

**KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT**

WETENSCHAPPELIJK RAPPORT

DR. H. M. DE JONG

Geostrofische velden in de meteorologie
en oceanografie

DE BILT - 1956

KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT

Wetenschappelijk Rapport W.R. 56-006 (II-008)

Dr. H.M. de Jong

Geostrofische velden in de meteorologie
en oceanografie

De Bilt, 1956

REPRODUCED FROM THE
NATIONAL ARCHIVES

U.S. GOVERNMENT PRINTING OFFICE

All Rights Reserved

Nadruk zonder toestemming van het K.N.M.I. is verboden

1950

S U M M A R Y

In numerical computations as well as in the graphical representation of the wind field use is made of the geostrophic approximation. If the slow variation of the coriolis parameter λ with latitude is ignored, the geostrophic wind equations define a stream function, that depends on the geopotential of isobaric surfaces. In addition the field of momentum may be represented by a stream function, that depends on the pressure distribution on a level surface.

The question arises if the wind field and field of momentum on an arbitrary surface may be described in a similar way. In other words, what are the conditions that these fields may also be represented by a stream function and which is the relation between this function and the physical parameters. It turns out that on the more characteristic physical surfaces, like the isothermal, isopicnic and isentropic surfaces the conditions are fulfilled and that the appropriate equations are very simple. In addition it is shown that the graphical construction of the fields may be accomplished by application of Maxwell's addition method.

Finally the results obtained in meteorology may be transferred to the corresponding problems in dynamic oceanography.

Dr. H.M. de Jong

Geostrofische velden in de meteorologie
en oceanografie

INHOUD

1. Inleiding
2. Theorema's over stroomfuncties in twee-dimensionale vectorvelden
3. Toepassingen in de meteorologie
4. Voorbeelden
5. Toepassing in de oceanografie

Literatuur

1. INLEIDING

In de meteorologie wordt met het oog op theoretische beschouwingen maar ook ter vereenvoudiging van bepaalde werkmethode de luchtstroming geostrofisch geapproximeerd. Deze approximatie wordt verkregen door het windveld \vec{u} in drukvlakken of het stroomimpulsveld $\rho\vec{u}$ in niveaувlakken te beschrijven door middel van de geostrofische windvergelijkingen. Beide velden worden dus door horizontale velden geapproximeerd. Zijn i , j en k de eenheidsvectoren in de x-, y- en de z-richting dan geldt

$$\text{in drukvlakken:} \quad \vec{u}_g = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_p \phi. \quad (1.1)$$

$$\text{in niveaувlakken:} \quad \rho \vec{u}_g = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_\phi P. \quad (1.2)$$

Hierin is

$$\vec{u}_g = i u + j v.$$

$$\nabla_p \phi = i \frac{\partial \phi}{\partial x} + j \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

$$\nabla_\phi P = i \frac{\partial P}{\partial x} + j \frac{\partial P}{\partial y}.$$

$$\lambda = 2\omega \sin \varphi.$$

ϕ is de geopotential, die gedefinieerd is door:

$$d\phi = g dz.$$

De geostrofische approximaties (1.1) en (1.2) zijn ontleend aan het stroommodel dat bij een dynamisch evenwicht bestaat tussen de gradiëntkracht en de Coriolis kracht. In een bepaald punt hangen (1.1) en (1.2) door middel van de statische grondvergelijking: $dp = -\rho dz$ met elkaar samen.

De eenvoudige gedaante van (1.1) en (1.2) maakt het mogelijk in de meteorologie - en ook in de oceanografie - de structuur van de stromingen op een overzichtelijke wijze voor te stellen. In drukvlakken geschiedt dit door een analyse van het veld van contourlijnen (isohypsen) $\phi = \text{const.}$ en in niveaувlakken door een analyse van het isobarenveld $P = \text{const.}$ De grafische voorstellingen beschrijven in horizontale projectie het geapproximeerde windveld en stroomimpulsveld op een eenduidige wijze.

De geapproximeerde horizontale vectorvelden \vec{u} in drukvlakken en de geapproximeerde horizontale vectorvelden $\rho\vec{u}$ in niveaувlakken vertonen de eigenschap dat de vectoren incident zijn met deze vlakken, zodat de vectorvelden "coplanair" genoemd kunnen worden. Zodra men andere ruimtelijke vlakken bestudeert met daarin de bijbehorende vector-

configuratie \vec{u} of $\rho\vec{u}$ dan raken in het algemeen de vectoren niet meer aan de desbetreffende vlakken en zijn de vectorvelden "aplanair".

Men kan nu de vraag stellen of er behalve drukvlakken en niveaavlakken nog andere ruimtelijke vlakken bestaan, zoals isopicnische, isothermische, isentropische, waarin het aplanaire of coplanaire vectorveld \vec{u} of $\rho\vec{u}$ eveneens door een eenvoudige grafische voorstelling in beeld gebracht kan worden, m.a.w. of er in deze vlakken gelijksoortige "geostrofische velden" bestaan, waarin een veld van isoplethen van een in deze vlakken gedefinieerde fysische grootheid het vectorveld op een elegante en op een eenduidige wijze beschrijft.

Het gestelde probleem heeft niet alleen waarde voor de dynamische meteorologie, maar kan ook van betekenis worden voor de aeronautische meteorologie door de ontwikkeling van het straalvliegtuigverkeer. Aangezien vluchten met straalvliegtuigen op kruishoogte niet horizontaal verlopen en de klim en afdaling een groot deel van de totale vliegtijd in beslag nemen, is het waarschijnlijk noodzakelijk bij de vluchtvoorbereiding van het intercontinentale en transoceanische verkeer ruimtelijke composities van hoogtestromingskaarten in te voeren.

Een antwoord op de vraag in welke ruimtelijke vlakken geostrofische velden voorkomen, kan snel verkregen worden door toepassing van enkele theorema's, die kunnen worden afgeleid in twee-dimensionale vectorvelden met stroomfuncties.

2. THEOREMA'S OVER STROOMFUNCTIES IN TWEE-DIMENSIONALE VECTORVELDEN

Bij het classificeren van twee-dimensionale horizontale vectorvelden onderscheidt men o.a. een klasse van divergentievrije vectorvelden, waaraan een stroomfunctie kan worden toegevoegd volgens de betrekking:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= -k \times \nabla \psi \\ \nabla \psi &= i \frac{\partial \psi}{\partial x} + j \frac{\partial \psi}{\partial y}\end{aligned}\tag{2.1}$$

waarbij ψ een eenduidige, continue, naar x en y differentieerbare functie voorstelt. De lijnen $\psi = \text{const.}$ zijn vectorlijnen. Als voorbeeld heeft het vectorveld behorend bij een snelheidsveld in een vlakke stroming van een homogene volumebestendige middenstof wegens de continuïteitsvergelijking altijd zo'n stroomfunctie. De vectorlijnen zijn daarin identiek met stroomlijnen.

We beschouwen nu een eenledige, door een parameter α bepaalde, verzameling van vectorvelden $\vec{u}(x, y, \alpha)$, ieder met een stroomfunctie $\psi(x, y, \alpha)$. α kan worden geïdentificeerd met de tijd t met de hoogte z , enz.

In een $(x, y; \alpha)$ ruimte bestaat de verzameling uit een stelsel van vlakke vectorvelden evenwijdig met het (x, y) vlak.

Vervolgens brengen we in deze ruimte een willekeurig vlak $\alpha = \bar{\alpha}(x, y)$ aan en beschouwen daarop de vectorconfiguratie, die door de oorspronkelijke verzameling van vectorvelden op dit ruimtelijke vlak wordt bepaald. Het nieuwe, in het algemeen aplanair, vectorveld projecteren we op het (x, y) vlak en brengen dit in verband met de topografie van het vlak α en de door de substitutie van $\alpha = \bar{\alpha}(x, y)$ in de stroomfunctie ψ verkregen "gecomponeerde" stroomfunctie $\psi\{x, y, \bar{\alpha}(x, y)\}$.

Het is duidelijk dat het op bovenbeschreven wijze geprojecteerde vectorveld in het algemeen geen stroomfunctie bezit. We zullen nagaan onder welke voorwaarde de stroomfuncties $\psi(x, y, \alpha)$ van de oorspronkelijke vectorvelden ook in het "gecomponeerde" vectorveld een stroomfunctie $\psi_0(x, y)$ bepalen.

Nu geldt in het gecomponeerde vectorveld volgens (2.1):

$$\vec{u}_{\text{gec.}} = -k \times (\nabla \psi)_{\bar{\alpha}}, \quad (2.2)$$

als het symbool $()_{\bar{\alpha}}$ een substitutie van de functie $\alpha = \bar{\alpha}(x, y)$ betekent. Dit vectorveld vergelijken we met een ander (virtueel) vectorveld dat wordt bepaald door de gecomponeerde stroomfunctie $(\psi)_{\bar{\alpha}} = \psi\{x, y, \bar{\alpha}(x, y)\}$. Dit tweede vectorveld is dus volgens (2.1) gedefinieerd door de betrekking:

$$\vec{u}_{\psi} = -k \times \nabla_{\bar{\alpha}} \psi = -k \times \nabla (\psi)_{\bar{\alpha}}. \quad (2.3)$$

Een eenvoudige berekening na invoering van de scalarnotatie van (2.3) geeft

$$\nabla (\psi)_{\bar{\alpha}} = (\nabla \psi)_{\bar{\alpha}} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)_{\bar{\alpha}} \nabla \bar{\alpha}. \quad (2.4)$$

De topografie van het vlak $\bar{\alpha}$ definieert een derde (virtueel) vectorveld:

$$\vec{u}_{\bar{\alpha}} = -k \times \nabla \bar{\alpha}. \quad (2.5)$$

Uit (2.4) volgt:

$$\vec{u}_{\text{gec.}} = -k \times (\nabla \psi)_{\bar{\alpha}} = -k \times \nabla (\psi)_{\bar{\alpha}} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)_{\bar{\alpha}} k \times \nabla \bar{\alpha}. \quad (2.6)$$

en met (2.2), (2.3) en (2.5):

$$\vec{u}_{\text{gec.}} = \vec{u}_{\psi} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)_{\bar{\alpha}} \vec{u}_{\bar{\alpha}}. \quad (2.7)$$

Uit (2.7) volgt: de vectorverschillijnen $\vec{u}_y - \vec{u}_{ge}$ vallen met de contourlijnen van het vlak $\bar{\alpha}$ samen.

De vraag of het gecomponeerde vectorveld een stroomfunctie $\psi_0(x, y)$ bezit, wordt beantwoord door de functie $\bar{\alpha}(x, y)$ zodanig te kiezen dat door substitutie van $\bar{\alpha}(x, y)$ in (2.6), het rechterlid van deze vergelijking in de vorm

$$\vec{u}_{ge} = -k \times \nabla \psi_0 \quad (2.8)$$

gebracht kan worden.

Dan moet de tweede term van het rechterlid van (2.6) met een willekeurige naar α differentieerbare functie ψ^* van α in de volgende vorm geschreven kunnen worden:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)_{\bar{\alpha}} \nabla \bar{\alpha} = \nabla (-\psi^*)_{\bar{\alpha}} = -\left(\frac{d\psi^*}{d\alpha}\right)_{\bar{\alpha}} \nabla \bar{\alpha}.$$

Hierbij is het - teken voor notatiedoeleinden ingevoerd.

De functie $\bar{\alpha}(x, y)$ moet dus zodanig gekozen worden, dat zij wordt bepaald door de betrekking:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = -\frac{d\psi^*}{d\alpha}, \quad (2.9)$$

waarbij ψ^* een willekeurige naar α differentieerbare functie van α is.

Om de differentiaalvergelijking te vinden waaraan de functie $\alpha = \bar{\alpha}(x, y)$ moet voldoen, differentieren we (2.9) partieel naar x en y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= -\frac{d^2 \psi^*}{d\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= -\frac{d^2 \psi^*}{d\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \end{aligned}$$

De eerste vergelijking vermenigvuldigen we met $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$, de tweede met $-\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ en tellen beide op:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0, \quad (2.10)$$

of symbolisch met de Jacobiaan:

$$J(\alpha, \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}) = 0. \quad (2.11)$$

Dit is de partiele differentiaalvergelijking waaraan de functie $\alpha = \bar{\alpha}(x, y)$ moet voldoen om in het vlak $\bar{\alpha}$ een vectorveld te vinden, dat in horizontale projectie een stroomfunctie bezit. Omgekeerd is (2.9) een volledige integraal van deze differentiaalvergelijking.

Geometrisch betekent de voorwaarde (2.11) dat het ruimtelijke vlak $\alpha = \bar{\alpha}(x, y)$ de vlakken $\alpha = \text{constant}$ volgens de issalloplethen $\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = \text{const.}$ snijdt.

Nu volgt uit (2.6):

$$\vec{u}_{\text{gec.}} = -k \times \left\{ \nabla(\psi)_{\bar{\alpha}} + \nabla(\psi^*)_{\bar{\alpha}} \right\},$$

of

$$\vec{u}_{\text{gec.}} = -k \times \nabla_{\bar{\alpha}}(\psi + \psi^*)$$

zodat op een additieve constante na:

$$\psi_0 = \psi + \psi^* \tag{2.12}$$

De resultaten kunnen we als volgt samenvatten:

Theorema I

In een eenledige verzameling van twee-dimensionale vectorvelden $\vec{u}(x, y, \alpha)$ met stroomfunctie $\psi(x, y, \alpha)$ heeft het door substitutie van $\alpha = \bar{\alpha}(x, y)$ gecomponeerde vectorveld in horizontale projectie ook een stroomfunctie $\psi_0(x, y)$, indien $\bar{\alpha}(x, y)$ bepaald wordt door de vergelijking: $\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = -\frac{d\psi^*}{d\alpha}$, waarbij ψ^* een willekeurige naar α differentieerbare functie van α voorstelt. De stroomfunctie ψ_0 is de som van de gecomponeerde stroomfunctie ψ en de gecomponeerde stroomfunctie ψ^* .

Grafisch kan dit resultaat elegant worden voorgesteld.

De eigenschap (2.12) houdt n.l. in, dat de optelmethode van Maxwell voor stroomvelden kan worden toegepast. Het ψ_0 -veld kan worden verkregen door de ψ en ψ^* velden te superponeren nadat beide velden genormeerd zijn. De ψ -lijnen bestaan uit de projecties van de doorsnijdingskrommen van het vlak $\bar{\alpha}$ met de vlakken $\psi(x, y, \alpha)$, de ψ^* -lijnen bestaan, wegens de eigenschap, dat ψ^* alleen een functie is van α , uit de contourlijnen van het vlak $\bar{\alpha}$. Het normeren geschiedt door in de gelijk gedimensioneerde waarden van ψ en ψ^* het increment in beide velden gelijk te stellen. De ψ_0 -lijnen zijn dan diagonaal-krommen in de velden van ψ en ψ^* -lijnen.

Enkele speciale gevallen

De differentiaalvergelijking (2.10) heeft alleen zin als

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \alpha} \neq 0 \text{ en } \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial \alpha} \neq 0, \text{ m.a.w. als } \psi \text{ niet in de vorm}$$

$$\psi(x, y, \alpha) = \psi_1(\alpha) + \psi_2(x, y)$$

geschreven kan worden. De vectorvelden zijn dan onafhankelijk van α en ieder vlak $\bar{\alpha}$ in de (x, y, α) ruimte aangebracht, extraheert uit de vector-

velden een daarmee identiek vectorveld waarvoor de stroomfunctie op een constante na equivalent is met $\psi_0(x, y)$.

Hieruit volgt:

Theorema II

Composities in vectorvelden $\vec{u}(x, y, \alpha)$, die onafhankelijk zijn van α , hebben geen betekenis.

De differentiaalvergelijking heeft o.a. de volgende twee particuliere oplossingen.

- a) $\alpha \equiv \text{constant}$ (nuloplossing). Het vlak $\bar{\alpha}$ valt samen met een oorspronkelijk vlak, waarin het vectorveld gedefinieerd is.
- b) α is bepaald door de vergelijking

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = 0 \tag{2.15}$$

Differentieert men deze vergelijking naar x en y en telt beide vergelijkingen op dan blijkt inderdaad dat α aan de differentiaalvergelijking (2.10) voldoet. Volgens (2.9) wordt ψ^* een constante, zodat

$$\psi_0 = \psi + \text{const.}$$

en

$$\vec{u}_{\text{gec}} = -k \times \nabla_{\alpha} \psi.$$

In woorden:

Theorema III

In een eenledige verzameling van twee-dimensionale vectorvelden met stroomfuncties $\psi(x, y, \alpha)$ heeft het door substitutie van $\alpha = \bar{\alpha}(x, y)$ gecreëerde vectorveld in horizontale projectie een stroomfunctie $\psi_0(x, y)$, die gelijk is aan de gecomponeerde stroomfunctie $\psi(x, y, \bar{\alpha}(x, y))$, als $\bar{\alpha}$ impliciet door de relatie $\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = 0$ wordt bepaald.

De voorwaarde $\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = 0$ betekent geometrisch dat het gecomponeerde vectorveld bepaald wordt door het veld van de ψ_0 -lijnen, die de lijnen $\psi(x, y, \alpha) = \psi_0$ voor vaste waarden van ψ_0 omhullen. De resultaten die we gevonden hebben worden nu toegepast in de meteorologie door de geostrofische approximaties te beschrijven met stroomfuncties en de parameter α nader te specificeren.

3. TOEPASSINGEN IN DE METEOROLOGIE

Indien men de geostrofische approximaties (1.1) en (1.2) beschouwt, dan heeft het windveld op een additieve constante na de stroomfunctie $\psi = -\frac{\phi}{\lambda}$ en het stroomimpulsveld in niveauvlakken de stroom-

functie $\psi = -\frac{P}{\lambda}$. Hierbij is verondersteld dat $\lambda = 2\omega \sin \varphi$ constant is.

Om een antwoord te krijgen op de aan het einde van de inleiding gestelde vragen zullen we de composities in de stroomvelden en stroomimpulsvelden op een zeker tijdstip onderzoeken.

A. Stroomvelden in drukvlakken

Hier identificeren we de parameter α met de luchtdruk p :

$$\vec{u} = \vec{u}(x, y, p) = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_p \phi,$$

met
$$\psi = \psi(x, y, p) = -\frac{\phi(x, y, p)}{\lambda}. \quad (3.1)$$

Er is dus sprake van een systeem van twee-dimensionale stromingen in drukvlakken op de wijze als deze in standaarddrukvlaktopografiën voor het 200, 300, 500, 700, 850 en 1000 mb vlak worden onderzocht.

De projectie van het windveld in een willekeurig ruimtelijk vlak zal volgens formule (2.7) van het virtuele topografiëwindveld afwijken door een (virtueel) windveld waarvan de isobaren stroomlijnen zijn.

Om de vraag te beantwoorden in welke ruimtelijke vlakken het windveld ook een stroomfunctie heeft, moet volgens theorema I de eenduidige functie $p = \bar{p}(x, y)$, die het ruimtelijk vlak definieert, bepaald worden door de vergelijking (2.9) die hier de volgende gedaante aanneemt:

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = -\frac{d\psi^*}{dp}. \quad (3.2)$$

ψ^* is hierbij een willekeurige naar p differentieerbare functie van p .

Volgens de statische grondvergelijking en de gasvergelijking voor droge lucht: $p = \rho RT$, is

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial p} = \frac{1}{\lambda \rho} = \frac{RT}{\lambda p}. \quad (3.3)$$

In vochtige lucht leze men voor T de virtuele temperatuur.

(3.2) is de volledige integraal van de differentiaalvergelijking (2.11), die zich hier volgens (3.3) reduceert tot:

$$f(p, \rho) = f(p, T) = f(\rho, T) = 0. \quad (3.4)$$

Geometrisch houdt (3.4) in, dat de ruimtelijke vlakken de drukvlakken volgens isosteren of, wegens de gasvergelijking, ook volgens isothermen moeten snijden.

In de betreffende ruimtelijke vlakken vallen m.a.w. de isobaren, isothermen en isosteren met elkaar samen. Dit kan men ook als volgt uitdrukken. De ruimtelijke vlakken waarin aan het windveld een stroomfunctie kan worden toegevoegd zijn isotimische vlakken [1] voor een scalaire grootheid S die alleen een functie is van twee van de drie grootheden p, ρ en T .

Als voorbeeld voldoet elk isothermisch vlak $T = T_0$ aan de voorwaarde. Wegens de gasvergelijking $\rho = \frac{p}{RT}$, ook elk isopicnisch vlak $\rho = \rho_0$ en volgens de definitie van de potentiële temperatuur: $\theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}$ waarbij $\frac{R}{c_p}$ constant verondersteld wordt, ook elk isentropisch vlak $\theta = \theta_0$.

De stroomfunctie ψ_0 voor het aplanare windveld in de bovengenoemde isotimische vlakken is volgens (2.12) gelijk aan:

$$\psi_0 = \psi + \psi^*$$

ψ^* kan expliciet worden berekend.

Stel n.l. het isotimische vlak gegeven door $S = S_0 = S(p, \rho)$. Los hieruit

$$\rho \text{ op: } \rho = \rho(p, S_0)$$

In de betrekking (3.2) moet dan ψ^* zodanig gekozen worden, dat het isotimische vlak aan deze vergelijking voldoet: Dan geldt volgens (3.3):

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{1}{\lambda \rho} = - \frac{d\psi^*}{dp} = \frac{1}{\lambda \rho(p, S_0)},$$

waaruit volgt:

$$d\psi^* = - \frac{1}{\lambda \rho(p, S_0)} dp.$$

Maar volgens de statische grondvergelijking is

$$d\Phi = g dz = - \frac{dp}{\rho}.$$

Beschouw nu een atmosfeer waarin overall $S = S_0$. Deze atmosfeer is barotroop. Daarin geldt voor de geopotential:

$$d\Phi = - \frac{dp}{\rho(p, S_0)} \quad (3.5)$$

Men kan dus ψ^* op een additieve constante na gelijk stellen aan

$$\psi^* = \frac{1}{\lambda} \Phi_{S_0},$$

waarbij de index S_0 betekent, dat de geopotential berekend wordt in de beschouwde barotrope atmosfeer en Φ_{S_0} de geodynamische hoogte tussen twee drukvlakken p_0 en p voorstelt:

$$\Phi_{S_0} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p, S_0)}.$$

De stroomfunctie ψ_0 wordt dan op een additieve constante na volgens (2.12):

$$\psi_0 = -\frac{1}{\lambda}(\bar{\phi} - \bar{\phi}_{S_0}). \quad (3.6)$$

$\bar{\phi}$ is de geodynamische hoogte van het gegeven isotimische vlak $S = S_0$ t.o.v. een niveauvlak in de gegeven (barocline) atmosfeer en $\bar{\phi}_{S_0}$ de geodynamische hoogte van het gegeven isotimische vlak t.o.v. een drukvlak in een barotrope atmosfeer waarin overal $S = S_0$. Het bijbehorende windveld is dan:

$$\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_S (\bar{\phi} - \bar{\phi}_{S_0}). \quad (3.7)$$

Identificeert men S met de temperatuur, dan heeft $\bar{\phi}_{S_0}$ betrekking op de isotherme atmosfeer voor $T = T_0$, is $S = \rho$, dan heeft $\bar{\phi}_{S_0}$ betrekking op de homogene atmosfeer voor $\rho = \rho_0$ en is $S = \theta$, dan heeft $\bar{\phi}_{S_0}$ betrekking op de adiabatische atmosfeer voor $\theta = \theta_0$.

De resultaten kunnen we dus als volgt samenvatten:

Geostrofische windvelden in drukvlakken, die volgens de geostrofische windvergelijking $\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_S \bar{\phi}$ gedefinieerd zijn, induceren in een ruimtelijk vlak een gelijksoortig geostrofisch windveld als het ruimtelijk vlak een isotimisch vlak $S = S_0$ is van een scalaire grootheid S , die alleen een functie is van twee van de drie grootheden luchtdruk, (virtuele) temperatuur en dichtheid. De vergelijking voor het windveld luidt dan:

$$\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_S (\bar{\phi} - \bar{\phi}_{S_0}),$$

waarbij $\bar{\phi}$ de geodynamische hoogte van het vlak t.o.v. een niveauvlak in de gegeven barocline atmosfeer en $\bar{\phi}_{S_0}$ de geodynamische hoogte van het vlak t.o.v. een drukvlak in de barotrope atmosfeer $S = S_0$ voorstelt.

De stroomlijnen voor het windveld kunnen verkregen worden door de optelmethode van Maxwell toe te passen in het veld van contourlijnen van het isotimische vlak en het veld van projecties van de daarin gelegen isobaren (isothermen, isosteren), nadat beide velden genormeerd zijn.

Indien men (3.5) met (3.7) vergelijkt, dan kan \vec{u} ook geschreven worden in de vorm

$$\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_S \bar{\phi} + \frac{1}{\lambda \rho} k \times \nabla_S \rho. \quad (3.8)$$

Hierin hebben $\bar{\phi}$, ρ en ρ betrekking op het beschouwde isotimische

vlak. In een bepaald punt van het isotimische vlak kan \vec{u} dus gevonden worden uit een lineaire combinatie van de geostrofische windvergelijkingen (1.1) en (1.2).

Het is interessant te weten of er isotimische vlakken zijn, waarin het windveld op dezelfde wijze als in drukvlakken, uitsluitend door de geodynamische hoogte Φ van het betreffende vlak bepaald wordt. Dan moet volgens theorema III $\frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{1}{\lambda \rho}$ nul worden en dat is wegens de beperktheid van ρ onmogelijk.

Behalve in drukvlakken bestaat er geen ruimtelijk vlak $S = S_0$ waarin het geostrofische windveld door een geostrofische vergelijking $\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_s \Phi$ bepaald wordt, waarbij Φ de geodynamische hoogte voorstelt van het beschouwde vlak t.o.v. een niveauvlak.

We zullen nu het windveld in isothermische, isopiecnische en isentropische vlakken nagaan. Het windveld in deze vlakken kan gemakkelijk verkregen worden door het windveld in polytrope vlakken te onderzoeken.

Polytroop vlak

Indien in een ruimtelijk vlak de scalaire grootheid S gedefinieerd is door $S = S_0 = p \rho^{-k}$, dan noemen we dit vlak een polytroop vlak van de klasse k , in analogie met de definitie van een polytrope atmosfeer van de klasse k , waarin overal $S = S_0$.

Een polytroop vlak van de klasse nul is een drukvlak ($S = p$), die van de klasse één een isothermisch vlak ($S = T$), die van de klasse oneindig een isopiecnisch vlak ($S = \rho$), en die van de klasse $\frac{c_p}{c_v}$ een isentropisch vlak ($S = \Theta$).

In een polytroop vlak is de stroomfunctie voor het windveld volgens (3.5):

$$\psi_0 = -\frac{1}{\lambda} (\Phi - \Phi_{polytr.}).$$

Nu geldt in een polytrope atmosfeer:

$$\Phi_{polytr.} = -\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = -\int_{p_0}^p \left(\frac{p}{S_0}\right)^{\frac{1}{k}} dp.$$

Dit wordt voor $k \neq 1$:

$$\begin{aligned} \Phi_{polytr.} &= -\frac{k}{(k+1) S_0^{\frac{1}{k}}} p^{\frac{k+1}{k}} + const. \\ &= -\frac{k}{k+1} RT + const. \end{aligned}$$

en voor $k = 1$:

$$\Phi_{polytr.} = -\frac{1}{S_0} \ln \frac{p}{p_0} = -RT \ln \frac{p}{p_0}.$$

De stroomfunctie ψ_0 wordt dus:

$$\text{voor } k \neq 1: \quad \psi_0 = -\frac{1}{\lambda} \left(\phi + \frac{k}{k-1} RT \right). \quad (3.9)$$

$$\text{en voor } k=1: \quad \psi_0 = -\frac{1}{\lambda} \left(\phi + RT \ln \frac{p}{p_0} \right). \quad (3.10)$$

Het windveld in een polytroop vlak van de klasse $k \neq 1$ wordt dan:

$$\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_S \left(\phi + \frac{k}{k-1} RT \right) \quad (3.11)$$

De stroomlijnen van het windveld worden gevonden door de optel-methode toe te passen in het veld van contourlijnen van het polytroop vlak en de projecties van de daarin gelegen isothermen (isobaren, isosteren), nadat beide velden genormeerd zijn.

Isothermisch vlak

Een isothermisch vlak $T = T_0$ is een polytroop vlak van de klasse $k=1$. Daarin wordt het windveld met (3.10):

$$\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_T \left(\phi + RT_0 \ln \frac{p}{p_0} \right) \quad (3.12)$$

De polytrope atmosfeer wordt hier een isotherme atmosfeer

Isopicnisch vlak

Een isopicnisch vlak $\rho = \rho_0$ is een polytroop vlak van de klasse $k = \infty$, zodat de vergelijking van het windveld volgens (3.11) wordt:

$$\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_\rho \left(\phi + RT \right) \quad (3.13)$$

De polytrope atmosfeer is hier een homogene atmosfeer. Men kan vergelijking (3.13) met de gasvergelijking ook in de gedaante schrijven

$$\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_\rho \left(\phi + \frac{p}{\rho_0} \right) \quad (3.14)$$

Isentropisch vlak

Een isentropisch vlak $\theta = \theta_0$ is een polytroop vlak van de klasse $k = \frac{c_p}{c_v}$. Het windveld in een isentropisch vlak wordt dus volgens (3.11):

$$\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_\theta \left(\phi + c_p T \right) \quad (3.15)$$

Dit resultaat werd ook door Montgomery [2] langs een andere weg afgeleid door toepassing van de eerste hoofdwet van de thermodynamica voor adiabatische processen:

$$c_p dT - \frac{1}{\rho} dp = 0.$$

De stroomfunctie $\phi + c_p T$ werd in Amerika gebruikt bij de isentropische analyse.

De polytrope atmosfeer wordt hier een adiabatische atmosfeer.

B. Stroomimpulsvelen in niveaувlakken

De parameter α identificeren we nu met de hoogte z . We beschouwen de geostrofische approximatie in niveaувlakken:

$$\rho \vec{u}_g = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_{\phi} P,$$

met stroomfuncties

$$\psi = \psi(x, y, z) = -\frac{p(x, y, z)}{\lambda}.$$

Er is dus sprake van de luchtdrukverdeling op verschillende niveaux. De ruimtelijke vlakken $z = \bar{z}(x, y)$ waarin voor het aplanare stroomimpulsveld ook een "geostrofisch" veld geconstrueerd kan worden, moeten voldoen aan de vergelijking (2.9), die hier de volgende vorm aanneemt:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{d\psi^*}{dz}. \quad (3.16)$$

ψ^* is hierbij een willekeurige naar z differentieerbare functie van z . Volgens de statische grondvergelijking wordt

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{g\rho}{\lambda}. \quad (3.17)$$

(3.16) is de volledige integraal van de differentiaalvergelijking (2.11) die zich met (3.17) reduceert tot

$$\psi(z, \rho) = 0. \quad (3.18)$$

Geometrisch houdt (3.18) in, dat de ruimtelijke vlakken de niveaувlakken volgens isosteren moeten snijden. Dit kan ook als volgt worden omschreven. De ruimtelijke vlakken, waarin aan het stroomimpulsveld een stroomfunctie ψ_0 kan worden toegevoegd, zijn isotimische vlakken van een scalaire grootheid S , die uitsluitend een functie is van de hoogte en de dichtheid: $S = S(z, \rho)$

Als voorbeeld wordt aan de voorwaarde door elk isopienisch vlak $\rho = \rho_0$ voldaan.

De stroomfunctie voor het aplanare stroomimpulsveld in het betreffende isotimische vlak wordt dan volgens (2.12) gelijk aan:

$$\psi_0 = \psi + \psi^* \quad (3.19)$$

ψ^* kan weer expliciet worden berekend.

Stel n.l. het isotimische vlak $S = S(z, \rho) = S_0$ gegeven. Los hieruit ρ op: $\rho = \rho(z, S_0)$. In de betrekking (3.16) moet dan ψ^* zodanig worden gekozen, dat het vlak $z = \bar{z}(x, y)$ samenvalt met het isotimische vlak, dus moet gelden:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{g\rho}{\lambda} = - \frac{d\psi^*}{dz} = \frac{g}{\lambda} \rho(z, S_0),$$

waaruit volgt:

$$d\psi^* = - \frac{1}{\lambda} g\rho(z, S_0) dz.$$

Volgens de statische grondvergelijking is

$$dp = -g\rho dz.$$

In een atmosfeer waarin overal $S = S_0$ is ρ alleen een functie van z en S_0 , zodat de vergelijking in deze atmosfeer wordt:

$$dp = -g\rho(z, S_0) dz. \quad (3.20)$$

ψ^* kan dus op een additieve constante na geschreven worden:

$$\psi^* = \frac{P_{S_0}}{\lambda}.$$

De index S_0 betekent dat p berekend wordt tussen twee niveaus in de atmosfeer $\rho = \rho(z, S_0)$: $P_{S_0} = - \int_z^z g\rho(z, S_0) dz.$

De stroomfunctie ψ_0 wordt dan met (3.19) op een additieve constante na:

$$\psi_0 = - \frac{1}{\lambda} (P - P_{S_0}). \quad (3.21)$$

P stelt de luchtdrukverdeling voor in het isotimische vlak, P_{S_0} de verdeling van de luchtdrukverschillen tussen het gegeven vlak en een niveauvlak in een atmosfeer waarin overal $S = S_0$. Het bijbehorende stroom-

impulsveld is dan:

$$\rho \vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_S (P - P_{S_0}). \quad (3.22)$$

Is $S = \rho$, dan heeft P_{S_0} betrekking op de homogene atmosfeer voor $\rho = \rho_0$. De resultaten kunnen als volgt worden samengevat:

Geostrofische stroomimpulselden in niveau vlakken, die door de geostrofische windvergelijking $\rho \vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_S P$ gedefinieerd zijn, induceren in een ruimtelijk vlak een gelijksoortige "geostrofisch" stroomimpulsveld, als het ruimtelijk vlak een isotimisch vlak $S = S_0$ is van een scalaire grootheid S die alleen een functie is van de hoogte en de dichtheid. De vergelijking van het (aplanaire) stroomimpulsveld luidt dan:

$$\rho \vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_S (P - P_{S_0}),$$

waarbij P de luchtdruk in het isotimische vlak voorstelt en P_{S_0} het luchtdruk-verschil tussen het isotimische vlak en een niveauvlak in een atmosfeer, waarin overal $S = S_0$.

De uitdrukkingen (3.7) en (3.22) voor de vergelijkingen van het windveld en het stroomimpulsveld zijn complementair in die zin, dat zij formeel op dezelfde wijze als de geostrofische vergelijkingen (1.1) en (1.2) met elkaar samen hangen. Indien men (3.22) met (3.20) vergelijkt, ziet men, dat $\rho \vec{u}$ ook geschreven kan worden in de gedaante:

$$\rho \vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_S P + \frac{\rho}{\lambda} k \times \nabla_S \phi,$$

waarbij ρ, P en ϕ op het beschouwde isotomische vlak gedefinieerd zijn. Deze formule komt met (3.8) overeen.

Men toont ook nu gemakkelijk met (2.15) aan, dat wegens $\rho > 0$ er geen ruimtelijke vlakken bestaan, waarin het stroomimpulsveld alleen door de drukverdeling in het ruimtelijke vlak bepaald wordt. De stroomlijnen voor het stroomimpulsveld kunnen volgens (3.21) gevonden worden door de optelmethode van Maxwell toe te passen in het veld van de projecties van de isobaren in het isotimische vlak en de contourlijnen (isosteren) van het isotimische vlak. We zullen de compositie in het isopicnische vlak nader onderzoeken.

Isopicnische vlak

Zij $\rho = \rho_0$ het isopicnische vlak, dan is de stroomfunctie voor het stroomimpulsveld volgens (3.21):

$$\gamma_0 = -\frac{1}{\lambda} (P - P_{hom}).$$

In een homogene atmosfeer is echter:

$$p_{hom.} = -g\rho_0(z-z_0),$$

zodat op een additieve constante na:

$$\psi_0 = -\frac{1}{\lambda}(p + g\rho_0 z).$$

De vergelijking voor het stroomimpulsveld wordt dan:

$$\rho_0 \vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_p (p + g\rho_0 z), \quad (3.23)$$

of
$$\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_p \left(\frac{p}{\rho_0} + \phi \right). \quad (3.24)$$

maar deze uitdrukking komt overeen met (3.13), die vroeger bij het windveld zelf werd afgeleid.

Het was uiteraard te verwachten dat de beide composities in het isopicnische vlak tot hetzelfde resultaat zouden voeren. Dit was overigens ook kwalitatief te verifiëren door beschouwing van de optelmethoden. In het isopicnische vlak zijn de isobaren namelijk ook isothermen.

In dit verband doet zich de vraag voor of er ruimtelijke vlakken bestaan, waarin gelijktijdig een stroomfunctie voor het windveld als een stroomfunctie voor het stroomimpulsveld gevonden kan worden. In zo'n ruimtelijk vlak moet dan enerzijds volgens (3.4) voldaan zijn aan de vergelijking $\mathcal{F}(p, \rho) = 0$ of $\mathcal{F}(p, T) = 0$ of $\mathcal{F}(T, \rho) = 0$ en anderzijds volgens (3.18) aan de vergelijking $\mathcal{F}(z, \rho) = 0$.

Beschouw een combinatie $\mathcal{F}(p, \rho) = 0$, $\mathcal{F}(z, \rho) = 0$.

Aan deze voorwaarden wordt voldaan

1. in een isopicnisch vlak $\rho = \text{constant}$;
2. in een vlak waarin isobaren, isosteren, isothermen en isohypsen met elkaar samenvallen.

In het algemeen bestaat er in de gewone atmosfeer zulk een vlak niet. Er zijn echter wel speciale atmosferen, waarin dergelijke vlakken aangegeven kunnen worden, namelijk een atmosfeer waarin

$p = p(\rho)$, dus in een barotrope, en een atmosfeer waarin $z = z(\rho)$ waarin m.a.w. de isopicnische vlakken evenwijdig lopen met de niveauvlakken.

Andere combinaties zoals $\mathcal{F}(T, \rho) = 0$; $\mathcal{F}(z, \rho) = 0$ voeren wegens de gasvergelijking tot hetzelfde resultaat.

Men vindt derhalve:

Ruimtelijke vlakken, waarin zowel een stroomfunctie voor het windveld als een stroomfunctie voor het stroomimpulsveld bestaat, zijn in de barocline atmosfeer de isopienische vlakken $\rho = \text{const.}$ en in de barotrope atmosfeer $p = p(\rho)$ of in een atmosfeer $z = z(\rho)$, de vlakken waarin isobaren, isosteren en isohypsen samenvallen.

In isopienische vlakken zijn de stroomfuncties volgens (3.14) en (3.24) op een multiplicatieve factor ρ_0 na aan elkaar gelijk.

De barotrope atmosfeer zullen we in dit opzicht wat nader onderzoeken.

Barotrope atmosfeer

In een barotrope atmosfeer wordt de voorwaarde (3.2) voor het bestaan van een stroomfunctie voor het windveld in een ruimtelijk vlak:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \frac{1}{\lambda \rho} = \frac{1}{\lambda \rho(\rho)},$$

zodat $\frac{\partial \psi}{\partial \rho}$ alleen een functie is van p en dus volgens theorema II composities triviaal zijn.

Dit is niet verwonderlijk, want in een barotrope atmosfeer is het windveld uniform met de hoogte. Het windveld in een willekeurig ruimtelijk vlak is identiek met het windveld in een drukvlak en heeft derhalve een stroomfunctie die eveneens identiek is met die in een drukvlak.

De voorwaarde dat in een barotrope atmosfeer in een ruimtelijk vlak het stroomimpulsveld een stroomfunctie bezit kan door middel van de vergelijking (3.18) worden beschreven:

$$f(z, \rho) = 0 \text{ of wegens } \rho = \rho(p) : f(z, p) = 0.$$

In deze ruimtelijke vlakken moeten de isohypsen en isobaren dus met elkaar samenvallen. De bijbehorende stroomfunctie wordt alleen een functie van de luchtdrukverdeling in het vlak, immers volgens (3.8) is

$$\vec{u} = \frac{g}{\lambda} k \times \nabla_s z + \frac{1}{\lambda \rho} k \times \nabla_s p.$$

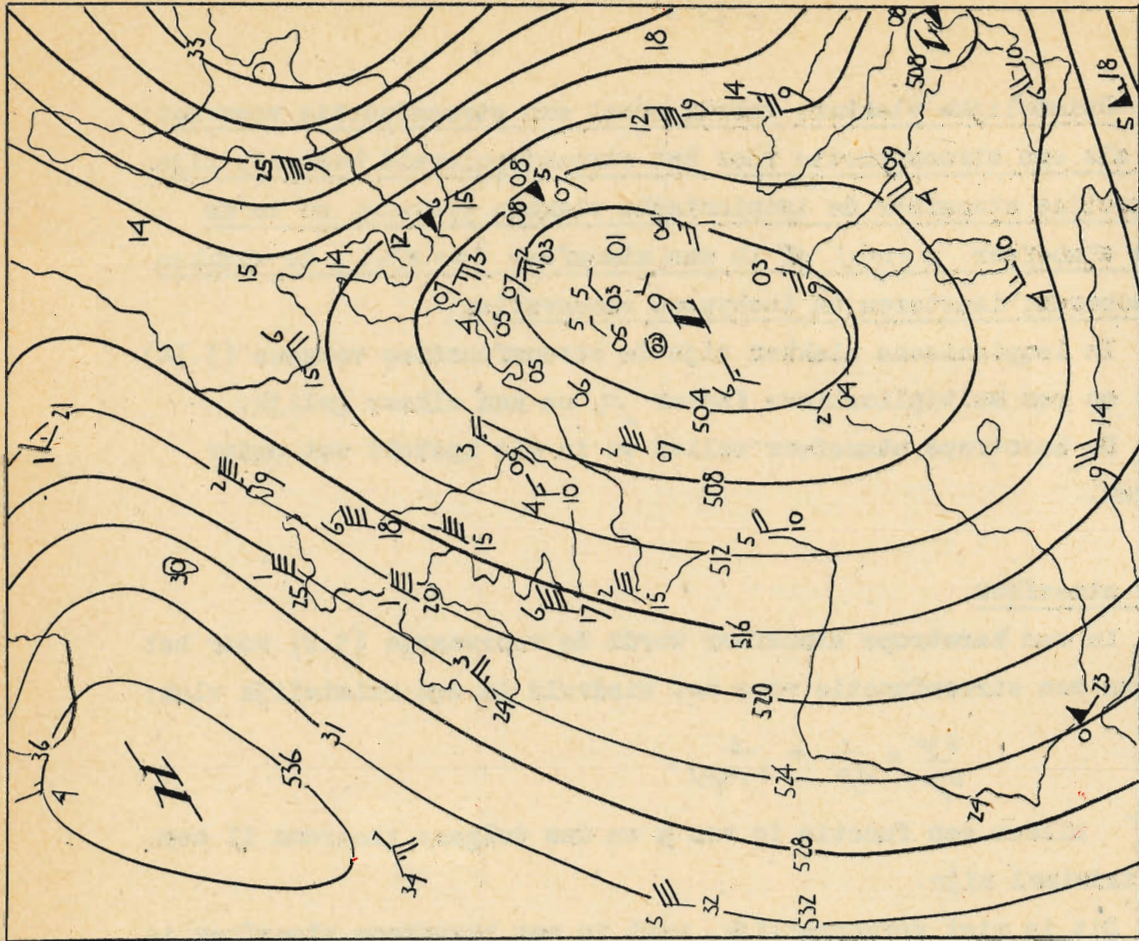
Maar in het beschouwde vlak geldt $z = z(\rho)$, zodat

$$\vec{u} = \frac{g}{\lambda} z'(\rho) k \times \nabla_s p + \frac{1}{\lambda \rho} k \times \nabla_s p,$$

of

$$\vec{u} = \left\{ \frac{g \rho z'(\rho) + 1}{\lambda \rho} \right\} \nabla_s p.$$

Men kan verder gemakkelijk aantonen dat deze vergelijking zich reduceert op de vorm $\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_p \Phi$ als Φ de geopotential is van een drukvlak. Er bestaat derhalve in deze vlakken inderdaad een stroomfunctie voor het windveld en een stroomfunctie voor het stroomimpulsveld.

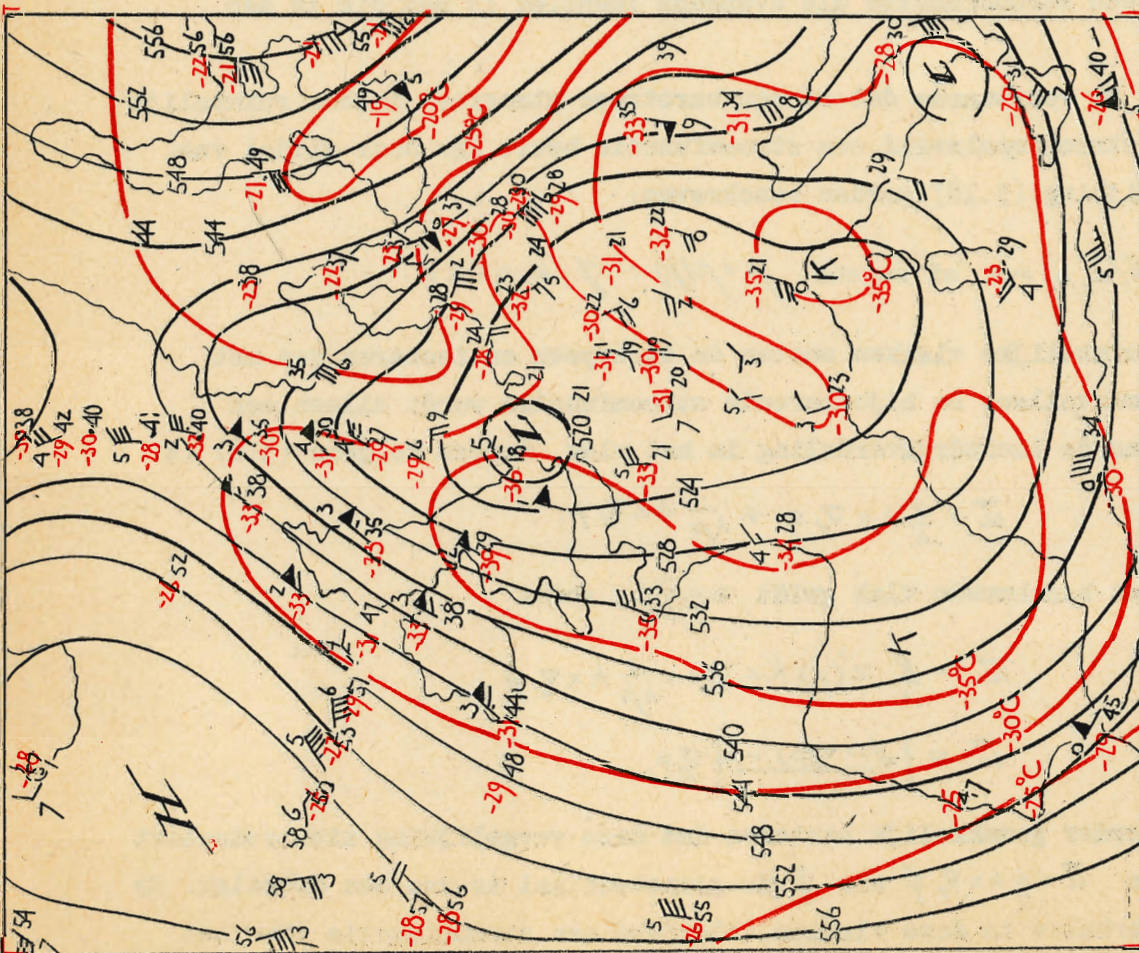


Kaart II Geostrofisch windveld in een isothermisch vlak,

$T = -20^{\circ}\text{C}$ $\phi + RT \ln \frac{p}{p_0}$ in gpdam. $p_0 = 1013.2 \text{ mb.}$

$R = 2.8704 \cdot 10^6 \text{ erg K}^{-1} \text{ g}^{-1}$ Increment is 4dam.

Datum 19 febr. 1956; 15.00 GMT.

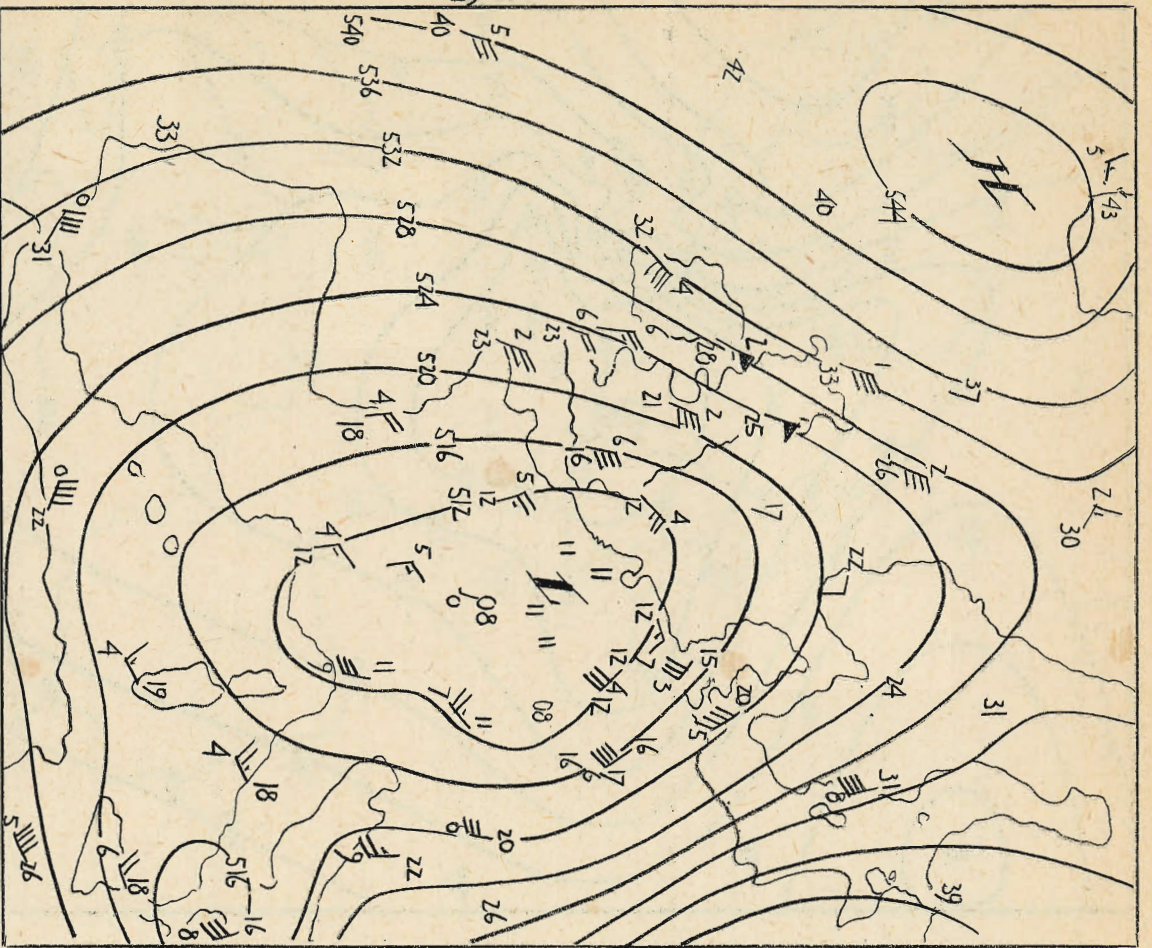


Kaart I Geostrofisch windveld in een isobarisch vlak,

$p = 500 \text{ mb.}$ ϕ in gpdam. onder weglating van de

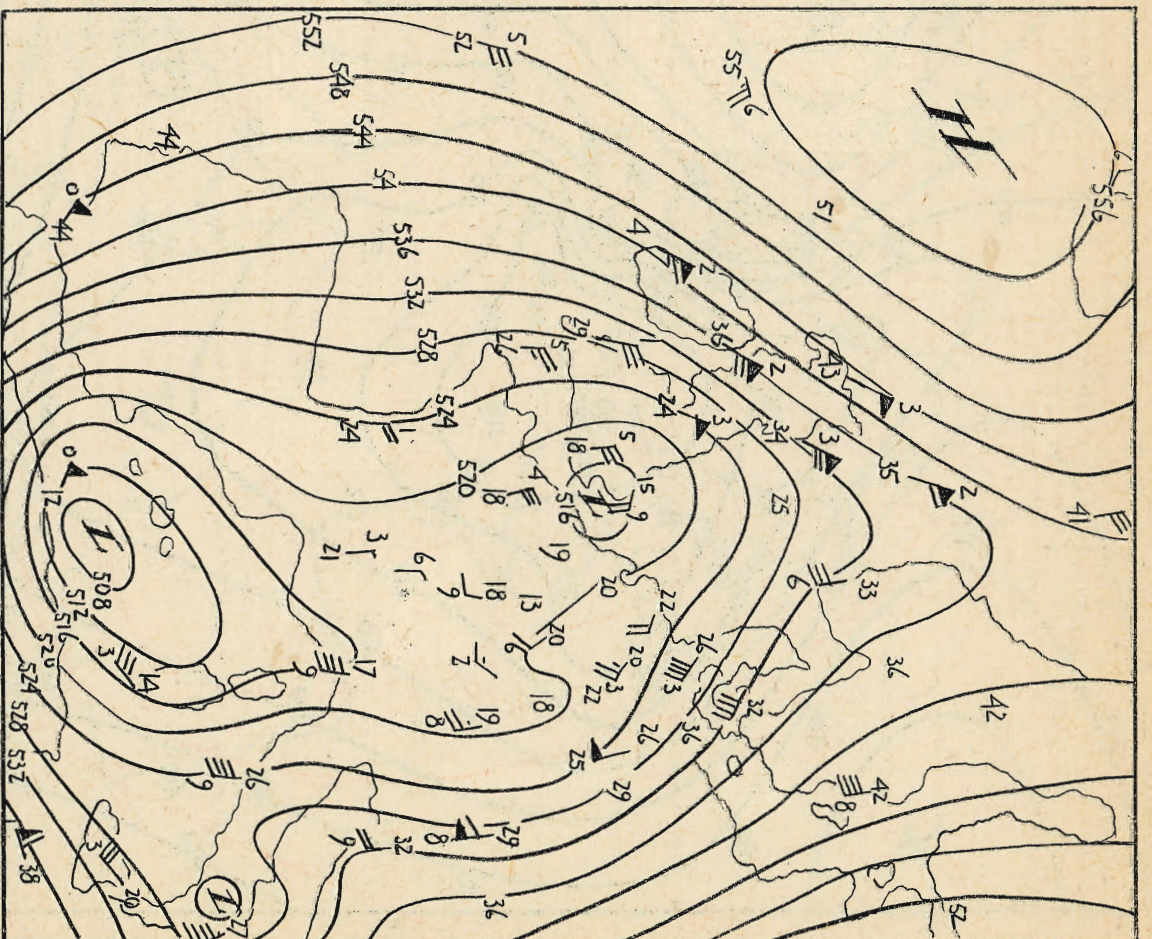
vijfhonderdtallen. Temperatur in $^{\circ}\text{C}$. Increment

is 4dam. Datum 19 febr. 1956; 15.00 GMT.



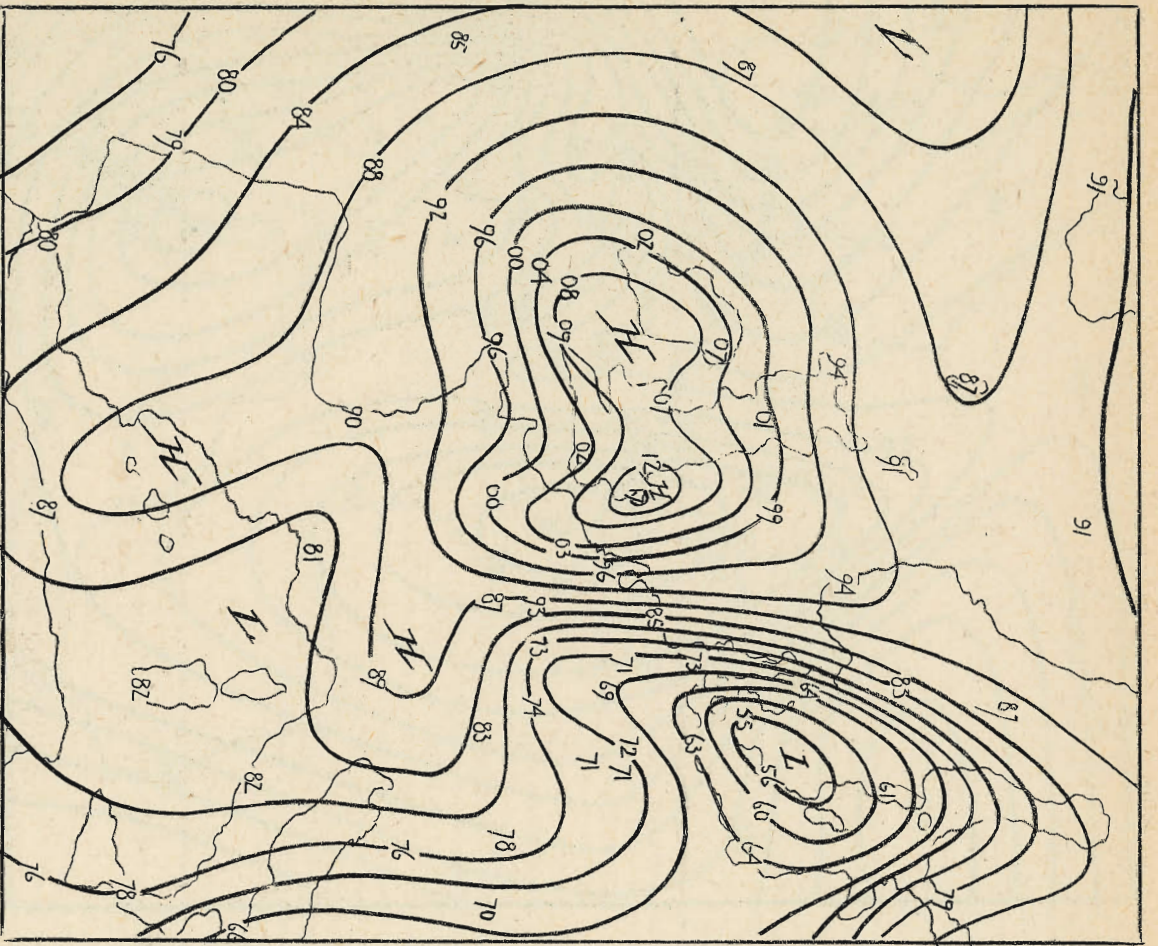
Kaart III Geostrofisch windveld in een isopycnisch vlak,

$\rho = 0.85 \text{ kgm}^{-3}$. ϕ + RT in gpm , onder weglating van elfhonderdtallen. $R = 2.8704 \cdot 10^6 \text{ erg} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1} \text{ g}^{-1}$. Increment is 4dam . Datum 19 febr. 1956; 15.00 GMT.



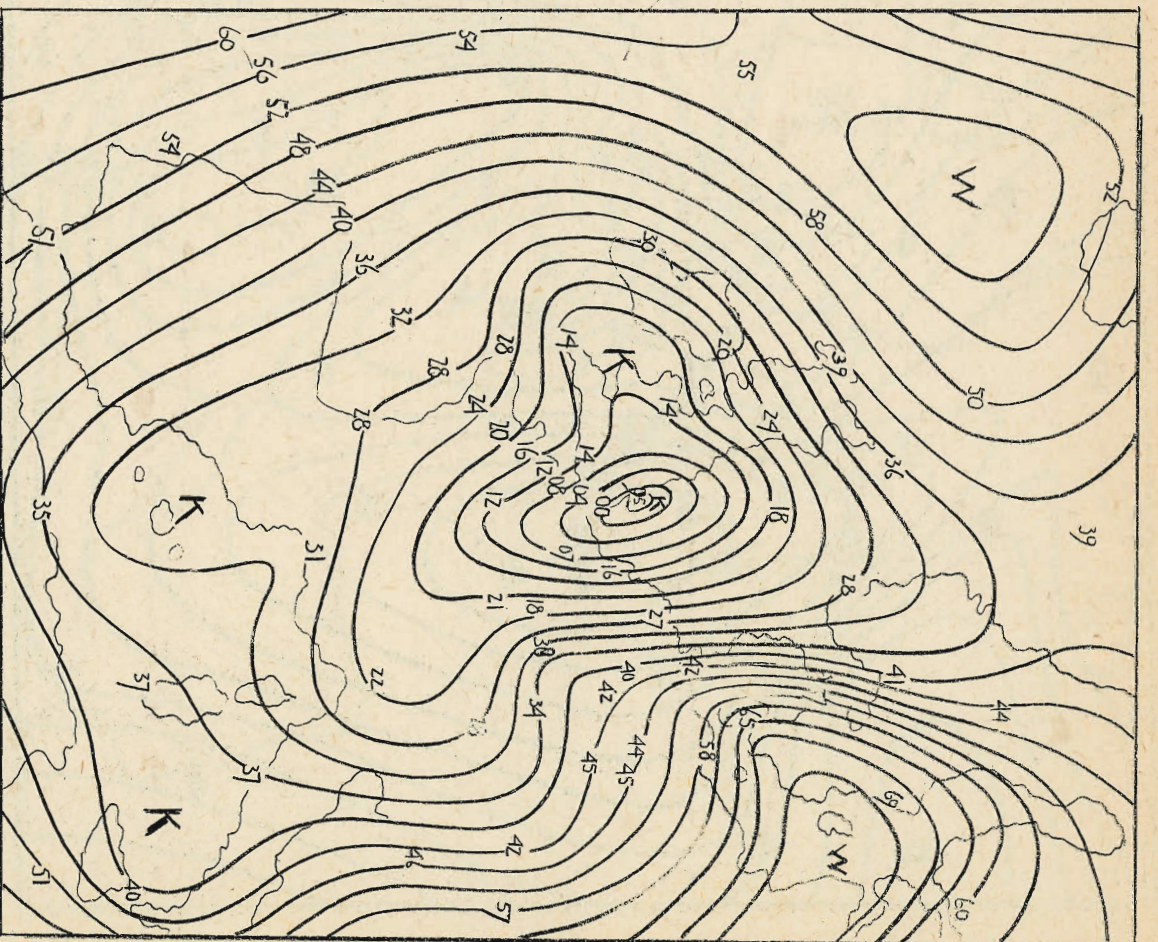
Kaart IV Geostrofisch windveld in een isentropisch vlak,

$\Theta = 24 \text{ } ^\circ\text{C}$ $\phi + c_p T$ in gpm , onder weglating van drieduizendtallen. $c_p = 0.0464 \cdot 10^7 \text{ erg } ^\circ\text{K}^{-1} \text{ g}^{-1}$. Increment is 4dam . Datum 19 febr. 1956; 15.00 GMT.



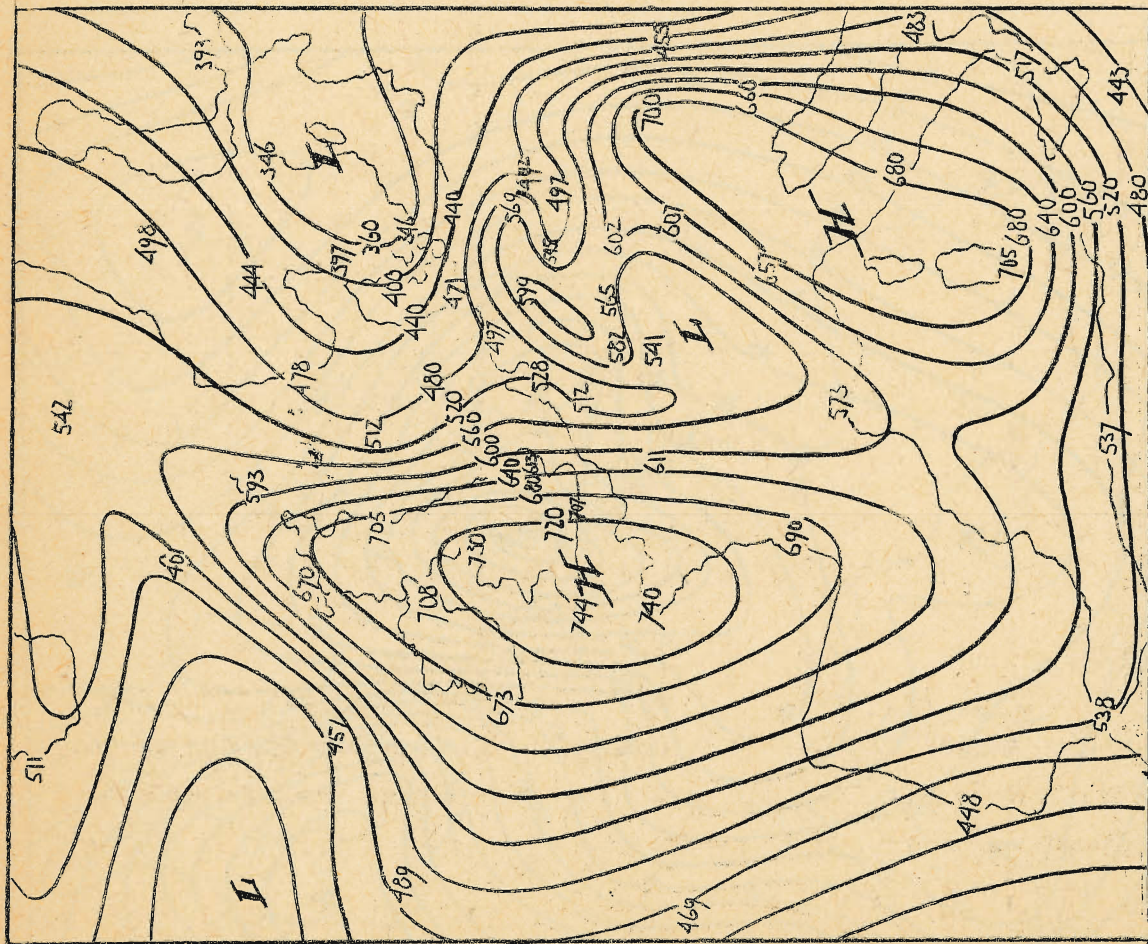
Kaart VII Topografie van het isopiecnische vlak, $\rho = 0.85$

kg m^{-3} \varnothing in gpdam, onder weglating van de drie of vierhonderdtallen. Increment is 4dam. Datum 19 febr. 1956; 15.00 GMT.



Kaart VIII Temperatuurverdeling in het isopiecnische vlak,

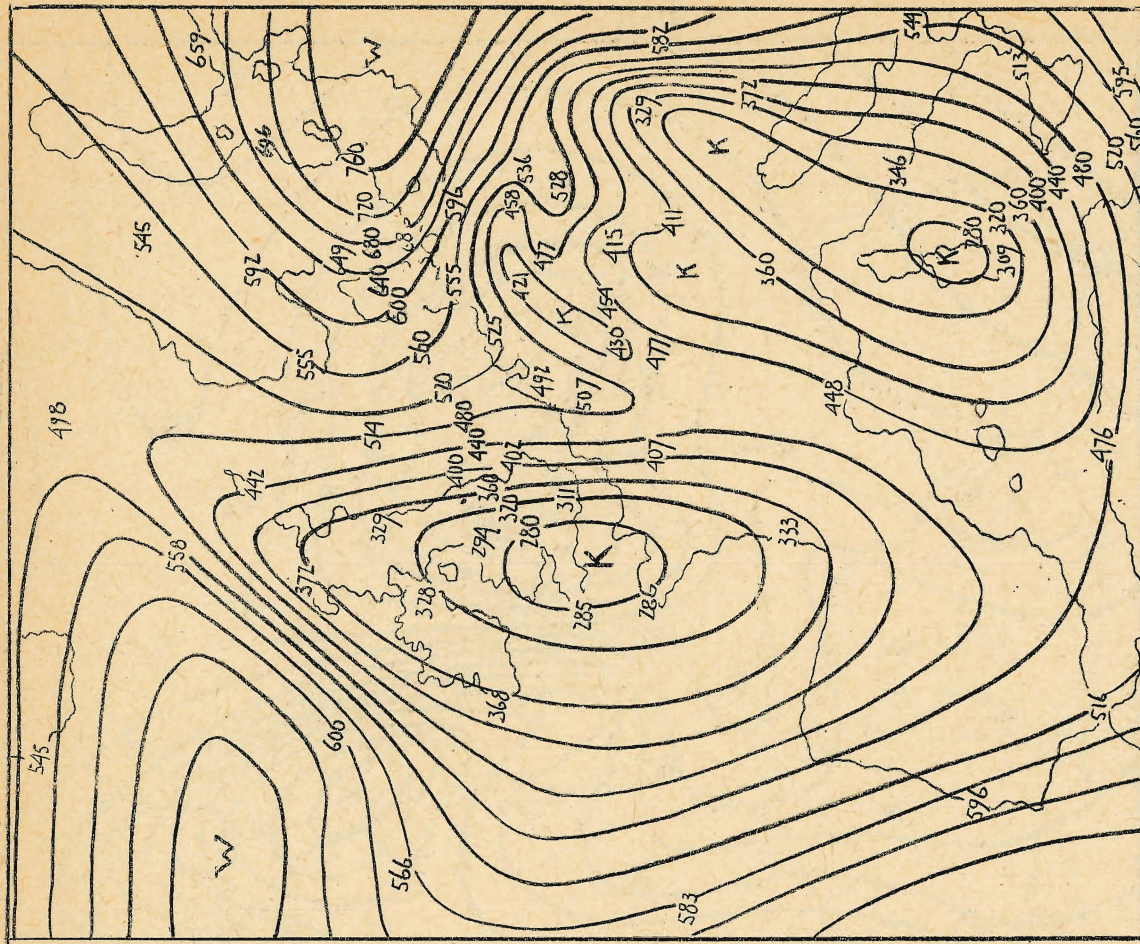
$\rho = 0.85 \text{ kg m}^{-3}$ RT in gpdam, onder weglating van zevenhonderdtallen. $R = 2.8704 \cdot 10^6 \text{ erg } ^\circ\text{K}^{-1} \text{ g}^{-1}$. Increment is 4dam. Datum 19 febr. 1956; 15.00 GMT



Kaart IX Topografie van het isentropisch vlak, $\theta = 24^\circ \text{C}$

ϕ in gpdam. Increment is 40dam. Datum 19 febr.

1956; 15.00 GMT.



Kaart X Temperatuurverdeling in het isentropisch vlak,

$\theta = 24^\circ \text{C}$. c_p in gpdam. onder weglating van

tweeduizendtallen. $c_p = 0.0464 \cdot 10^7 \text{ erg } ^\circ \text{K}^{-1} \text{ g}^{-1}$.

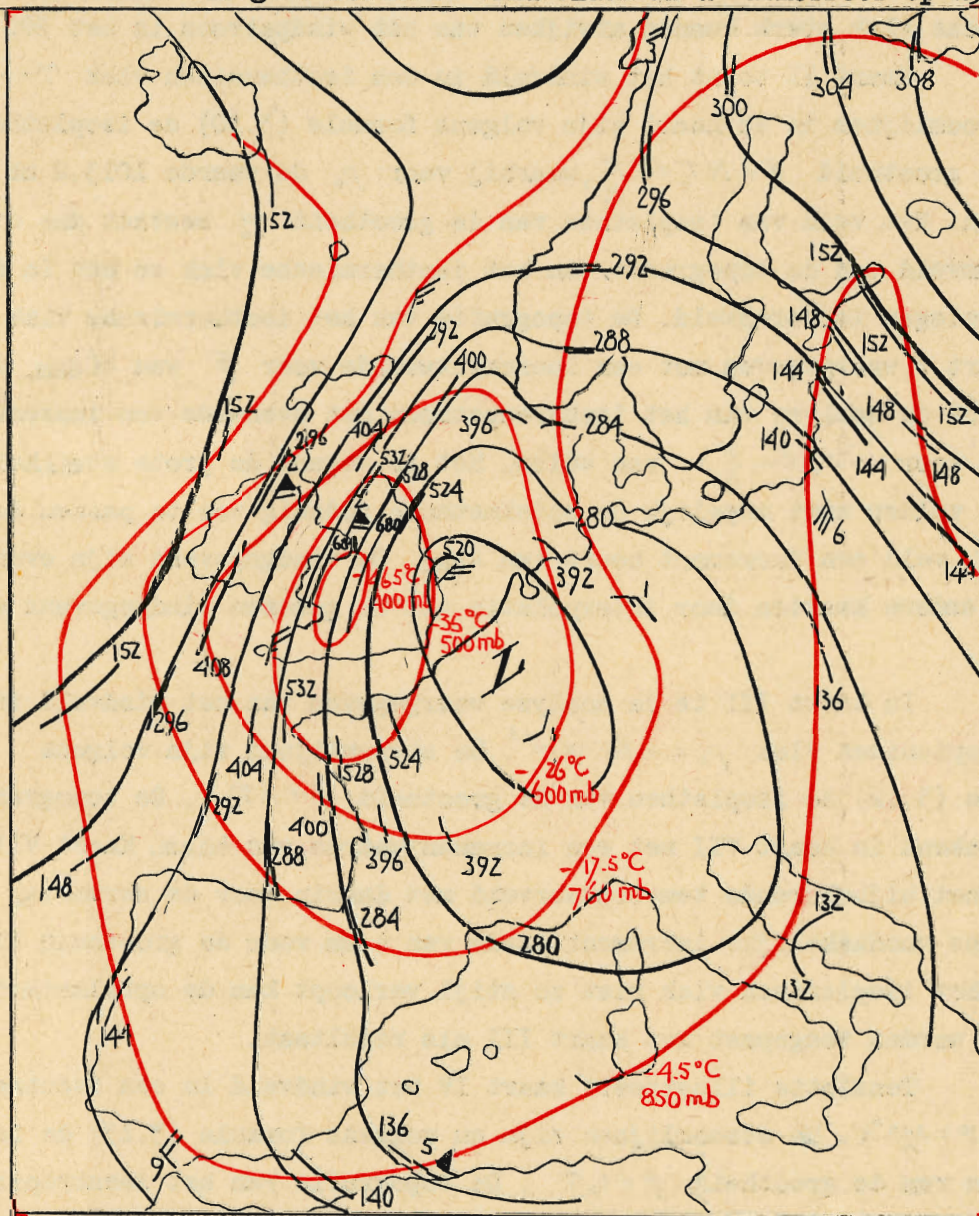
Increment is 40dam. Datum 19 febr. 1956; 15.00

GMT.

4. VOORBEELDEN

A. Geostrofische windvelden in een isobarisch, isothermisch, isopicnisch en isentropisch vlak

De serie aerologische kaarten I tot en met IV toont enkele voorbeelden van geostrofische windvelden in de atmosfeer op 19 febr.



Kaart XI Geostrofisch windveld in een willekeurig ruimtelijk vlak
 ϕ in gdam. Increment is 4dam. Datum 19 febr. 1956 1500 GMT.

1956, 1500 GMT.

Kaart I is een reproductie van de 500 mb kaart met daarin het veld van isothermen. De eenheid van geopotential is hier evenals in de andere kaarten de geopotentiële decameter. Voor de incrementwaarde van de geodynamische hoogte is 4dam gekozen.

Wil men geen trivialiteit verkrijgen bij de analyse van de geostrofische velden, dan moet de atmosfeer niet barotroop zijn. Maar uit de sterke isobarische temperatuurgradiënt in de 500 mb kaart blijkt, dat de atmosfeer juist sterk baroklien is, zodat verwacht kan worden dat de geostrofische velden in het isothermische, isopicnische en isentropische vlak sterk kunnen afwijken van het windpatroon in het 500 mb vlak.

Kaart II toont het windveld in een isothermisch vlak $T = -20^{\circ}\text{C}$. De stroomlijnen in de kaart zijn volgens formule (3.10) de isoplethen van de grootheid $\phi + RT_0 \ln \frac{p}{p_0}$, waarbij voor p_0 de waarde 1013.2 mb is gekozen. Het veld van isoplethen van de grootheid ψ_0 bestaat dus uit het somveld van de topografie van het isothermische vlak en het in dit vlak gelegen isobarenveld. De topografie van het isothermische vlak is in kaart V weergegeven met een incrementwaarde voor ϕ van 40dam. Kaart VI toont de analyse van het isobarenpatroon met eveneens een incrementwaarde voor $RT_0 \ln \frac{p}{p_0}$ van 40dam. Het is wegens de grote steilheid van de velden niet mogelijk de optelmethode zodanig toe te passen dat het ψ_0 -veld een increment heeft van 4dam. De windgegevens zijn evenals in de andere kaarten door interpolatie uit de gemeten windgegevens afgeleid.

In kaart III is de analyse weergegeven van het windveld in een isopicnisch vlak $\rho_0 = 0.85 \text{ kg m}^{-3}$. De stroomlijnen zijn volgens formule (3.12) de isoplethen van de grootheid $\phi + RT$. De topografie is getekend in kaart VII met een incrementwaarde van 4dam. Kaart VIII toont het bijbehorende temperatuurveld met daarin voor de normering eveneens noodzakelijke incrementwaarde van 4dam voor de grootheid RT . Omdat het isopicnisch vlak niet zo stijl verloopt kan de optelmethode nu wel worden toegepast met kaart III als resultaat.

Tenslotte illustreert kaart IV het windveld in een isentropisch vlak $\theta = 297^{\circ}\text{K}$. De stroomlijnen zijn nu volgens formule (3.15) de isoplethen van de grootheid $\phi + c_p T$. De topografie van het isentropische vlak wordt in beeld gebracht in kaart IX met een incrementwaarde voor ϕ van 40dam en kaart X toont de temperatuurverdeling in het beschouwde vlak met eveneens een incrementwaarde van 40dam voor de grootheid $c_p T$. Door de grote steilheid van het isentropische vlak is het ook nu niet mogelijk de optelmethode zodanig toe te passen dat het ψ -veld een increment heeft van 4dam.

De grootste afwijking van het windveld in het 500 mb vlak treedt op in de isentropische kaart. Zo vindt men bij de Noord Afrikaanse kust een "randstoring", die niet in de 500 mb kaart voorkomt. Voorts zijn de windvelden sterk aplanair. Dit blijkt als men de windvelden in de desbetreffende vlakken met de topografieën van de vlakken vergelijkt. Overi-

gens ziet men, dat de windgegevens over het algemeen zeer goed passen in de stroomlijnvelden.

B. Geostrofisch windveld in ruimtelijke vlakken

In de luchtvaartmeteorologie heeft men z.g. "composite charts" geïntroduceerd om bij de toepassing van de aeronavigatie voor lange afstandsvluchten rekening te houden met het niet stationaire karakter van de hoogtestroming. Principieel kan een vlucht van lange duur niet in een "fixed time" kaart worden bewerkt en zal men een hoogtestromingskaart willen samenstellen, waarin zo mogelijk de variabiliteit van de stroming aangepast is aan de tijdsvoortschrijding van de vlucht. Bij de ontwikkeling van de luchtvaarttechniek worden echter de snelheden dusdanig opgevoerd en daardoor de vliegtijden zo sterk bekort, dat de composities in de tijd op de achtergrond geraken en de composities in de ruimte een rol gaan spelen.

Het is bekend namelijk, dat vluchten met straalvliegtuigen sterk hoogteveranderlijk zijn. Strikt genomen zal men bij de toepassing van de aeronavigatie voor straalverkeersvluchten composities in ruimte en tijd moeten invoeren. De wijze waarop dergelijke kaarten kunnen worden geanalyseerd zal in een volgende publikatie worden uiteengezet.

Hier bepalen we ons tot enkele facetten van dit probleem, die direct met de boven ontwikkelde theorie verband houden.

Het windveld in een willekeurig vlak kan in het algemeen niet door een eenvoudig patroon in beeld gebracht worden. Dergelijke windvelden zullen met minder elegante hulpmiddelen beschreven moeten worden, b.v. door middel van stroomlijnen en isotachen, divergentie-, convergentie- en neutrale punten, divergentie- en convergentielijnen enz. Ruimtelijke vlakken waarin echter een geostrofisch windveld de stroming bepaalt, zullen de eigenschap moeten vertonen, dat zij de drukvlakken volgens isothermen (isosteren) snijden. De stroomlijnen van het geostrofisch windveld zijn op de kaart de diagonaalkrommen in het veld van contourlijnen van het ruimtelijke vlak en het veld van de in het vlak gelegen isothermen (isosteren, isobaren), nadat beide velden genormeerd zijn. Het windveld wijkt van het "topografiewindveld" door een soort "thermisch windveld" af.

Men kan bij de analyse twee methoden volgen, te weten de indirecte methode, waarbij het windveld door de optelmethode wordt verkregen en de directe methode, waarbij het windveld rechtstreeks met behulp van de gegevens wordt geanalyseerd. Bij de indirecte methode treden echter een aantal complicaties op. Wegens het steile verloop

van het ruimtelijke vlak is de optelmethode in vele gevallen praktisch niet uitvoerbaar. Bovendien is het normeren van beide velden niet eenvoudig. Daarom verdient de directe methode de voorkeur.

In kaart XI is voor de situatie van 19 februari 1956, 1500 GMT een directe analyse uitgevoerd. Uit de 850, 700, 600, 500 en 400 mb kaart werden de isothermen van $-7,5^{\circ}\text{C}$, $-17,5^{\circ}\text{C}$, -26°C , -35°C en $-46,5^{\circ}\text{C}$ met daarlangs de lijnelementen van de contourlijnen van de overeenkomstige hoogtestromings kaarten en de daarbij behorende ϕ - waarden overgenomen. Daarna werd het veld van stroomlijnen ($\psi = \text{const.}$) van de ruimtelijke composite chart geanalyseerd met inachtneming van de volgende regels:

1. De stroomlijnen raken aan de lijnelementen
2. De absolute waarde van de stroomfunctie ψ langs de stroomlijnen is niet van belang, maar de afstand van de stroomlijnen dient zodanig te zijn, dat het increment $\Delta\psi$ gelijk is aan de incrementwaarde $\Delta\phi$ op elke isotherm
3. De stroomlijnen snijden één en dezelfde isotherm in punten met gelijke ϕ -waarden
4. De windgegevens die toevallig op de isothermen liggen, moeten in het ψ -veld passen volgens de geostrofische windvergelijking.

De tweede en derde eigenschap vooral, leveren een goed uitgangspunt voor de analyse. In kaart XI is de analyse dan ook uitgevoerd door uitgaande van de isotherm van $-17,5^{\circ}\text{C}$ de stroomlijnen $\psi = \text{constant}$ te trekken die hierop door de lijnelementen zelf gaan. De 288-lijn gaat door het punt 44° noord 04.5° west en ook door het punt 60° noord 08.5° west. Het analyseren van de kaart gaat op deze wijze minstens zo eenvoudig als bij de directe methode van het analyseren van een standaard drukvlak.

Wegens de grote steilheid van het ruimtelijke vlak is het patroon van zijn topografie bijna gelijk aan dat van het veld van isothermen.

5. TOEPASSING IN DE OCEANOGRAPHIE

In de dynamische oceanografie worden voor de beschrijving van de stromingen de hydrodynamische vergelijkingen door het verwaarlozen van de wrijving, de versnellingen en de verticale snelheid, op analoge wijze als in de meteorologie, vereenvoudigd. Men vindt als resultaat

1. de statische vergelijking

$$dp = -\rho dD.$$

waarin p de zeedruk, ρ de dichtheid en D de geodynamische hoogte voorstelt.

2. de bewegingsvergelijking voor de "gradient flow"

$$\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla p. \quad (5.1)$$

Deze vergelijking kan met behulp van de statische vergelijking ook op de vorm

$$\rho \vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_p D \quad (5.2)$$

gebracht worden. De zeedruk p en de geodynamische hoogte D hebben betrekking op een niveauvlak resp. isobarisch vlak.

De stroming in een niveauvlak wordt voorgesteld door het veld van isobaren, die in een isobarisch vlak door het veld van geodynamische isobathen.

Het probleem, in welke ruimtelijke vlakken eveneens een "gradient flow" bestaat, kan weer opgelost worden door toepassing van theorema I. Het resultaat is vrijwel analoog met dat in de dynamische meteorologie. Ook nu spelen de isotimische vlakken waarvan de scalaire grootte alleen een functie is van twee andere fysische grootheden een belangrijke rol. Doordat echter in de oceanografie geen analogen van de gasvergelijking bestaat, die p , T en ρ in een gesloten vorm met elkaar verbindt is het aantal isotimische vlakken, dat aan de voorwaarde voldoet, beperkter.

Zo zullen de isotimische vlakken van een scalaire grootte S , die alleen een functie is van de zeedruk p en de dichtheid ρ niet overeenkomen met isotimische vlakken waarvan de scalaire grootte alleen een functie is van de zeedruk p en de temperatuur T of alleen een functie is van de temperatuur T en de dichtheid ρ .

Het resultaat op blz. 10 kan voor de oceanografie als volgt worden vertaald:

de "gradient flow" in isobarische vlakken $\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_p D$ induceert in een ruimtelijk vlak een gelijksoortige "gradient flow" als dit ruimtelijk vlak een isotimisch vlak $S = S_0$ is van een scalaire grootte S die alleen een functie is van de zeedruk en de dichtheid: $S = S(p, \rho)$. De vergelijking voor de "gradient flow" wordt: $\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_p (D - D_{S_0})$, als D de geodynamische hoogte is van het vlak t.o.v. een niveauvlak en D_{S_0} de geodynamische hoogte van het vlak t.o.v. een isobarisch vlak in een "barotrope" watermassa $S = S_0$.

Het ruimtelijk vlak snijdt de isobarische vlakken volgens isosteren en de stroming kan in een bepaald punt worden berekend uit een lineaire combinatie van de uitdrukkingen (5.1) en (5.2):

$$\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_S D + \frac{1}{\lambda \rho} k \times \nabla_S P. \quad (5.3)$$

Daarbij hebben p D en ρ betrekking op het beschouwde isotimische vlak. De isoplethen $D - D_{S_0} = \text{const.}$ kunnen worden gevonden door de optelmethode toe te passen in het veld van isobathen en het veld van isobaren van het gegeven vlak, als de velden genormeerd zijn.

Het is evident, dat de isopicnische vlakken $\rho = \rho_0$ aan de voorwaarden voldoen. De vergelijking van het stroomveld luidt dan volgens (3.13):

$$\vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_{\rho} (D + \frac{P}{\rho_0}). \quad (5.4)$$

De isothermische en isentropische vlakken voldoen niet aan de voorwaarde, omdat de temperatuur T en de potentiële temperatuur niet uitsluitend functies zijn van p en ρ .

In de oceanografie is zoals bekend een isentropisch vlak ten naaste bij identiek met een σ_t -vlak, waarbij σ_t gedefinieerd is door de betrekking:

$$\sigma_t = (\rho_{s,t,p=0} - 1) 10^3$$

$\rho_{s,t,p}$ stelt hierin de dichtheid als functie van het zoutgehalte, de temperatuur en de zeedruk voor. Als men aanneemt dat langs het σ_t -vlak de dichtheid $\rho_{s,t,p} = \rho_{s,t,0}$, dan kan het stroomveld toch bij benadering door formule (5.4) worden voorgesteld.

Voor de impulsstroom $\rho \vec{u}$ vindt men:

De "impulsstroom" in niveaувlakken $\rho \vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_D P$ induceert in een ruimtelijk vlak eveneens een "impulsstroom", als dit ruimtelijke vlak een isotimisch vlak $S = S_0$ is van een scalaire grootte S die alleen een functie is van de geodynamische hoogte en de dichtheid: $S = S'(D, \rho)$. De vergelijking voor dit impulsstroomveld luidt:

$$\rho \vec{u} = \frac{1}{\lambda} k \times \nabla_S (P - P_{S_0})$$

waarin p betrekking heeft op de zeedruk in het beschouwde vlak en P_{S_0} op de drukverschillen tussen het vlak en een niveaувlak binnen een watermassa waarin overal $S = S_0$.

De ruimtelijke vlakken snijden de niveauvlakken volgens isosteren en de stroomimpuls in een bepaald punt kan weer met formule (5.3) worden berekend.

De isoplethen $p - p_{g_0} = \text{const.}$ vindt men door de optelmethode toe te passen in het veld van isobaren en het veld van geodynamische isobathen als de velden genormeerd zijn.

Het isopicnische vlak $\rho = \rho_0$ voldoet weer aan de voorwaarde.

Literatuur

- [1] Montgomery R.B. 1937 A suggested method for representing gradient flow in isentropic surfaces Bull. Am. Met. Soc., 18 Nos. 6-7
- [2] Morse Ph.M. Feshbach H. 1953 Methods of theoretical physics Part I § 1.1 pg. 5

The following is a list of the names of the persons who have been appointed to the various positions in the office of the Secretary of the State of New York, for the term ending on the 31st day of December, 1901.

The following is a list of the names of the persons who have been appointed to the various positions in the office of the Secretary of the State of New York, for the term ending on the 31st day of December, 1901.

- [1] Secretary of State, William C. Clegg
- [2] Secretary of State, William C. Clegg

