (1-z)^{1/2}} = \frac{z^{-1/2} (1-z)^{-1/2}}{B(1/2, 1/2)} dz$$

waaruit blijkt, dat we met een Bêta-verdeling (Pearson I) te maken hebben, en wel in de gedaante van een U-vormige verdeling.

Volgens de centrale limietstelling is de grootheid $v_m(t) - w_k(t)$ bij benadering normaal verdeeld met gemiddelde nul en variantie $\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} c_i^2$

Het ligt nu voor de hand om r zo te kiezen dat $\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} c_i^2$ minimaal wordt teneinde te bereiken dat $w_v(t)$ zo goed mogelijk bij $v_m(t)$ aansluit.

Een stap verder is nu te onderstellen dat we van de som op een integraal mogen overgaan en we schrijven

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} c_i^2 \approx \int_0^{\infty} g(x) \cdot \frac{1}{2} a^2(x) f(x, r) dx \quad (1.1.4.3)$$

We hebben hierbij dus een gewichtsfunctie $g(x)$ ingevoerd. Strikt genomen is het probleem dus alleen op te lossen als we weten hoe de amplitudo a_i van de periode P_i (of van $x_i = \frac{P_i}{m}$) afhangt en hoe de verdelingsfunctie $g(x)$ van deze amplitudina is.

De eenvoudigste onderstelling die we kunnen maken is $g(x) \cdot \frac{1}{2} a^2(x) =$ constant. Deze onderstelling is tevens plausibel. Immers we kunnen ten eerste aannemen dat in 't algemeen de amplitudina groter zijn naarmate de periode groter is. Echter zal de frequentie steeds kleiner worden naarmate de periode groter is, daar tenslotte de windsnelheid begrensd is. Aan de andere zijde van het spectrum kan men zonder bezwaar een zeer groot aantal golven met zeer kleine amplitudina in het model toelaten, omdat deze, mede in verband met de homogeen verdeelde fasen hoeken, toch geen merkbaar effect hebben.

In dit geval moeten we

$$K \int_0^{\infty} f^2(x,r) dx$$

minimaliseren en dus

$$\frac{d}{dr} \int_0^{\infty} f^2(x,r) dx = 0$$

stellen

Uitwerking hiervan geeft

$$\int_0^{\infty} \frac{d f^2(x,r)}{dr} dx = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{-8\pi^2 r x^2}{(x^2 + 4\pi^2 r^2)^2} - \frac{4x^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2r}}{x^2 + 4\pi^2 r^2} + \frac{32\pi^2 r^2 x^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2r}}{(x^2 + 4\pi^2 r^2)^2} + \frac{8\pi r x^3 \sin \frac{\pi x}{2r}}{(x^2 + 4\pi^2 r^2)^2} \right\} dx =$$

$$-8\pi^2 r J_1 - 4 J_2 + 32\pi^2 r^2 J_3 + 8\pi r J_4.$$

De waarden der integralen $J_1 \dots J_4$ blijken te zijn:

$$J_1 = 1/8r \quad ; \quad J_2 = 1/2 \pi^2 - 1/2 \pi^2 r + 1/2 \pi^2 r \exp(-1/r)$$

$$J_3 = 1/16r - 1/16r \exp(-1/r) - 1/16r^2 \cdot \exp(-1/r)$$

$$J_4 = \pi/2 - \pi/4r \cdot \exp(-1/r) - \pi/2 \exp(-1/r)$$

Tenslotte ontstaat na nulstelling:

$$8r - 3 = 4(1 + 2r) \exp(-1/r)$$

Hieruit volgt door grafische oplossing:

$$r \approx 0,55$$

1.1.5

In het voorgaande is het geval behandeld, dat de snelheid volgens de registratie met grote tijdconstante, die vergeleken wordt met het m-minuten gemiddelde, afgelezen wordt aan het eind van het m-min. tijdvak.

We kunnen ons nu afvragen, of het misschien beter is het m-min. gemiddelde te vergelijken met de registratie met grote tijdconstante op een ander moment, b.v., algemeen gesteld, op het tijdstip $t - \delta m$.

Opm.: Het schijnt onredelijk, dat men de informatie, die men uit een volledig 10-min. tijdvak wil putten, beter ter beschikking krijgt, als men de laatste δm . minuten buiten beschouwing laat. De oorzaak van het feit dat deze mogelijkheid aanwezig is, schuilt echter in onze idealisatie van het windsverloop in een som van zuivere sinus golven.

Registratie op tijdstip $t - \delta m$ geeft voor $w_k(t - \delta m)$

$$\approx \sum_{i=1}^N B_i \sin\left(\frac{2\pi t}{P_i} + \varphi_i + \beta_i - \frac{2\pi \delta m}{P_i}\right) \quad (1.1.5.1)$$

met $B_i = \frac{a_i P_i}{\sqrt{P_i^2 + 4\pi^2 k^2}}$ en $\left. \begin{aligned} \sin \beta_i &= -\frac{2\pi k}{\sqrt{P_i^2 + 4\pi^2 k^2}} \\ \cos \beta_i &= \frac{P_i}{\sqrt{P_i^2 + 4\pi^2 k^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.5.1^I)$

Dit vergelijken we met (1.1.1.2):

$$v_m(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin\left(\frac{2\pi t}{P_i} + \varphi_i + \alpha_i\right)$$

met $A_i = \frac{a_i P_i}{m \pi} \sin \frac{\pi m}{P_i}$ en $\alpha_i = -\frac{m\pi}{P_i}$

We hebben nu twee constante k en δ ter beschikking d.w.z. we kunnen nu eisen, dat de verschillende sinus golven in beide sommen volledig samenvallen, namelijk bij

$$|A_i| = B_i \quad (1.1.5.2)$$

en $\beta_i - \frac{2\pi \delta m}{P_i} = -\frac{\pi m}{P_i}$ (als $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$)
 of $\beta_i - \frac{2\pi \delta m}{P_i} = -\frac{\pi m}{P_i} + \pi$ (als $\frac{1}{2k+2} < x < \frac{1}{2k+1}$) (1.1.5.3)

We gaan weer over op dimensieloze grootheden (1.1.2.2), waarmee uit (1.1.5.2) ontstaat:

$$\left| \frac{x}{\pi} \sin \frac{\pi}{x} \right| = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4\pi^2 r^2}}$$

of

$$\tilde{r} = \frac{\sqrt{\pi^2 - x^2 \sin^2 \frac{\pi}{x}}}{2\pi \left| \sin \frac{\pi}{x} \right|} \quad (1.1.5.4)$$

Evenals $r^{\#}$ in (1.1.8) blijkt deze \tilde{r} voor $x = \frac{1}{q}$ ($q = 1, 2, \dots$) oneindig groot te worden.

Verder blijkt $\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{r} \approx 0,29$

Voor $x < 1$ heeft \tilde{r} minima die volgen uit:

$$\frac{d\tilde{r}}{dx} = 0 \quad \text{of} \quad \cos \frac{\pi}{x} = \left(\frac{x}{\pi} \sin \frac{\pi}{x} \right)^3$$

We volstaan met een benadering. Als $x \ll \pi$ dan is $\cos \frac{\pi}{x} \approx 0$, dus $\frac{\pi}{x} = (k + \frac{1}{2})\pi$ of $x \approx \frac{2}{2k+1}$

De waarde van r is dan $\tilde{r} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\pi^2 - \frac{4}{(2k+1)^2}} \approx \frac{1}{2}$.

In fig. 2 is het verloop van de functie \tilde{r} gedeeltelijk aangegeven.

Als $x < 1$ komt dit vrijwel overeen met het verloop van de functie r^{\pm} : (1.1.3.2).

(1.1.5.3) voert tot:

$$\operatorname{tg} \beta_i = \operatorname{tg} (2\delta - 1) \pi/x = - \frac{2\pi \tilde{r}}{x}$$

dus $\operatorname{tg}^2 (2\delta - 1) \pi/x = \frac{4\pi^2 \tilde{r}^2}{x^2}$ waaruit na

substitutie van (1.1.5.4)

$$\cos (2\delta - 1) \pi/x = \pm x/\pi \sin \pi/x \quad (1.1.5.5)$$

In verband met (1.1.5.3) komt allen het + teken in aanmerking.

Als $x \gg \pi$ is dan vinden we uit (1.1.5.5) met behulp van de bekende reeksontwikkelingen:

$$1 - \frac{\pi^2 (2\delta - 1)^2}{2x^2} + O(1/x^4) = x/\pi \left\{ \pi/x - \pi^3/6x^3 + O(1/x^5) \right\}$$

of $\pi^3/6 - \frac{1}{2}\pi^2(2\delta - 1)^2 = O(1/x^2) \rightarrow 0$

dus $\delta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1/3}) \approx 0,788$ of $0,211$

Alleen $= 0,211$ is bruikbaar wegens de eis $\sin \beta \leq 0$ (1.1.5.1^I)

Stel nu $x = 1/\mu$ ($\mu = 1, 2, \dots$)

In dit geval kan alleen maar formeel een δ -waarde bepaald worden, immers nu is $\sin \pi/x = 0$ dus $A_i = 0$. d.w.z. $v_m = \text{constant}$; het doet er dus niet toe welke waarde men voor δ kiest, men moet alleen r zo groot mogelijk kiezen.

We beschouwen nu de gevallen $x < 1$ b.v. $\frac{1}{\mu + \Delta}$. ($0 < \Delta < 1$)
Hierbij is $\frac{1}{\mu} |\sin \frac{\pi}{x}| \ll 1$

dus $(2\delta - 1) \pi/x + 2q\pi \approx -\pi/2 + \varepsilon$. ($0 < \varepsilon \ll 1$)

q kunnen we nog kiezen. We willen δ zo dicht mogelijk de nul doen benaderen; dus moeten we zorgen dat

$$2q\pi \approx \pi/x - \pi/2 = (\mu + \Delta - \frac{1}{2})\pi$$

$$q \approx \frac{1}{2}\mu + \frac{\Delta}{2} - \frac{1}{4}$$

We nemen $q = \frac{1}{2} p$.

Voor δ vinden we dan

$$\delta \approx \frac{2\Delta - 1}{2(\mu + \Delta)}$$

Er zijn echter meerdere waarden voor δ mogelijk.

Is $x = 1 + \Delta$ ($0 < \Delta < 1$)

dus $\frac{x}{\pi} \sin \frac{x}{x} \approx \Delta$

dan is $\cos(2\delta - 1) \frac{\pi}{1 + \Delta} \approx \Delta$

of $(2\delta - 1) \frac{\pi}{1 + \Delta} + \frac{\pi}{2} \approx \Delta$

$$\delta \approx \frac{1 - \Delta}{4} + \frac{\Delta(1 + \Delta)}{\pi} \rightarrow 1/4.$$

We concluderen:

Hebben we te maken met perioden die groter zijn dan m , dan kunnen we vrijwel volledige overeenstemming tussen v_m en w_k bereiken door $r \approx 0,3$ te kiezen en de registratie af te lezen op het tijdstip $t - 0,2 m$ als over $(t - m, t)$ wordt gemiddeld.

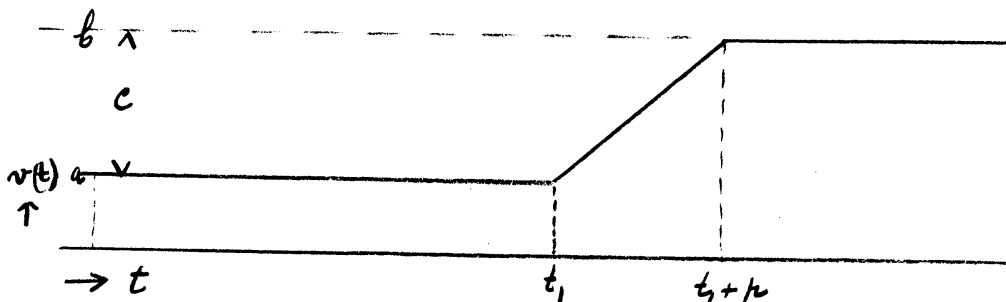
Bij perioden kleiner dan m is de waarde van δ waarvoor $v_k \approx v_m$ wordt niet eenduidig bepaald. Er zijn meerdere waarden van δ (zowel pos. als neg.) mogelijk bij iedere gegeven periode.

1.2 Een niveauverandering in het windsverloop

1.2.1 In theorie kan men natuurlijk ieder windverloop wel beschrijven met een som van sinusfuncties, ook dat verloop waarbij de windsnelheid, na zich eerst een tijdlang op een zeker niveau a te hebben bewegen, min of meer plotseling naar een niveau b verloopt. Later loopt de snelheid weer eens terug en als men maar een voldoende lang tijdvak ter beschikking heeft kan men ook dit gebeuren wel met een som van sinusfuncties beschrijven.

Het lijkt echter uit praktisch oogpunt toch wel interessant om na te gaan, wat er met $v_m - v_k$ gebeurt, als we met een dergelijke niveau-verandering te maken hebben.

We gaan uit van een windverloop in de volgende vorm:



$$v(t) \begin{cases} = a & t \leq t_1 \\ = a + (t - t_1)q & t_1 \leq t \leq t_1 + \mu \\ = b & t_1 + \mu \leq t \end{cases} \quad (1.2.1.)$$

met
$$q = \frac{b-a}{\mu} = \frac{c}{\mu}$$

Als we gebruik maken van de eenheidsfunctie van Hamilton:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \end{cases}$$

dan kunnen we schrijven:

$$v(t) = a + (t-t_1) \cdot q \cdot H(t-t_1) + (\mu+t_1-t) \cdot q \cdot H(t-t_1-\mu) \quad (1.2.1.2)$$

Voor het berekenen van v_m en w_k wordt gebruik gemaakt van de volgende formule, waarvan de juistheid eenvoudig is in te zien

$$\int_a^x f(\tau) \cdot H(\tau-a) d\tau = H(x-a) \int_a^x f(\tau) d\tau + H(-a) \int_0^x f(\tau) d\tau.$$

Berekening hiermee levert:

$$v_m(t) = a + \frac{q}{2m} \left\{ (t-t_1)^2 H(t-t_1) - (t-m-t_1)^2 H(t-m-t_1) - (t-t_1-\mu)^2 H(t-t_1-\mu) + (t-m-t_1-\mu)^2 H(t-m-t_1-\mu) \right\} \quad (1.2.1.3)$$

en

$$w_k(t) = a(1 - \exp^{-t/k}) + (t-t_1 - k + k \exp \frac{t-t_1}{k}) \cdot q \cdot H(t-t_1) + (t_1 + k + \mu - t - k \exp \frac{t_1 + \mu - t}{k}) \cdot q \cdot H(t-t_1-\mu) \quad (1.2.1.4)$$

We nemen weer $t \gg k$ aan, zodat de e-macht in de eerste term verwaarloosd kan worden. Verder zullen we weer, evenals in 1.1.2. nagaan of het misschien gunstiger is de registratie met grote tijdconstanten op een iets vroeger moment af te lezen en dus $v_m(t)$ met $w_k(t - \delta m)$ vergelijken.

$$w_k(t - \delta m) \approx a + (t - \delta m - t_1 - k + k \exp \frac{t_1 - t + \delta m}{k}) \cdot q \cdot H(t - \delta m - t_1) + (t_1 + k + \mu - t + \delta m - k \exp \frac{t_1 + \mu - t + \delta m}{k}) \cdot q \cdot H(t - \delta m - t_1 - \mu) \quad (1.2.1.4^I)$$

Vervolgens voeren we weer dimensieloze grootheden in n.l.

$$t/m = x \quad ; \quad \frac{t-t_1}{m} = y \quad ; \quad k/m = r \quad (1.2.1.5)$$

Nu gaan (1.2.1.3) en (1.2.1.4^I) over in

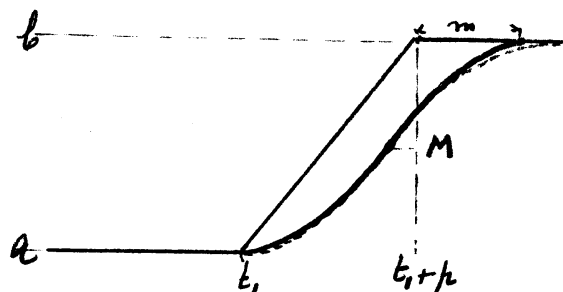
$$v_m(y) = a + \frac{c}{2x} \left\{ y^2 H(y) - (y-1)^2 H(y-1) - (y-x)^2 H(y-x) + (y-x-1)^2 H(y-x-1) \right\} \quad (1.2.1.6)$$

$$w_k(y) = a + \frac{c}{x} \left\{ (y-\delta-r+r \exp \frac{-y+\delta}{r}) H(y-\delta) + (-y+\delta+x+r-r \exp \frac{-y+x+\delta}{r}) H(y-x-\delta) \right\} \quad (1.2.1.7)$$

Tenslotte voeren we in de verschilfunctie

$$A(y, x, r, \delta) = \frac{1}{c} \left\{ w_k(y) - v_m(y) \right\} \quad (1.2.1.8)$$

1.2.2 De bedoeling is dus weer: δ en r zo gunstig mogelijk te kiezen. Een methode die misschien tot gunstige δ en r waarden kan voeren is de volgende: We maken, dat $w_k(t - \delta m)$ en $v_m(t)$ beiden de waarde $a + \frac{1}{2}c$ gelijktijdig aannemen en bovendien zorgen we ervoor dat w_k en v_m op dat moment dezelfde helling bezitten, zie bijgaande schets.



Als de getrokken kromme de functie v_m voorstelt, dan komt de eis die we aan w_k stellen door keuze van δ en r er op neer, dat gezorgd wordt dat w_k (gestippelde kromme) door M gaat en hier dezelfde helling als v_m bezit. Het is zeer plausibel, dat we hiermede een gunstige keuze hebben.

Het is zeer plausibel, dat we hiermede een gunstige keuze hebben.

In mathematische vorm luiden de eisen:

$$1^\circ \quad \left\{ v_m(y) \right\}_{y=y_0} = \left\{ w_k(y) \right\}_{y=y_0} = a + \frac{1}{2}c \quad (1.2.2.1)$$

$$2^\circ \quad \left\{ \frac{\partial v_m(y)}{\partial y} \right\}_{y=y_0} = \left\{ \frac{\partial w_k(y)}{\partial y} \right\}_{y=y_0} \quad (1.2.2.2)$$

We lossen eerst op $v_m(y) = a + \frac{1}{2}c$

$$\text{dus } y^2 H(y) - (y-1)^2 H(y-1) - (y-x)^2 H(y-x) + (y-x-1)^2 H(y-x-1) = x$$

In ieder geval is $0 < y_0 < x+1$ dus $H(y)=1$ en $H(y-x-1)=0$

Verder zijn er zes mogelijkheden:

1° $0 < 1 < x < y < x+1$ dit geeft.

$$y^2 - (y-1)^2 - (y-x)^2 = x$$

of $y^2 - 2(x+1)y + x^2 + x + 1 = 0$ dus $y = x+1 \pm \sqrt{x}$

wegens $y < x+1$ komt alleen het - teken in aanmerking;

echter moet $x < y$ zijn, dus $x < x+1 - \sqrt{x}$ of $\sqrt{x} < 1$. Dus zou $x < 1$

moeten zijn, hetgeen in strijd is met het gegeven. Deze mogelijkheid komt dus niet in aanmerking.

2° $0 < 1 < y < x$ voert tot $2y - 1 = x$ dus $y = \frac{1}{2}(x+1)$. Deze waarde klopt volledig met het gegeven.

3° $0 < y < 1 < x$ geeft $y^2 = x$ $y = \pm \sqrt{x}$. Wegens $y > 0$ is alleen het + teken bruikbaar. Echter moet $y < 1$ zijn dus $\sqrt{x} < 1$ of $x < 1$; dit is weer in strijd met het gegeven.

De overige drie mogelijkheden geven overeenkomstige resultaten:

- 4° $0 < x < 1 < y < x+1$: $y = x+1 - \sqrt{x}$ in strijd met het gegeven
 5° $0 < x < y < 1$: $y = \frac{1}{2}(x+1)$ in overeenstemming met het gegeven
 6° $0 < y < x < 1$: $y = \sqrt{x}$ in strijd met het gegeven.

Er zijn dus twee mogelijkheden over n.l.

$$0 < 1 < y < x \quad \text{en} \quad 0 < x < y < 1$$

Beiden hebben tot oplossing $y = \frac{1}{2}(x+1)$

Met deze waarden van y kunnen nu uit (1.2.2.1) en (1.2.2.2) twee vergelijkingen afleiden, waaruit δ en r opgelost moeten worden, namelijk

$$\frac{1}{2}x = \left\{ \frac{1}{2}(x+1) - \delta - r + r \exp \frac{-x-1+2\delta}{2r} \right\} H(x+1-2\delta) + \left\{ -\frac{1}{2}(x+1) + \delta + x + r - r \exp \frac{x-1+2\delta}{2r} \right\} H(-x+1-2\delta) \quad (1.2.2.3)$$

$$1 - \frac{x-1}{x} H(x-1) = \frac{1}{2}x \left(1 - \exp \frac{-x-1+2\delta}{2r} \right) H(x+1-2\delta) - \frac{1}{2}x \left(1 - \exp \frac{x-1+2\delta}{2r} \right) H(-x+1-2\delta) \quad (1.2.2.4)$$

Het linkerlid van (1.2.2.2) wordt n.l.

$$\left\{ \frac{\partial^{N_m}/e}{\partial y} \right\}_{y=\frac{1}{2}(x+1)} = \frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x-1) H(x-1) - \frac{x}{2x} H(1-x) \right\} \quad \text{wat wegens } H(x) = 1 - H(-x)$$

in $1 - \frac{x-1}{x} H(x-1)$ overgaat.

Het ontstaan van de overige leden is direct duidelijk.

Er zijn nu drie mogelijkheden n.l.

- 1° $x < 1 - 2\delta < 1$ (1.2.2.3) en (1.2.2.4) gaan over in

$$\frac{1}{2}x = r \exp \frac{-x-1+2\delta}{2r} + x - r \exp \frac{x-1+2\delta}{2r} \quad (1.2.2.5)$$

en

$$1 = \frac{1}{2}x \left(1 - \exp \frac{-x-1+2\delta}{2r} \right) - \frac{1}{2}x \left(1 - \exp \frac{x-1+2\delta}{2r} \right) \quad (1.2.2.6)$$

Uit (1.2.2.5) volgt

$$\exp \frac{\delta}{r} = \frac{x \exp \frac{1}{2}r}{2r \left(\exp \frac{1}{2}r - \exp -\frac{1}{2}r \right)}$$

Uit (1.2.2.6)

$$\exp \frac{\delta}{r} = \frac{x \exp \frac{1}{2}r}{\exp \frac{1}{2}r - \exp -\frac{1}{2}r}$$

dus $2r = 1$ of $r = \frac{1}{2}$.

$$\text{en} \quad \exp(2\delta-1) = \frac{x}{\exp x - \exp -x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

waaruit $\delta \rightarrow 0,15$

- 2° $1 - 2\delta \leq x \leq 1$ geeft

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(x+1) - \delta - r + r \exp \frac{-x-1+2\delta}{2r} \quad (1.2.2.7)$$

en weer

$$1 = \frac{1}{x} \left(1 - \exp \frac{-x-1+2\delta}{2r} \right) \quad (1.2.2.8)$$

Uit (1.2.2.8) volgt:

$$\exp \frac{\delta}{r} = (1-x) \exp \frac{1+x}{2r} \quad \text{of} \quad \delta = \frac{1}{2}(1+x) + r \ln(1-x)$$

Subst. in (1.2.2.7) geeft:

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1+x) - r \ln(1-x) - r + r(1-x)$$

dus

$$r = \frac{-x}{2x + 2 \ln(1-x)} \quad \text{en} \quad \delta = \frac{x + x^2 + \ln(1-x)}{2x + 2 \ln(1-x)}$$

$x=1$ geeft $r=0, \delta=\frac{1}{2}$
 $x=1-2\delta$ " $r=\frac{1}{2}, \delta \approx 0,1$ dus $x=0,8$

$$3^{\circ} \quad 1-2\delta < 1 < x$$

Nu komen we tot

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(x+1) - \delta - r + r \exp \frac{-x-1+2\delta}{2r} \quad (1.2.2.9)$$

en

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} \left(1 - \exp \frac{-x-1+2\delta}{2r} \right) \quad (1.2.2.10)$$

Uit (1.2.2.10) volgt $\exp \frac{-x-1+2\delta}{2r} = 0$ dus $r = 0$
 en dus uit (1.2.2.9) $\delta = \frac{1}{2}$

In fig. 3 is het verloop van δ en r als functies van x aangegeven.

Hoewel a priori te verwachten was, dat δ en r van x afhankelijk zouden zijn, is het helaas niet zo, dat bovenstaande methode tot een keuze van δ en r voert, die althans bij benadering aan de eisen voldoet.

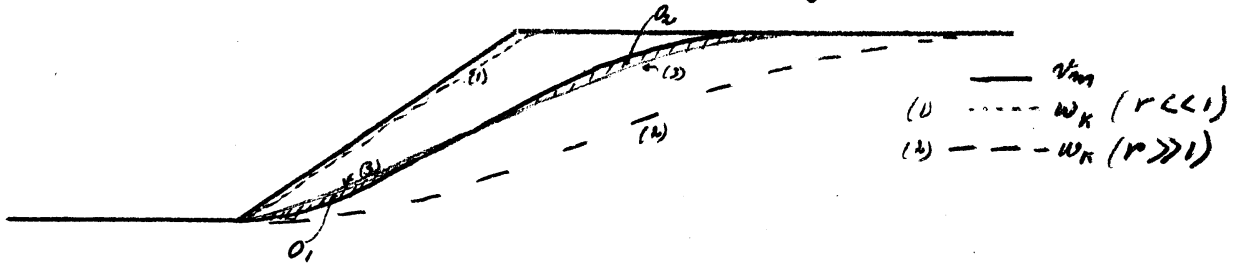
1.2.3 We kwamen er toe bovenstaande methode te kiezen, omdat het berekenen van

$$Y_1 = \int_0^1 |A| dy \quad \text{of} \quad Y_2 = \int_0^1 A^2 dy$$

zeer veel rekenwerk eist.

Het minimaliseren van Y_1 of Y_2 is eigenlijk de weg die tot de beste overeenkomst tussen w_k en v_m leidt. Wegens tijdgebrek is hiervan afgezien. Wel laat $\int_0^1 A dy$ zich eenvoudig berekenen. Daar A zowel positief als negatief kan worden, kan $\int_0^1 A dy = 0$ gesteld worden, wat tot een verband tussen δ en r voert.

In de volgende schets is een en ander verduidelijkt:



De getrokken kromme stelt v_m voor. Als r zeer klein is, dan valt w_k bijna met $v(t)$ zelf samen (1). De functie A is nu bijna geheel positief. Is r zeer groot, dan verloopt w_k als (2). A is nu bijna geheel negatief. De eis $\int A dy = 0$ betekent, dat w_k zodanig verloopt, dat de oppervlakte O_1 tussen w_k en v_m (voor zover $w_k > v_m$) gelijk is aan O_2 tussen w_k en v_m (voor zover $w_k < v_m$). Hoewel het plausibel is, dat in dit geval de waarde van A voor verschillende x -waarden in 't algemeen ook klein zal zijn, is het niet nodig, dat deze eis in alle opzichten tot de meest gunstige en r waarden voert. $\int A dy = 0$ behoeft niet equivalent te zijn met: $\int A^2 dy$ of $\int |A| dy$ is minimaal.

Men kan echter $\int A dy$ eenvoudig berekenen en vindt $\frac{1}{2} - \delta - r$. Nulstelling geeft dus $\delta + r = \frac{1}{2}$ (1.2.3.1)

In de eerste plaats merken we op, dat deze eis slechts het verband tussen δ en r geeft, zodat we nog vrij zijn in de keuze van een van beide grootheden.

Vervolgens zien we, dat (1.2.3.1) voor $x > 1$ volledig overeenstemt met de δ en r -waarden volgens vorige berekening (zie fig 3) en voor $x < 1$ toch slechts weinig er van afwijkt.

Tenslotte merken we op, dat de waarden van δ en r in geval we met sinusgolven van vrij grote periode te maken hebben, zoals we die aan het einde van 1.1.5 gaven n.l. $\delta = 0,2$ en $r = 0,3$ ook volledig aan (1.2.3.1) voldoen.

Tenslotte wordt in de figuren 4 en 5 een illustratie gegeven. Fig.4 bevat de functie $A(4, x, \delta, r)$ weer, voor $\delta = 0$, $r = 0,5$ en x resp. 5;2;1;0,5;0. Fig.5 geeft de functie voor $\delta = 0,2$, $r = 0,3$ en x idem.

We zien, dat ook voor $x < 1$, de keuze $\delta = 0,2$, $r = 0,3$ tot iets gunstiger resultaten voert. De extremen waarden van A zijn over 't algemeen iets kleiner.

2. Resultaten van enkele metingen.

2.1 In de figuren 6 ... 8 zijn de resultaten weergegeven van enkele registraties die in aug. en sept. 1956 in De Bilt zijn opgenomen n.l. op 24 aug. 11.40 ... 12.50; 4 sept. 12.10 ... 14.00; 7 sept. 13.20 - 14.40.

In de eerste plaats zijn uit de normale registraties gemiddelden over 1 minuut bepaald. In de figuren 6 - 8 geven de lijnen a deze 1 min. gemiddelden weer. Uit de 1 min. gemiddelden zijn overlappende 10 min. gemiddelden bepaald (kromme b). Vervolgens geeft de kromme c de registratie met een tijdconstante van 10 min. weer. Kromme d tenslotte stelt in fig. 6 de registratie met een tijdconstante van 1 min. voor en in fig 7 en 8 de registratie met een tijdconstante van 4 min.

Voordat we de figuren 6 - 8 nader beschouwen, zullen we eerst nagaan, hoe bij een zuivere sinusgolf het verschil $w_k - v_m$ (bij $r=1$) zich gedraagt als functie van $x = P/m$ en wel op de momenten waarop de oorspronkelijke golf de gemiddelde waarde passeert, en op de momenten waarop het maximum resp. minimum wordt bereikt, d.w.z. bij $\sin\left(\frac{2\pi t}{P} + \varphi\right) = 0$ resp. $\sin\left(\frac{2\pi t}{P} + \varphi\right) = \pm 1$. De functie $\frac{w_k - v_m}{a}$ die resp. $\pm C/a \sin \varphi = \pm \left\{ \frac{-2\pi x}{x^2 + 4\pi^2} + \frac{x}{2\pi} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{x}\right) \right\}$ en $\pm C/a \cos \varphi = \pm \left\{ \frac{x^2}{x^2 + 4\pi^2} - \frac{x}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{x} \right\}$ is, is voor deze gevallen berekent en in fig. 9 weergegeven.

Vestigen we nu de aandacht op fig. 6 dan kan hier een tamelijk duidelijke golf met een periode van ongeveer 25 min. worden waargenomen (zie de dunne, uit de hand getrokken kromme e). De amplitudo van deze golf is 2 à $2\frac{1}{2}$ m/sec. Volgens de theorie moeten we op momenten waarop de kromme e de gemiddelde waarde (ca. 8,5 m/sec.) passeert tussen b en c een verschil van $0,37 \times 2$ à $2\frac{1}{2}$ m/sec. = 0,74 ... 0,92 m/sec. vinden. (zie fig. 9 voor $x = 2,5$). We lezen b.v. om 12.^u04 af -0,75 m/sec. en om 12.^u16: 0,85 m/sec. Tijdens de maxima van e verwachten we ca. $0,09 \times 2$ à $2\frac{1}{2}$ m/sec. = 0,18 à 0,22 m/sec. Omstreeks 12.^u22 lezen we waarden in de buurt van 0 af. Het spreekt vanzelf, dat we in dit laatste geval niet zo precies de uitkomsten van de theorie bevestigd vinden. In de eerste plaats hebben we niet met een zuivere sinusgolf te maken en in de tweede plaats is e gebaseerd op 1 min. gemiddelden, die op het oog uit de registratie geschat zijn en dus ook nog met enige onnauwkeurigheid behept zijn.

In verband met het eerste punt, is b.v. bij het maximum om 11^u58 een groter verschil te constateren dan verwacht wordt, omdat voor 11^u50 de golf nog niet het karakter van een sinusgolf had.

De resultaten van de berekeningen over de verschillen $w_k - v_m$ uit 1,2 kunnen slechts heel globaal gebruikt worden. Stellen we, dat voor 11.42 het gemiddelde niveau 5,8 m/sec. is en vanaf 11.54 ongeveer 9 m/sec., dan krijgen we grootheden C en p uit 1,2 de waarden 3,2 (m/sec.) en 12 (min.). Voor y, x en r moeten we om 11.58 de waarden 1,6; 1,2 en 1 nemen. Met deze waarden berekenen we voor $A(y, x, p, \delta)$ bij $\delta = 0$ ongeveer -0,24.

Dus

$$w_k - v_m = -0,24 \times 3,2 = -0,77$$

Hierbij komt dan nog de fout tengevolge van de periodieke fluctuaties, waarvoor we hier boven ca. -0,2 vonden. De totale afwijking wordt dus ca. -0,9 m/sec. Uit fig. 6 lezen we af -0,7 m/sec.

Fig. 6 bevat tenslotte ook nog de resultaten van de registratie met een één min. tijdconstante. Vergelijking met de één min. gemiddelden van het standpunt van de theorie uit heeft echter weinig zin wegens de onnauwkeurigheid van de één min. gemiddelden zelf.

2.2

In de gevallen van fig. 7 en 8 heeft naast de registratie met 10 min. tijdconstante, ook een registratie met 4 min. tijdconstante plaats gevonden.

Fig. 7 bevat in eerste opzet een golf met een periode van ongeveer 35 minuten en een amplitude van ongeveer 3 m/sec. In fig. 8 zien we, althans tussen 13.10 en 14.20, een golf met een periode van ongeveer 11 minuten en een gemiddelde amplitude van 2,2 m/sec.

Volgens fig. 1 moeten we nu als maximale verschillen tussen w_{10} resp. w_4 en v_{10} verwachten:

Geval 4 sept. $x = 3,5$ $r = 1$ resp. 0,4:

$|w_{10} - v_{10}|$ max = $0,39 \times 3$ m/sec. 1,1 m/sec.

resp $|w_4 - v_{10}|$ max = $0,23 \times 3$ m/sec. 0,7 m/sec.

en

Geval 7. sept. $x = 1,1$ en $r = 1$ resp. 0,4:

$|w_{10} - v_{10}|$ max = $0,22 \times 2,2$ m/sec. 0,5 m/sec.

$|w_4 - v_{10}|$ max = $0,38 \times 2,2$ m/sec. 0,8 m/sec.

In de volgende tabel 1 zijn de geconstateerde verschillen tussen v_{10} en w_{10} resp. w_4 , zoals ze om de 2 minuten bepaald zijn: samengevat:

tabel 1

$w_k - v_{10}$	4 sept. 1956 12 ^u 10 ... 14 ^u 00		7 sept. 1956 13 ^u 10 ... 14 ^u 20	
	aantal k = 10	gevallen k = 4	aantal k = 10	gevallen k = 4
+ 0,9	3	-	-	-
+ 0,8	1	-	-	-
+ 0,7	3	2	2	-
+ 0,6	2	3	-	1
+ 0,5	1	2	3	2
+ 0,4	6	3	3	1
+ 0,3	6	3	7	2
+ 0,2	1	5	2	5
+ 0,1	9	6	3	2
0,0	4	5	5	2
- 0,1	3	4	5	3
- 0,2	3	7	2	2
- 0,3	4	4	1	2
- 0,4	3	7	2	2
- 0,5	2	2	-	5
- 0,6	-	1	-	2
- 0,7	1	-	-	1
- 0,8	-	-	-	3
- 0,9	-	1	-	-
- 1,0	1	1	-	-
- 1,1	-	-	-	-
- 1,2	3	-	-	-

Vergelijken we, zonder meer, de waargenomen extremen met de verwachte waarden, dan vinden we de resultaten die in ry a en b van tabel 2 vermeld zijn:

tabel 2				
	k	a waargenomen	b verwacht	c waarg. halve spreidingsbreedte
4 sept.	{ 10	1,2	1,1	1,1
	{ 4	1,0	0,7	0,9
7 sept.	{ 10	0,7	0,5	0,5 ⁵
	{ 4	0,8	0,8	0,7

De overeenstemming is redelijk maar niet bijzonder goed.

We trachten nog in fig. 8 de resultaten uit 1.2 toe te passen. We zien n.l. van 14.18 tot 14.23 een vrij sterke toename van de snelheid, die we als een begin van een niveauperandering kunnen opvatten. Daarna is er wel weer een plotselinge daling, maar we zullen de registratie niet verder beschouwen dan tot 14.^u23. Voor 14.^u19 kunnen we een gemiddeld niveau van 9 m/sec. stellen; van 14.^u19 tot 14.^u23 een lineaire toename tot 13 m/sec. De golf met een periode van 11 minuten en een amplitudo van 2,2 m/sec. kunnen we hierover gesuperponeerd denken. Deze heeft dan juist zijn maximum omstreeks 14.^u23. Tengevolge van deze golf is $w_{10} - v_{10}$ om 14.^u23 iets kleiner dan het maximale verschil 0,5 m/sec. We stellen $w_{10} - v_{10} = -0,4$. Verder zal $w_4 - v_{10}$ vrijwel maximaal en positief zijn, dus $w_4 - v_{10} = +0,8$. Voor de niveauperandering hebben we $C = 4$ m/sec. en $p = 4$ min. dus $y = 0,4$; $x = 0,4$; $r = 1$. resp. $y = 0,4$ $x = 0,4$ en $r = 0,4$.

Berekening volgens (1.2.1.8) geeft

$$A(0,4; 0,4; 0; 1) = -0,025$$

$$A(0,4; 0,4; 0; 0,4) = +0,168$$

$$\text{dus } w_{10} - v_{10} = -4 \times 0,025 - 0,4 \approx -0,5$$

$$w_4 - v_{10} = +4 \times 0,168 + 0,8 \approx +1,5$$

We lezen daarentegen af $-0,7$ m/sec. en $+1,5$ m/sec. De overeenstemming is vrij goed.

2.3

We merken op, dat naast de twee oorzaken van onnauwkeurigheid, die bij de bespreking van fig. 6 genoemd werden, de volgende foutenbronnen nog in aanmerking genomen moeten worden:

De instelling van het registreerapparaat op de nullijn is niet helemaal zuiver. In het bijzonder bleek dit bij $k = 4$ op 7 sept. het geval te zijn. Er is voor dit geval zo goed mogelijk gecorrigeerd, maar er blijft natuurlijk een mogelijkheid van onnauwkeurigheid bestaan.

De uitslag die de drie verschillende metra-watt-recorders bij eenzelfde frequentie geven, is niet precies gelijk. Daarom wordt zo nu en dan een frequentie van 50 Hz. ingeschakeld en de dan geconstateerde uitslag als ijkpunt gebruikt. Ook de hiervoor toegepaste correcties zullen misschien nog niet voldoende zijn, zodat ook hier nog een foutenbron blijft bestaan.

Houden we met het bovenstaande rekening en nemen we aan, dat het verschil $w_k - v_m$ gemiddeld nul moet zijn (theoretisch en bij een voldoende groot aantal waarnemingen) dan kunnen we de halve spreidingsbreedte uit tabel 1 als maximale $|w_k - v_m|$ opvatten. Deze waarden zijn

in kolom C van tabel 2 vermeld. Zij blijken inderdaad iets beter met de waarden in kolom a overeen te stemmen.

2.4

Tenslotte wordt in de figuren 10a en 10b aangetoond, wat het effect is van het aflezen van de registratie met grote tijdconstante op een iets vroeger tijdstip. We vonden in het voorgaande, dat een keuze $r = 0,3$ en $\delta = 0,2$ waarschijnlijk de gunstigste is. Helaas hebben we geen registratie met een 3 min. tijdconstante ter beschikking. We moeten met een registratie met een 4 min. tijdconstante genoegen nemen. In fig. 10a en 10b zijn nu over elkaar getekend de kromme van de 10 min. gemiddelden (b) en de over 2 minuten verschoven kromme d (4 min. tijdconstante) uit de figuren 7 en 8. Vergelijken we de figuren 10a en 10b met 7 en 8 dan blijkt duidelijk, dat door een verschuiving over 2 minuten een veel betere overeenkomst in het verloop van beide krommen is ontstaan.

Summary

The difference between the true m-minutes mean value of wind-speed ($v_m(t)$) and the recording ($w_k(t)$) with a metro-watt-recorder with large time constant (k minutes) is investigated.

The problem is: Which value of k must be chosen to make the difference as small as possible?

In the first place windspeed is idealized in a sum of sinus waves (formula (1.1.1.1.)) and an effort is made to find the most favourable choice of k by minimalising the amplitude of the difference $w_k(t) - v_m(t)$. Owing to insufficient knowledge of the wave-spectrum of windspeed, even in this idealized form it is not possible to find an exact solution of the problem.

To come to an approximation of the solution we have made some theoretical investigations in part 1 and the results of this part are compared with practical results in part 2.

The theoretical investigations consist of:

- 1° Studying the behaviour of the difference $w_k(t) - v_m(t)$ if wind-speed is a single sinus wave. (sections (1.1.1.), ... 1.1.3)
- 2° A statistical consideration using the simple supposition that the frequency of the sinus waves is inversely proportional to the square of the amplitude. (section 1.1.4)
- 3° The effect of a shifting of the time of recording with the metro-watt. This means studying the difference $w_k(t - m) - v_m(t)$ (section 1.1.5)
- 4° Studying a level change of the windspeed instead of a fluctuating windspeed with the state of sinus waves (part 1.2).

The results of the theoretical considerations are as follows:

- 1° If a and P are amplitude and period of the initial wind wave, it turns out that the difference $w_k(t) - v_m(t)$ is a wave with the same period P but an amplitude which may be called C, which is a function of P, k and m. (see formula (1.1.1.1.) ... (1.1.2.1)) Using the dimensionless quantities $x = P/m$ and $r = k/m$, we can find in figure 1 the behaviour of the function $f(x, r) = \frac{c(x, r)}{a}$.

A uniform most favourable value of r cannot be found if $x > 2\frac{1}{2}$.

The best value of r seems to be $\frac{1}{2}$. If x goes from $2\frac{1}{2}$ to zero the best value of r is variable. The fact that a and P are not correlated in practice, but that short periods and so small values of x agree with small values of a , favours a value of r in the neighbourhood of $\frac{1}{2}$.

In figure 2, r^* , the r which minimalises $f(x, r)$ for x , is constant.

2° From the central limit theorem it follows that $v_m(t) - w_k(t)$ is approximately normally distributed with zero mean and variance $\sum \frac{1}{2} C_i^2$. Using formula (1.1.4.3) and supposing $\frac{1}{2} g(x) \cdot a^2(x) =$ constant ($g(x)$ is a weight function) minimalizing $\frac{1}{2} \sum C_i^2$ yields:
 $r = 0,55$.

3° Introducing a second quantity which must be chosen besides r namely the time shift factor δ , the possibility to make $w_k(t - \delta m) - v_m(t) = 0$ arises.

It turns out that for $x > 1$ the most favourable values of r and δ are respectively 0,3 and 0,2. If $x < 1$ no single value of δ can be given. (in fig.2 the value of r (noted with r) which makes $w_k(t - \delta m) - v_m(t) = 0$ is given as function of x).

4° With the introduction of Hamilton's unity function the calculation of the effect of the level change, as defined in (1.2.1.1.), on $w_k(t - \delta m) - v_m(t)$ can be calculated. The mathematical form of the conditions we have chosen for the best agreement between $w_k(t - \delta m)$ and $v_m(t)$ consists of formulae (1.2.2.1.) and (1.2.2.2). These conditions yield δ and r as functions of x as shown in fig.3.

In fig. 4 and 5 for the cases $\delta = 0$, $r = 0,5$ and $\delta = 0,2$, $r = 0,3$ the behaviour of $A(y, x, r, \delta)$ as defined in (1.2.1.8) is shown.

Finally in part 2 the results are considered of some recordings in Aug. and Sept. 1956. Figures 6 - 8 demonstrate some cases. They show the windspeed (actually a 1 minute mean value), the 10 min. mean value, the recording with time constants of 10 and 1 minutes in fig. 6 and with time constants of 10 and 4 minutes in fig. 7 and 8.

To compare these results with the theory we have calculated the absolute value of the difference $1/a \{w_k(t) - v_m(t)\}$ in the case when the initial wave reaches its mean value and in the case when the initial wave is at its maximum (or minimum (in fig. 9)).

In fig. 6 .. 8 we can see a rather clear wave with periods of respectively 25 min, 35 min. and 11 min. Taking into account these waves together with level changes of 5,8 m/sec. at 4^u42 till 9 m/sec at 11^u54 for fig. 6 and of 9 m/sec at 14^u19 till 13 m/sec at 14^u23. for fig. 8, we can give a comparison of calculated and actual differences $w_k(t) - v_m(t)$ at certain moments we find.

	time	calculated	actual
fig. 6 :	12 ^u 04	0,74 .. 0,92	0,75
	12 ^u 16	0,74 .. 0,92	0,85
	12 ^u 22	0,18 & 0,22	0,0
	11 ^u 58	0,97	0,7

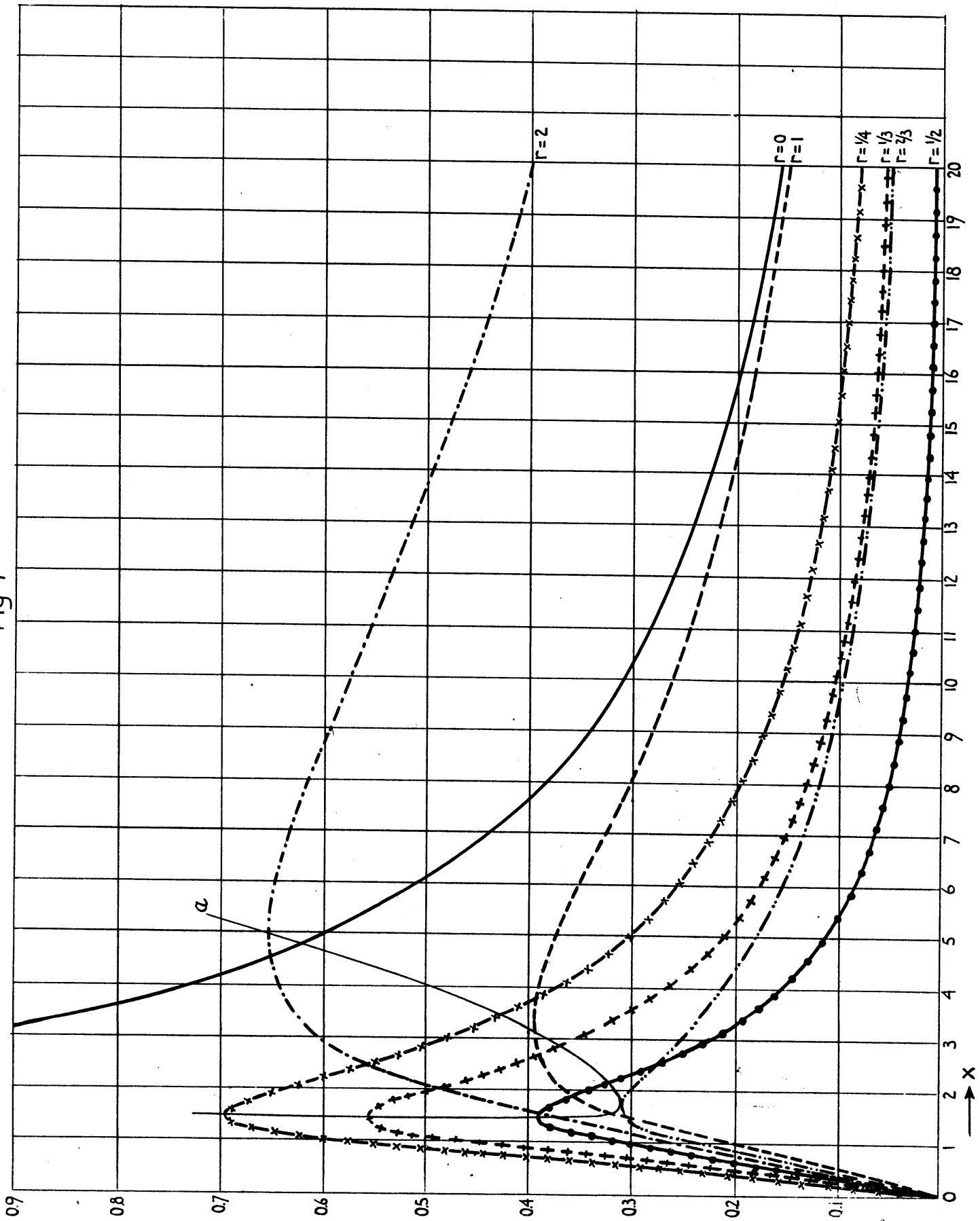
For fig. 7 and 8 we give only the maximum differences

fig. 7	10 min	time C.	1,1	1,2
	4 "	"	0,7	1,0
fig. 8	10 "	"	0,5	0,7
	4 "	"	0,8	0,8
Level change			0,5	0,7
			1,5	1,5

Although these results are too few to give a proof of the correctness of the theory, it seems that at least the right size of the differences is found by theory.

Finally fig. 10 and 11 shows the effect of a time shift of 2 ^{minutes} ~~seconds~~. The 4 min. recordings of figures 7 and 8 are shifted over 2 seconds, and compared with the 10 minutes mean value curves. The agreement between the two curves is much better than in the case without the time shift.

Fig 1



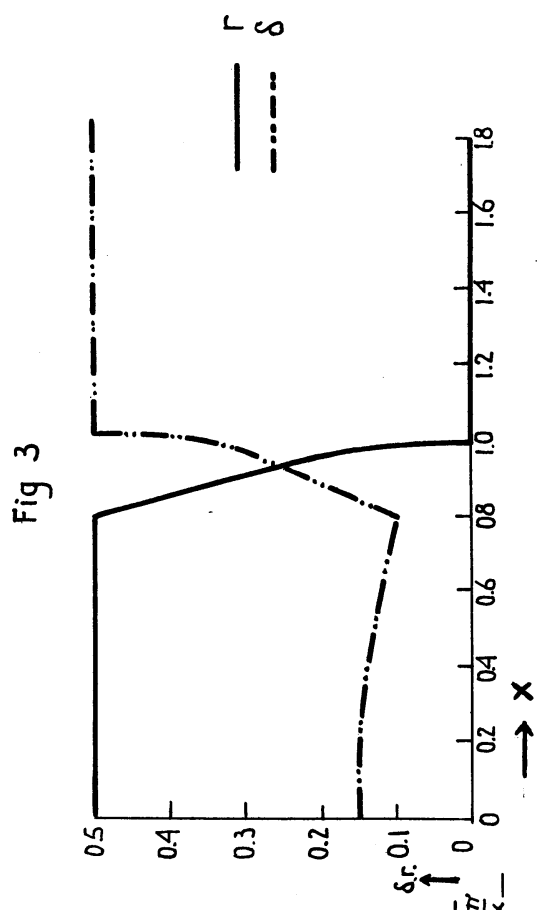
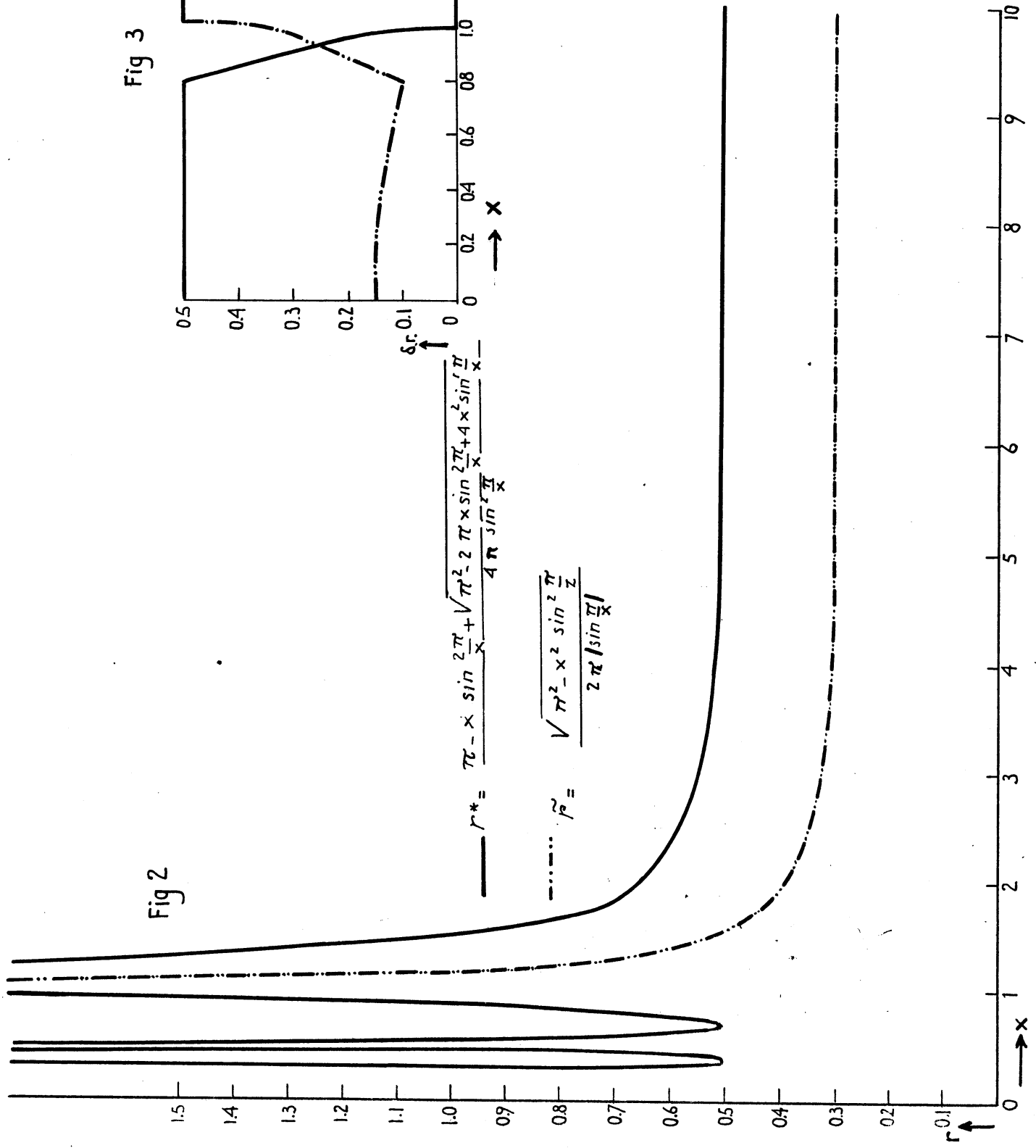


Fig 4

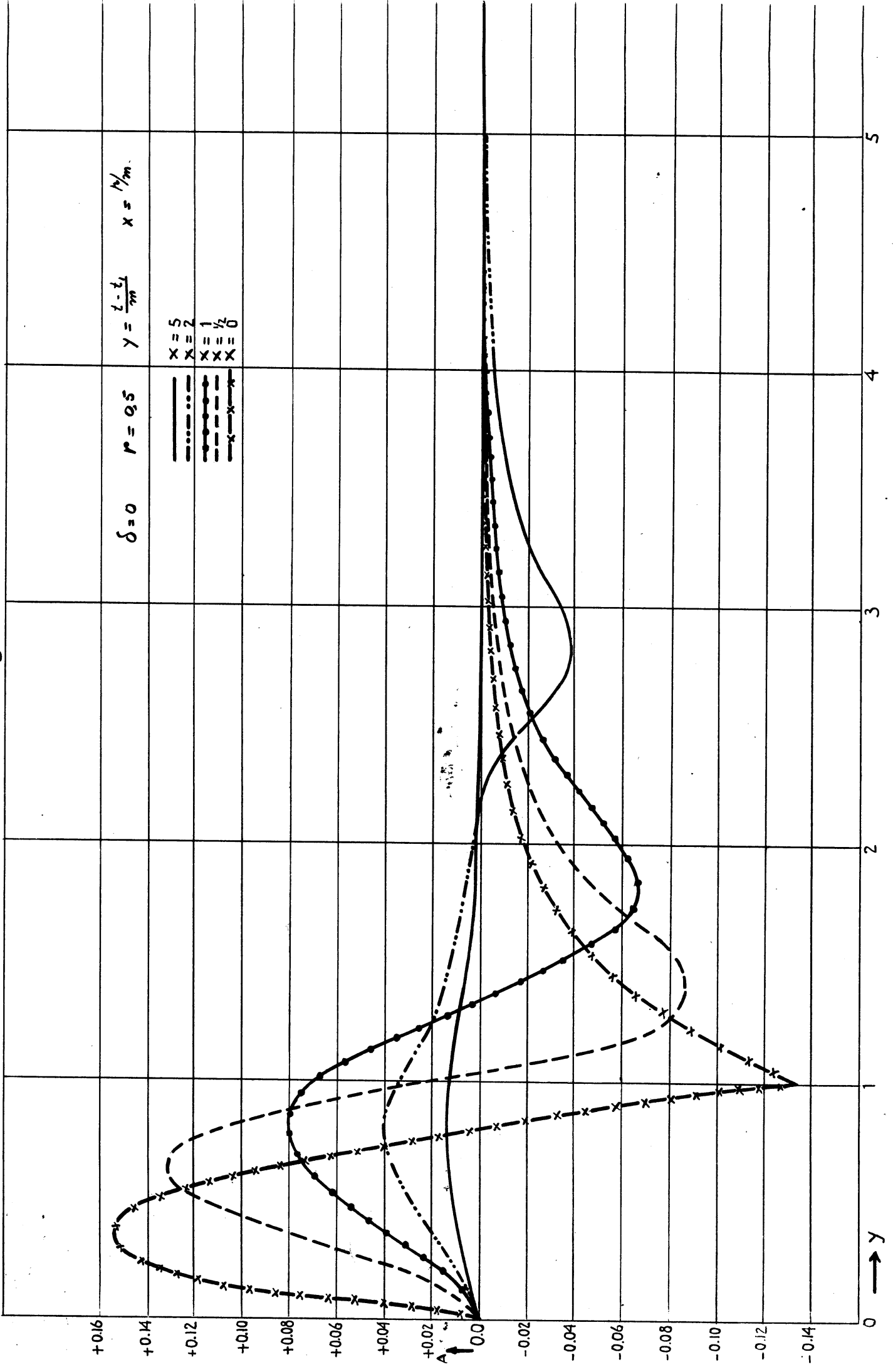


Fig 5

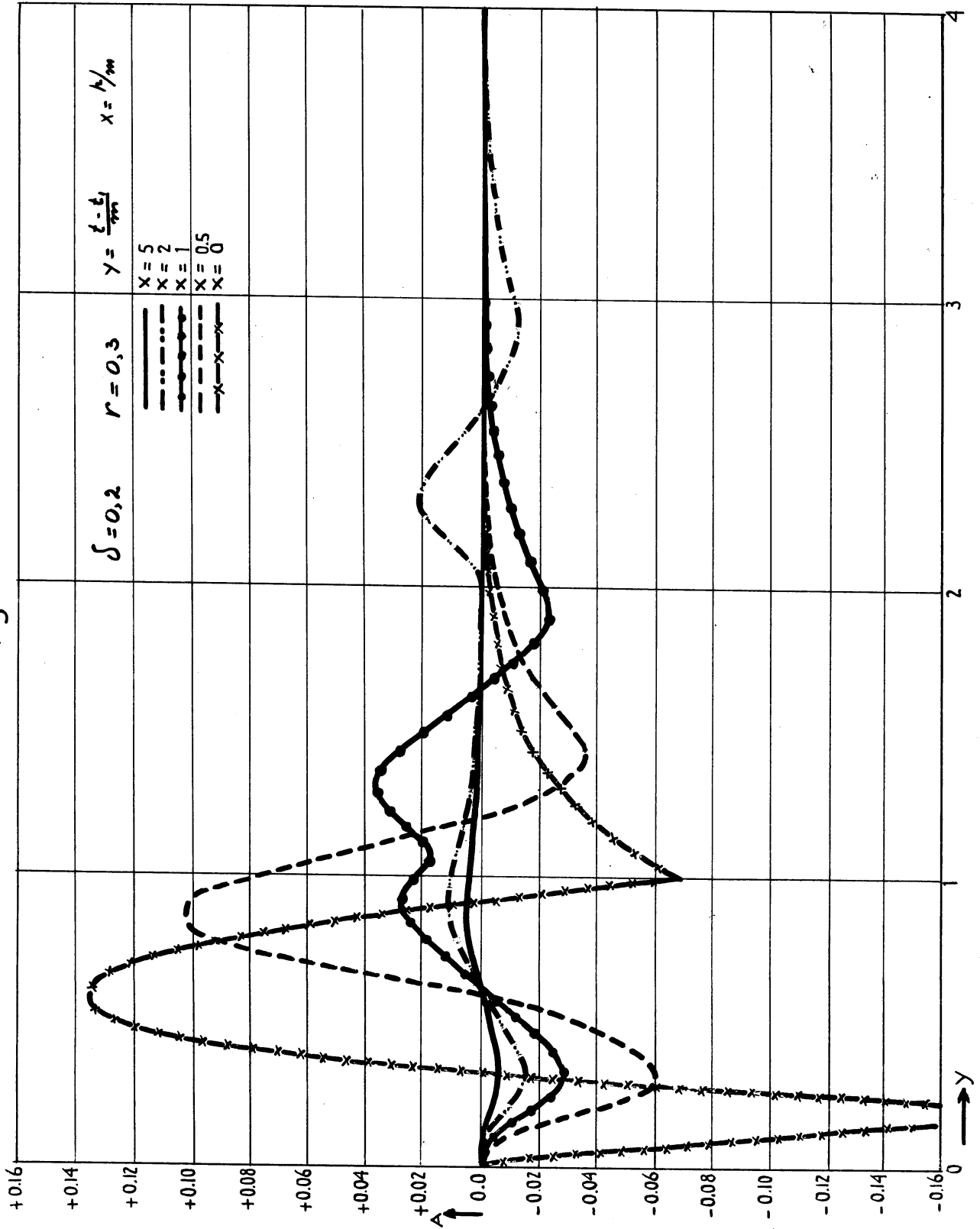
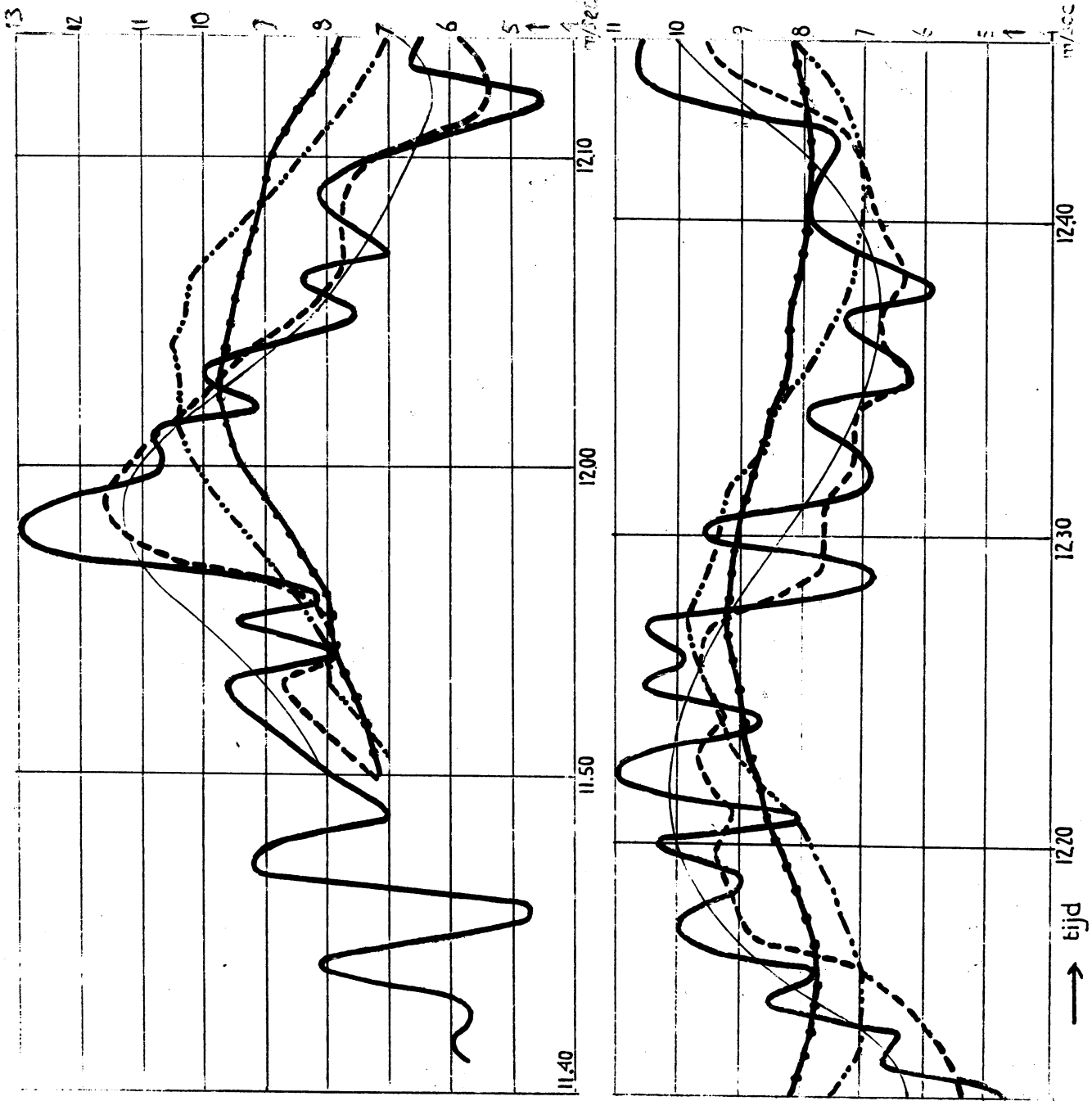


Fig 6



De Bilt 24 aug. 1956

- 1 min. gemidd. (a)
- 10 min gemidd. (b)
- tijd constante 10 min. —●— (c)
- tijd constante 1 min. - - - - (d)

Fig 7
De Bilt 4 sept. 1956

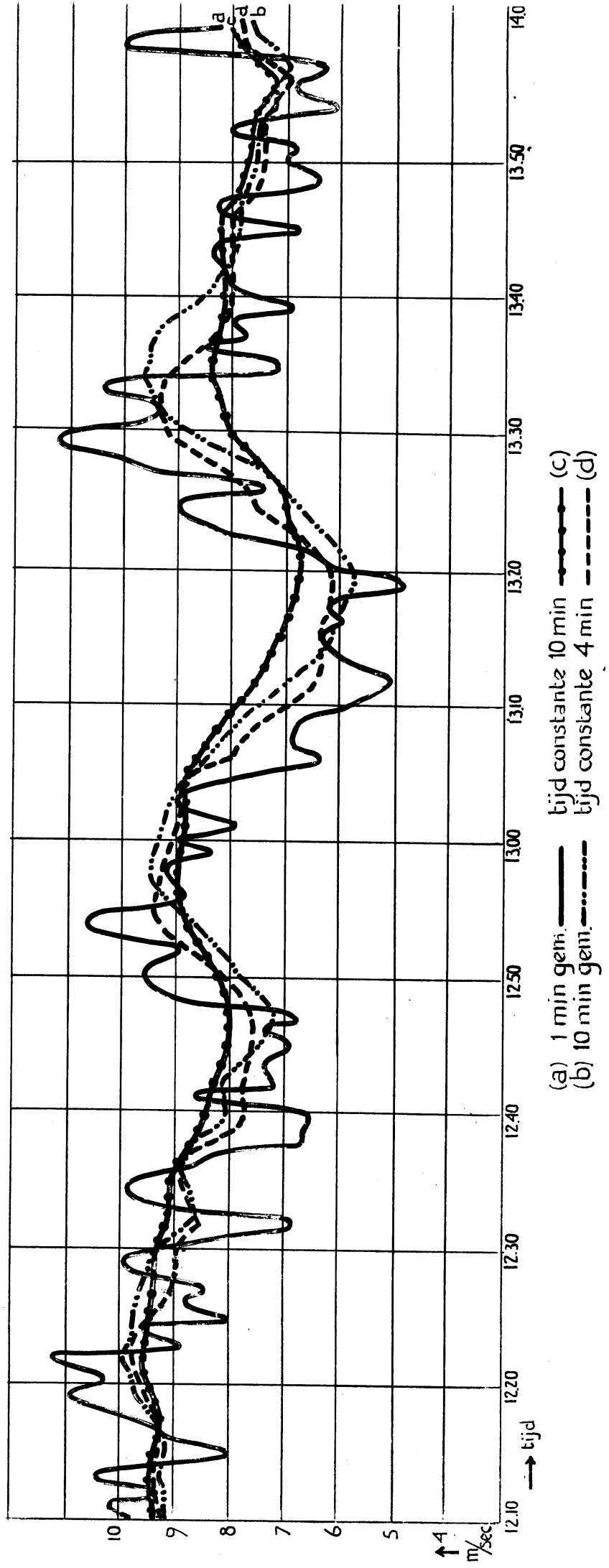


Fig 8
De Bilt 7 sept. 1956

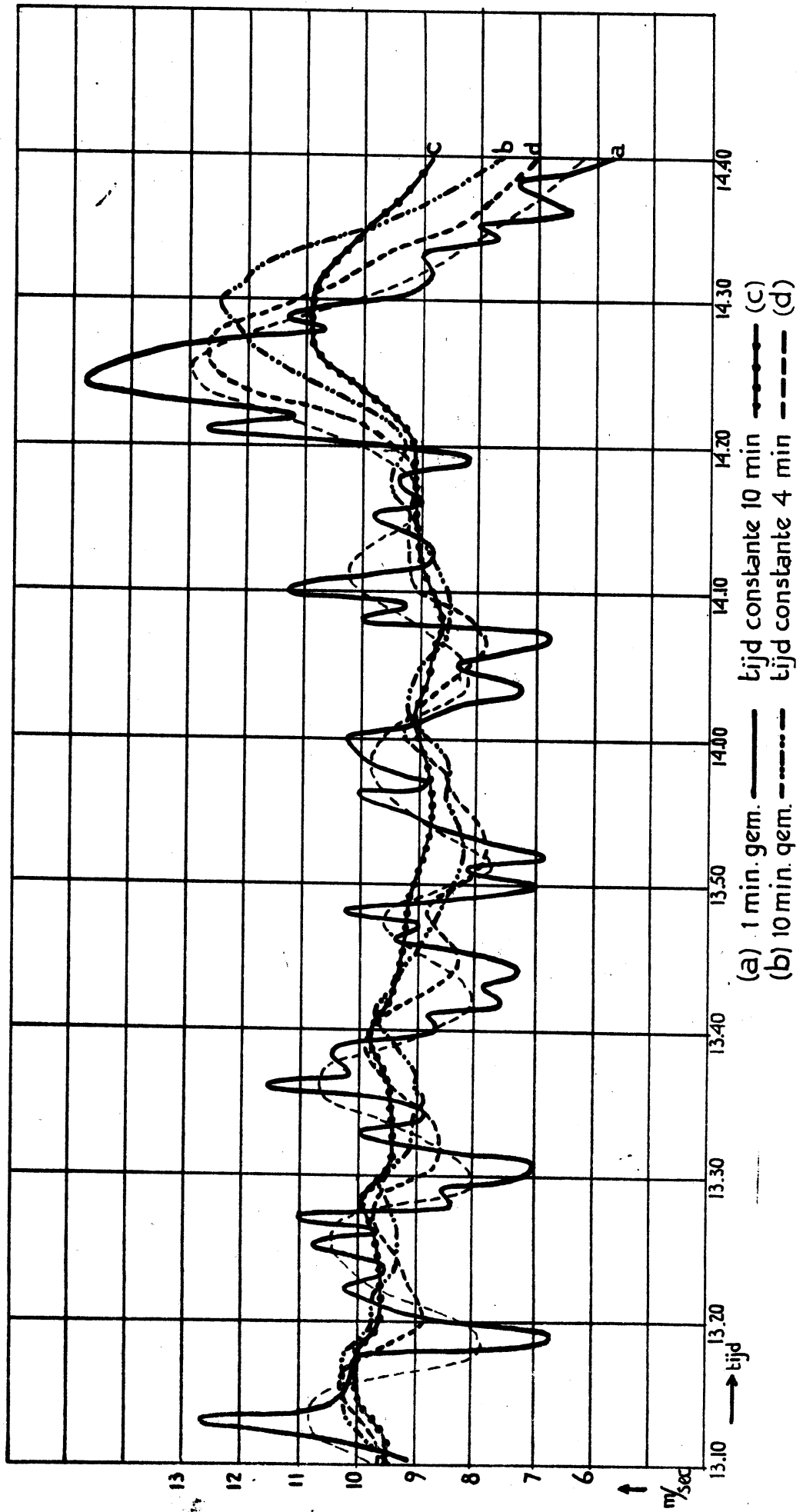


Fig 9

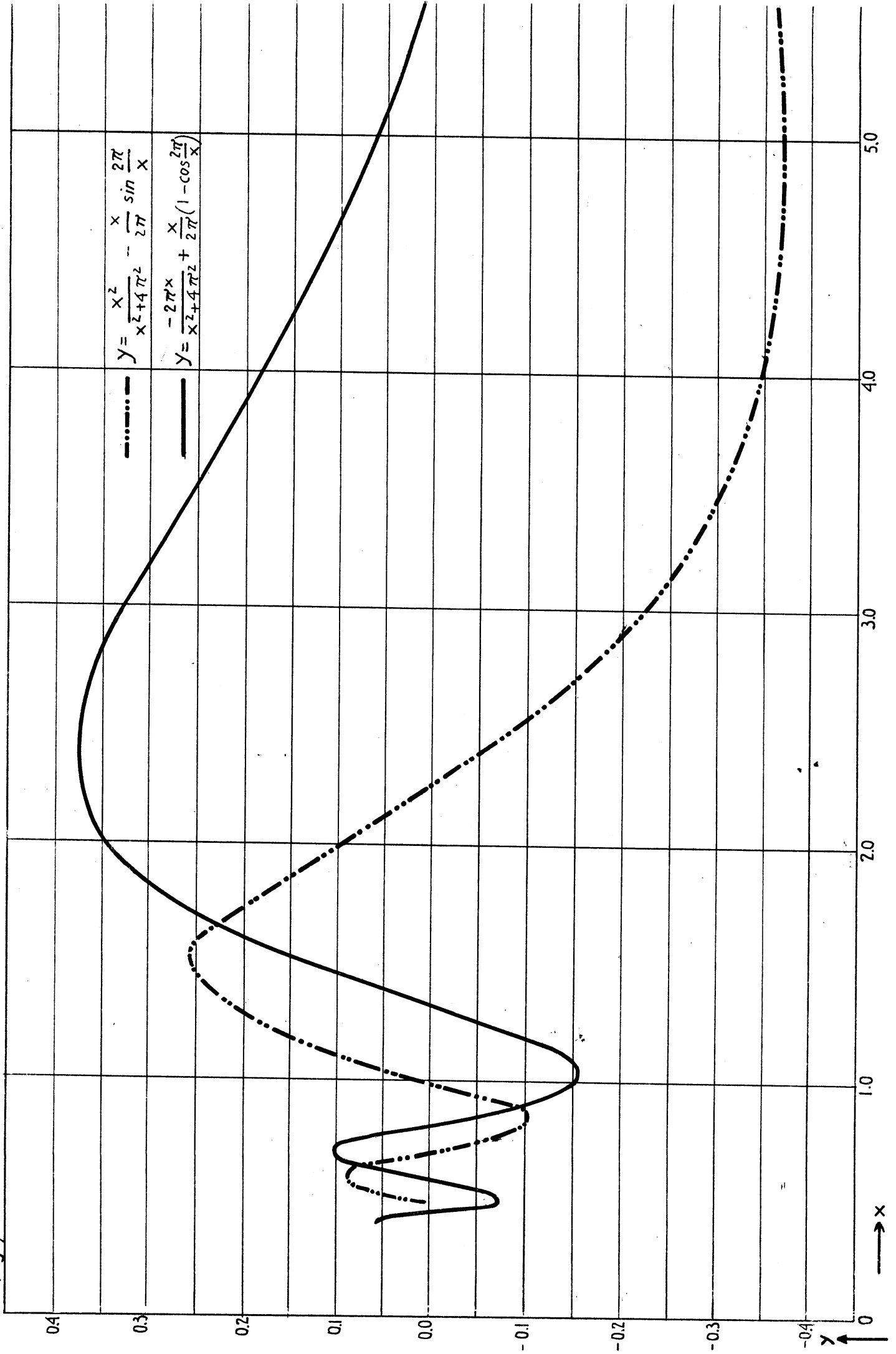
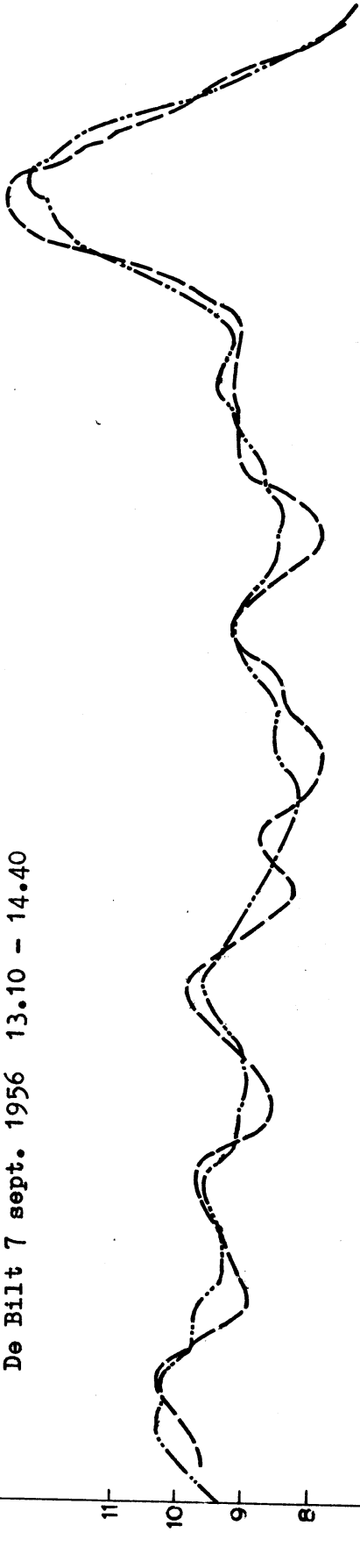


Fig. 10

Vergelijking 10 min. gemiddelde met een verschoven registratie met 4 min. tijdconstante

B

De Bilt 7 sept. 1956 13.10 - 14.40



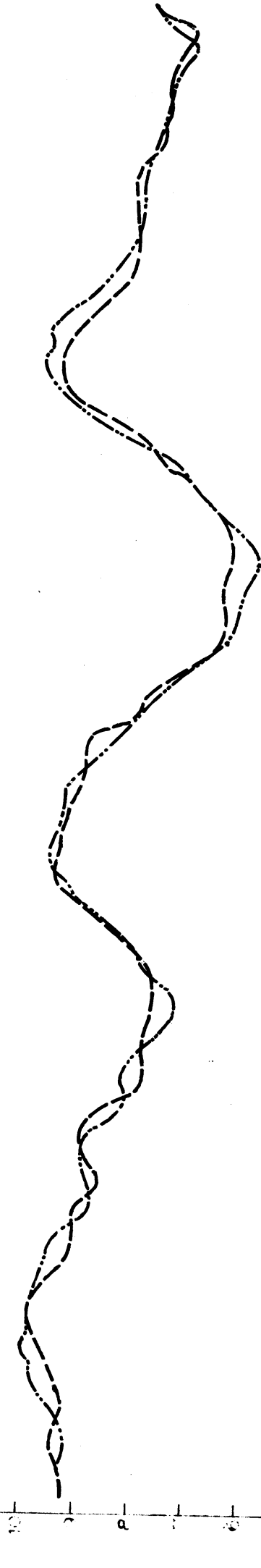
m/sec

— 10 min. gemiddelde op tijd t

- - - registratie met tijdconstante 4 min. tijd t - 2.

A

De Bilt 4 sept. 1956 12.10 - 14.00



m/sec

— tijd