K O N I N K L IJ K   N E D E R L A N D S

M E T E O R O L O G I S C H   I N S T I T U U T

Wetenschappelijk Rapport W.R. 55-012 (IV-012)

P. Groen

Over de vervorming van een tweedimensionale puntenzwerm door ongeordende bewegingen

On the deformation of a two-dimensional point cluster by random motions

De Bilt, 1955

KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT

Wetenschappelijk Rapport
W.R. 55-012 (IV-012)
U.D.C.: 532.517.4

P. Groen

Over de vervorming van een tweedimensionale puntenzwerm door ongeordende bewegingen

On the deformation of a two-dimensional point cluster by random motions

SUMMARY

The statistics of the behaviour of a point cluster in a field of random motions is studied. Apart from any translation or rotation of the cluster, its turbulent "diffusion" has the two different aspects of, on one hand, an expansion of the cluster as a whole (i.e. an increase of the standard deviation with respect to the centre of gravity) and, on the other hand, a deformation of the pattern of the points. If two-dimensional representations of the cluster at two different moments are given in such a way that the individual points can be traced from one picture to the other, a measure of the deformation, h, is defined, which varies from 0 to 1 and which may be determined irrespective of the scales of the two representations.

If s is the (true) ratio of the standard deviation at the later moment to the standard deviation at the earlier moment and if the system considered is representative for an "ensemble" of systems, we find that $s(1-h) = 1$.

1. De waarneming van turbulente bewegingen van een puntenzwerm door meting van de onderlinge plaatsveranderingen der bewegende punten kan, wanneer de puntenzwerm tweedimensionaal is of tweedimensionaal beschouwd wordt, het eenvoudigst geschieden door middel van foto's, genomen loodrecht op het vlak van beweging (bijvoorbeeld: door middel van luchtfotografie, wanneer het om de turbulente bewegingen aan een wateroppervlak gaat).

Onderstel dat wij een aantal successieve afbeeldingen van de puntenzwerm hebben, zodanig dat elk individueel punt door de reeks afbeeldingen heen te volgen is, d.w.z. dat, als de punten op de eerste afbeelding elk een eigen nummer krijgen, deze nummers ook op elke volgende afbeelding ondubbelzinnig aan de punten kunnen worden toegewezen. Onderstel verder dat de schaal van minstens een der afbeeldingen min of meer bekend is, doch de verhoudingen der schalen van de verschillende afbeeldingen niet, of niet voldoende nauwkeurig, noch ook de nauwkeurige oriëntaties der afbeeldingen t.o.v. elkaar. Men tast dan t.a.v. de juiste lengten en richtingen der verplaatsingen van de individuele punten in het onzekere en ook voor de globale spreiding, bijvoorbeeld uit te drukken door de toeneming van de standaarddeviatie t.o.v. het zwaartepunt, is dan geen betrouwbare directe maat af te leiden.

Men kan zich afvragen of uit de vergelijking van zulke afbeeldingen dan nog wel enige informatie is af te leiden t.a.v. de mate van turbulente "diffusie" der punten, of niet. Bij nadere bestudering van de zaak blijkt dit toch wel het geval te zijn.

2. Onderstel dat we twee afbeeldingen van de puntenzwerm hebben, zó dat elk punt van de ene aan een punt van de andere is toegevoegd. De punten zijn genummerd 1 tot en met N. Onderstel dat we de schaal van een der afbeeldingen kennen, bijvoorbeeld van de eerste. Wij interesseren ons alleen voor de turbulente <u>diffusie</u> der punten, niet voor een eventuele translatie, noch voor een rotatie van de zwerm als geheel.

De <u>diffusie</u> van de zwerm heeft twee aspecten. In de eerste plaats treedt in het algemeen een uitbreiding op, die zich uit in een <u>vergroting</u> van de standaarddeviatie t.o.v. het zwaartepunt; de vergrotingsfactor van de standaarddeviatie na een zeker tijdsinterval zij s. Daarnaast treedt een <u>vervorming</u> van het puntenpatroon op, zodanig dat, als het tweede patroon t.o.v. zijn zwaartepunt vermenigvuldigd wordt met s^{-1} en aldus gereduceerd wordt tot een patroon met gelijke standaarddeviatie als het eerste, het gereduceerde tweede patroon toch niet tot dekking te brengen is met het eerste. We zullen straks voor deze vervorming een maat vaststellen, die evenzeer als de vergroting de diffusie karakteriseert; zulk een maat van de vervorming is dan te bepalen onafhankelijk van de juiste schalen.

We denken ons in de eerste afbeelding van de zwerm een Cartesisch assenstelsel (x, y) aangebracht, zodanig dat de oorsprong in het zwaartepunt van de zwerm ligt, en plaatsen nu de tweede afbeelding in datzelfde assenstelsel. Dit kan echter op verschillende wijzen, daar we vrijheid van translatie en rotatie hebben. We doen het nu zo, dat de som der kwadraten van de afstanden der paren van met elkaar corresponderende punten (gelijk genummerde punten) minimaal is:

$$\delta \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{r}_i^{\,\prime} - \vec{R}_i\right)^2 = \delta \sum_i \left(\vec{P} + \vec{r}_i - \vec{R}_i\right)^2 =$$

$$= \delta \sum_i \left[\left(a + r_i \cos(\alpha_i + \varphi) - X_i\right)^2 + \left(b + r_i \sin(\alpha_i + \varphi) - Y_i\right)^2\right] = 0, \quad (1)$$

waarin $\vec{R}_i$ is (de voerstraal van de oorsprong naar) het i-de punt in de eerste afbeelding, met coördinaten X_i en Y_i,

$\vec{r}_i^{\,\prime}$ is het i-de punt in de tweede afbeelding,

$\vec{P}$ is het zwaartepunt van de zwerm in de tweede afbeelding, met coördinaten a en b,

$\vec{r}_i$ is de voerstraal van het zwaartepunt naar het i-de punt in de tweede afbeelding, met lengte r_i en azimuth $\alpha_i + \varphi$, waarbij φ een voor alle punten gelijke, onbekende rotatiehoek voorstelt.

We voeren verder nog een variabele schaalfactor f in, waarmee de tweede afbeelding t.o.v. het zwaartepunt vermenigvuldigd wordt. In plaats van voorwaarde (1) stellen we nu de minimum voorwaarde

$$\delta S(a, b, \varphi, f) = 0, \quad (2)$$

met

$$S = \sum_i \left(\vec{P} + f\vec{r}_i - \vec{R}_i\right)^2 =$$

$$= \sum_i \left[\left(a + f r_i \cos(\alpha_i + \varphi) - X_i\right)^2 + \left(b + f r_i \sin(\alpha_i + \varphi) - Y_i\right)^2\right]. \quad (3)$$

Uit (2) volgt: $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$; (4)

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0 ; \tag{5}$$

$$\frac{\partial S}{\partial f} = 0 . \tag{6}$$

Aan voorwaarde (4) wordt voldaan door a = 0, b = 0. Dit wil zeggen dat het zwaartepunt van de tweede afbeelding in de oorsprong komt (waar óók dat van de eerste afbeelding ligt).
Uit voorwaarde (5) volgt nu (met a = b = 0):

$$\sum_i \left[X_i r_i \sin(\alpha_i + \varphi) - Y_i r_i \cos(\alpha_i + \varphi) \right] = 0, \tag{7}$$

hetgeen identiek is met

$$\sum_i \left[\vec{R}_i \times \vec{r}_i \right] = 0 .$$

Deze voorwaarde is blijkbaar invarient tegenover vermenigvuldiging van een der afbeeldingen t.o.v. het (gemeenschappelijke) zwaartepunt met een willekeurige schaalfactor. Uit (7) is φ te berekenen.
Voorwaarde (6) tenslotte geeft:

$$\sum_i \vec{r}_i (f \vec{r}_i - \vec{R}_i) = 0,$$

of:

$$f = \frac{\sum_i (\vec{R}_i \vec{r}_i)}{\sum_i \vec{r}_i^{\,2}} . \tag{8}$$

Zouden we de schaal van de tweede gelijk laten en die van de eerste met 1/f' vermenigvuldigen, dan zou de voorwaarde van de kleinste kwadratensom een f' ongelijk aan f opleveren. Immers, dan zou

$$\frac{1}{f'} = \frac{\sum_i (\vec{R}_i \vec{r}_i)}{\sum_i \vec{R}_i^{\,2}},$$

hetgeen betekent:

$$f' = \frac{\sum_i \vec{R}_i^{\,2}}{\sum_i (\vec{R}_i \vec{r}_i)} \neq f . \tag{8'}$$

Het product van f en f' blijkt echter een eenvoudige betekenis te hebben:

$$f f' = \frac{\sum_i \vec{R}_i^{\,2}}{\sum_i \vec{r}_i^{\,2}}, \tag{9}$$

zijnde de verhouding van de kwadraten der standaarddeviaties in beide afbeeldingen.

We kunnen deze grootheid ook direct verkrijgen uit de oplossing van het volgende variatie-probleem:

Vermenigvuldig de eerste afbeelding t.o.v. het zwaartepunt met $c^{-\frac{1}{2}}$ en de tweede met $c^{\frac{1}{2}}$ en bepaal c zodanig dat de som der kwadraten van de afstanden der puntenparen minimaal is, ondersteld dat (4) en (5) reeds vervuld zijn. Dus:

$$\frac{\partial}{\partial c}\sum_i\left(c^{1/2}\vec{r}_i - c^{-1/2}\vec{R}_i\right)^2 = 0. \tag{10}$$

Hieruit volgt:

$$c^2 = \frac{\sum_i \vec{R}_i^{\,2}}{\sum_i \vec{r}_i^{\,2}}. \tag{11}$$

Het voorgaande wil o.a. zeggen dat vermenigvuldiging van de tweede afbeelding met c ôf van de eerste afbeelding met c^{-1} de standaarddeviaties der beide afbeeldingen aan elkaar gelijk maakt. Doen we nu bijvoorbeeld het eerste, dan is daardoor de <u>radiële uitbreiding</u> van de zwerm, die in het tijdsverloop tussen de beide afbeeldingen plaats heeft gevonden, a.h.w. ongedaan gemaakt en het verschil, dat na de vermenigvuldiging nog tussen de twee afbeeldingen overblijft, is alleen het eerder genoemde <u>vorm</u>-verschil tussen de beide puntenpatronen. De verandering die dit vormverschil heeft meegebracht zullen we de <u>vervorming</u> noemen.

Als maat der vervorming voeren we nu in de waarde, die de som der kwadraten van de afstanden der corresponderende puntenparen overhoudt als we door vermenigvuldiging van een van beide afbeeldingen de beide standaarddeviaties eenzelfde waarde gegeven hebben, gedeeld door 2 maal het kwadraat van die standaarddeviatie. We noemen deze maat h (= "hoekspreiding") en hebben dus (per definitie):

$$h = \frac{\sum_i\left(\vec{R}_i - c\,\vec{r}_i\right)^2}{2\sum_i R_i^2} = 1 - \frac{c\sum_i(\vec{R}_i\vec{r}_i)}{\sum_i \vec{R}_i^{\,2}}. \tag{12}$$

waarbij is vooropgesteld dat er is voldaan aan (4) en (5).

De uitkomst van deze uitdrukking is onafhankelijk van de schalen der afbeeldingen en met name ook ongevoelig voor een verschil tussen de schalen der afbeeldingen.

3. Hebben de twee afbeeldingen (de vectoren $\vec{R}_i$ en de vectoren $\vec{r}_i$) gelijke schaal, dan is dus

$$c^{-1} = \sqrt{\sum_i \vec{r}_i^{\,2} \Big/ \sum_i \vec{R}_i^{\,2}} = s,$$

de radiële spreidingsfactor of vergrotingsfactor. Is het tijdsinterval $t = 0$, dan zal $c = 1$ en $\sum_i (\vec{R}_i \cdot \vec{r}_i) = \sum_i \vec{R}_i^{\,2}$, dus $h = 0$. Bij $t \to \infty$ (met $c \to 0$) is te verwachten dat $c \sum_i (\vec{R}_i \vec{r}_i) \longrightarrow 0$, dus $h \to 1$.

Hoe is nu de relatie van h tot s $(= c^{-1})$?

We onderstellen dat de zwerm zo talrijk is en de punten zodanig willekeurig verdeeld zijn, dat de waarde van $\sum_i (\vec{R}_i \vec{r}_i)$ bij de onderhavige proefneming praktisch gelijk is aan het ensemble-gemiddelde van de waarden van $\sum_i (\vec{R}_i \vec{r}_{ij})$ die optreden bij een zeer groot aantal proefnemingen ($j = 1 \ldots\ldots n$), alle met hetzelfde beginpatroon $(\vec{R}_i)$, met hetzelfde tijdsinterval en met dezelfde karakteristieken van het, homogeen ondersteIde, turbulentie-veld.

Dus:

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{R}_i \cdot \vec{r}_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{R}_i \cdot \vec{r}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{R}_i \cdot n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i^{\,2}, \tag{13}$$

aangezien bij grote n geldt (dit is karakteristiek voor <u>ongeordende</u> bewegingen):

$$n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_{ij} = \vec{R}_i ;$$

een eventuele translatie of rotatie is immers reeds geëlimineerd en de schalen der twee afbeeldingen zijn thans gelijk ondersteld. Streng geldt (13) dus voor het bovenomschreven ensemble-gemiddelde, doch als de zwerm talrijk genoeg is (en voldoende "willekeurig" verdeeld) om (13) ook op een bepaalde proefneming van toepassing te doen zijn, dan volgt daaruit in combinatie met (12) (c is thans de "ware" c):

$$h = 1 - c = 1 - s^{-1}$$

of

$$s(1 - h) = 1 \tag{14}$$

Hiermee is dus de radiële spreidingsfactor te bepalen als h bekend is. Exact geldt (14) in het ensemble-gemiddelde.

Indien (13) geldt, dan volgt daaruit dat bij gelijkheid der schalen de boven ten tonele gevoerde grootheid $f' = 1$ is. Daaruit volgt dan verder dat $f = c^2$. Willen we de onderstelling die aan (13) ten grondslag ligt niet gebruiken, dan geldt toch dat het ensemble-gemiddelde van $1/f'$ (over een zeer groot aantal proefnemingen met hetzelfde beginpatroon) gelijk aan 1 is.

Er moge nog even de aandacht op gevestigd worden dat de onderlinge vergelijking van het eerste en het tweede patroon niet omkeerbaar is, d.w.z. dat het essentieel is dat het eerste inderdaad het eerste in de tijd en het tweede het tweede in de tijd is en dat hun onderlinge relatie niet reciprook is; het is immers te verwachten dat $s > 1$, d.w.z.: de standaarddeviatie neemt in de tijd toe; statistisch gezien is het proces niet omkeerbaar (de richting is van kleinere naar grotere aprioriwaarschijnlijkheid).

De uitdrukking (12) voor h laat nog een eenvoudige interpretatie toe. Immers, gezien de betekenis van c, geldt:

$$h = 1 - \frac{\sum_i \vec{R}_i \cdot \vec{r}_i}{\sqrt{\sum_i \vec{R}_i^2 \sum_i \vec{r}_i^2}} = 1 - \rho$$

zijnde ρ de correlatie-coëfficiënt tussen de vectoren $\vec{R}_i$ en $\vec{r}_i$. Uit (14) volgt dan verder dat $\rho = s^{-1}$.

Beschouwen we de puntenzwerm eens ééndimensionaal, d.w.z. beschouwen wij eens de verandering van bijv. de verzameling der x-waarden afzonderlijk, dan krijgen we op dezelfde wijze als boven: $\rho_x = c_x$, waarin ρ_x de correlatie-coëfficiënt tussen de X_i-en en de x_i-waarden is en $c_x = \sqrt{\sum_i X_i^2 / \sum_i x_i^2}$.
Dan leert de statistica, dat de regressielijn door de N punten (X_i, x_i) in een X - x-vlak wordt voorgesteld door $x = (\rho_x/c_x)X$, dus door $x = X$. Dit nu is ook te verwachten bij zuiver turbulente diffusie (zuiver ongeordende bewegingen) van een grote puntenzwerm: er is dan geen systematische voorkeur voor een bepaalde bewegingsrichting.

december 1955