

numerieke atmosfeermodellen

A.P.M. Baede

technische rapporten; TR-107

Numerieke Atmosfeermodellen

A.P.M. Baede

Syllabus voor de cursus Opleiding HWK

1. Inleiding

Waarschijnlijk de belangrijkste ontwikkeling in de meteorologie sinds 1950 is de opkomst van Numerieke Atmosfeer Modellen. Het bijbehorende vakgebied, waarbinnen deze ontwikkeling plaats vindt, wordt vaak aangeduid met de Engelse afkorting NWP (Numerical Weather Prediction). De opkomst van dit vakgebied is te danken aan een gelukkig samengaan van een aantal factoren. De snelle ontwikkeling van elektronische computers; de sterke verbetering van het waarnemingsnetwerk en de theoretische ontwikkelingen in de jaren '30 en '40 op het gebied van de numerieke wiskunde en de dynamische meteorologie.

In de NWP worden dynamisch-meteorologische methoden direct toegepast op het gebied van de weersvoorspelling. Het is dus een natuurkundig vakgebied. We gebruiken ons natuurkundig begrip van de werking van de atmosfeer; zetten dit langs numeriek-wiskundige weg om in een computermodel en gebruiken dit model om de toestand van de atmosfeer te analyseren en te voorspellen.

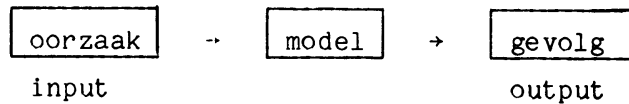
Enig begrip van dit vakgebied is essentieel voor een Hoofdweerkundige omdat hij dagelijks wordt geconfronteerd met NWP-resultaten in de vorm van analyses en prognoses. Inzicht in de methode geeft inzicht in de waarde én de beperkingen van de resultaten. In deze syllabus worden enkele basisbegrippen behandeld, genoeg om eenvoudige literatuur op dit gebied te kunnen begrijpen. Voor de geïnteresseerde is meer informatie te vinden in de volgende boeken:

- Hoofdstuk 8 in het boek "An Introduction to Dynamic Meteorology" van J.R. Holton.
- Hoofdstuk 10 van Teleac Cursus "Wiskundige Modellen" (Stichting Teleac, Utrecht 1981).

- G.J. Haltiner "Numerical Weather Prediction" (1971)
- F. Mesinger en A. Arakawa "Numerical Methods used in Atmospheric Models, Vol. I (1976) en Vol. II (1979/WMO, Genève, GARP Publication Series No. 17.

2. Wat is een Numeriek Model?

Een model is een imitatie van de werkelijkheid die tot doel heeft het verband tussen oorzaak en gevolg na te bootsen



De imitatie moet zodanig zijn dat de oorzaak-gevolg relatie toegankelijk wordt, dat je er mee kunt spelen. De werkelijkheid moet overzichtelijk en beheersbaar, of, zoals in ons geval, voorspelbaar worden.

Voorbeelden van modellen:

- De watermodellen van het Waterloopkundig Lab. waarmee de gevolgen van waterstaatkundige werken bestudeerd kunnen worden
- Een vliegtuigmodel in een windtunnel waarmee de invloed van ontwerpwijzigingen op vliegeigenschappen kunnen worden nagegaan
- Computermodellen van de atmosfeer

Aan een model worden i.h.a. de volgende eisen gesteld:

- Gedragsovereenkomst met de werkelijkheid
- Een model is toegankelijker dan de werkelijkheid. Wat daarmee bedoeld wordt, is duidelijk uit de bovenstaande voorbeelden.
- Een model is bekender dan de werkelijkheid, d.w.z. er wordt afgezien van allerlei niet goed bekende factoren die geen grote invloed hebben.

Twee minder harde eisen zijn:

- Een model is onafhankelijk van de werkelijkheid. Dit is duidelijk het geval voor geofysische modellen, maar niet noodzakelijk voor bijv. economische modellen. Economische voorspellingen van het Planbureau kunnen van invloed zijn op politieke beslissingen waardoor modeluitkomsten en werkelijkheid niet meer onafhankelijk zijn.

- Een model vertoont structuurovereenkomst met de werkelijkheid. Dit is het geval bij de stromingsmodellen van het Waterloopkundig Lab. en bij onze atmosfeermodellen. Als we deze eis van structuurovereenkomst stellen, mag een statistisch verband tussen in- en output geen model genoemd worden.

In ons geval bestaat het model uit een vereenvoudigde verzameling wiskundige vergelijkingen die de natuurkundige processen in de atmosfeer zo goed mogelijk beschrijven. Daarbij wordt alles tot het model gerekend dat nodig is om er operationeel mee te kunnen werken: data-inzameling, analyse, outputbewerking etc.

Het hele proces is zeer rekenintensief omdat de vergelijkingen moeilijk zijn op te lossen maar ook omdat er zoveel gegevens in gaan. Er zijn ook geen analytische oplossingen bekend d.w.z. oplossingen die in een formulevorm opgeschreven kunnen worden.

Daarom moeten de vergelijkingen wel op de computer opgelost worden met behulp van technieken uit de numerieke wiskunde. Dit maakt het model tot een numeriek model.

3. Historische inleiding

De natuurkundige processen die we gaan beschrijven en die de basis voor onze modellen vormen, zijn al lang bekend. Het is klassieke natuurkunde.

Toch was het pas in 1904 dat V. Bjerkness zich dit realiseerde: "Das problem von der Wettervorhersage, betrachtet vom Standpunkte der Mechanik und der Physik", Met. Zeitschrift, Januari 1904.

Bjerkness realiseerde zich dat het probleem zeer moeilijk was:

- de vergelijkingen waren wiskundig zeer lastig
- de begincondities waren zeer onvoldoende bekend d.w.z. de waarnemingen waren onvoldoende om de uitgangstoestand van de atmosfeer met enige nauwkeurigheid te kunnen bepalen.

Het was L.F. Richardson, een Brit die gedurende en vlak na de W.O. I een poging waagde. Hij berekende met een model de drukverandering in twee punten in Duitsland 6 uur vooruit en vond een verandering van 145 mbar in 6 uur.

Hij had natuurlijk geen computer en deed 6 weken over zijn berekening. Hij concludeerde dat hij 64000 mensen nodig had om op de hele aardbol het weer bij te houden. Redenen voor het onzinnig resultaat:

- slechte waarnemingen vooral in bovenlucht
- slecht balans tussen massa en windveld, waardoor zwaartekrachtsgolven kunnen optreden
- lineaire instabiliteit. Hierop komen we later terug.

De onderneming van Richardson kwam te vroeg: de wetenschap was nog niet rijp.

Tussen 1920 en 1950 gebeurde er niets op het gebied van de numerieke weersvoorspelling maar wel vonden er belangrijke wetenschappelijke en technische ontwikkelingen plaats die essentieel waren voor de latere ontwikkeling van NWP:

- grote theoretische ontwikkeling van onze kennis van de atmosfeer (barokliene instabiliteit, quasi-geostrofische theorie)
- uitbreiding van onze kennis van de numerieke wiskunde (lineaire stabiliteit)
- sterke verbetering van het waarnemingssysteem, vooral van de bovenlucht (vooral na 2e wereldoorlog)
- opkomst van de electronische computer (eind 40-er jaren).

In 1950 publiceerde Charney, Fjørtoft en Von Neumann de resultaten van de eerste numerieke integratie van de barotrope vorticitetsvergelijking (Tellus 2 (1950), 237-254). Deze buitengewoon belangrijk stap voorwaards kwam tot stand door de gelukkige samenwerking van de briljante wiskundige Von Neumann en de grote dynamisch-meteorologen Charney en Fjørtoft. Door het gebruik van de veel eenvoudiger barotrope vorticitetsvergelijking wisten zij een aantal van Richardsons problemen te vermijden.

Na 1950 ging de ontwikkeling zeer snel. In 1954 begon het NMC in Washington met operationele numerieke voorspellingen. De ontwikkeling vond plaats langs twee lijnen:

- Algemene Circulatiemodellen (GCM's) die geen operationeel maar wetenschappelijk doel hebben (klimaatonderzoek bijv.) en daarom zeer uitgebreid kunnen zijn en dus veel computertijd mogen kosten.
- Numerieke Weersverwachtingsmodellen (NWPM's), ontworpen om operationeel te worden toegepast. Ze moeten daarom aanzienlijk sneller zijn dan de werkelijkheid en dus eenvoudiger dan GCM's.

<u>Inhoud</u>	<u>pag.:</u>
1. Inleiding	1
2. Wat is een Numeriek Model?	2
3. Historische Inleiding	3
4. Hoe komt een Numerieke Voorspelling tot stand?	5
5. Data; data-controle en -selectie	8
5.1 Data	8
5.2 Data-controle en -selectie	12
6. Data-assimilatie	14
7. Modellen	18
7.1 Natuurkundige wetten	18
7.2 Vereenvoudigingen	21
8. De lineaire advectionvergelijking; numerieke oplossing	23
8.1 Inleiding	23
8.2 De roosterpuntmethode	24
8.3 Spectrale methode	30
8.4 Impliciete methode	33
9. De niet-lineaire advectionvergelijking	35
9.1 Inleiding	35
9.2 Aliasing	35
9.3 Niet-lineaire instabiliteit	36
9.4 Behoudswetten	38
10. Coördinatensystemen en drie-dimensionale schema's	40
10.1 Inleiding	40
10.2 Horizontale coördinaten op de bol	40
10.3 De spectrale methode op de bol	42
10.4 Verticale coördinatensystemen	45
11. Een PE-model in drukcoördinaten	48
11.1 De vergelijkingen	48
11.2 Het model	50
12. Fysische parameterisaties	52
12.1 Inleiding	52
12.2 Grenslaag	53
12.3 Vocht en bewolking	55
12.4 Straling	56
12.5 Orografische effecten	57
12.6 Processen aan het aardoppervlak	58
13. Prestatie en voorspelbaarheid	60
13.1 Prestatie	60
13.2 Voorspelbaarheid	62
13.3 Voorspelling van de modelprestatie	66
Appendix 1 Complexe getallen	70
Appendix 2 Chaos, de revolutie naar een nieuwe wetenschap	74

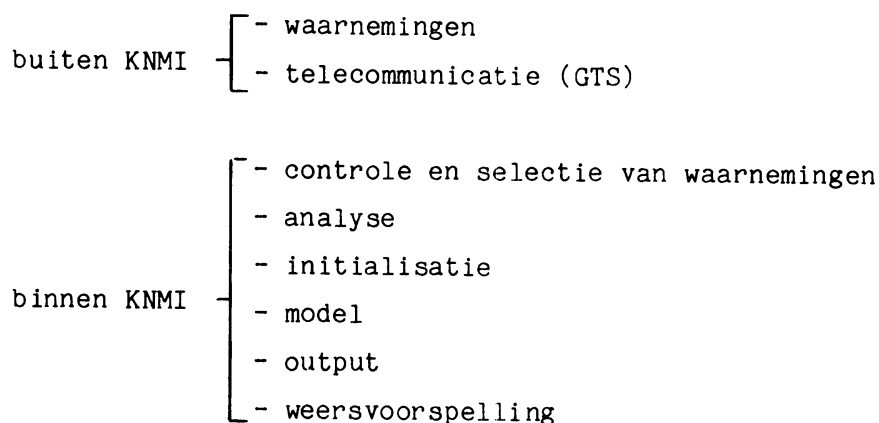
Tegenwoordige computers zijn zo snel dat het onderscheid tussen GCM's en NWPM's is vervaagd.

De oprichting in 1975 van het Europese Centrum voor Middellange Termijn Weersverwachting (ECMWF) betekende een belangrijk stap voorwaarts. Het niveau van de Numerieke Weersverwachting is sindsdien met sprongen vooruit gegaan.

Op het KNMI is de ontwikkeling van NWP in 1970 op gang gekomen. Nadat gedurende enkele jaren een 3-lagen, later een 4-lagen, gefilterd model operationeel zijn gedraaid (BK3 en BK4) zijn nu een 9-lagen model, gebaseerd op de primitieve vergelijkingen (LAM) en een eenvoudig gefilterd 2-parameter model (VIMOLA) in ontwikkeling.

4. Hoe komt een Numerieke Voorspelling tot stand?

In onderstaand schema staan de stappen aangegeven waarlangs een numerieke weersvoorspelling tot stand komt



We zullen elk van deze stappen hier onder in het kort nader bespreken en er later uitgebreid op terugkomen.

- Waarnemingen

De waarneming is de essentiële eerste stap op weg naar een voorspelling, welke voorspelmethode men ook gebruikt. Terecht wordt er dan ook tegenwoordig zeer veel aandacht besteed aan de kwaliteit en aan het putten van zoveel mogelijk informatie uit elke waarneming. We zullen er hieronder in een apart hoofdstuk nog uitgebreid op terugkomen.

- Telecommunicatie

Alle waarnemingen worden wereldwijd verspreid via het door de WMO beheerde Global Telecommunicatie System (GTS). Essentieel is dat de waarnemingen op tijd binnenkomen om nog te kunnen worden gebruikt. Waarnemingen die na een bepaald tijdstip (de cut-off tijd) binnenkomen kunnen niet meer gebruikt worden.

- Controle en selectie van waarnemingen

Waarnemingen die via het GTS binnenkomen kunnen allerlei fouten bevatten: waarnemingsfouten, code- en transmissiefouten. Het is belangrijk dat binnenkomende waarnemingen automatisch worden gecontroleerd, eventueel gecorrigeerd, en uiteindelijk geselecteerd voor verder gebruik. Deze controle en selectie dient zodanig te zijn dat enerzijds de kans zeer klein is dat er foute waarnemingen doorheen glippen, anderzijds geen bruikbare informatie wordt weggegooid! Ook aan dit aspect wordt tegenwoordig zeer veel aandacht besteed.

- Analyse en initialisatie

Geselecteerde waarnemingen moeten zodanig worden gecombineerd en bewerkt dat een zo goed mogelijk 3-D beeld van de atmosfeer ontstaat. Deze zgn. analyse bestaat uit een zo nauwkeurig mogelijke schatting van de meteorologische grootheden wind, temperatuur, geopotentiële hoogte, dichtheid en vocht op een aantal vlakken en, op elk vlak, op een regelmatig rooster van punten (zie bijv. fig. 1). Het model stelt nog speciale eisen aan dit beeld van de atmosfeer. Aanpassing van de analyse aan de eisen van het model heet initialisatie. Het gehele proces waarin uit waarnemingen een voor het model acceptabel beeld van de atmosfeer ontstaat heet data-assimilatie. We zullen er een apart hoofdstuk aan wijden.

- Model

Dit is het onderwerp van het grootste deel van de cursus.

- Output

De voorspelling door het model levert een grote hoeveelheid informatie, die verder bewerkt moet worden voordat hij aan de meteoroloog kan worden aangeboden. Aanbieding kan gebeuren in de vorm van door de computer getekende weerkaarten, grafieken, plaatjes op een beeldscherm, waarden van

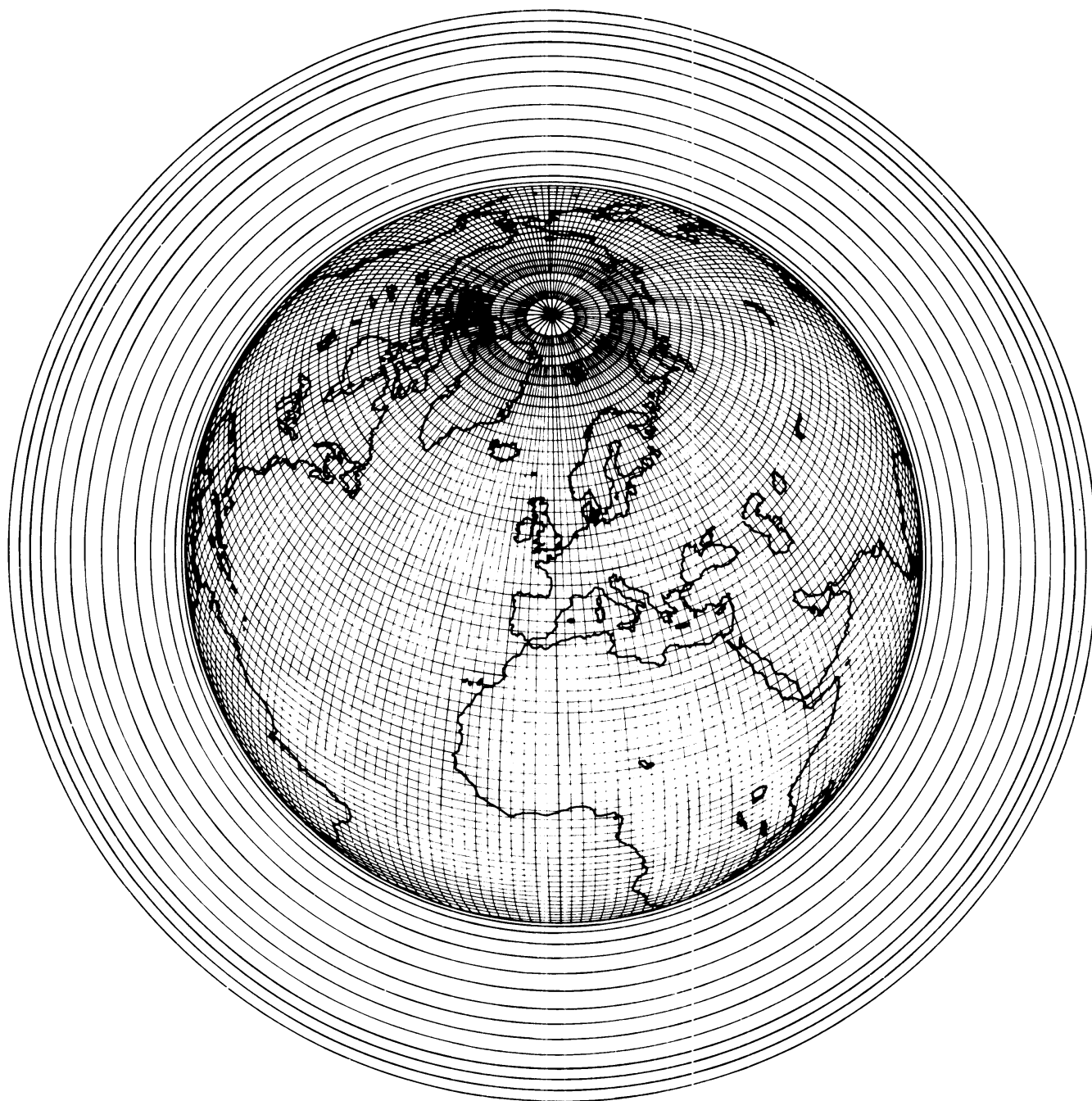


Fig. 1

Het netwerk van roosterpunten op de aardbol van het oude ECMWF-model. De concentrische cirkels om de aardbol laten de verdeling van de atmosfeer in 15 lagen zien. De onderste laag is zó dun dat hij op deze afbeelding niet te zien is. De bovenste laag ligt op ongeveer 25 km hoogte (~25 mbar). De verticale en horizontale schaal van deze afbeelding verschillen uiteraard sterk.

meteorologische grootheden in geselecteerde punten etc.

Hoewel dit onderwerp van groot belang is zullen we er in deze cursus niet op ingaan.

- Weersvoorspelling

We moeten ons goed realiseren dat NWP geen echte weersvoorspelling is (hoewel de naam dat zou suggereren) maar voorspelling van de atmosferische circulatie. Verdere voorspelling van circulatie- naar weersvoorspelling is dus nodig. Dit kan door de meteoroloog gebeuren op basis van de voorspelde circulatiepatronen, maar ook kan de computer weer ingeschakeld worden om langs statistische weg weersvoorspellingen te maken. Ook met dit onderwerp zullen we ons in deze cursus niet bezighouden.

5. Data; data-controle en -selectie

5.1 Data

De Wereld Meteorologische Organisatie (WMO) beheert een programma: de World Weather Watch dat internationaal het verrichten, verspreiden en verwerken van meteorologische waarnemingen regelt. Onder die WWW zijn er drie subprogramma's:

- GOS (Global Observing System)
- GTS (Global Telecommunication System)
- GDPS (Global Data Processing System)

die elk een van de drie bovengenoemde aspecten beheert. We zullen ons hieronder voornamelijk met het GOS bezighouden.

Het GOS tot nu toe

Het GOS is tot nu toe in hoge mate gebaseerd op synoptische meetsystemen, die nationaal beheerd worden.

- landstations: grond- en bovenlucht
- weerschepen : bijv. de NAOS overeenkomst voor de N. Atlantische Oceaan.
- AIREP's
- Vrijwillige scheepswaarnemingen (VOF) en selected ships.

Bovendien zijn er de laatste jaren satellietwaarnemingen beschikbaar gekomen. Voor ons doel vooral:

- SATEM's (TOVS): verticale temperatuursonderingen
- SATOB's: winden, berekend uit wolkenverplaatsingen.

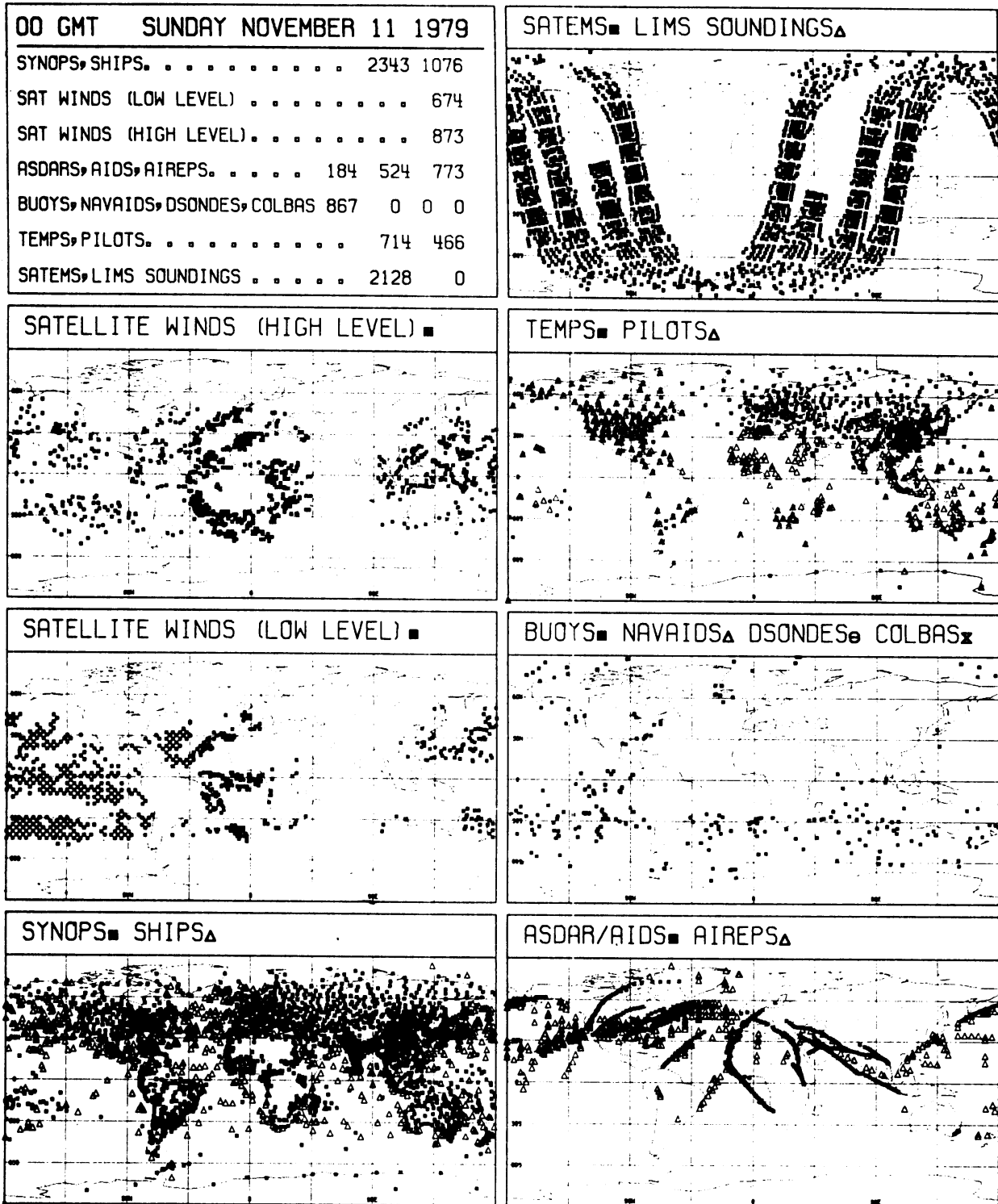


Fig. 2

Waarnemingen gedaan in een periode van ± 3 uur rond het tijdstip
11 november 1979, 00 GMT en ontvangen op het ECMWF

Zowel polar-orbiting als geostationaire satellieten zijn beschikbaar. Zwakke punten in het GOS zijn:

- grote problemen met landstations, vooral in de tropische zone
- grote hiaten in waarnemingsnetwerk boven de oceanen maar vooral over Z-halfgrond. Hierin is gelukkig door het beschikbaar komen van satellieten verbetering gekomen.
- afname van het aantal weerschepen omdat deze zo duur zijn.

Een stap op weg naar vernieuwing van het GOS was FGGE.

FGGE (First GARP Global Experiment)

Dit wereldwijde experiment werd in 1979 gehouden als onderdeel van GARP: Global Atmospheric Research Program, een door de WMO opgezet meerjarig onderzoeksprogramma. Eén van de doeleinden van FGGE was het uittesten van nieuwe waarnemingssystemen. De volgende systemen die niet tot de GOS behoorden (Special Obs. Systems) werden uitgetest:

- drijvende boeien
- constant level balloons: ballonnen die op een constant drukvlak drijven
- vliegtuig dropsondes: radiosondes aan parachutes
- ASDAR: geheel automatische vliegtuigwaarnemingen van wind en temperaturen.

Fig. 2 laat een verdeling van de gegevens zien op een tamelijk willekeurige dag tijdens FGGE.

Uit FGGE is naar voren gekomen dat vooral de drijvende boeien en het ASDAR systeem welkome aanvullingen op het waarnemingsnetwerk zouden kunnen zijn. Daarnaast is nog een nieuw systeem van radiosonde oplatingen vanuit containers op het dek van schepen ontwikkeld (ASAP). Dit systeem vereist geen gespecialiseerde bemanning en weinig onderhoud en is daardoor goedkoop in vergelijking met weerschepen.

Naar een nieuw GOS

Dit alles heeft er toe geleid dat we nu in een overgangsfase zitten naar een nieuw GOS (of ook: WWW2000). Deze vernieuwing is dus op gang gezet door:

- . resultaten FGGE
- . economische omstandigheden i.h.b. verdwijning weerschepen.

Karakteristieken van de vernieuwing van het GOS:

- . veelvuldige gebruik van satellieten voor waarneming én communicatie
- . nieuwe asynoptische waarnemingssystemen
- . verdergaande automatisering
- . nadruk op Composite Observing Systems: d.w.z. niet, zoals vroeger een groot aantal systemen zonder verband, maar een weloverwogen samenstel van op elkaar afgestemde waarnemingssystemen.
- . veel meer dan voorheen internationaal beheer.

COSNA

De noodzaak van composite obs. systems is voortgekomen uit:

- . opkomst van internationale waarnemingssystemen
- . toenemende afhankelijkheid van satellieten als communicatiesysteem
- . optimalisering kosten/batenverhouding.

Voorbeeld: COSNA (Composite Obs. System voor de North Atlantic).

Het is de bedoeling het GOS in stappen te vernieuwen en uit te testen. Zo'n test heet: OWSE: Operational WWW System Evaluation. De eerste is OWSE-NA, waarmee dus het nieuw COSNA zal worden uitgetest. Dit vindt plaats in 1987/88.

KNMI-bijdrage

KNMI heeft m.i.v. 1 januari 1986 zijn lidmaatschap van de NAOS opgezegd en het schip "Cumulus" voor het Symbolisch bedrag van £1,-- aan de Britten overgedragen. Er is op het KNMI nagegaan hoe het vrijkomende geld het best kan worden besteed aan internationale waarnemingssystemen op basis van een kostenschatting van de verschillende waarnemingssystemen. Hieruit bleek dat de verschillende systemen per dag ongeveer het volgende kosten:

- weerschip	f	26.000,--	
- selected ship	-	190,--	
- ASDAR	-	100,--	
- ASAP	-	4.350,--	
- drijvende boeien	-	330,--	
- Meteosat	-	250.000,--	(hiervan 3% voor Nederland: 7500,--/dag).

KNMI heeft gekozen voor deelname aan:

- Meteosat
- ASDAR: uitrusting in een aantal jaren van een aantal B747's van de KLM
- Drijvende boeien: zo'n 6 per jaar
- Selected ships

5.2 Data-controle en -selectie

Waarnemingen komen via het GTS bij ons binnen in gecodeerde vorm, waarna ze door de computer gedecodeerd worden.

Een eerste selectie vindt dus plaats op grond van:

- codeerfouten
- eventueel correctie indien mogelijk.

Daarna meteorologische controle:

- vergelijking met naburige waarnemingen
- vergelijking met gisveld: voorspelde toestand voor dat moment
- vergelijking met klimatologie
- consistentie-controle: kloppen dikte en temperatuurwaarnemingen bijv.
- eventuele correctie indien mogelijk.

Daarna eventueel toepassing van:

- correctie van systematische fouten:
- verwerping van sommige waarnemingssystemen op grond van eerder vastgestelde gebreken.

Deze beide correcties vinden dan plaats op basis van:

Data-monitoring

In het bijzonder op het ECMWF wordt systematisch elke waarneming vergeleken met het zgn. gisveld, een 6-uurs voorspelling van de toestand van de atmosfeer. Na een lange periode van vergelijken komen dan eventuele systematische fouten aan het licht. Zijn deze ernstig dan probeert men via WMO de verantwoordelijke instantie te benaderen om tot verbetering te komen. Blijkt dat onmogelijk, dan kan altijd nog voor de systematische fout gecorrigeerd worden. Soms ook blijken stations grote toevallige, niet-systematische fouten te maken, waarvoor uiteraard niet gecorrigeerd kan worden. Zulke stations komen op een zgn. blacklist, worden dus uitgesloten totdat blijkt dat ze hun leven gebeterd hebben.

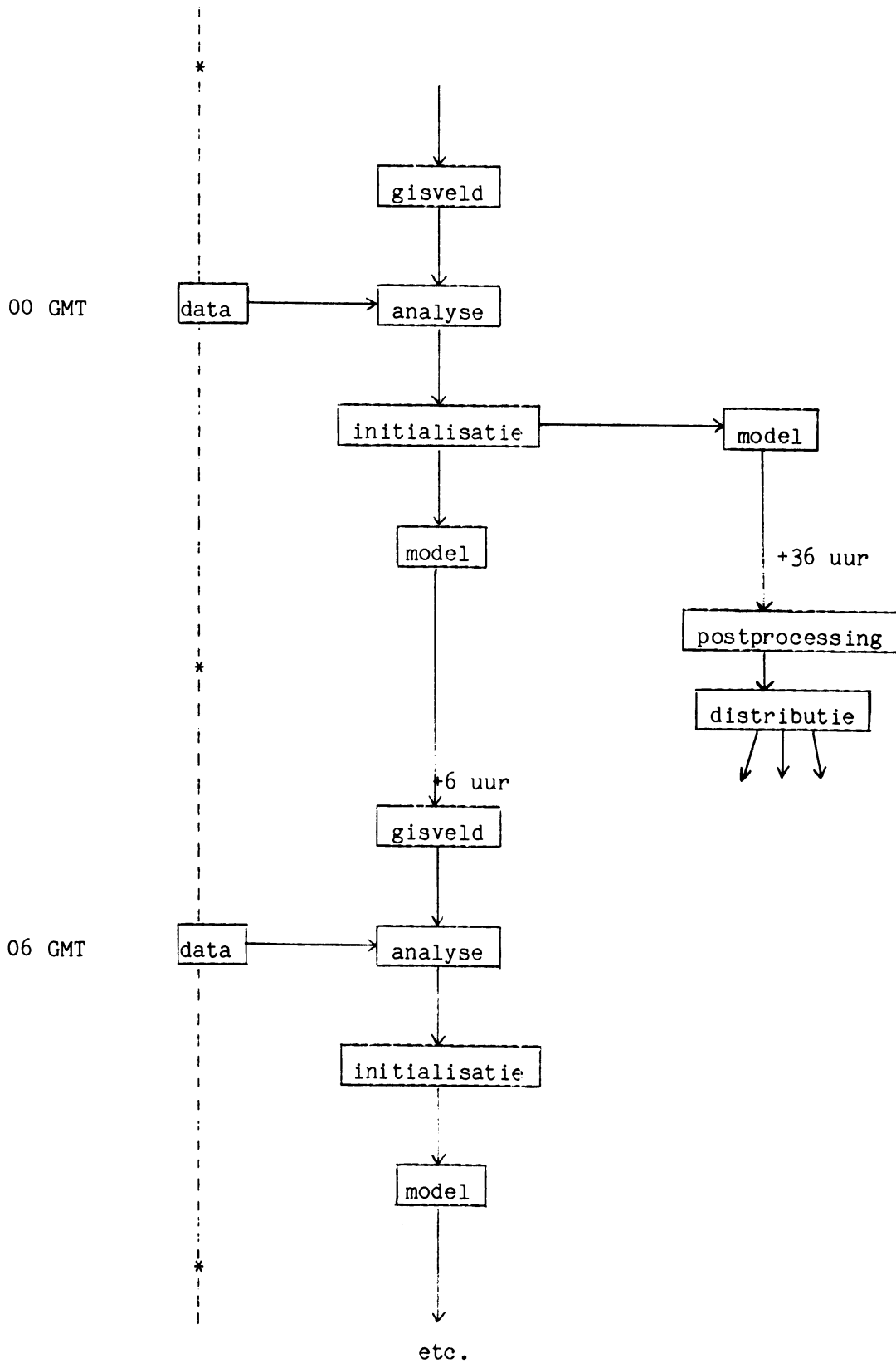


Fig. 3

Schematische voorstelling van een data assimilatie systeem

Uiteindelijk houden we nu een verzameling waarnemingen over, ontdaan van ernstige en systematische fouten, maar zeker niet foutenvrij. Elke waarneming is uiteraard nog behept met een willekeurige maar niet onaantoonbaar grote waarnemingsfout.

6. Data-assimilatie

Het systeem

Een analyse, een bepaling van de toestand van de atmosfeer op een bepaald tijdstip, is uiteraard gebaseerd op waarneming gedaan rond dat tijdstip. Maar er is meer: we beschikken ook nog over een voorspelling van de toestand van de atmosfeer op dat tijdstip: het zgn. gisveld. Een gisveld kan worden beschouwd als een extrapolatie m.b.v. het model van eerdere waarnemingen.

Naast waarnemingen en gisveld zelf moeten we ook nog de beschikking hebben over informatie betreffende de betrouwbaarheid, de foutenstructuur, van de waarnemingen en over de betrouwbaarheid van het gisveld. Dit is statistische informatie; d.w.z. we weten op basis van ervaring dat bepaalde waarnemingsystemen behept zijn met bepaalde willekeurige fouten en we kennen de statistische eigenschappen van die fouten. Hetzelfde geldt voor het gisveld.

Het automatische systeem waarmee al deze informatie wordt gecombineerd tot een analyse heet: data-assimilatie systeem. Er zijn verschillende systemen in omloop. Het meest toegepaste systeem (o.a. KNMI en ECMWF) staat in Fig. 3 schematisch aangegeven.

Essentieel is dat het proces zich steeds herhaalt met tussenpozen van 3 uur (KNMI) of 6 uur (ECMWF). Het wordt daarom aangeduid met het Engelse begrip intermittent data-assimilation. Gaan we uit van een tussenpoze van 6 uur, dan worden alle waarnemingen in een periode ± 3 uur rond het tijdstip van analyse samengenomen alsof ze op het analysetijdstip zijn gemaakt. Tijdsverschillen van max. 3 uur worden dus verwaarloosd. (Er bestaan ook systemen waarbij rekening gehouden wordt met het precieze tijdstip van waarneming: continuous data-assimilation.)

Analyse

Uitgangspunt voor de eigenlijke analyse is nu het gisveld. Uit de waarnemingen wordt vervolgens in elk roosterpunt en op elk vlak een

correctie van het gisveld berekend. Dit gebeurt met behulp van een statistische methode, gebruik makend van alle statistische informatie over fouten van waarnemingen en gisveld waarover we beschikken. Deze methode heet optimum interpolation vaak aangeduid als: O/I. Hij werkt zodanig dat in gebieden met weinig of met onbetrouwbare waarnemingen (bv. de Stille Oceaan) de analyse vrijwel overeenkomt met het gisveld. In gebieden met veel betrouwbare waarnemingen (West-Europa) wordt het gisveld sterk gecorrigeerd door de waarnemingen. Het spreekt voor zich dat de analysefout over West-Europa dan ook kleiner zal zijn dan over de Stille Oceaan. De O/I-techniek kan van deze gemiddelde fout ook een schatting geven.

Nu we beschikken over een geheel automatisch vervaardigde numerieke analyse, is het goed te wijzen op een aantal verschillen met de traditionele handanalyse. Dergelijk verschillen hoeven ons niet te verontrusten: numerieke analyses en handanalyses worden voor geheel verschillende doeleinden vervaardigd en de eigenschappen zijn daaraan aangepast.

- Handanalyses bevatten ook fronten, wolken en "weer", numerieke analyses niet
- Handanalyses worden gemaakt op een drukvlak of aan de grond. Zij zijn dan ook 2-D consistent, maar letten niet of nauwelijks op verticale consistentie; numerieke analyses daarentegen zijn 3-dimensionale analyses en zijn dan ook 3-D consistent en wel i.h.b.:
- Numerieke analyses zijn in hydrostatisch evenwicht
- In numerieke analyses zijn massa- en windveld goed in evenwicht d.w.z. druk en windveld voldoen redelijk goed aan de geostrofische relatie; in handanalyses is dat bij benadering wel het geval maar belangrijk is dat niet.

Initialisatie

Hoewel er bij de numerieke analyse veel aandacht geschonken wordt aan de balans tussen massa- en windveld, ontstaan er toch nog problemen als een dergelijke analyse aan het model wordt aangeboden. Het model reageert op de kleine resterende onbalans door sterke onrealistische variaties van de luchtdruk, het gevolg van door de onbalans opgewekte zwaartekrachtsgolven, te vergelijken met golven in een vijver na het inwerpen van een steen. We zien dit geïllustreerd in Fig. 4.

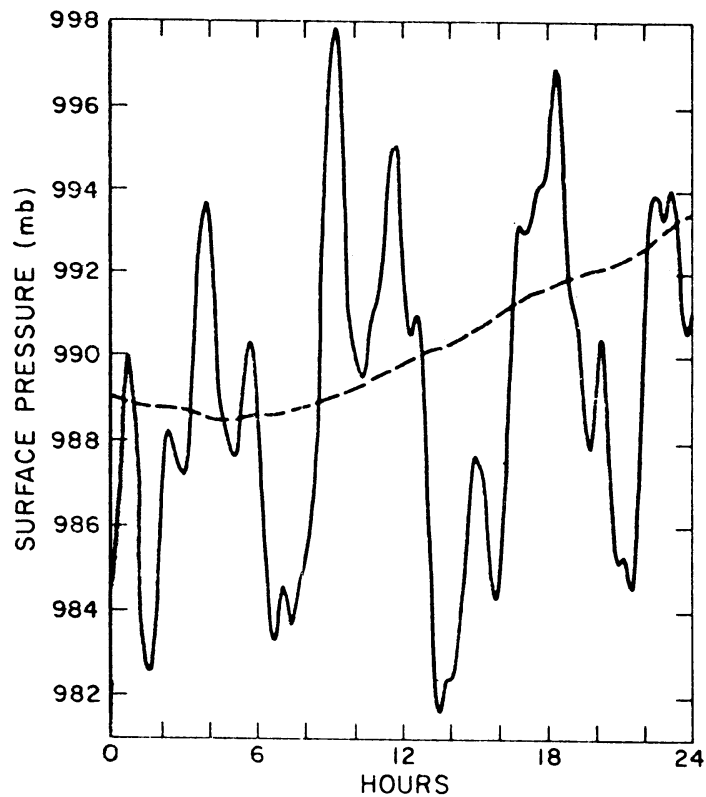


Fig. 4

Luchtdrukvariaties in een 24-uurs voorspelling.

Getrokken lijn: zonder initialisatie

Gestreepte lijn: na niet-lineaire normal-mode initialisatie

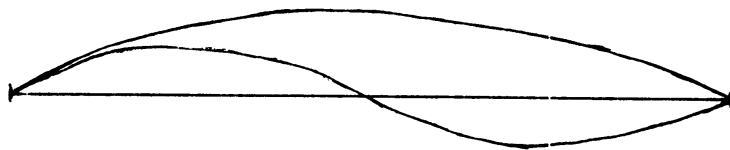
De sterke luchtdrukschommelingen worden door zwaartekrachtsgolven veroorzaakt

Om dit te voorkomen beschikken we in principe over twee oplossingen:

- We kunnen het model zó aanpassen dat er geen zwaartekrachtsgolven kunnen optreden: De zgn. gefilterde modellen. Dit is met succes toegepast maar heeft, zoals we later zullen zien, weer andere nadelen.
- We kunnen de analyse zodanig aanpassen dat het model geen reden heeft zwaartekrachtsgolven op te wekken. We noemen dit initialisatie.

De meest gebruikte initialisatiemethode is de zgn. normal mode initialisatie.

Om deze methode te begrijpen kijken we naar een vioolsnaar.



Een snaar, ingeklemd aan beide uiteinden kan op een groot aantal eenvoudige manieren trillen. Elke sinusvormige trilling met een halve golflengte die een geheel aantal keren op de snaar past is mogelijk. Dergelijke basistrillingen worden aangeduid als eigentrillingen of normal modes. Een willekeurige trilling van de snaar kan beschouwd worden als samengesteld uit een aantal normal modes.

Op dezelfde wijze kent ook de atmosfeer een aantal eigentoestanden of normal modes. Met behulp van wiskundige methodes kunnen deze voor een bepaald model berekend worden. Als we die atmosferische normal modes nader bekijken, dan blijkt dat een aantal daarvan de eigenschappen van Rossbygolven (ϕ_i^R) hebben en een aantal de eigenschappen van zwaartekrachtsgolven (ϕ_i^Z). Het verschil zit hierin dat zwaartekrachtsgolven een veel grotere divergentie hebben dan Rossbygolven.

Een willekeurige toestand van de atmosfeer kan weer geschreven worden als samenstelling van een aantal normal modes

$$\Phi(x,y,z,t) = \sum_i \{a_i(t) \phi_i^R(x,y,z) + b_i(t) \phi_i^Z(x,y,z)\}.$$

Ook een analyse kan dus geschreven worden als som van zwaartekrachtsmodes en Rossby modes. Deze zwaartekrachtsmodes zijn verantwoordelijk voor de sterke luchtdrukvariaties die ontstaan als we deze analyse aan het model aanbieden. We kunnen nu eenvoudig de zwaartekrachtsmodes uitschakelen door de coëfficiënten b_i gelijk aan nul te stellen. Dit wordt lineaire normal mode initialisatie genoemd. Door deze lineaire normal mode initialisatie, waarbij $b_i(0) = 0$ wordt gesteld, verandert de analyse dus enigermate, maar zó dat de zwaartekrachtsgolven eruit gefilterd zijn. Toch blijkt dat in de loop van de modelvoorspelling toch weer zwaartekrachtsgolven gaan optreden. De later ontwikkelde niet-lineaire normal mode initialisatie lost ook dit probleem op, zoals te zien is in Fig. 4.

Modelberekeningen

We beschikken nu over een geïnitieerde analyse, op basis waarvan het model de toekomstige toestand van de atmosfeer kan berekenen. Allereerst

wordt een korte-termijnverwachting berekend die zal dienen als gisveld voor de volgende fase van de data-assimilatie. Daarnaast wordt één of enkele malen per dag een verwachting gemaakt voor operationele toepassing. De verwachtingsperiode hangt af van de toepassing: ECMWF maakt één maal per dag een tiendaagse verwachting; met het LAM zal waarschijnlijk vier maal per dag een 36-uurs verwachting gemaakt worden. In de volgende hoofdstukken zullen ze veel dieper ingaan op de wis- en natuurkundige principes van dit soort modellen.

7. Modellen

7.1 Natuurkundige wetten

De modellen die we in deze syllabus bespreken zijn gebaseerd op de natuurkundige wetten die het gedrag van de atmosfeer beheersen. We zullen de natuurkundige achtergronden hier niet uitgebreid behandelen. Ik verwijs naar het boek van Holton en mijn Teleac-cursus "Wiskundige modellen en het Weer" voor meer informatie.

De wetten die het gedrag van de atmosfeer beheersen en met behulp waarvan we ons model kunnen construeren zijn:

- De wet van Newton (" $F = m \cdot a$ ") toegepast op een deeltje lucht; de corresponderende vergelijkingen worden ook wel impulsvergelijkingen of bewegingsvergelijkingen genoemd.
- De wet van Behoud van Energie, ook wel thermodynamisch vergelijking genoemd.
- De wet van Behoud van Massa, of ook wel continuïteitsvergelijking.
- De toestandsvergelijking, in ons geval de wet van Boyle-Gay Lussac voor een ideaal gas.

De wet van Newton of de bewegingsvergelijkingen

De wet van Newton zegt dat de versnelling van een deeltje lucht gelijk is aan de som van de krachten per eenheid van massa die er op inwerken. Deze wet geldt in een stilstaand of zich eenparig voortbewegend coördinatensysteem. We beschouwen ons deeltje lucht echter in een met de aarde meedraaiend systeem, waarin de bewegingsvergelijkingen er in vectorvorm als volgt uitzien:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \vec{g} + \vec{F}. \quad (7.1)$$

Hierin is \vec{v} : de snelheid van het luchtdeeltje; p : de luchtdruk ter plaatse van het deeltje en dus is ∇p : de gradiënt van de druk; $\vec{\Omega}$: de hoeksnelheid van de draaiende aarde; \vec{r} : de positie vector van het deeltje vanaf het centrum van de aarde; \vec{g} : de zwaartekracht; ρ : de dichtheid van de lucht; \vec{F} : andere krachten die op het deeltje werken, bijvoorbeeld wrijving.

De linkerzijde van de vergelijking stelt de versnelling van het deeltje lucht voor. De eerste term rechts is de drukgradiëntkracht per eenheid van massa, de kracht die het gevolg is van drukverschillen rond het deeltje. De tweede en derde term zijn het gevolg van de transformatie van de vergelijkingen naar een met de aarde meedraaiend coördinatiesysteem. De tweede term is de zogenaamde Coriolis-versnelling, de versnelling die men ervaart als men probeert te lopen in een tram die door de bocht gaat. De derde term is de middelpuntvliedende versnelling, die men voelt als men in dezelfde tram in de bocht stil blijft zitten. Deze is zó klein in het spel van krachten aan de rechterzijde, dat we hem kunnen verwaarlozen. De vierde term is de naar het aardoppervlak, dus langs de z-as, gerichte zwaartekrachtsversnelling, terwijl \vec{F} het gevolg van alle andere krachten, zoals wrijving, samenvat.

Behalve de middelpuntvliedende kracht, kunnen we nóg enkele termen in bovenstaande vergelijking verwaarlozen. Het blijkt nl. dat de zwaartekracht g en de verticale drukgradiëntkracht $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ elkaar steeds goed in evenwicht houden (de natuurkundige zegt: de atmosfeer is in hydrostatisch evenwicht). De verticale versnelling $\frac{dw}{dt}$ en de verticale component van de Corioliskracht zijn dus verwaarloosbaar klein. Als we dan vectorvergelijking (7.1) in zijn drie componenten uitschrijven krijgen we:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + F_x,$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + F_y,$$

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g.$$

Hierin is f een afkorting voor $2\Omega \sin\phi$ waarin ϕ de breedtegraad op aarde is waarop we aan het rekenen zijn.

In de praktijk zijn we niet zozeer geïnteresseerd in de snelheid en versnelling van een luchtdeeltje, als wel in de wind en de verandering daarvan op een bepaald punt op aarde. Wiskundig gezegd: we zijn niet zozeer geïnteresseerd in de totale afgeleide $\frac{du}{dt}$ als wel in de locale, partiële afgeleide $\frac{\partial u}{\partial t}$. Nu geldt in ons coördinatensysteem:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z},$$

en dus volgt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + F_x, \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + F_y, \quad (7.3)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g. \quad (7.4)$$

Wet van Behoud van Energie

De mathematische formulering van de overige natuurkundige wetten zullen we minder uitgebreid behandelen, maar volstaan met een verwijzing naar tekstboeken zoals Holton.

De wet van behoud van energie geeft aan dat warmte, toegevoegd aan een volume lucht, niet verloren gaat, maar ten dele ten goede komt aan de interne energie (dus de temperatuur T) van het volume, ten dele wordt gebruikt om arbeid te verrichten bij uitzetting van het volume. Ook deze wet kan worden geschreven als een partiële differentiaal-vergelijking:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{c_p \rho} \frac{dp}{dt} = \frac{Q}{c_p}, \quad (7.5)$$

waarin Q : de hoeveelheid toegevoerde warmte per seconde per kg lucht; c_p : soortelijke warmte bij constante druk.

Wet van behoud van massa

Deze wet geeft aan dat de dichtheid van een volume lucht moet toenemen als er per seconde meer lucht in dan uitstroomt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0. \quad (7.6)$$

De wet van Boyle-Gay Lussac

Dit is een toestandsvergelijking en zegt dus niet over het gedrag in de tijd:

$$p = RT\rho. \quad (7.7)$$

We zeggen dat dit een diagnostische vergelijking is, in tegenstelling tot de andere vergelijkingen die een tijdsafgeleide bevatten en daarom prognostisch worden genoemd.

We zijn er nu in geslaagd de natuurkundige wetten die het gedrag van een droge atmosfeer beschrijven samen te vatten in zes vergelijkingen (7.2) t/m (7.7) met zes onbekenden u , v , w , p , ρ , T . Er staan weliswaar nog drie ongespecificeerde grootheden in: F_x , F_y en Q , maar die zullen we moeten formuleren in termen van de zes onbekenden. Dit is een probleem apart waarop we nog terugkomen. Overigens zijn er vele varianten van dit stelsel vergelijkingen in de literatuur te vinden. Andere coördinatenstelsels, andere variabelen. Maar de verschillen zijn nooit wezenlijk. De vergelijkingen zijn steeds gebaseerd op de vier wetten van de klassieke hydrodynamica.

Dit stelsel van vijf gekoppelde, partiële, niet-lineaire differentiaalvergelijkingen en één diagnostische vergelijking, is in principe oplosbaar, mits de waarden van de onbekenden voor een zeker tijdstip $t = t_0$ bekend zijn. Analytische oplossingen zijn niet bekend en we zullen dus onze toevlucht moeten nemen tot een numerieke methode bij de oplossing van dit probleem.

7.2 Vereenvoudigingen

Het stelsel vergelijkingen (7.2) t/m (7.7), eventueel uitgebreid met een vergelijking die het gedrag van waterdamp beschrijft, staat bekend onder de naam "primitieve vergelijkingen". Hierin betekent "primitief" niet: simpel, maar: oorspronkelijk. In feite is dit het stelsel waarop Richardson zijn tanden al had stuk gebeten. Voor de trage computers uit de jaren vijftig is dit stelsel veel te moeilijk. Er zijn dan ook vereenvoudigingen voorgesteld die we in twee klassen kunnen onderscheiden:

- in de eerste plaats kan er onderscheid gemaakt worden tussen barotrope en barokliene modellen.

- . In barotrope modellen nemen we aan dat isothermen en isobaren evenwijdig lopen. Dan volgt ook dat de wind constant is in de hoogte en dat de eigenschappen van de atmosfeer onafhankelijk zijn van de hoogte. De atmosfeer kan dan worden beschouwd als een homogene laag, hetgeen de berekening sterk vereenvoudigt. Nadeel is uiteraard dat barotrope modellen geen barokliene ontwikkeling kunnen beschrijven.
 - . In barokliene modellen wordt ook de verticale opbouw van de atmosfeer beschreven.
- In de tweede plaats kan onderscheid gemaakt worden tussen modellen gebaseerd op primitieve en gefilterde vergelijkingen.
- . De primitieve vergelijkingen (ook wel aangeduid als PE) hebben we hierboven gezien. Deze beschrijven niet alleen meteorologische verschijnselen in de atmosfeer maar ze zijn zo algemeen opgesteld dat ze ook andere verschijnselen zoals zwaartekrachtsgolven beschrijven. Dit zijn golfbewegingen in de atmosfeer vergelijkbaar met watergolven. Zoals we later zullen zien kunnen deze de berekeningen verstoren, waardoor extreem korte tijdstappen nodig zijn. Dit is als volgt opgelost:
 - . De gefilterde vergelijking verkrijgt men door gebruik te maken van de quasi-geostrofische vergelijkingen. Omdat in deze vergelijkingen de balans tussen massa- en windveld wordt voorgeschreven kunnen geen zwaartekrachtsgolven ontstaan. Ze zijn er uit gefilterd. Hierdoor kunnen grotere tijdstappen genomen worden, maar worden anderzijds wel erg ingrijpende benaderingen gemaakt. Zo zijn ze in de tropen onbruikbaar omdat daar de geostrofische balans niet geldt. Bovendien zijn ze wiskundig lastiger op te lossen waardoor een deel van de winst weer verloren gaat.

Deze 2 maal twee-voudige indeling geeft vier combinaties:

	barotroop	baroklien
gefilterd	quasi-geostrofisch barotroop	quasi-geostrofisch baroklien
primitief	ondiep-water	PE-baroklien.

Van deze vier typen modellen zijn alleen de ondiep-watermodellen nooit operationeel toegepast, hoewel ze uitgebreid theoretisch zijn onderzocht.

Tegenwoordig worden de PE-barokliene modellen het meest toegepast: zowel het LAM als het ECMWF model behoren tot dit type. Voor eenvoudige toepassingen worden ook nog wel quasi-geostrofische barokliene modellen toegepast. VIMOLA behoort tot dit type.

Wij zullen ons in deze syllabus verder uitsluitend met PE-barokliene modellen bezighouden. Voor een inleiding tot de quasi-geostrofische modellen verwijs ik naar paragraaf 8.4 en 8.5 van Holton.

In de volgende hoofdstukken zullen we ons bezighouden met de numerieke aspecten van de PE-modellen, d.w.z. we gaan ons bezighouden met de vraag hoe we vergelijkingen (7.2) t/m (7.7) oplossen op een computer en welke problemen zich daarbij voordoen.

8. De lineaire advectionvergelijking; numerieke oplossing

8.1 Inleiding

Vergelijkingen (7.2), (7.3) en (7.5) zijn zgn. prognostische of voorspellende vergelijkingen. Deze hebben de vorm:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + \dots = 0.$$

We zullen deze vergelijkingen en i.h.b. de manier waarop we ze op de computer oplossen bestuderen aan de hand van een eenvoudige vorm:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

De vergelijking heet advectionvergelijking omdat hij de verandering van F beschrijft ten gevolge van de advection van F door de wind u. Stel F is de temperatuur T dan luidt de vergelijking:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

d.w.z. T in een bepaald punt verandert ($\frac{\partial T}{\partial t}$) t.g.v. advection van een andere temperatuur ($\frac{\partial T}{\partial x}$) door het windveld u. Het windveld u is ook een functie van ruimtecoördinaat x: $u = u(x)$. We zullen echter een aantal aspecten bestuderen aan de hand van de zgn. lineaire advectionvergelijking:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

waarin u constant is: $u = u_0$.

Hoe berekenen wij nu heel algemeen de grootte F op tijdstip t : $F(t)$ als F op het tijdstip 0 bekend is. We kunnen $\frac{\partial F}{\partial t}$ benaderen als $\frac{\Delta F}{\Delta t}$ waarin ΔF een kleine verandering van F voorstelt in een tijdstapje Δt . We kunnen dan de advectionvergelijking schrijven als

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = -u \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{of ook:} \quad \Delta F = -u \frac{\partial F}{\partial x} \Delta t$$

Als we dus u en $\frac{\partial F}{\partial x}$ op een bepaald tijdstip t kennen, kunnen we de rechterzijde van deze vergelijkingen uitrekenen en weten dan de verandering ΔF die F in de komende tijdstap Δt zal ondergaan. We hebben dus een voorspelling van F gedaan over een tijdje Δt :

$$F(t) = F_0 - u \frac{\partial F}{\partial x} \Delta t.$$

Dit is de basis voor de oplossing van de prognostische vergelijkingen. Het probleem hierbij is om de grootte $\frac{\partial F}{\partial x}$ met de computer te berekenen als $F(x)$ bekend is.

We zullen dit bestuderen aan de hand van de lineaire advectionvergelijking en zullen daarbij twee methodes bekijken:

- roosterpuntsmethode
- spectrale methode

8.2 De roosterpuntsmethode

De lineaire advectionvergelijking luidt:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u_0 \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{8.1}$$

Gegeven een waarde $F(x, t=0)$ voor alle x op tijdstip $t=0$, zoeken we een functie $F(x, t)$ die voor alle t aan deze vergelijking voldoet. Of in forecasterstermen: als we F nu kennen ("analyse"), willen we hem in de toekomst kunnen voorspellen. We moeten dus de verandering in de tijd $\frac{\partial F}{\partial t}$ bepalen en kunnen die berekenen uit:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -u_0 \frac{\partial F}{\partial x}.$$

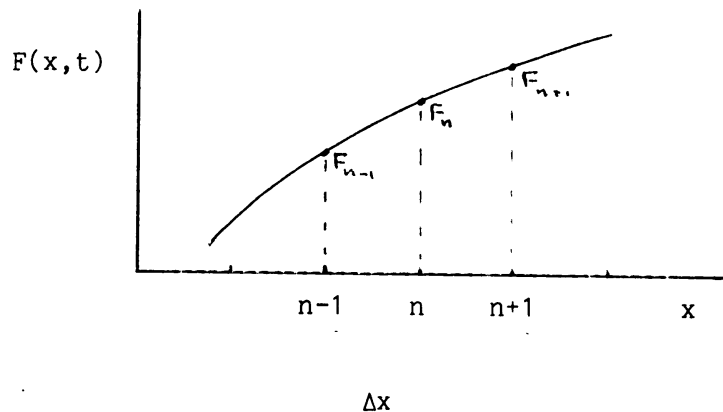
Het probleem is nu om numeriek de afgeleide $\frac{\partial F}{\partial x}$ te berekenen uit $F(x,t)$. Gelukkig heeft vgl. (8.1) een analytische golfvormige oplossing:

$$F(x,t) = F_0 \cos[k(x-u_0 t)] \quad (8.2)$$

Ga na!

Dit is een golf die zich met snelheid u_0 in x-richting voortplant. We kunnen nu numerieke oplossingen van (8.1) met (8.2) vergelijken en zo bepalen hoe goed ze zijn.

We zullen twee methoden bespreken om $\frac{\partial F}{\partial x}$ te berekenen: roosterpunt en spectraal en beginnen met de eerste.



We verdelen de x-as in punten die afstand Δx uit elkaar liggen en tellen deze punten ("roosterpunten") als $n-1$, n , $n+1$, etc. We benaderen nu de afgeleide $(\frac{\partial F}{\partial x})_n$ in het punt n als:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_n \approx \frac{F_{n+1} - F_n}{\Delta x} \quad (\text{eenzijdige differentie})$$

of óók

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_n \approx \frac{F_{n+1} - F_{n-1}}{2\Delta x} \quad (\text{centrale differentie})$$

waarin F_n staat voor de waarde van $F(x,t)$ in punt n . Dit zijn benaderingen die voor $\Delta x \rightarrow 0$ exact worden (ga na!).

Nauwkeurigheid

Hoe nauwkeurig zijn deze benaderingen? Om dat te onderzoeken, ontwikkelen we $F(x,t)$ in een Taylor-reeks rond punt n :

$$F_{n+1} = F_n + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_n \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_n \Delta x^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)_n \Delta x^3 + \dots \quad (8.3)$$

$$F_{n-1} = F_n - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_n \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_n \Delta x^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)_n \Delta x^3 + \dots \quad (8.4)$$

Uit (8.3) volgt:

$$\frac{F_{n+1} - F_n}{\Delta x} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_n + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_n \Delta x + \dots$$

De tweede term rechts is de zgn. afkapfout ϵ en we zeggen nu dat voor een eenzijdige differentie de afkapfout orde Δx is, ofwel "eerste orde":

$$\epsilon = O(\Delta x)$$

Vgl. (8.4) aftrekken van (8.3) en delen door $2\Delta x$ levert:

$$\frac{F_{n+1} - F_{n-1}}{2\Delta x} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_n + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)_n \Delta x^2 + \dots$$

dus centrale differentie is "tweede orde" nauwkeurig:

$$\epsilon = O(\Delta x^2)$$

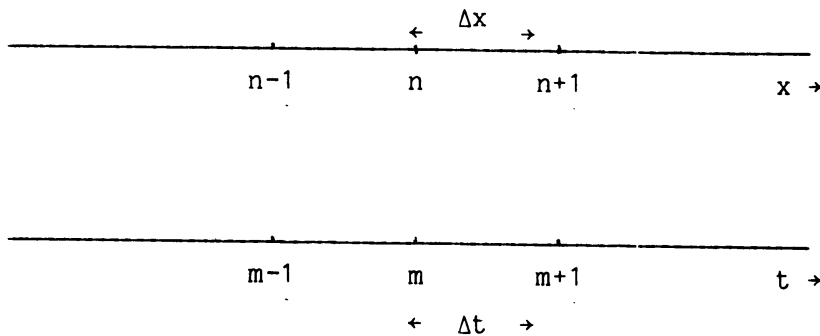
Dus voor Δx klein genoeg wint de nauwkeurigheid van de centrale differentie het altijd van die van de eenzijdige differentie. Dat is intuïtief ook wel aan te voelen: bij een centrale differentie gebruik je informatie van beiden zijden van punt n . Dat moet haast wel nauwkeurig zijn!

Vraagstuk

Ga na dat $F(x,t) = (x - U_0 t)^2$ óók een oplossing van (8.1) is.

Hoe nauwkeurig kan ik in dit geval de afgeleide $(\frac{\partial F}{\partial x})$ met behulp van een centrale differentie bepalen?

We gaan nu zowel ruimte- als tijdsafgeleide in eindige differentievorm schrijven en verdelen daartoe x- en t-as in eindige stukjes Δx en Δt



Notatie:

$$F(x,t) \equiv F(n\Delta x, m\Delta t) \equiv F_{m,n}$$

Met centrale differenties wordt vgl. (8.1) dan:

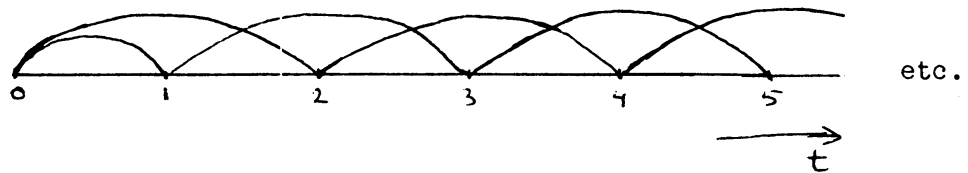
$$\frac{F_{m+1,n} - F_{m-1,n}}{2\Delta t} + u_0 \frac{F_{m,n+1} - F_{m,n-1}}{2\Delta x} = 0 \quad (8.5)$$

$$\text{of: } F_{m+1,n} = F_{m-1,n} - u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{m,n+1} - F_{m,n-1})$$

m.a.w. kennen we voor tijdstippen $m-1$ en m de waarden van F voor alle punten n dan kunnen we voor tijdstip $m+1$ de waarden van F voor alle punten n uitrekenen (= voorspellen). Dit schema heet: leap-frog (kickersprong). Voor de eerste tijdstap werkt dit niet want dan kennen we alleen de waarden van F op tijdstip 0: $F(n\Delta x, 0)$, de "analyse". We moeten dan eerst een voorwaardse sprong maken:

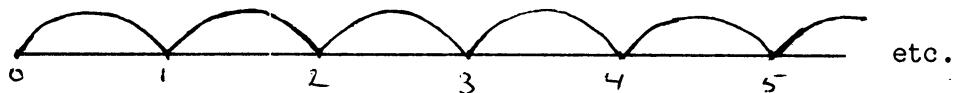
$$F_{1,n} = F_{0,n} - u_0 \cdot \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{0,n+1} - F_{0,n-1})$$

Het integratieschema is dan:



Een integratieschema dat aléén bestaat uit voorwaardse sprongen heet: Euler schema:

$$F_{m+1,n} = F_{m,n} - u_0 \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{m,n+1} - F_{m,n-1}) \quad (8.6)$$



Bekijken we nu het leap-frog schema.

Veronderstel dat vgl. (8.5) ook een golfoplossing heeft, die zich met snelheid c voortplant:

$$F_{m,n} = F_0 \cos[k(n\Delta x - cm\Delta t)].$$

Invullen hiervan in (8.5) levert na het nodige rekenwerk:

$$c = \frac{1}{k\Delta t} \operatorname{tg} \sin[u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)] \quad (8.7)$$

Huiswerk: ga na!

Dus $c \neq u_0$: Er bestaat weliswaar een golfoplossing maar de snelheid van de golf is door de numerieke berekening aangetast.

Gelukkig geldt wel: (ga na!)

$$c \rightarrow u_0 \text{ als } \Delta t \rightarrow 0.$$

Ook zien we dat de berekende voortplantingssnelheid c afhankelijk is van k en dus van de golflengte $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

Dit verschijnsel heet lineaire dispersie. In een situatie waarin vele golflengten een rol spelen treedt vervorming op omdat de snelheden van iedere golfcomponent anders is.

Aan vgl. (8.7) zien we nog iets: wil c reëel zijn dan moet

$$u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x) \leq 1$$

en dus $u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$

of wel $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{u_0}$.

Als de tijdstap Δt groter wordt dan $\frac{\Delta x}{u_0}$, treedt er instabiliteit op en gaat de berekening mis. Naar de wiskundigen Courant, Friedrichs en Lewy wordt dit het CFL-criteria voor lineaire instabiliteit genoemd. We komen hier nog op terug.

In tabel 1 hebben we een numeriek voorbeeld uitgewerkt.

Voor: $u_0 = 10 \text{ m/s}$

$$\Delta x = 300 \text{ km} = 3 \cdot 10^5 \text{ m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 3.1416 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1} \quad (\lambda = 2000 \text{ km})$$

is voor verschillende tijdstaplengte Δt de numeriek berekende voortplantingssnelheid c berekend. De eerste kolom geeft c voor de leap-frog methode m.b.v. formule (8.7). We zien dat de voortplantingssnelheid beduidend kleiner wordt berekend ($\approx 8.6 \text{ m/s}$) dan hij is (10 m/s). Deze afwijking is het gevolg van afbreekfouten zowel in de tijds- als in de ruimtelijke afgeleide.

TABEL 1:

Numerieke voortplantingssnelheid van een golf in m/s voor verschillende ruimtelijke differentieschema's en verschillende tijdstaplengten.

Tijdsintegratie met leap-frog schema.

Δt (sec.)	$c_{\text{roosterpunt}}$	$c_{\text{spectraal expl.}}$	$c_{\text{spectraal impl.}}$
0	8.58	10.	10
1800	8.59	10.01	9.99
3600	8.60	10.02	9.96
5400	8.62	10.05	9.91
7200	8.64	10.09	9.84
10800	8.71	10.20	9.64

8.3 Spectrale methode

Neem een lijnsegment $[0, L]$



en bekijk een zich fatsoenlijk gedragende (continue, differentieerbaar) functie $F(x)$ op dit interval. We eisen verder dat $F(0) = F(L)$ (cyclische randvoorwaarde). Denk bijv. aan de temperatuur $T(x)$ langs een breedtegraad. Zo'n functie kan als volgt in harmonische functies ("golfjes") ontwikkeld worden (Fourier analyse)

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{ik_n x} \quad \text{met} \quad k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{2\pi n}{L} \quad (8.8)$$

Dus we schrijven $F(x)$ als een oneindige som van golfjes met steeds kleinere golflengte λ . Op het interval $[0, L]$ moet steeds een heel aantal golfjes passen: $\lambda_n = \frac{L}{n}$.

F_n is een complex getal. Omdat $F(x)$ reëel is, moet $F_{-n} = F_n^*$ waarbij het sterretje de complex-toegevoegde aanduidt. Denk hierover na! (Voor een korte behandeling van complexe getallen: zie Appendix 1)

Als F ook nog een functie van de tijd t is kunnen we schrijven:

$$F(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n(t) e^{ik_n x}$$

Omdat de computer geen oneindig aantal getallen aan kan (wij ook niet trouwens!) moet de oneindige som worden afgekapt:

$$F(x,t) = \sum_{n=-N}^{+N} F_n(t) e^{ik_n x} \quad (8.9)$$

en we verwaarlozen dus golfjes met golflengte $< \lambda_N = \frac{L}{N}$. Als $F(x,t)$ maar niet een te woeste functie is, gaat dat wel.

Voordeel: we hebben nu een analytische uitdrukking voor $F(x,t)$ en kunnen dus $\frac{\partial F}{\partial x}$ exact berekenen:

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = \sum_{n=-N}^{+N} ik_n F_n(t) e^{ik_n x} \quad (8.10)$$

Bij de numerieke oplossing van de lineaire advection-vergelijking houden we dus alleen de tijdsafbreekfout over. Invullen van (8.9) en (8.10) in de lineaire advectionvergelijking levert:

$$\sum_{n=-N}^{+N} \frac{dF_n(t)}{dt} = -i U_0 \sum_{n=-N}^{+N} k_n F_n(t)$$

$$\text{of} \quad \sum_{n=-N}^{+N} \left[\frac{dF_n(t)}{dt} + i U_0 k_n F_n(t) \right] = 0$$

$$\text{of} \quad \frac{dF_n(t)}{dt} + i U_0 k_n F_n(t) = 0 \quad (8.11)$$

want alle vergelijkingen voor F_n zijn onafhankelijk van elkaar. Dit is een essentiële eigenschap van een lineair systeem: voor ieder golfje met amplitude F_n en golfgetal k_n krijgen we een aparte vergelijking. Verschillende golfjes hebben geen interactie met elkaar.

We moeten nu vgl. (8.11) numeriek oplossen en voeren eindige differenties in de tijd in. We veranderen wel onze notatie dus let op! We laten in vgl. (8.11) de n weg want de vergelijking is voor iedere n toch hetzelfde:

$$\frac{dF(t)}{dt} = -i u_0 k F(t) \quad (8.12)$$

en bedenk dat nog steeds $F(t)$ de amplitude van de golf met golfgetal k voorstelt.

We duiden de tijdstap weer met m aan en krijgen met de leap-frog methode:

$$\frac{F_{m+1} - F_{m-1}}{2\Delta t} = -i u_0 k F_m \quad (8.13)$$

Vgl. (8.12) heeft een analytische oplossing:

$$F(t) = e^{-i u_0 k t}.$$

Laten we nu weer veronderstellen dat de eindige differentie-vergelijking (8.13) óók zo'n oplossing heeft:

$$F_n = e^{-i c k n \Delta t}. \quad (8.14)$$

Invullen in (8.13) levert na enig rekenwerk (ga na!)

$$c = \frac{1}{k \Delta t} \operatorname{bg} \sin(u_0 k \Delta t). \quad (8.15)$$

Ook hier vinden we dus een numerieke golfoplossing die zich voortplant met snelheid c , afwijkend van de snelheid u_0 van de werkelijke oplossing. De derde kolom van tabel I laat deze c zien voor hetzelfde voorbeeld als boven. Het is duidelijk dat de spectrale methode veel nauwkeuriger is. Dit komt omdat we alleen met tijdsafbreekfouten te maken hebben en niet met ruimtelijke afbreekfouten. We zien verder dat de spectrale methode de snelheid iets overschat in tegenstelling tot de roosterpuntsmethode.

We zien aan vergelijking (8.15) dat ook hier een CFL-kriterium voor lineaire stabiliteit geldt:

$$\Delta t \leq \frac{1}{k u_0} = \frac{\lambda}{2\pi u_0}. \quad (8.16)$$

Ga na of je een verband kunt bedenken tussen het spectrale en het roosterpunts CFL-kriterium.

Als we op $t = 0$ beginnen met $F(x,0)$ die is samengesteld uit een hele reeks golfjes dan wordt de lineaire stabiliteit bepaald door het golfje met het grootste golfgetal k_N ofwel de kleinste golflengte λ_N .

$$\Delta t \leq \frac{\lambda_N}{2\pi u_0}. \quad (8.17)$$

Bekijken we dit lineaire stabiliteitskriterium wat nauwkeuriger:

- als er zwaartekrachtsgolven zijn toegestaan dan is de hoogste golfsnelheid $U \approx 300$ m/s. Stel dat we daarbij nog een jetstream hebben van 100 m/s, dan zijn de hoogste snelheden die optreden: $u = 400$ m/s. Veronderstellen we verder dat onze kleinste golflengte $\lambda_N = 600$ km dan volgt:

$$\Delta t \leq 240 \text{ sec} = 4 \text{ min.}$$

- als er geen zwaartekrachtsgolven zijn toegestaan dan zijn onze snelste golven Rossby golven met $U \approx 15$ m/sec. Daarbij gevoegd de jetstream van 100 m/s geeft $u_0 = 115$ m/s en dus:

$$\Delta t \leq 830 \text{ sec} \approx 13 \text{ min.}$$

Als we dus de zwaartekrachtsgolven waarin we toch niet zijn geïnteresseerd, kwijt kunnen raken kunnen we 3x zo lange tijdstappen nemen! Dit is de reden voor de ontwikkeling van gefilterde modellen, modellen dus waar de zwaartekrachtsgolven uitgefilterd zijn. Deze gefilterde modellen hebben, zoals we later zullen zien, een hoop nadelen en daarom is er gezocht naar een andere numerieke methode om het lineaire instabiliteitsprobleem te omzeilen. Deze zullen we in de volgende paragraaf bespreken.

8.4 Impliciete methode

We bespreken deze aan de hand van de spectrale methode. Het kan ook aan de hand van de roosterpuntmethode, maar is dan iets ingewikkelder. Gaan we uit van de spectrale vergelijking

$$\frac{dF}{dt} = -i u_0 k F \quad (8.18)$$

We benaderen deze nu numeriek als volgt:

$$\frac{F_{m+1} - F_{m-1}}{2\Delta t} = -i u_0 k \frac{F_{m+1} + F_{m-1}}{2} \quad (8.19)$$

Vergelijking met (8.13) laat zien dat we in het rechterlid niet de waarde van F op tijdstap m nemen: F_m , maar het gemiddelde van de waarden van F op tijdstappen $m+1$ en $m-1$:

$$F = \frac{F_{m+1} + F_{m-1}}{2}.$$

Deze benadering heet impliciet omdat we rechts al gebruik maken van F_{m+1} , de waarde van F die we juist willen berekenen. In tegenstelling tot impliciet noemen we de eerder besproken methode expliciet.

De impliciete methode is niets anders dan een truc om van het CFL-criterium af te komen.

Stellen we weer:

$$F_m = e^{-i c k m \Delta t}$$

dan volgt (ga na!):

$$c = \frac{1}{k\Delta t} \text{ bgtg}(u_0 k\Delta t). \quad (8.20)$$

Het argument van bgsin moet tussen $+1$ en -1 liggen maar het argument van bgtg mag elke reële waarde hebben. Er is dus geen lineair stabiliteitsprobleem meer!

Voor hetzelfde voorbeeld als eerder gebruikt heb ik c volgens de impliciete methode berekend. De vierde kolom van tabel I laat dit zien voor verschillende tijdstaplenkten. Daaruit is te zien dat de impliciete spectrale methode iets minder nauwkeurig is dan de expliciete spectrale methode en bovendien dat de impliciete methode de voorplantingssnelheid iets onderschat.

In de literatuur kun je ook het begrip semi-impliciete methode tegenkomen. Dat betekent het volgende: in de volledige bewegingsvergelijkingen zijn sommige termen verantwoordelijk voor de snelle zwaartekrachtsgolven, andere termen voor de trage Rossby golven. Bij de semi-impliciete methode worden de termen die voor de zwaartekrachtsgolven zorgen impliciet behandeld, de overige expliciet.

9. De niet-lineaire advectionvergelijking

9.1 Inleiding

We bekijken in dit hoofdstuk enkele aspecten van de niet-lineaire advectionvergelijking:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

en wel i.h.b. voor $F = u$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

waarin de advectionsterm niet-lineair is.

M.b.v. de roosterpuntmethode is ook deze vgl. eenvoudig op te lossen (zie Teleaccursus p. 321):

$$u_{m+1,n} = u_{m-1,n} - u_{m,n} \cdot (u_{m,n+1} - u_{m,n-1}) \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (9.1)$$

Spectraal is het ook mogelijk, zij het iets moeilijker. We zullen dat niet behandelen.

We hebben in het vorige hoofdstuk gezien hoe we een numeriek probleem als lineaire instabiliteit onder de knie kunnen krijgen. Integreren we nu met deze kennis gewapend, de niet-lineaire a.v. met een leap-frog schema en de roosterpuntmethode, dan blijkt het toch nog mis te gaan. Na enige tijd wordt de oplossing volkomen onzinnig en instabiel. Dit verschijnsel heet "niet-lineaire instabiliteit". Om te begrijpen hoe dat komt bespreken we eerst het verschijnsel "aliasing".

9.2 Aliasing

Stel u is golfvormig langs de x -as:

$$u = u_0 \cdot e^{ikx},$$

$$\text{dan volgt } u \frac{\partial u}{\partial x} = ik u_0^2 e^{2ikx}.$$

Dus de niet-lineaire term produceert een golf met golfgetal $2k$ uit een golf met golfgetal k . Dit is een algemene karaktertrek van niet-lineaire systemen: nieuwe golfgetallen ontstaan, verschillende golfgetallen hebben interactie met elkaar.

Bij de numerieke oplossing van de a.v. is er een grootste golfgetal k_{\max} gedefinieerd dat samenhangt met de roosterpuntsafstand Δx :

$$k_{\max} = \frac{2\pi}{2\Delta x} = \frac{2\pi}{\lambda_{\min}}.$$

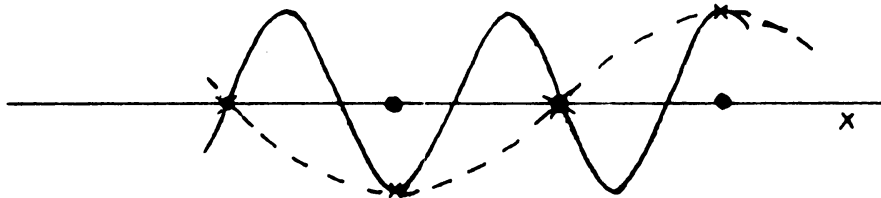
Stel dat in bovenstaand voorbeeld $2k > k_{\max}$ zodat de nieuw gevormde golf numeriek niet beschreven kan worden. Wat gebeurt er dan?

In onderstaande tekening is een golf getekend met

$$k = \frac{3\pi}{2\Delta x} > k_{\max} \text{ ofwel } \lambda = \frac{4}{3} \Delta x < \lambda_{\min}.$$

Het netwerk van roosterpunten neemt deze golf waar als een golf met veel grotere golflengte, gestreepst aangegeven, en wel met

$$\lambda = 4\Delta x \text{ ofwel } k = \frac{\pi}{2\Delta x}.$$



M.a.w. golven met golfgetal $> k_{\max}$ worden door het roosterpuntsysteem geïnterpreteerd als een golf met golfgetal $< k_{\max}$. Dit verschijnsel heet "aliasing".

9.3 Niet-lineaire instabiliteit

Hoe kan het nou dat aliasing niet-lineaire instabiliteit veroorzaakt?

Daartoe moeten we naar het begrip "energie-spectrum" kijken.

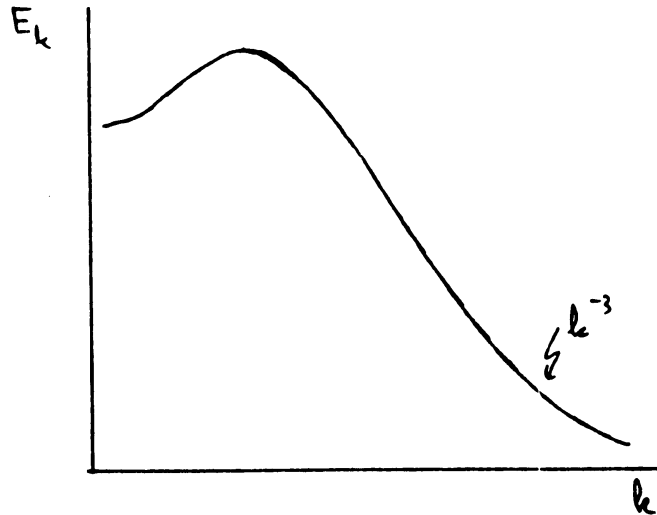
Stel we hebben op het tijdstip 0 een functie $u(x,0)$ die is samengesteld uit een heleboel golfjes:

$$u(x,0) = \sum_{n=-N}^{+N} u_n e^{ik_n x}$$

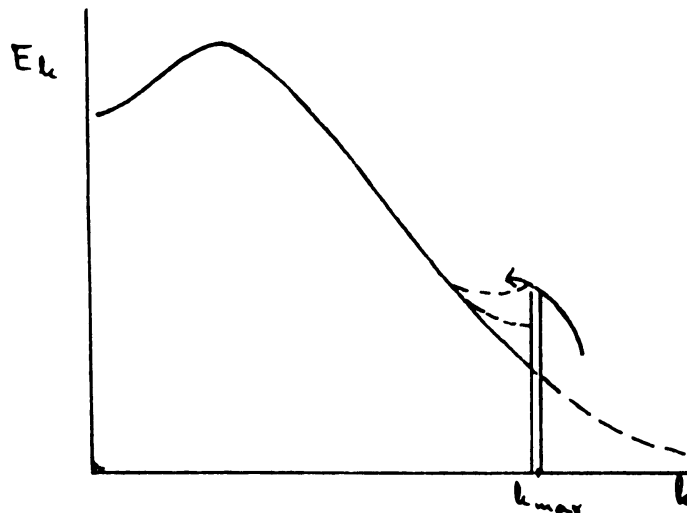
In ieder golfje zit een hoeveelheid kinetische energie

$$E_k = \frac{1}{2} |u_k|^2 \quad \text{en de totale energie is } E_{\text{kin}} = \sum_k \frac{1}{2} |u_k|^2.$$

Als we E_k als functie van k uitzetten dan krijgen we het energiespectrum.



In de werkelijke atmosfeer heeft het spectrum ongeveer de vorm als in bovenstaande figuur met voor hogere golfgetallen een verloop $-k^{-3}$. In een model moeten we dit spectrum noodzakelijkerwijs afkappen bij $k = k_{\text{max}}$.



Als nu in de volgende tijdstappen golven met $k > k_{\text{max}}$ ontstaan zullen deze door aliasing verschijnen als golven met $k < k_{\text{max}}$ en daar dus de energie wat doen toenemen (gestreepte lijnen links van k_{max}). Dit proces zal steeds verder gaan en tenslotte lijkt het numerieke energiespectrum helemaal niet meer op het werkelijke: niet-lineaire instabiliteit. We zullen dit dus merken door aanvankelijke toename van de energie in de kleinste golfjes vlakbij k_{max} terwijl we ook de totale energie steeds verder zullen zien toenemen. De totale kinetische energie E_{kin} is immers het oppervlak onder de kromme E_k tussen $k = 0$ en $k = k_{\text{max}}$. Kennelijk heeft het optreden van niet-lineaire instabiliteit iets met energiebehoud te maken. Dat zullen we in de volgende paragraaf nader bekijken.

9.4 Behoudswetten

Bekijken we weer een lijnstuk $[0, L]$ op de x -as en daarop een functie $u(x)$. We kunnen daarbij dus denken aan de u -component van de wind langs een breedtegraad. Er geldt dan uiteraard de cyclische randvoorwaarde $u(0) = u(L)$. De totale kinetische energie is gedefinieerd als:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int_0^L u(x)^2 dx.$$

Het is nu simpel om aan te tonen dat de totale kinetische energie behouden is, d.w.z. niet verandert in de tijd, als $u(x, t)$ voldoet aan de niet-lineaire a.v.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u^2/2}{\partial t} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \frac{u^2}{2} dx = -1/3 [u(L)^3 - u(0)^3] = 0$$

$$\frac{d}{dt} E_{\text{kin}} = 0.$$

Geldt deze behoudswet nu ook voor de centrale differentiebenadering van de niet-lineaire a.v.? We bekijken alleen het effect van de ruimtelijke differentie.

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -u_j \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}.$$

Integratie wordt nu vervangen door sommatie:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{kin}}}{dt} &= \sum_j u_j \frac{\partial u_j}{\partial t} \Delta x = \sum_j \left[-u_j^2 \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_j (u_j^2 u_{j+1} - u_j^2 u_{j-1}) = 0 \end{aligned}$$

waarbij de sommatie \sum_j gaat over alle punten j op $[0, L]$.

We zien dus dat bij de centrale differentiebenadering de energie niet behouden is. Daardoor wordt het mogelijk voor de energie om t.g.v. aliasing steeds groter te worden en tenslotte instabiel!

Hoe lossen we dit probleem nu op?

Er zijn verschillende methoden bedacht om de niet-lineaire instabiliteit onder controle te krijgen.

1. We zagen dat door aliasing energie wordt toegevoegd het meest aan de kleinste golfjes die het dichtst bij k_{\max} liggen. Een methode om hier vanaf te komen is: toevoeging van een term aan de vergelijking die deze golfjes weer wegpoetst, bijv. de term $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

dus
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Stel $u(x) = \sin kx$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2 \sin kx = -k^2 u.$$

Dus deze term draagt negatief bij aan $\frac{\partial u}{\partial t}$ en wel het meest voor de kleinste golfjes (grote $k!$).

Deze zgn. diffusie-term vervangt eigenlijk kunstmatig het wegvloeien van energie naar $k > k_{\max}$.

2. Probeer differentieschema's te vinden die wél energiebehoudend zijn! Als we overigens ons model baseren op de 2-dimensionale vorticitetsvergelijking dan moet niet alleen de energie maar ook de enstrofie $Z = \iint \frac{1}{2} \zeta(x,y)^2 dx dy$ behouden zijn, met $\zeta(x,y)$ de vorticitet. Zulke energie- en enstrofiebehoudende differentieschema's zijn inderdaad gevonden i.h.b. door het werk van Arakawa.
3. Gebruik de spectrale methode: hiervan kan aangetoond worden dat niet-lineaire termen zonder aliasing worden berekend.

10. Coördinatensystemen en drie-dimensionale schema's

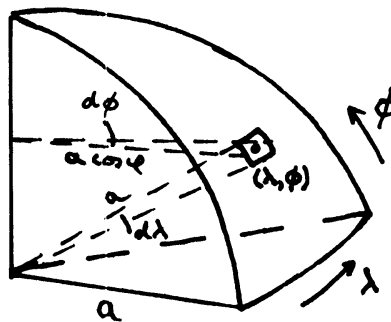
10.1 Inleiding

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien hoe de advectionvergelijking numeriek kan worden opgelost. De essentie was de numerieke berekening van horizontale ruimtelijke afgeleiden hetzij doormiddel van de roosterpuntenmethode, hetzij spectraal. De volledige modellen zijn echter 3-dimensionaal en bevatten dus ook verticale afgeleiden naar de hoogte z of, in drukcoördinaten, naar de druk p . Bovendien is de aarde bolvormig. In dit hoofdstuk bekijken we de problemen die daaruit voortkomen. Eerst kijken we naar horizontale coördinatensystemen op de bol en naar toepassing van de spectrale methode op de bol. Vervolgens bespreken we verticale coördinatensystemen.

10.2 Horizontale coördinaten op de bol

Omdat de aarde bolvormig is, voldoet een eenvoudig carthesisch coördinatenstelsel niet. Met name onze horizontale coördinaten moeten we aan de bolvorm aanpassen. Dit kan op twee manieren, die beide in atmosferemodellen toegepast worden:

- (i) bolcoördinaten
 - (ii) projecties
-
- (i) bolcoördinaten



We definiëren de coördinaten λ en ϕ , overeenkomend met lengte- en breedtegraad van een punt. Uit de geometrie van het probleem (zie figuur) volgt dat voor kleine afstandjes dx en dy geldt:

$$dx = a \cos\phi \, d\lambda$$

$a =$ straal van de aarde

$$dy = a \, d\phi$$

dus:

$$d\lambda = \frac{1}{a \cos\phi} dx$$

$$d\phi = \frac{1}{a} dy.$$

Soms wordt ook $\mu = \sin\phi$ als coördinaat gebruikt:

$$d\mu = \cos\phi \, a \, d\phi = \sqrt{1-\mu^2} \, d\phi$$

$$\text{dus } d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{1-\mu^2}} dx$$

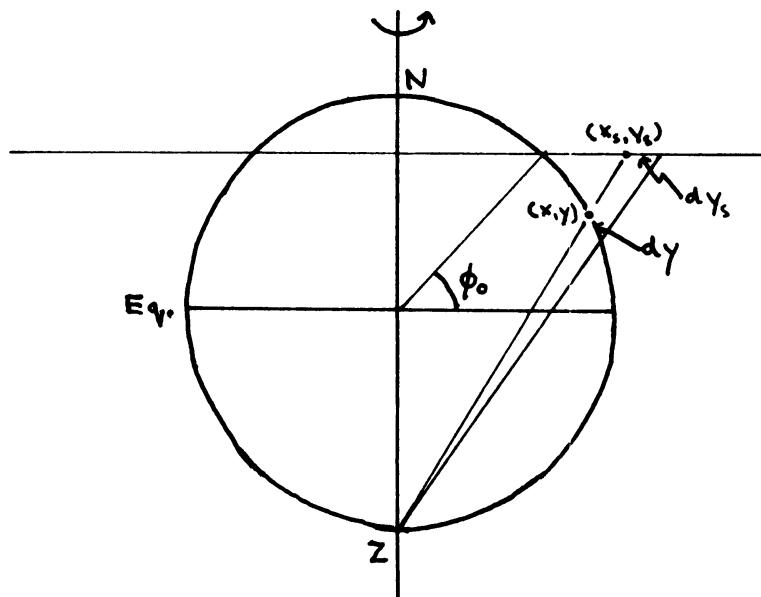
$$d\mu = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{a} dy.$$

Met behulp van deze formules kunnen dan (x,y) coördinaten in (λ, ϕ) of (λ, μ) coördinaten omgezet worden.

Hebben we de vergelijking in deze coördinaten opgeschreven dan kunnen weer eindige differentie (of wel roosterpunten-) schema's op de bol worden toegepast.

(ii) Projecties

Een andere methode is: de projectie van het bol-oppervlak op een plat vlak. Hiervoor bestaan vele systemen, bijv. de in atlassen vaak toegepaste mercator projectie. In de meteorologie is de stereografische projectie het meest gebruikt.



Hierbij wordt de bol loodrecht op de draai-as door een plat vlak doorsneden ten hoogte van breedtegraad ϕ_0 . Vanuit de zuidpool wordt vervolgens elk punt van de bol op de aangegeven wijze op het vlak geprojecteerd. In dit platte vlak kan dan een carthesisch coördinatensysteem (x_s, y_s) worden gedefinieerd. Het is duidelijk dat dit systeem niet geschikt is voor de gehele bol: immers het projectiepunt van de zuidpool ligt oneindig ver weg. Het wordt dan ook alleen maar gebruikt voor hemispherische modellen: modellen dus die slechts een halfrond beslaan.

Als we nu een afstand Δx op de bol bekijken, met welke afstand Δx_s correspondeert dat dan op het projectievlak? Dat hangt uiteraard af van de breedtegraad waarop je Δx bekijkt. Je kunt aantonen dat:

$$m \equiv \frac{\Delta x_s}{\Delta x} = \frac{1 + \sin \phi_0}{1 + \sin \phi} \quad (\text{m heet : de kaartfactor})$$

In de vergelijking moeten dx en dy dus vervangen worden door:

$$dx_s = m \cdot dx$$

$$dy_s = m \cdot dy.$$

Als $\phi_0 = 90^\circ$, dan heet de projectie: polair-stereografisch.

Dan geldt: $m = \frac{2}{1 + \sin \phi} = 2$ op de evenaar
 $= 1$ op de pool.

10.3 De spectrale methode op de bol

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat we bij de oplossing van de 1-dimensionale advectionvergelijking de functie $F(x,t)$ ontwikkelen in een reeks periodieke functies:

$$F(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n(t) e^{ik_n x}, \quad \text{met } k_n = \frac{2\pi n}{L}.$$

Op de bol kunnen we deze ontwikkeling niet gebruiken en moeten er andere "basisfuncties" gevonden worden. Om verschillende redenen worden daarvoor de z.g. "bolfuncties" gekozen die worden aangeduid als $Y_{m,n}(\lambda, \mu)$.

Deze zijn dus functies van de bolcoördinaten (λ, μ) . Zie vorige paragraaf. Iedere op de bol gedefinieerde functie $F(\lambda, \mu, t)$ kan dan worden geschreven als:

$$F(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=|m|}^{+\infty} F_{m,n}(t) Y_{m,n}(\lambda, \mu). \quad (10.1)$$

Hoe zien die bolfuncties er nu uit? Ze kunnen worden geschreven als

$$Y_{m,n}(\lambda, \mu) = P_{m,n}(\mu) \cdot e^{im\lambda}$$

langs een breedtegraad ($\mu = \text{constant}$) gedragen ze zich dus gewoon als een periodieke functie : $e^{im\lambda}$. De structuur langs een meridiaan wordt bepaald door de vorm van de z.g. legendre polynoom $P_{m,n}(\mu)$. Deze heeft ook een golfachtige structuur. In onderstaande fig. 5 zie je de structuur van een aantal van die functies en wel van $Y_{0,5}$, $Y_{1,5}$, ..., $Y_{5,5}$. In deze figuur is steeds de hele bol geprojecteerd op een ellips in het platte vlak. Aan formule (10.1) zie je dat de ontwikkeling nu een dubbele sommatie is met 2 indices: (m, n) .

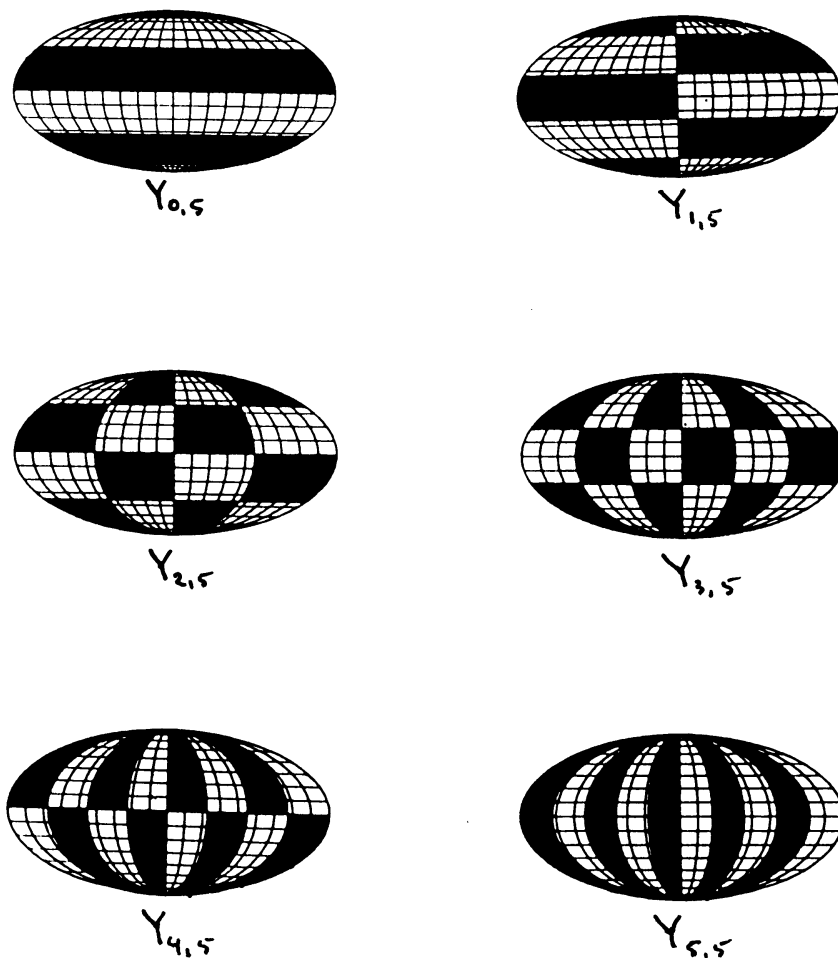


Fig. 5

Structuur van enkele bolfuncties $Y_{m,n}$. De hele aardbol is geprojecteerd op een ellips. De functie is positief in zwarte en negatief in gearceerde gebieden.

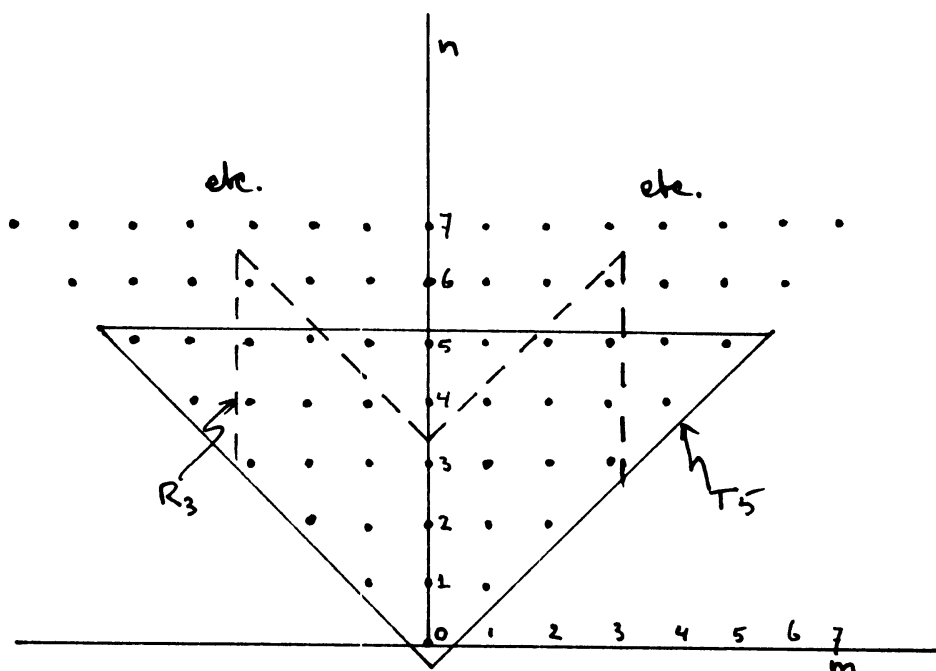


Fig. 6

De combinaties (m,n) waarvoor de bolfuncties $Y_{m,n}$ zijn gedefinieerd. Het gebied is in principe oneindig groot maar in de praktijk wordt gewerkt met een eindig aantal punten binnen een driehoek ("triangular") of een dubbele ruit ("rhomboidal")

De bolfuncties zijn gedefinieerd voor alle combinaties (m,n) die in fig. 6 als punten zijn aangegeven:

Ook hier geldt weer dat we niet met oneindige reeksen kunnen werken maar de functie $F(\lambda,\mu,t)$ moeten benaderen door de reeks af te kappen. De twee meest gebruikelijke manieren worden resp. "triangular" (driehoekig) en "rhomboidal" (ruitvormig) genoemd. Je ziet dat in bovenstaande figuur. Op theoretische gronden verdient de driehoekige afkapping de voorkeur maar in de praktijk maakt het weinig uit.

De afkapping wordt als volgt genoteerd: triangular wordt afgekort door T en rhomboidal door R, en daarachter wordt de hoogste waarde van m genoemd die nog wordt meegenomen. In bovenstaande figuur zijn de afkappingen dus R3 en T5. Het huidige ECMWF-model is T106.

10.4 Verticale coördinatensystemen

Drukcoördinaat

Bij de afleiding van de modelvergelijkingen in Hfdst. 7 hebben we gebruik gemaakt van de zgn carthesische coördinaten (x,y,z,t) . Hierboven hebben we gezien dat deze door de bolvorm van de aarde niet voldoen, tenminste de horizontale coördinaten niet. Maar ook het gebruik van de hoogte z als coördinaat in een atmosfeer in hydrostatisch evenwicht maakt de vergelijkingen nodeloos ingewikkeld. Het is eenvoudiger om de druk p , die in een hydrostatische atmosfeer altijd afneemt met de hoogte, als verticale coördinaat te kiezen. De verticale "snelheid" in zo'n systeem is dan

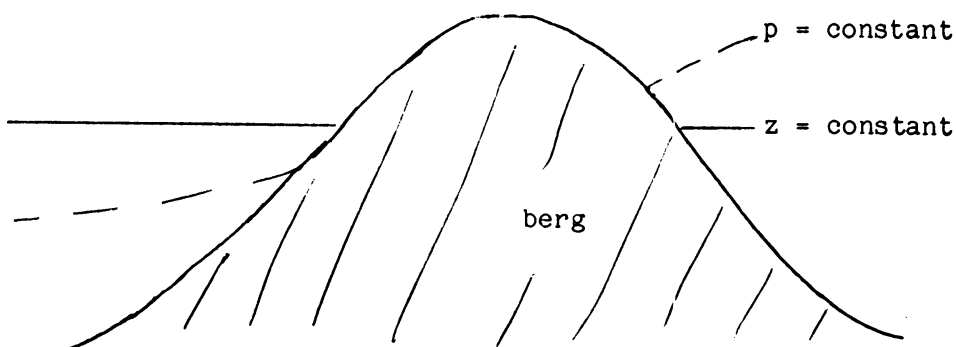
$$\omega = \frac{dp}{dt}$$

"Horizontale" vlakken zijn nu vlakken van constante druk, die uiteraard niet werkelijk horizontaal lopen. Ook horizontale afgeleiden worden nu berekend in een drukvlak. Bij het gradientteken ∇ wordt dit aangegeven: ∇_p .

We zullen onze primitieve vergelijkingen niet opnieuw in drukcoördinaten afleiden. Ze zijn te vinden hieronder in paragraaf 11.1. Het grote voordeel is dat de dichtheid nu geheel uit de vergelijkingen is verdwenen en dat met name de continuïteitsvergelijking is gereduceerd tot een heel eenvoudige diagnostische vergelijking.

Sigma-coördinaat

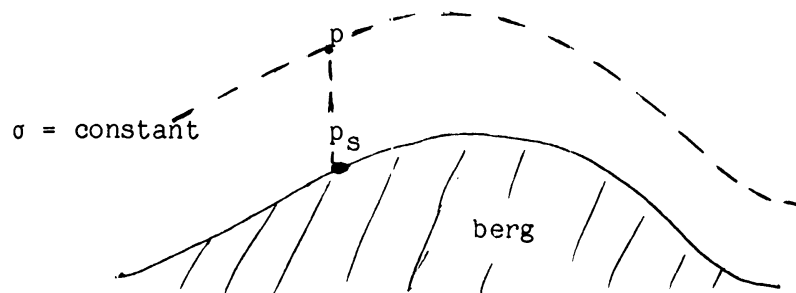
Zowel hoogte- als drukcoördinaat heeft het nadeel dat horizontale vlakken door bergen heen snijden. Dit compliceert de berekeningen omdat er "gaten" ontstaan in de horizontale vlakken.



Zelfs in gebieden zonder gebergte, zoals oceanen, kunnen drukvlakken door het zeeoppervlak heen steken. Om deze complicaties te voorkomen heeft Phillips in 1957 de zgn. σ -coördinaten (sigma-coördinaten) ingevoerd. σ is gedefinieerd als

$$\sigma = \frac{p}{p_s}$$

waarin p_s de druk aan het aardoppervlak recht onder het punt met druk p is.



Vlakken van constante σ lopen dus over het gebergte heen, volgen het terrein en snijden er niet doorheen. De vergelijkingen met σ als verticale coördinaat zijn iets gecompliceerder dan met drukcoördinaten. De drukgradiëntterm die in drukcoördinaten kan worden geschreven als $\nabla_p \phi$ wordt nu:

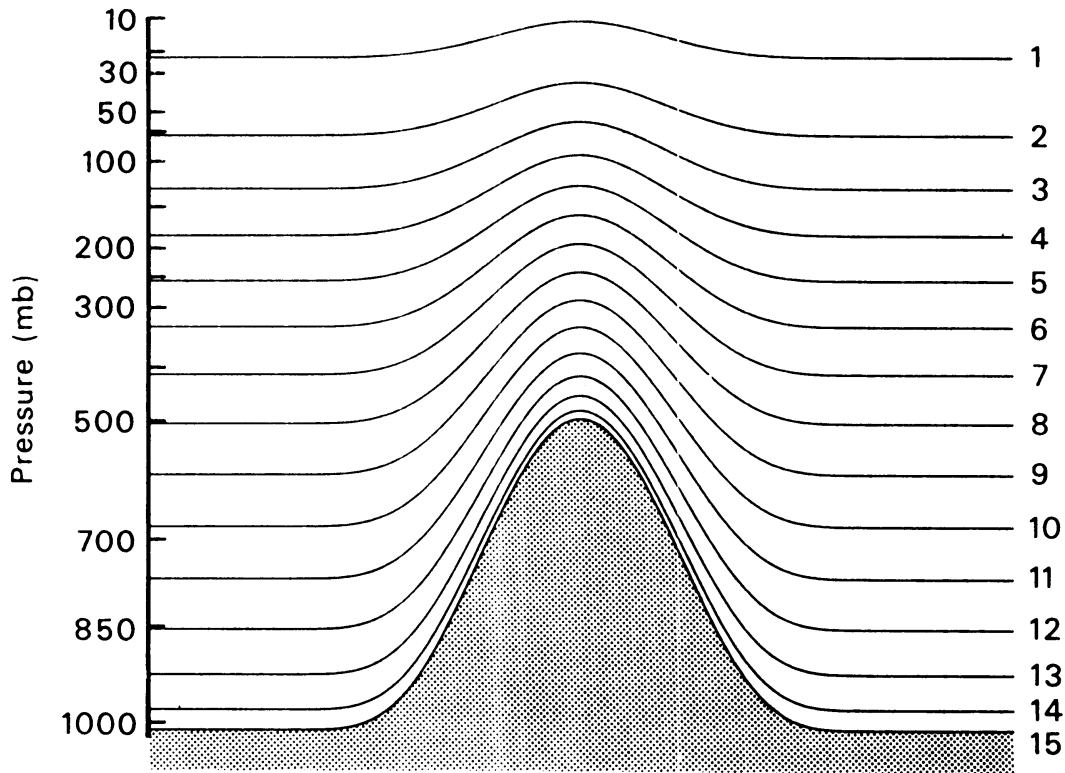
$$\text{drukgradiënt: } \nabla_{\sigma} \phi + RT \nabla \ln p_s.$$

Dit laat direct het nadeel van het σ -systeem zien: langs sterke berg-hellingen zijn deze beide termen groot en van tegengesteld teken. De eigenlijke drukgradiëntkracht wordt dan dus berekend als een klein verschil tussen twee grote termen. Dit leidt altijd tot grote onnauwkeurigheid. Om deze reden gebruikt men tegenwoordig ook wel:

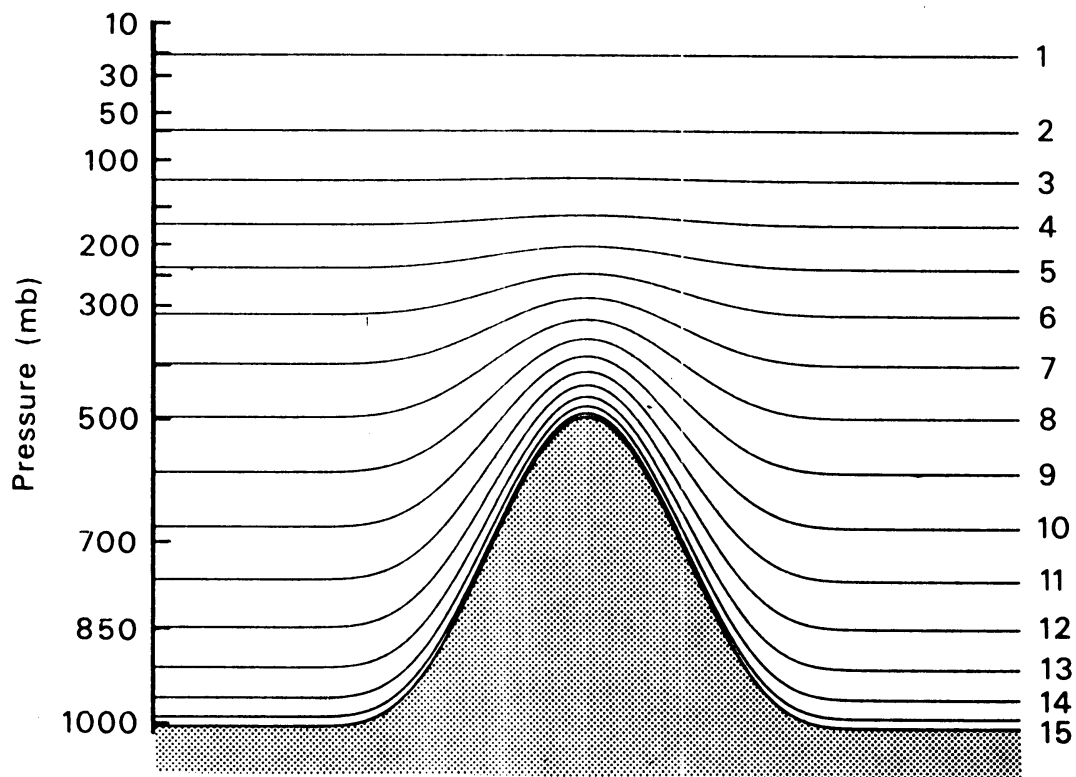
Hybride of η -coördinaat

Deze is gelijk aan de σ -coördinaat, daar waar deze van nut is: nabij het aardoppervlak, maar gaat langzaam over in de p -coördinaat hoger in de atmosfeer, zodat daar het nadeel van σ -coördinaten wegvalt.

In de huidige modellen wordt i.h.a. gebruik gemaakt van σ -coördinaten en soms (bijv. ECMWF) van η -coördinaten. Fig 7 toont het verloop van σ - en η -vlakken nabij een berg. Het is duidelijk dat de invloed van de berg in de stratosfeer op de η -vlakken veel geringer is dan op de σ -vlakke.



Sigma levels old operational model



Hybrid levels new operational model

Fig. 7

Vergelijk van het verloop nabij een berg van σ -vlakken (boven) en η -vlakken (onder). Let op het verschil in de stratosfeer!

11. Een PE-model in drukcoördinaten

(Dit hoofdstuk is gedeeltelijk afkomstig uit de syllabus "numerieke modellen van de atmosfeer en de zee" door Prof. T.J. Simons, IMOU 1980)

In dit hoofdstuk zullen we een PE-model in meer detail bekijken en daarbij in het bijzonder letten op de verticale structuur.

11.1 De vergelijkingen

De primitieve vergelijkingen luiden in drukcoördinaten als volgt:

- bewegingsvgl:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla_p) \vec{v} + \omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial p} + \vec{f} \times \vec{v} + \nabla_p \phi = \vec{F} = 0 \quad (11.1)$$

- thermodynamische vgl:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_p T + \omega \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{RT}{c_p p} \omega = Q = 0 \quad (11.2)$$

- hydrostatische vgl:

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = - \frac{RT}{p} \quad (11.3)$$

- continuïteitsvgl:

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = - \text{div } \vec{v}. \quad (11.4)$$

In (11.2) en (11.3) is al gebruik gemaakt van de ideale gaswet: $p\alpha = RT$.

In vgl'n (11.1) t/m (11.4) is

- het verschil tussen temperatuur en virtuele temperatuur verwaarloosd
- geen vergelijking voor het vocht opgenomen
- de niet-adiabatische forcing termen verwaarloosd.

In (11.1) - (11.4) zijn ∇_p en div 2-dimensionale operatoren in een drukvlak.

De 4 vergelijkingen bevatten 4 onbekenden: $(\vec{v}, T, \omega, \phi)$. Stel we kennen de toestand $(\vec{v}, T, \omega, \phi)$ van de atmosfeer op een zeker moment. We kunnen dan voor een toekomstig moment \vec{v} en T met behulp van vgl'n (11.1) en (11.2) prognostisch berekenen en vervolgens kunnen we dan door integratie van

Wind, temperatuur en geopotential worden beschouwd als gemiddelden over elke laag en worden daarom halverwege de laag berekend. Daarentegen wordt de verticale snelheid ω berekend aan de scheidingsvlakken. Dit heet "staggering of variables" (to stagger: waggelen of wankelen). Deze staggering is gekozen om de berekening van de verticale advectie-termen

$$\frac{\partial(\omega T)}{\partial p} \text{ en } \frac{\partial(\omega \vec{v})}{\partial p}$$

en ook de integratie van vgl. (11.6) zo eenvoudig mogelijk te maken.

Bijv. $\frac{\partial(\omega T)}{\partial p}$ op niveau 3 wordt nu

$$\frac{\partial(\omega T)_3}{\partial p} = \frac{\omega_4 T_4 - \omega_2 T_2}{p_4 - p_2}.$$

Helaas zijn T_2 en T_4 niet bekend! Deze worden dan bepaald door interpolatie, bijv.:

$$T_4 = \frac{T_3 + T_5}{2}.$$

De oplossingsprocedure is nu als volgt :

1. Bereken met behulp van (11.1) en (11.2) voor elke laag $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ en $\frac{\partial T}{\partial t}$ en

bepaal $\frac{\partial p_s}{\partial t}$ met behulp van (11.7).

Daaruit volgen nieuwe waarden van \vec{v} , T en p_s na één tijdstap.

2. Integreer de continuïteitsvgl, (11.6) van boven naar beneden.

Bijv.:

$$\omega_4 = -\text{div } \vec{v}_5 \cdot (p_4 - p_6)$$

$$\omega_2 = \omega_4 - \text{div } \vec{v}_3 \cdot (p_2 - p_4) \text{ etc.}$$

Dit dus een benadering van de integraal in (5.6) als som over eindige lagen.

3. Integreer de hydrostatische vgl (5.5) van beneden naar boven.

$$\phi_1 = -RT_1 (\ln p_1 - \ln p_s)$$

$$\phi_3 = \phi_1 - RT_2(\ln p_3 - \ln p_1) \text{ etc.}$$

en dit is een benadering van de integraal in (11.5) als som over een eindig aantal lagen.

Na deze drie stappen hebben we alle variabelen berekend na één tijdstapen beginnen we weer opnieuw.

12. Physische parameterisaties

12.1 Inleiding

In de primitieve vergelijkingen (bijv. vgl. (11.1) en (11.2)) staan nog zeer algemene termen aan de rechterzijde die we tot nu toe verwaarloosd hebben:

\vec{F} in de impulsvergelijkingen

Q in de thermodynamische vergelijking

S in de vergelijking voor het vocht.

Wat stellen deze termen voor? Deze termen vertegenwoordigen processen en dus veranderingen van windsnelheid, temperatuur en vocht, die niet door de overige termen beschreven worden. De termen die we tot nu toe beschouwd hebben, beschrijven dynamische processen intern in de atmosfeer: advectie, en coriolisversnelling en adiabatische expansie. Processen zoals wrijving, interactie met het aardoppervlak, verwarming of afkoeling door straling, condensatie, interactie van bewolking en straling worden er niet door beschreven en worden daarom beschreven in \vec{F} , Q en S. Bovendien zijn er processen die zich afspelen op schalen kleiner dan de roosterpuntsafstand ("sub-grid scale processes"). Ook deze worden uiteraard niet expliciet door het model beschreven, maar kunnen worden beschreven in \vec{F} , Q en S. Het aantal vergelijkingen blijft hetzelfde en dus mag het aantal variabelen niet toenemen en dus moeten \vec{F} , Q en S worden uitgedrukt in de bestaande variabelen. Dit probleem heet: parameterisatie. Op heel korte termijn zijn \vec{F} , Q en S verwaarloosbaar: de atmosfeer gedraagt zich alsof er geen buitenwereld bestaat. Op langere termijn is dit duidelijk niet het geval: stel dat er geen verwarming door zonnestraling zou plaatsvinden dan zou na een aantal dagen de atmosfeer ten gevolge van de wrijving met het aardoppervlak geheel tot stilstand komen. Voor een geslaagde meerdaagse verwachting is het dus kennelijk nodig zowel stra-

(11.3) en (11.4) de bijbehorende ϕ en ω diagnostisch bepalen. Bij deze integratie hebben we wel randvoorwaarden nodig. Bij vgl (11.4) stellen we:

$$\omega = 0 \text{ voor } p = 0$$

en bij vgl (11.3):

$$\phi(p_s) = \phi_s = 0$$

waarbij ϕ_s de geopotentiele hoogte van het aardoppervlak is die we hier voor het gemak gelijk 0 stellen. D.w.z. we veronderstellen dat er geen bergen zijn. We kunnen nu vgl. (11.3) van beneden naar boven integreren:

$$\int_{p_s}^{p_1} \frac{\partial \phi}{\partial p} dp = - \int_{p_s}^{p_1} \frac{RT}{p} dp = - \int_{p_s}^{p_1} RT d \ln p$$

$$\text{dus } \phi(p_1) = \phi_s - \int_{p_s}^{p_1} RT d \ln p = - \int_{p_s}^{p_1} RT d \ln p \quad (11.5)$$

en vgl (11.4) van boven naar beneden

$$\int_0^{p_2} \frac{\partial \omega}{\partial p} dp = - \int_0^{p_2} \text{div } \vec{v} dp$$

$$\omega(p_2) = \omega(0) - \int_0^{p_2} \text{div } \vec{v} dp = - \int_0^{p_2} \text{div } \vec{v} dp \quad (11.6)$$

We zullen straks laten zien hoe we die integratie uitvoeren. Omdat we (11.5) vanaf het aardoppervlak integreren, hebben we een extra vgl voor de druk p_s aan het aardoppervlak nodig. Nu geldt:

$$\omega_s \equiv \frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial p_s}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla p_s + w_s \frac{\partial p_s}{\partial z}$$

Uiteraard is $w_s = 0$, zodat we de volgende prognostische vergelijking voor de druk aan de grond krijgen

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = \omega_s - \vec{v}_s \cdot \nabla p_s \quad (11.7)$$

We hebben nu alle bouwstenen van ons model gereed.

11.2 Het model

Vgl. (11.1) t/m (11.7) vormen de vergelijkingen van ons model. We weten hoe we (11.1), (11.2) en (11.7) in principe kunnen oplossen met een roosterpunts- of spectrale methode. Er staan echter ook termen met verticale afgeleiden in, zoals:

$$\omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial p} \text{ en } \omega \frac{\partial T}{\partial p}.$$

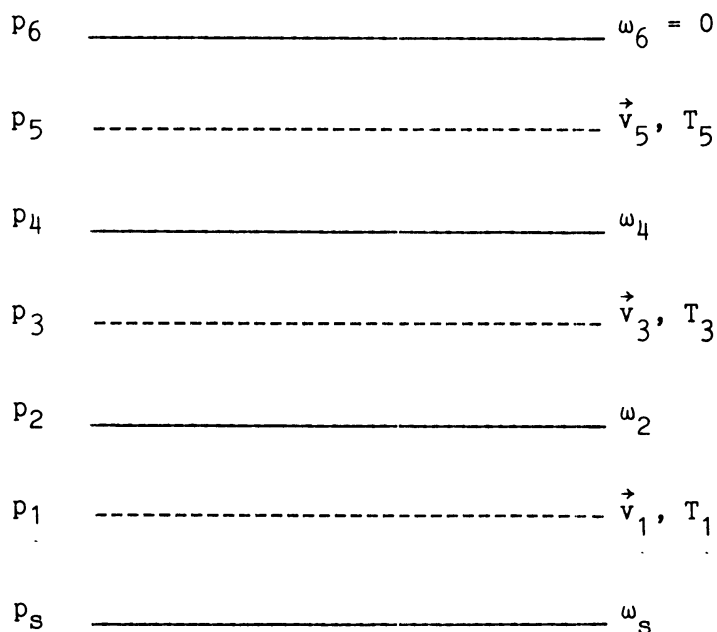
Om de berekening van deze termen te vereenvoudigen schrijven we deze termen allereerst op een andere manier met behulp van de continuïteitsvergelijking (11.4):

$$\omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial p} = \frac{\partial(\omega \vec{v})}{\partial p} - \vec{v} \frac{\partial \omega}{\partial p} = \frac{\partial(\omega \vec{v})}{\partial p} + \vec{v} \cdot \text{div } \vec{v}$$

$$\text{en } \omega \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial(\omega T)}{\partial p} - T \frac{\partial \omega}{\partial p} = \frac{\partial(\omega T)}{\partial p} + T \cdot \text{div } \vec{v}$$

en onze taak is nu dus om de verticale afgeleide $\frac{\partial(\omega \vec{v})}{\partial p}$ en $\frac{\partial(\omega T)}{\partial p}$ te berekenen.

We verdelen daartoe de atmosfeer in een aantal lagen, gescheiden door drukvlakken, zij het dat het onderste grensvlak het aardoppervlak (dus geen drukvlak) is. Nemen we als voorbeeld een drielaags model.



lingsprocessen als de wrijving te parameteriseren. Voor lange termijn-modellen wordt de parameterisatie dan ook snel erg ingewikkeld. We zullen het probleem dan ook niet in details behandelen. Afb. 8 geeft een schematisch overzicht van alle fysische processen die in het ECMWF-model geparameteriseerd zijn. Hieronder geven we een kort overzicht van de belangrijkste processen, waarbij we wel steeds moeten bedenken dat deze processen met elkaar gekoppeld zijn, zoals deze figuur laat zien, en eigenlijk niet onafhankelijk van elkaar beschouwd kunnen worden.

Niettemin kunnen we een ruwe indeling maken in 5 soorten processen:

- grenslaag
- vocht en bewolking
- straling
- orografische effecten
- processen aan het aardoppervlak

We zullen deze alle 5 nu heel kort behandelen.

12.2 Grenslaag

Om twee redenen is het van essentieel belang dat we de grenslaag goed behandelen in een numeriek model:

- we leven in de grenslaag d.w.z. dat wat wij als "weer" ervaren speelt zich grotendeels in de grenslaag af.
- via de grenslaag vindt wrijving plaats (impulsflux) en wordt warmte en vocht uitgewisseld tussen aarde en vrije atmosfeer (warmte- en vochtflux).

Aan een goede behandeling van de grenslaag in een model kleven echter twee problemen:

- de grenslaag is dun, vergeleken met de totale diepte van de atmosfeer zodat een groot verticaal oplossend vermogen vereist is.
- de processen die de koppeling tussen vrije atmosfeer en onderliggende aarde tot stand brengen, spelen zich i.n.a. af op horizontaal kleine schaal: door turbulente uitwisseling. Deze schaal kan met de huidige modellen niet opgelost worden.

Er zijn twee manieren om het eerste probleem, de geringe diepte, aan te pakken:

- een voldoende groot aantal niveau's om de grenslaag "op te lossen". Dan kan de verticale structuur van de grenslaag expliciet beschreven worden. Dit is een dure methode, kost veel computertijd en levert niet

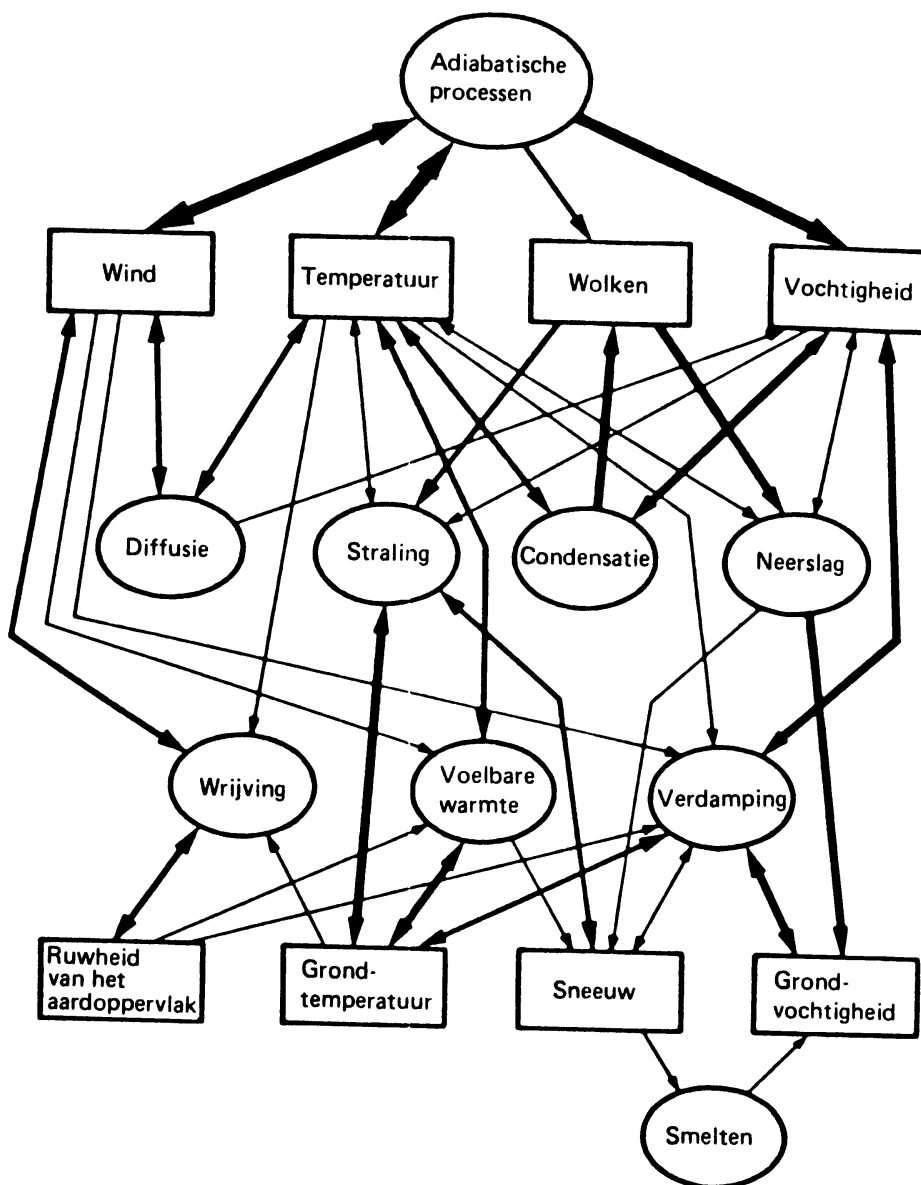


Fig. 8

Schematische weergave van de natuurkundige processen, die een rol spelen in het model van het Europese Centrum. De dikte van de pijlen is een maat voor de belangrijkheid van het proces.

noodzakelijker wijs goede resultaten, temeer daar i.h.a. voldoende meetgegevens, om de structuur van de grenslaag te analyseren ontbreken.

- parameterisatie van de verticale structuur m.b.v. een of twee verticale lagen. D.w.z. dat formules worden afgeleid op fysische gronden of op basis van waarnemingen die een verband leggen tussen enerzijds de verticale fluxen van impuls, warmte en vocht en anderzijds de toestand van het aardoppervlak en van de vrije atmosfeer. De preciese structuur van de grenslaag doet dan niet ter zake maar alleen het effect van de grenslaag op de vrije atmosfeer. Dergelijken formules kunnen ook omgekeerd gebruikt worden om bijv. uit de geostrofische wind, de wind aan het aardoppervlak af te leiden.

Het tweede probleem, de kleine horizontale schaal van de turbulente uitwisseling wordt eveneens langs fysische of empirische weg aangepakt. Omdat individuele turbulente wervels niet beschreven kunnen worden (al was het alleen maar omdat waarnemingen ontbreken!) kan alleen het gemiddelde effect van veel turbulente wervels in het model worden beschreven.

Een gedetailleerde behandeling voert veel te ver. Voor de geïnteresseerde lezer is er genoeg literatuur te vinden! (Zie bijv. Wieringa's syllabus: De Atmosferische Grenslaag, TR-89, 1986.)

12.3 Vocht en bewolking

Het meest belangrijke effect van vocht in de atmosfeer is het vrijkomen van latente warmte door condensatie. Bovendien ontstaat hierdoor bewolking die weer invloed heeft op de stralingshuishouding van de atmosfeer. het is duidelijk dat waterdamp van groot belang is voor de weersverwachting! Een model, zoals in het vorige hoofdstuk behandeld, kan alleen "droge" processen beschrijven. De vergelijkingen moeten worden uitgebreid, willen we ook "natte" processen kunnen beschrijven. Om te beginnen moeten we een vergelijking toevoegen voor het behoud van waterdamp. Noemen we de waterdampdichtheid ρ_v dan volgt:

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = -\nabla(\rho_v \cdot \vec{v}) + S \quad (12.1)$$

waarin S de "bronnen en putten" van waterdamp aangeven, zoals condensatie, verdamping aan het aardoppervlak. Uit (12.1) kunnen vergelijkingen afgeleid worden voor andere grootheden waarmee de hoeveelheid vocht wordt aangeduid: specifieke en relatieve vochtigheid etc.

Naast deze vergelijking zal ook de thermodynamische vergelijking moeten worden uitgebreid met een term die de vrijkomende latente warmte vertegenwoordigt als er condensatie plaatsvindt of het verdwijnen van warmte bij verdamping. Bovendien moet in de toestandsvergelijking de temperatuur worden vervangen door de virtuele temperatuur.

Hebben we het op deze manier in principe mogelijk gemaakt om "natte" processen te beschrijven, dan komt het probleem van de beschrijving van ontstaan en oplossen van bewolking. Het probleem is dat ook hier weer i.h.a. de verticale en/of horizontale schalen waarop zich de wolkenprocessen afspelen, te klein zijn om door het model te worden opgelost: parameterisatie is nodig. Hierbij wordt onderscheid gemaakt tussen

- stabiele, groot-schalige condensatie en
- onstabiele convectieve bewolking.

Bij wolkenvorming in stabiele luchtmassa's is sprake van condensatie door opstijging van uitgestrekte luchtmassa's: de horizontale schaal is groot maar de verticale vaak gering.

In onstabiele luchtmassa's vindt daarentegen wolkenvorming plaats via een heel ander proces: convectie. Hier geldt dat de horizontale schaal klein, doch de verticale schaal vaak groot is en de gehele troposfeer bestaat. In beide gevallen worden formules opgesteld waarmee wordt vastgesteld of en zoja hoeveel condensatie plaatsvindt en hoeveel warmte daarbij vrij komt. In het model wordt dan bijgehouden waar de bewolking zit en welk effect dit heeft op de stralingshuishouding.

Omdat vocht via de grenslaag in de atmosfeer komt is het duidelijk dat de parameterisatie van natte processen en van de grenslaag met elkaar gekoppeld moeten worden. I.h.b. hangt de beschrijving van convectieve processen nauw met die van de grenslaag samen.

12.4 Straling

Het is de zonnestraling die uiteindelijk verantwoordelijk is voor het feit dat de atmosfeer beweegt. Ook de dagelijkse gang van het weer in de grenslaag is een direct gevolg van de invloed van zonnestraling. Toch heeft de straling vrijwel geen invloed op de korte termijn op de circulatie van de vrije atmosfeer. Of men de invloed van straling al dan niet in z'n model opneemt hangt dus af van het doel van het model.

- zeer korte termijn modellen (< 12 uur). Als een beschrijving van de dagelijkse gang van de grenslaag niet nodig is, kan straling uit het model worden weggelaten. Als dagelijkse gang wel gewenst is, kan worden voldaan met een simpel stralingsschema waarin alleen de invloed van de

- straling op de warmtebalans aan het aardoppervlak wordt beschreven en niet de directe invloed van de straling op de atmosfeer.
- korte termijn (12 - 36 uur). Hier kan men steeds volstaan met een simpel stralingsschema.
 - middellange termijn en klimaatmodellen. In dit soort modellen is een uitgebreid stralingsschema noodzakelijk. Dit betekent dat men ook rekening moet houden met de invloed van de verschillende sporen gassen (CO_2 , H_2O) op de stralingsbalans. Het is een rekenintensief deel van het gehele model.

Bij de beschrijving van de straling wordt steeds onderscheid gemaakt tussen de binnenkomende, van de zon afkomstige, kortgolvlige straling die bijna ongehinderd door de atmosfeer het aardoppervlak kan bereiken en de door de aarde uitgezonden langgolvlige straling waarop sporengassen grote invloed kunnen hebben (denk aan het CO_2 -broeikaseffect).

12.5 Orografische effecten

Door een analyse van de systematische fouten in ECMWF-model voorspellingen, met name boven Europa, is gebleken dat de beschrijving van de invloed van grote gebergten (i.h.b. Rocky Mountains) op de circulatie te wensen overliet. Dit ligt ook wel een beetje voor de hand: door de betrekkelijk grote roosterpuntsafstanden worden hoge pieken en diepe dalen als het ware gladgestreken. Zo werden bijv. de Alpen gereduceerd tot een glad plateau van slechts 1000 m hoogte! Dit probleem is op 2 manieren aangepakt:

- "envelope orography". Hierbij wordt niet alleen gekeken naar de gemiddelde hoogte tussen de roosterpunten maar ook naar de ruwheid (variantie) van het gebergte.
Als het geberge ruig is met hoge pieken en diepe dalen dan wordt de gemiddelde hoogte in het model opgehoogd met een hoeveelheid die evenredig is met de variantie. Op deze wijze wordt de kleinschalige structuur van het gebergte in het model geparаметeriseerd. Op deze wijze is de systematische fout in het model gereduceerd.
- "gravity wave drag". Sinds kort realiseert men zich dat een gebergte nog op een andere manier invloed op de circulatie uitoefent. Als de atmosfeer over een bergketen stroomt worden zwaartekrachtsgolven opgewekt (gravity waves) die een extra remming (drag) op de atmosfeer uitoefenen. Dit proces speelt zich op kleine schaal af en wordt dus

niet door het model beschreven. Ook dit proces wordt dus geparame-
riseerd en blijkt de systematische fouten nog verder te verkleinen.

12.6 Processen aan het aardoppervlak

Middellange-termijn verwachtingsmodellen en klimaatmodellen bevatten een vrij gedetailleerde beschrijving van processen die zich aan het aardoppervlak afspelen. Deze zijn van belang vanwege de uitwisseling van impuls, warmte en vocht tussen aarde en atmosfeer. Omdat die processen sterk afhankelijk zijn van de fysische eigenschappen van het oppervlak, moeten ook deze gedetailleerd worden bijgehouden.

Omdat de fysische eigenschappen van land- en zeeoppervlak sterk verschillen worden ze apart behandeld. Bij beide zullen we enige aandacht besteden aan vier aspecten: de warmtehuishouding, de optische eigenschappen, de hydrologie (neerslag en verdamping), en de oppervlakte ruwheid. Ook hier geldt natuurlijk weer dat deze processen niet onafhankelijk zijn maar integendeel sterk met elkaar gekoppeld.

- Zeeoppervlak

Warmtehuishouding. Het belangrijkste verschil tussen land en zee is gelegen in de grote warmtecapaciteit van water waardoor de zeewatertemperatuur slechts langzaam verandert en nauwelijks een dagelijkse gang vertoont. In weersverwachtingsmodellen wordt dan ook steeds uitgegaan van een zeewatertemperatuursverdeling die niet verandert gedurende de voorspelperiode. Hiervoor wordt óf de klimatologische óf de waargenomen verdeling genomen. In moderne klimaatmodellen daarentegen wordt geprobeerd oceaen- en atmosfeer volledig te koppelen.

Optische eigenschappen. De albedo van zeewater kan niet veranderen door sneeuw of vegetatie. Aangenomen wordt dus dat de albedo constant is. Wel wordt rekening gehouden met de aanwezigheid, de aangroei of het afsmelten van zeeijs en de daarmee gepaard gaande albedo verandering.

Oppervlakteruwheid. Deze bepaalt samen met de stabiliteit van de atmosfeer de wrijving die de wind ondervindt en daarmee de impulsuitwisseling tussen aarde en atmosfeer. De oppervlakteruwheid van de zee is klein en wordt i.h.a. constant verondersteld hoewel hij een functie zou moeten zijn van de golfhoogte en dus van de windsnelheid.

Hydrologie. De hoeveelheid en de aard van de neerslag is boven zee van geen belang: de fysische eigenschappen van het zeewater worden er niet door veranderd. De verdamping daarentegen hangt af van watertemperatuur, luchtvochtigheid, windsnelheid.

Al met al zijn de processen aan het zeeoppervlak betrekkelijk simpel vergeleken met die boven land.

- Landoppervlak

Warmtehuishouding. Het land heeft een veel geringere warmte capaciteit dan de zee; een warmtecapaciteit die bovendien afhankelijk is van de aard van de bodem. De oppervlaktetemperatuur zal dus variëren, afhankelijk van de uitgestraalde en geabsorbeerde warmte en de warmteaanvoer ("bodem-flux") vanuit de diepere ondergrond. Deze processen worden dan ook beschreven. Sommige modellen bevatten zelfs een aantal lagen in de bodem om de warmteaanvoer uit de diepere ondergrond te kunnen berekenen.

Optische eigenschappen. Deze komen vooral tot uiting in de albedo, die de fractie van de direct teruggeplaatste hoeveelheid zonlicht bepaalt. De albedo is afhankelijk van de aard van de bodem (Saharazand heeft een andere albedo dan de steppen van Siberië) maar ook door de aan- of afwezigheid van sneeuw of van vegetatie. In elk roosterpunt boven land van het model wordt dan ook elke tijdstap de albedo opnieuw berekend waarbij vooral de aan- of afwezigheid van sneeuw een rol speelt. Dit vereist dus kennis van aard en hoeveelheid neerslag.

Hydrologie. Aard van hoeveelheid neerslag bepaalt de albedo boven land maar ook de hoeveelheid in de bodem voor verdamping beschikbare vocht. Op basis van de heersende temperatuur bepaalt het model dan ook of de geproduceerde neerslag valt in de vorm van sneeuw of regen. In elk roosterpunt boven land wordt bijgehouden hoeveel sneeuw er ligt, hoeveel er in een tijdstap bijkomt of afsmelt en hoeveel vocht er in de bodem is opgeslagen, bijkomt door regen of verdampt. Zelfs wordt er in de grote modellen rekening gehouden met de afvoer van bodemvocht door rivieren ("run-off").

Oppervlakteruwheid. Ook deze hangt boven land sterk af van de aard en de gesteldheid van de bodem, de aanwezigheid van vegetatie, bebouwing etc. Voor elk roosterpunt wordt de gemiddelde ruwheid bepaald op basis van de gemiddelde eigenschappen van het gebied rond het roosterpunt. Deze ruwheid wordt verder constant gehouden.

In de meest geavanceerde modellen, vooral voor klimaatonderzoek, wordt tegenwoordig ook rekening gehouden met biologische eigenschappen van de vegetatie: de aan- of afwezigheid van blad die de ruwheid en de verdamping kan beïnvloeden maar ook het openen en sluiten van de huidmondjes die van invloed zijn op de vochtflux. Zo zijn we dan op het punt gekomen

dat de gehele gekoppelde samenhang tussen atmosfeer, aarde, oceaan en biosfeer wordt gemodelleerd.

13. Prestatie en voorspelbaarheid

13.1 Prestatie

De mate waarin de model-output bijdraagt aan verbetering van de operationele weersverwachting zou een maat moeten zijn voor de prestatie van het model. Het verband tussen de operationele weersverwachting en de circulatievoorspelling van het model is echter niet altijd zo duidelijk. Er kan statistische interpretatie plaatsvinden (MOS) al dan niet gecombineerd met subjectieve interpretatie. In de praktijk heeft een modelontwikkelaar dan ook betrekkelijk weinig houvast aan een verbetering van de PI, als het er hem om gaat zijn model te verbeteren.

Er zijn allerlei objectieve methoden bedacht om de kwaliteit van een modelvoorspelling te meten. We zullen hieronder de twee meest gangbare grootheden bespreken. De notatie is als volgt: Stel we hebben met ons model een prognose gemaakt van de grootte Z (dit kan de geopotentiële hoogte, de temperatuur of welke grootte dan ook zijn). De voorspelde waarde van Z in roosterpunt i duiden we aan met Z_i^f . De werkelijk opgetreden waarde geven we aan met Z_i^a . Verder hebben we nog de klimatologisch gemiddelde waarde van Z in punt i nodig en duiden die aan met \bar{Z}_i .

- RMS-fout (RMS = Root-Mean-Square, wortel uit het gemiddelde van het kwadraat).

Deze grootte wordt als volgt berekend

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Z_i^a - Z_i^f)^2}$$

De grootte heeft de dimensie van Z en is een directe maat voor de gemiddelde afwijking tussen analyse en forecast. RMS kan variëren tussen 0 (voorspelling overal identiek aan analyse) en in principe oneindig. In de praktijk is de bovengrens beperkt omdat het veld Z niet elke willekeurige waarde kan aannemen maar zijn afwijking van het klimatologische gemiddelde binnen zekere grenzen blijft (de temperatuur in Nederland wordt nooit +50°C!).

- Anomalie-correlatie

Deze wordt als volgt berekend:

$$AC = \frac{\overline{(Z_i^f - \bar{Z})(Z_i^a - \bar{Z})}}{\sqrt{\overline{(Z_i^f - \bar{Z})^2}} \sqrt{\overline{(Z_i^a - \bar{Z})^2}}}$$

Hierin betekent ($\bar{\quad}$): gemiddelde over alle punten i . De teller van deze grootte geeft de mate waarin het voorspelde en geanalyseerde patroon van afwijking van Z van het klimatologisch gemiddelde op elkaar lijken. De noemer is toegevoegd om ervoor te zorgen dat AC genormeerd is, d.w.z. niet groter dan 1 en niet kleiner dan -1 kan worden. AC is dimensieloos: het is een zgn. correlatiecoëfficiënt.

We berekenen de anomalie correlatie omdat we geïnteresseerd zijn in voorspelling van de afwijking van het klimatologisch gemiddelde. Het klimatologisch gemiddelde zelf kennen we wel! Als de voorspelde en opgetreden afwijking van het klimatologische gemiddelde volstrekt niet op elkaar lijken ("ongecorreleerd" zijn) wordt $AC = 0$.

Er zijn wel discussies gevoerd over de vraag welke van deze grootheden nu de beste maat is voor de kwaliteit van een model. Het hangt er vanaf wat je wilt meten. Het beste is beide grootheden te bekijken, in de praktijk wat gevoel voor hun betekenis te krijgen én daarnaast ook de door het model geproduceerde kaarten met een synoptisch-meteorologisch oog te bekijken. Dat laatste doen we hier niet. We bekijken hieronder enkele resultaten van het ECWMF-model.

Fig. 9 laat de gemiddelde anomalie-correlatie van de 500 mb hoogte AC zien als functie van de voorspeltermijn voor 3 verschillende perioden. De kromme A is de gemiddelde AC voor de voorspelling van de winter 1972 met het toendertijd beste model: het model van het GFDL in Princeton (U.S.A.). Krommen B en C zijn de gemiddelde AC 's voor de winter 1979/80 en 1983/84 met het ECWMF-model.

Twee zaken zijn duidelijk: AC wordt kleiner naarmate de voorspeltermijn toeneemt (d.w.z. de modelvoorspelling wordt slechter). We komen daar nog op terug. Bovendien is duidelijk dat de modelvoorspellingen in de loop der tijd sterk verbeterd zijn. Zakte AC in 1972 al na $3\frac{1}{2}$ dag tot 0.6, in 1983/84 is dat pas het geval na 6 dagen.

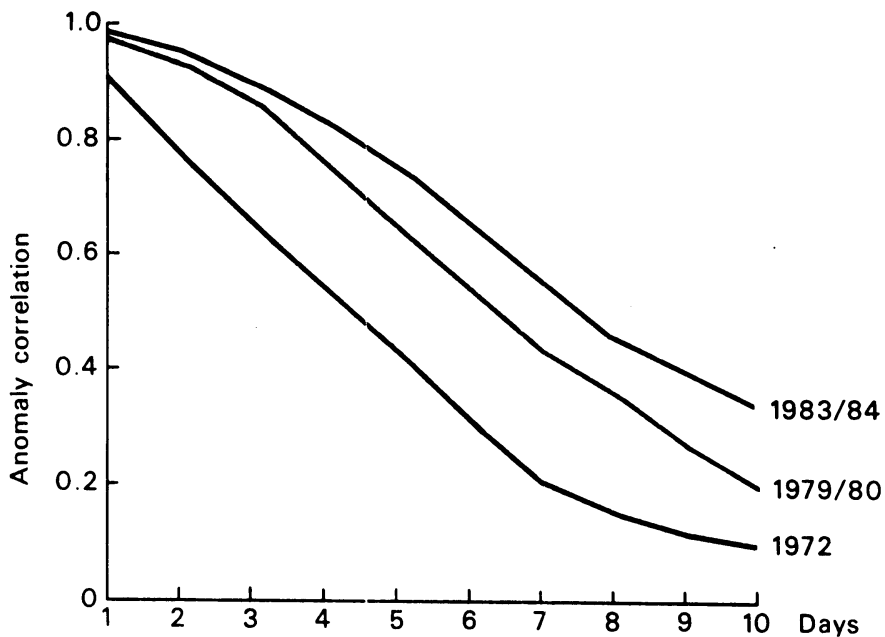


Fig. 9

De anomaliecorrelatie als functie van de voorspeltermijn in de winter van 1972 (GFDL-model) en in de winters van 1979/80 en 1983/84 (ECMWF-model)

In de praktijk is vastgesteld dat een modelvoorspelling niet meer bruikbaar is voor de meteoroloog als AC kleiner is dan 0.6. Dit ervaringsfeit levert een nieuwe maat op voor de kwaliteit van een voorspelling: De lengte van die voorspeltermijn in dagen D waarna de AC de waarde van 0.6 heeft bereikt. Dit is de bruikbare voorspeltermijn. In fig. 9 zien we dat de bruikbare voorspeltermijn is toegenomen van $3\frac{1}{2}$ dag in 1972 tot 6 dagen in 1984.

Fig. 10 toont de gemiddelde bruikbare voorspelperiode van het ECMWF model voor de jaren 1980 t/m 1985. De dunne lijn toont de maandgemiddelde waarde. Deze kromme vertoont een sterke jaarlijkse gang. De dikke lijn toont een verschuivend jaargemiddelde waardoor de jaarlijkse gang verdwijnt. Het is duidelijk dat de bruikbare voorspelperiode gestaag is toegenomen door verbeteringen aan de analyse en het model.

13.2 Voorspelbaarheid

We zagen in fig. 9 dat de prestatie van een model kleiner wordt naarmate de voorspeltermijn langer wordt. We hebben daar trouwens die figuur niet voor nodig, we weten dat allemaal uit ervaring: de dag 7 voorspelling van het ECMWF model is beduidend slechter dan bijv. de voorspelling voor

ECMWF FORECAST SKILL EUROPE

Forecast Day on which the 500 mb
Anomaly Correlation Reaches 0.6

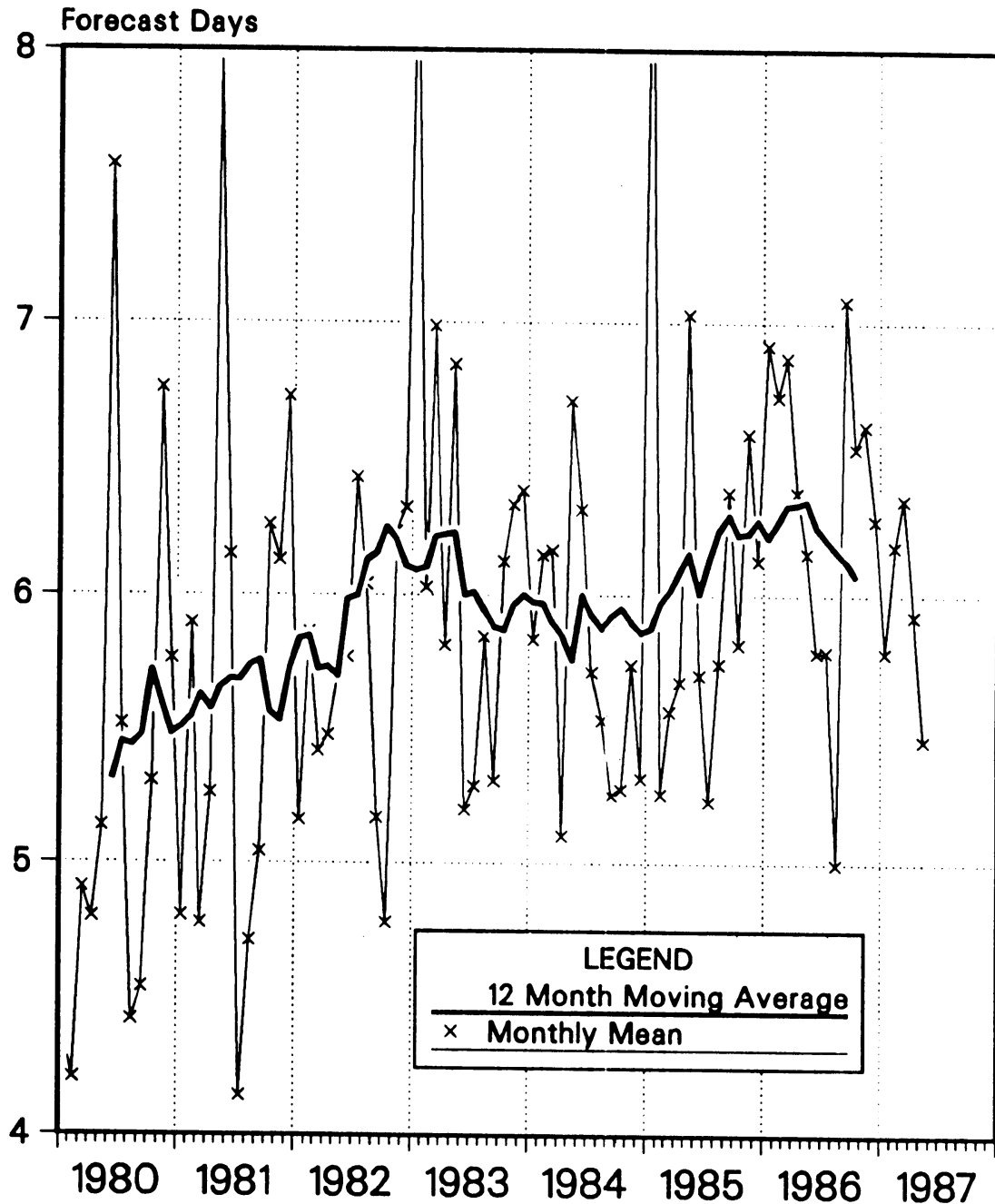


Fig. 10

Maandelijks gemiddelde (dunne lijn en kruisjes) en verschuivende jaargemiddelde (dikke lijn) dag waarop de anomaliecorrelatie van de 500 mb geopotentiële hoogte is gezakt tot 0.6. Deze waarde is een maat voor de bruikbare voorspelperiode van het ECMWF-model.

dag 2. De vraag is echter: stel dat we onze modellen steeds verder verbeteren, ons waarnemingsnetwerk steeds dichter maken en onze computer steeds sneller zodat we kleinere roosterpuntsafstanden kunnen nemen. Zouden we dan in principe steeds langer vooruit kunnen voorspellen en bijv. aan het eind van deze eeuw een maand vooruit een betrouwbare voorspelling kunnen leveren?

We weten nu dat dit niet het geval is: de voorspelbaarheid van de atmosfeer is principieel beperkt en dit stelt een bovengrens aan de bruikbare voorspelperiode.

Waarom is dit zo, terwijl de aard van onze modelvergelijkingen toch zodanig is dat we er in principe eindeloos vooruit mee kunnen voorspellen? (De natuurkundige zegt: de vergelijkingen zijn deterministisch.)

Ook al slagen we er in onze waarnemingen te verbeteren en onze roosterpuntsafstand te verkleinen, altijd zullen er in de atmosfeer processen plaatsvinden op nog kleinere schaal die we niet waarnemen en die tussen de roosterpunten doorglippen ("de vlinder in Peking", zie Volkskrant van 9 januari 1988 Appendix 2). Door niet-lineaire interacties kunnen deze kleinschalige processen een onvoorspelbare invloed hebben op grootschaliger processen en op den duur een storende invloed hebben op de processen die wel door het model beschreven worden. Verfijning van waarnemingsnet en roosterpuntsafstand helpt niet erg veel: naarmate we naar kleinschaliger processen kijken dringen de daardoor veroorzaakte verstoringen sneller door in de grotere wel door het model opgeloste schalen. We zeggen dan dat het niet-lineaire chaotische systeem, dat de atmosfeer is, "gevoelige afhankelijkheid van de begincondities" vertoont. De kleinst denkbare storing groeit in eindige tijd uit tot een verstoring die de modelvoorspelling onbruikbaar maakt.

Volgens huidige schattingen bedraagt de maximale bruikbare voorspelperiode gemiddeld zo'n twee à drie weken (Het Volkskrantartikel is hier wat pessimistisch!). Dit betekent overigens niet dat voorspellingen voor langere perioden bij voorbaat volledig zijn uitgesloten:

- In de eerste plaats is het wellicht mogelijk het gemiddelde weer langer vooruit te voorspellen en dus bijv. het karakter ("te warm", "te weinig neerslag") van het weer een maand of seizoen vooruit te bepalen. Het langdurig-gemiddelde gedrag van het weer wordt soms meer bepaald door externe factoren (zoals afwijkende zeewatertemperaturen) dan door de interne niet-lineaire dynamica. Ondanks veel onderzoek zijn de successen op dit gebied nog niet indrukwekkend.

- In de tweede plaats lijkt het erop dat de maximaal bruikbare voorspelt termijn niet constant is maar varieert, afhankelijk van de toestand van de atmosfeer. M.a.w. het lijkt erop dat de atmosfeer soms ver vooruit dan weer heel kort voorspelbaar is. Er zijn verschillende gevallen bekend van modelvoorspellingen die tot een maand vooruit van goede kwaliteit zijn. Daarentegen kent ieder model zijn frustrerende perioden van steeds maar weer slechte 3-daagse voorspellingen.

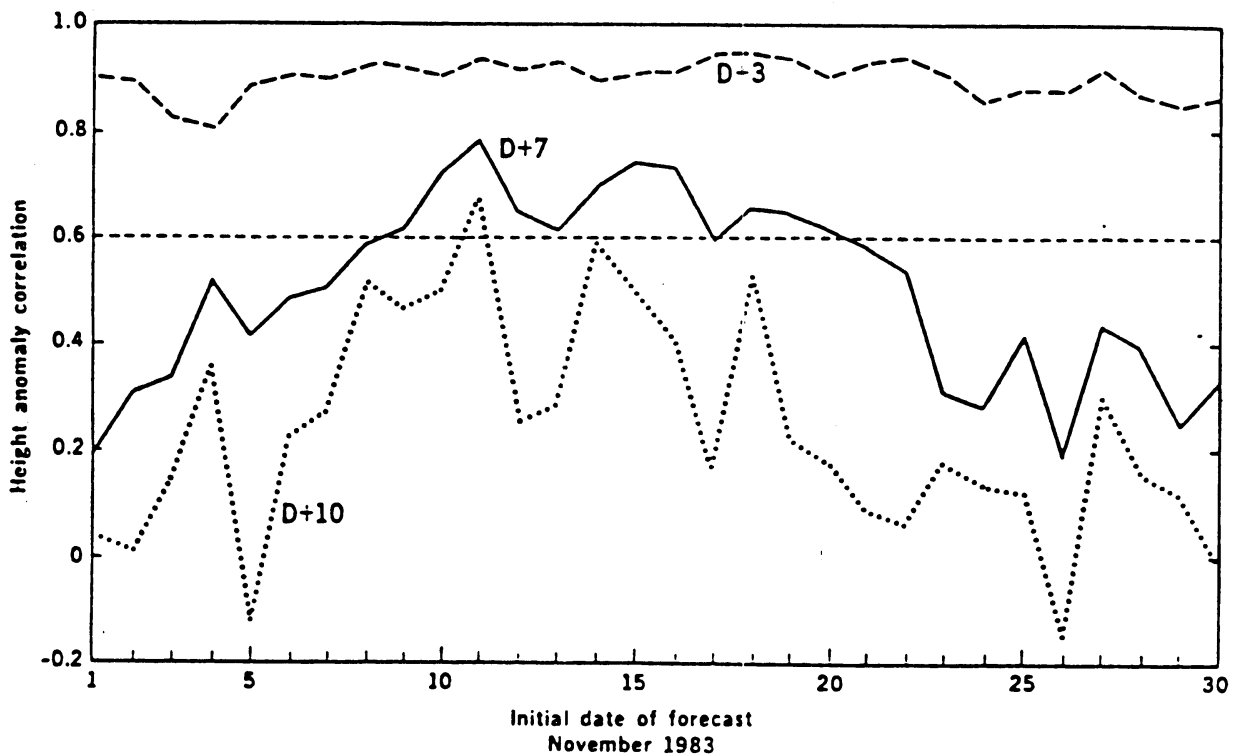


Fig. 11

Anomaliecorrelatie voor de hoogte voor 1000-200 mb en Noordelijk Halfrond (20° - 90° N) voor 3-, 7- en 10-daagse voorspelling met ECMWF-model.

Fig. 11 laat voor de maand november 1983 de AC zien van de hoogtevoorspellingen met het ECMWF-model van de modelvlakken tussen 200 en 1000 mbar op het Noordelijk halfrond ten noorden van 20° N. Een paar dingen vallen op: naarmate de voorspelperiode langer wordt neemt de variabiliteit van AC toe: de dag-10 kromme vertoont veel meer sprongen dan de dag-3 kromme. Bovendien is er, naast de dag-op-dag variabiliteit, een lang-

zame variatie waar te nemen: De AC voor dag 7 ligt tussen 10 en 20 november boven 0.6 en tussen 23 en 30 november rond de 0.3. Het model levert dus halverwege de maand 10 dagen lang bruikbare voorspellingen voor dag 7, terwijl deze aan het begin van de maand en gedurende de laatste week onbruikbaar zijn. Dit kan natuurlijk aan de onvolmaaktheid van de analyse en het model liggen en dat zal deels ook wel zo zijn maar dynamisch-meteorologen zijn er tegenwoordig van overtuigd dat dit deels ook het gevolg is van de toestand waarin de atmosfeer zelf verkeert. Als dat zo is, zou men kunnen proberen de prestatie van het model tevoren te voorspellen. Het zou voor de praktische bruikbaarheid van een modelvoorspelling heel belangrijk zijn als men met de voorspelling een schatting van zijn bruikbare voorspelperiode zou kunnen meegeven. Of zoals Tennekes en zijn medewerkers het in hun artikel "Forecasting Forecast Skill" uitdrukten: No forecast is complete without a forecast of forecast skill.

Over pogingen de prestatie van een model vooraf te voorspellen gaat onze laatste paragraaf van dit hoofdstuk.

13.3 Voorspelling van de modelprestatie

Het probleem van de prestatievoorspelling is niet nieuw. Al in de jaren zestig werden methoden ontwikkeld waarmee in principe op basis van de modelvergelijkingen uitspraken over de onzekerheid van een voorspelling gedaan kunnen worden. Deze methoden waren echter in de praktijk volstrekt onbruikbaar vanwege de enorme hoeveelheid rekentijd. De resultaten zijn nog niet indrukwekkend. Maar het ziet er naar uit dat we in de komende jaren de beschikking zullen krijgen over een operationeel bruikbaar systeem. Hieronder bekijken we enkele methoden die nu onderzocht worden.

Monte Carlo (MCF)

Als het waar is dat de lengte van de bruikbare voorspeltermijn afhangt van de gevoeligheid van de atmosfeer voor kleine storingen, dan kan men dat onderzoeken door kleine willekeurige verstoringen in de analyse aan te brengen. Een dergelijke methode wordt in de natuurkunde "Monte-Carlo methode" genoemd omdat de storingen "door het lot" worden bepaald. De methode werkt nu als volgt: neem de analyse van de uitgangstoestand en verstoort deze door het aanbrengen van heel kleine "toevallige" veranderingen. Het verschil tussen de verstoorte en de oorspronkelijke analyse moet zo klein zijn dat beide als analyse acceptabel zijn. Maak op deze wijze naast de oorspronkelijke analyse nog een tiental verstoorte analyses en produceer modelvoorspellingen op basis van elk van de

analyses. Kijk vervolgens hoe deze voorspellingen in de loop van de voorspeltermijn uiteenlopen. In fig. 12a is dit schematisch aangegeven. Is de atmosfeer in een toestand waarin hij erg gevoelig is voor storingen dan zullen de voorspellingen sterk uiteenlopen ("divergeren") en zal de bruikbare voorspeltermijn ook klein zijn. Grote divergentie van de voorspellingen voorspelt dus een korte bruikbare voorspeltermijn. Dit is een kostbare methode omdat voor elke voorspelling een aantal parallele modelruns gemaakt moeten worden. Experimenten met simpele modellen laten zien dat de methode enige waarde heeft maar tot operationele toepassing zal het niet gauw komen.

Lagged-average (LAF) (LAF)

Bij deze methode wordt gekeken naar de mate waarin opeenvolgende voorspellingen uiteenlopen. Dit sluit aan bij de intuïtie van meteorologen: Als de 3-daagse voorspelling, die vandaag is gemaakt, sterk afwijkt van de 4-daagse van gisteren dan zal die voorspelling wel niet erg betrouwbaar zijn. Komen ze wel goed overeen, dan vertrouwen we het wel. Schematisch is de methode weergegeven in fig. 12b Bij de eenvoudigste versie van deze methode wordt inderdaad de vandaag gemaakte voorspelling voor dag n vergeleken met de gisteren gemaakte dag $n+1$ voorspelling. Onderzoek in de VS en bij het ECMWF heeft laten zien dat deze methode voorspellende waarde heeft voor de kwaliteit van de verwachting. Bovendien is de methode goedkoop: Extra modelruns hoeven niet gemaakt te worden.

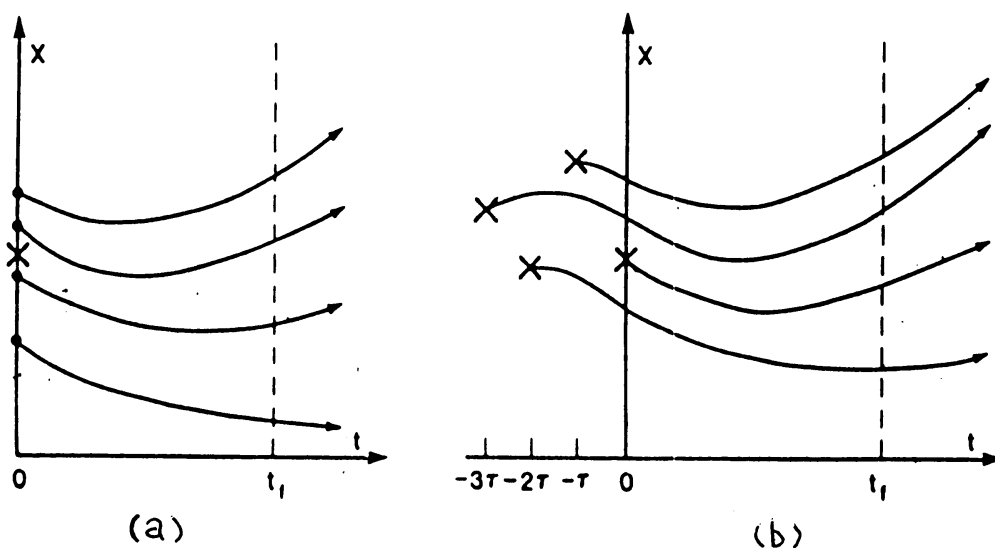


Fig. 12

Schematische voorstelling van (a) Monte Carlo methode;

(b) Lagged-Average methode

Stromingspatroonherkenning

De tot nu toe besproken methoden zijn gebaseerd op het empirisch vaststellen van de gevoeligheid van de atmosfeer op kleine verstoringen. Ze geven geen inzicht in de vraag welke atmosferische toestanden nu eigenlijk gevoelig zijn. Er is op het ECMWF ook gekeken naar de mogelijkheid om atmosferische stromingspatronen te herkennen die geringe of grote voorspelbaarheid hebben. Intuïtief menen we te weten dat geblokkeerde situaties beter voorspelbaar zijn dan West-circulaties. Maar is dat ook zo? Op het ECMWF heeft men een periode van 2 jaar (1980/81) opgesplitst in deelperiodes met relatief lage dan wel hoge voorspelbaarheid en heeft men vervolgens bekeken of daar een dominerende synoptische situatie bij behoorde. Men vond dat hoge dag 5 en 7 scores vooral voorkwamen in geblokkeerde situaties of bij persistente cut-off lows en lage dag 5/7 scores bij zonale west-circulatie.

Na deze eerste aanwijzingen heeft men een methode ontwikkeld om synoptische circulatiepatronen te herkennen en op basis van statistische relaties de bijbehorende score te berekenen. In sommige delen van het Noordelijk Halfrond werkt deze methode goed, in andere weer niet. Hieraan moet duidelijk nog meer onderzoek verricht worden.

Persistentie.

Onderzoek heeft laten zien dat er een samenhang is tussen persistentie en voorspelfout: Naarmate er minder verandert in het stromingspatroon gedurende de voorspeltermijn, voorspelt het model ook beter. Ook deze regel lijkt in sommige gebieden weer beter op te gaan dan in andere.

Voorbeeld

Het lijkt erop dat elk van de hierboven besproken methoden wel enige voorspellende waarde hebben en dat het antwoord wellicht moet komen van een combinatie van methoden. Op deze basis voert het ECMWF nu experimenten uit. Fig. 13 laat een voorbeeld zien van de voorspelde (dikke lijn) en opgetreden (dunne lijn) anomaliecorrelatie AC voor de 9-daagse voorspelling van de 500 mbar hoogte gedurende de winter 1985/86. Het linkerplaatje geldt voor het Europese gebied, het rechter voor het centrale deel van de Stille Oceaan. Vooral in het laatste plaatje zijn spectaculaire successen aan te wijzen, maar er moet nog veel verbeteren voordat de methode operationeel bruikbaar wordt.

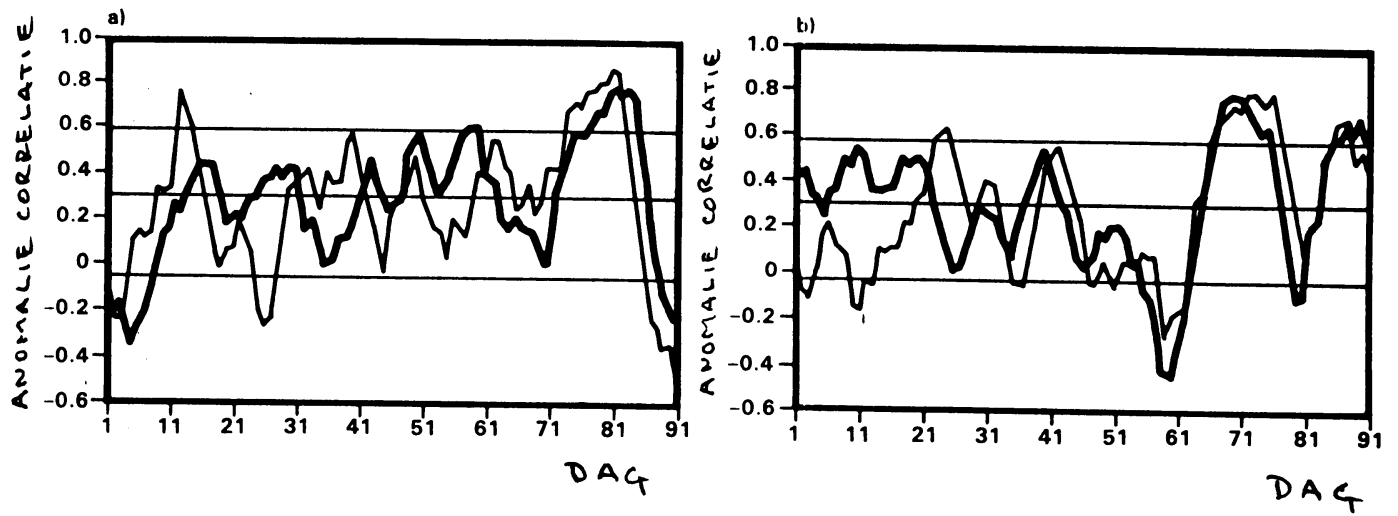


Fig. 13

Voorspelde (dikke lijn) en opgetreden (dunne lijn) 500 mbar AC voor de 9-daagse voorspelling voor de winter 1985/86

a) Europa

b) Stille Oceaan

Appendix 1Complexe getallen

Om ook de wortel van een negatief getal te kunnen trekken is in de wiskunde het symbool $i = \sqrt{-1}$ ingevoerd.

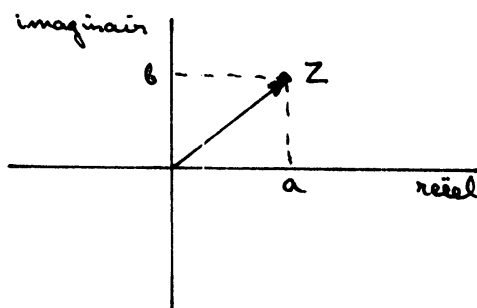
Dan wordt bijv: $\sqrt{-4} = 2i$. Dit heet een imaginair getal. Dit leidt tot een nieuw soort getallen: ccomplexe getallen, die bestaan uit een reëel deel en een imaginair deel:

$$Z = a + bi$$

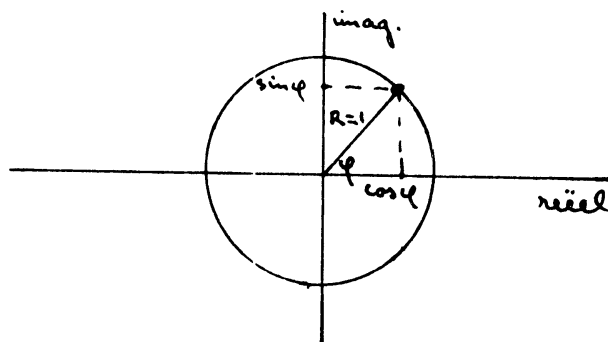
Bij een complex getal Z hoort een "complex toegevoegde" Z^*

$$Z^* = a - bi$$

Spoedig bleek dat complexe getallen zeer bijzondere eigenschappen hebben, die allerlei berekeringen sterk vereenvoudigen. Om dat in te zien geven we een complex getal weer als een punt in het complexe vlak, d.w.z. het reële deel in de x-richting en het complexe deel in de y-richting.



Kijken we naar de punten op een cirkel met straal $r = 1$ in het complexe vlak



Het complexe getal Z kan nu geschreven worden als:

$$Z = \cos \phi + i \sin \phi$$

Het merkwaardige is nu dat dit ook geschreven kan worden als:

$$Z = e^{i\phi}$$

Dit leidt dus ook tot de opmerkelijke en heel belangrijke formule

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

Om te laten zien dat deze formule klopt berekenen we de afgeleide naar ϕ :

$$\frac{d}{d\phi} e^{i\phi} = i e^{i\phi}$$

Dit moet dan gelijk zijn aan:

$$\frac{d}{d\phi} (\cos \phi + i \sin \phi) = -\sin \phi + i \cos \phi$$

Welnu:

$$i e^{i\phi} = i(\cos \phi + i \sin \phi) = -\sin \phi + i \cos \phi$$

Klopt!

Wat is nu het aantrekkelijke van deze formule? Het aantrekkelijke is dat het rekenen met e -machten veel eenvoudiger is dan rekenen met \cos en \sin .

Complexe getallen komen in de fysische werkelijkheid niet voor. Het zijn zuiver wiskundige symbolen. Hoe kunnen we er dan toch mee werken in de natuurkunde? Steeds als we gaan rekenen aan een golfvormig verschijnsel bijv.:

$$F(x,t) = F_0 \cos k(x - U_0 t)$$

vervangen we het door het bijbehorende complexe getal:

$$F(x,t) \rightarrow F_0 e^{ik(x - U_0 t)}$$

Vervolgens voeren we de berekeningen uit met het complexe getal. Als we dan weer willen weten wat dit in de fysische werkelijkheid betekent, nemen we van het eindresultaat weer het reële deel.

Dit alles betekent dat we vanaf nu de uitdrukking

$$F(x,t) = F_0 e^{ik(x-U_0 t)}$$

kunnen beschouwen als een golf die zich met de snelheid U_0 in de x -richting voortplant. $F(x,t)$ is dan ook een oplossing van de lineaire advectievgl:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + U_0 \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (\text{Laat zien!})$$

Laten we nu kijken naar de Fourieranalyse in complexe notatie. Beschouw een interval $[0, L]$

Iedere continue differentieerbare (kortom: zich fatsoenlijk gedragende) functie $F(x)$ op $[0, L]$ kan worden geschreven als

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos k_n x + B_n \sin k_n x)$$

met $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{2\pi n}{L}$

grotere n = kleinere golfjes.

De functie wordt dus ontleed in een oneindig aantal cos- en sin-golfjes. In complexe notatie kunnen we nu schrijven:

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{ik_n x}$$

Let op: deze reeks loopt van $-\infty$ tot $+\infty$!
De "amplitudes" F_n zijn ook complex en wel

$$F_n = \frac{1}{2} (A_n - i B_n)$$

$$F_{-n} = \frac{1}{2} (A_n + i B_n) \equiv F_n^* \quad n > 0$$

$$F_0 = A_0$$

Probeer te bewijzen : dat de reële Fourierreeks en de complexe Fourierreeks identiek zijn.

CHAOS: de revolutie naar een nieuwe wetenschap

Zijn de fysici bijna klaar met hun verklaring van de wereld en staat straks de alles omvattende formule op een T-shirt? Het lijkt er meer op dat er een geheel nieuwe wetenschap groeit die zich bezighoudt met chaos. Maar dan chaos die zichzelf organiseert.

DE WETENSCHAP van de 20ste eeuw heeft spectaculaire successen geboekt bij het blootleggen en verklaren van de geheimen van de natuur, uiteenlopend van de structuur van het heelal tot de bouwstenen van het atoom en de fundamentele krachten die het heelal beheersen. Het optimisme onder de fysici is zelfs zo groot dat directeur Leon Lederman van Fermilab bij Chicago onlangs verklaarde: „We hopen het gehele heelal te kunnen verklaren in één simpele formule die op je T-shirt past.”

Zo'n uitspraak klinkt alsof de fysici bijna klaar zijn met hun verklaring van de wereld en zich binnenkort met iets heel anders zullen moeten gaan bezighouden. Misschien gebeurt dat ook, maar dan om een heel andere reden. De fysica heeft een nieuw onderzoekerrein ontdekt, dat veel dichterbij het dagelijkse leven ligt, maar ook veel raadselachtiger is, dan de abstracte wereld van elementaire deeltjes.

In laboratoria over de hele wereld groeit een nieuwe wetenschap over dingen waar de traditionele wetenschap aan voorbij is gegaan. De nieuwe onderzoekers bestuderen schijnbaar triviale zaken als wolken, kokend water, sigaretterook, wapperende vlaggen, druppelende kranen en slingerende pendules. Ze bestuderen chaos, en ontdekken daarin vreemde ordeningen, die een nieuw beeld van het heelal geven.

De nieuwe wetenschap die chaos wordt genoemd, is vrijwel onopgemerkt in de jaren zeventig ontstaan toen wiskundigen, fysici, astronomen, biologen en economen, geholpen door de nieuwe mogelijkheden van de personal computer, wonderlijke ordeningen en patronen begonnen te ontdekken in gecompliceerde, schijnbaar chaotisch verlopende processen.

Een beroemd voorbeeld is de zogeheten Bénard-instabiliteit. Deze treedt op als een pan water wordt verwarmd. Aanvankelijk blijft het van onderen warmer wordende water in een bijna-evenwichtstoestand, waarbij het omhoog komen ervan door de viscositeit van de koelere bovenste waterlagen wordt belet.

Als het temperatuurverschil tussen de onderste en bovenste lagen een bepaalde kritische waarde bereikt, wordt het diepere water plotseling onstabiel en begint het met kracht naar het oppervlak te stromen. Onder de juiste condities organiseert de convectiestroom zich dan spontaan tot een wonderlijk regelmatig patroon dat zowel de vorm van rollen als van zeshoekige cellen kan aannemen.

Waarschijnlijk hebben weinig mensen ooit opgemerkt dat er in een pan water iets vreemds gebeurde. Maar fysici zijn er stomverbaasd over. Want hoe kunnen miljarden watermoleculen regelmatig patronen vormen over afstanden die vele malen groter zijn dan de krachtvelden tussen die watermoleculen? Het is even onvoorstelbaar als een massa mensen in Amsterdam die plotseling zonder enige waarneembare communicatie in de pas begint te lopen met een massa mensen in Sydney.

„Het blijkt dat er vlak achter een façade van orde een griezelig soort chaos kan schuilen — en dat er toch diep in die chaos een nog griezeliger soort orde schuilt”, heeft de Amerikaanse mathematicus Douglas Hofstadter, schrijver van *Gödel, Escher, Bach*, ooit gezegd.

Nobelprijswinnaar Ilya Prigogine beschouwt verschijnselen zoals die in de pan water als orde die spontaan uit chaos ontstaat. Hij komt daarmee op gespannen voet te staan met de tweede hoofdwet van de thermodynamica. Volgens deze vol strikken en valkuilen zittende, enigszins naar menselijke afkomst ruikende wet is het heelal sinds zijn ontstaan in de *Big Bang* via een

toenemende wanorde ontstuitbaar op weg naar een uiteindelijke 'warmtedood', waarbij alle sterren en sterrenstelsels zullen zijn uitgedoofd.

In de toenemende *entropie*, ofwel chaos, van het heelal kunnen plaatselijk wel hogere ordeningen ontstaan, maar in de loop van de tijd vervlakken en verdwijnen ze weer als zandkastelen op de vloedlijn van de zee. Kortom het heelal is gedoemd te eindigen in chaos, zo is de gangbare opvatting in de wetenschap.

Niet iedereen is het eens met dit onaantastbaar lijkende axioma van de 20ste eeuwse wetenschap. De Britse theoretische fysicus Paul Davies, hoogleraar aan de universiteit van Newcastle, auteur van *God and the New Physics* en het onlangs verschenen *The Cosmic Blueprint*, voert in *New Scientist* van 17 december 1987 aan dat het beeld van een langzaam maar zeker stervend heelal vlakweg in strijd is met de feiten. Hij voert aan dat het heelal, in plaats van te vervallen tot chaos, juist van chaos tot toestanden van hogere organisatie en complexiteit evolueert. „Deze kosmische vooruitgang bezit een globale tijdrichting die tegengesteld is aan de thermodynamische tijdrichting.”

Blinde krachten

Davies constateert dat het heelal volgens het traditionele wetenschappelijke beeld alleen maar een willekeurige verzameling deeltjes is waarop blinde krachten werken. Als dat zo is, zegt hij, „dan is het een groot mysterie hoe een schijnbaar richtingloze verzameling van passieve dingen samenzevert om de ingewikkelde structuur en complexe organisatie tot stand te brengen die in de natuur wordt aangetroffen.”

De 'samenzwering' van Davies bezit een fundamenteel kenmerk waarover tot zijn verwondering zelden door zijn collega's wordt gepraat: de organisatorische complexiteit van het heelal neemt toe met de tijd. Hij voert op gezag van de meeste kosmologen aan dat het heelal een vormloos begin heeft gehad en misschien wel is ontstaan uit lege ruimte die later 'materialiseerde'. „Alle structuur en complexiteit die we in de wereld van vandaag zien, is na de oerfase in een progressieve opeenvolging van stappen ontstaan.”

De evolutie van het heelal vertegenwoordigt volgens Davies een fundamenteel principe van de natuur dat tot dusver door fysici en kosmologen is veronachtzaamd. Hij zoekt voor deze stelling steun bij Iliya Prigogine en de filosoof Karl Popper, die de laatste jaren soortgelijke uitspraken hebben gedaan. Popper noemt de creativiteit van de natuur zelfs „het grootste raadsel van de kosmologie.” Volgens Davies wordt de tweede hooftwet van de thermodynamica door deze onverklaarbare creativiteit niet geschonden. De wet schiet eenvoudig tekort, doordat ze geen rekening houdt met zoiets als zelf-organisatie en complexiteit.

Chaos en zelf-organisatie zijn twee kanten van dezelfde medaille. De eerder genoemde Bénard-instabiliteit is er slechts één voorbeeld van, geschikt om in een natuurkunde-practicum te demonstreren. Nu een hele nieuwe generatie onderzoekers zich met deze nieuwe wetenschap gaat bezighouden, blijken overal in onze wereld zulke wonderlijke processen aan de gang te zijn. Ze zijn waarneembaar op andere planeten, zoals de Rode Vlek op Jupiter die in feite een gigantische, zichzelf in stand houdende maalstroom in de dichte atmosfeer van de reuzenplaneet is. Of het puin van een kosmische catastrofe dat zich tot de ringen rond Saturnus heeft geordend.

Het raadselachtigste voorbeeld van zelforganisatie is de ontwikkeling van een in complexiteit en differentiatie groeiend embryo uit een streng DNA waarin een chemische 'blauwdruk' ligt besloten. De morfogenese die een klompje van enkele cellen tot een lichaam met voor elke levende soort kenmerkende vormen — armen, vleugels, vinnen, klauwen — doet uitgroeien, is nog grotendeels een gesloten boek.

Zelf-organiserende systemen hebben als kenmerk dat ze niet-lineair zijn. In een lineair systeem is een verandering evenredig aan de oorzaak van de verandering; in een niet-lineair systeem is dat niet het geval. Een lineair systeem is niet meer dan de som van zijn samenstellende delen, maar een niet-lineair systeem leidt als het ware een eigen leven. Het kan van een lokale gebeurtenis uitgroeien tot een grootschalige verandering. Een file auto's op een verkeersweg verwarmt de omringende lucht, waardoor deze opstijgt en uiteindelijk condenseert tot een wolk die door zijn eigen dynamiek steeds meer lucht opzuigt en uitgroeit tot er een plensbui uit valt.

Onhandelbaar

Niet-lineaire systemen zijn lastige, soms zelfs totaal onhandelbare dingen om te berekenen. Volgens Davies is dat de reden waarom fysici en andere onderzoekers altijd meer aandacht hebben besteed aan eenvoudige lineaire systemen en daardoor ongemerkt tot een sterk reductionistisch wereldbeeld kwamen. Ze dachten gecompliceerde verschijnselen in de natuur altijd te kunnen verklaren uit hun samenstellende delen. Zo daalden ze tenslotte af tot de diepste fundamenten van de natuur — de elementaire deeltjes en de krachten die er verband mee houden. De termen van de Ledermans formule van het heelal die op een T-shirt past.

De stille revolutie van een reductionistische naar een meer holistische we-

tenschap wordt boeiend beschreven in het onlangs verschenen boek *Chaos — making a new science*, van wetenschapsredacteur James Gleick van The New York Times. Een van de grootste fiasco's van de traditionale wetenschapsbeoefening wordt beschreven onder de titel *Het Vlinder Effect* en gaat over de onmogelijkheid het weer op een langere termijn dan hooguit een week te voorspellen.

In de jaren vijftig en zestig bestonden er hooggespannen verwachtingen van weersverwachtingen op een termijn van enkele weken tot zelfs meer dan een maand. Het optimisme was vooral gebaseerd op de komst van satellieten die het weer over de hele aardbol konden overzien en van computers die de gecompliceerde vergelijkingen voor het vooruitberekenen van het weer snel genoeg konden doorrekenen om niet door het weer zelf te worden ingehaald.

Alle projecten voor dergelijke langetermijnvoorspellingen liepen uit op een fiasco. De meteorologen en hun computers maakten meestal na meer dan een dag of vijf vooruitberekenen grote fouten in hun voorspellingen. Uit nader onderzoek bleek dat die miskleunen het gevolg waren van heel kleine storinkjes, die in het begin van de rekenperiode vaak niet eens waarneembaar waren, maar zich snel uitbreidden en het weerpatroon drastisch veranderden. Het was alsof een vlinder die vandaag de lucht in Peking beroert daardoor volgende maand een wolkbreuk in New York teweeg brengt. Officieel werd het verschijnsel 'gevoelige afhankelijkheid van begincondities' genoemd.

Het belangrijkste aspect van de nu ontluikende chaos-wetenschap is dat we complexiteit beginnen te zien als het wezen van onze wereld, in plaats van als een afwijking, zegt Davies. Als een goed voorbeeld van deze nieuwe filosofie noemt hij de uitvinding van zogeheten *fractals* door de wiskundige Benoit Mandelbrot, die verbonden is aan het Thomas J. Watson Research Laboratorium van IBM in Yorktown Heights, New York.

Fractals zijn meetkundige structuren met een in zekere zin oneindige onregelmatigheid en complexiteit, hoewel hun samenstellende delen gelijkvormig zijn. Elk deel van een fractal ziet er bij vergroting hetzelfde uit als het geheel. Iedereen kan tot op zekere hoogte zelf fractals maken. Teken bijvoorbeeld een gelijkzijdige driehoek; zet op de zijden driehoeken waarvan de zijden een derde van de lengte van de zijden van de eerste driehoek bedragen; daarop weer kleinere driehoeken volgens dezelfde regels, enzovoort. Het resultaat is een figuur waarvan de omtrek steeds langer wordt. Theoretisch kan hiermee worden doorgedaan tot in oneindigheid. Behalve driehoeken kunnen ook andere basisfiguren worden gekozen.

Het wonderlijke van fractals is dat ze bij ver genoeg gaande herhaling van de verdelingsregels steeds meer op vormen in de natuur beginnen te lijken. Er ontstaan frappante gelijkenissen met grillig gevormde eilanden, bergen, bomen — niet bestaande landschappen die er zo echt uitzien dat ze nu steeds meer in de filmindustrie worden gebruikt.

Mandelbrot zelf is gebiologeerd door de grillige kusten van eilanden. Hij heeft ooit geprobeerd de lengte van de kustlijn van Engeland vast te stellen. De uitkomst was heel wonderlijk. Alle metingen wezen uit dat de lengte van de

kustlijn zo groot en zo slecht te bepalen is, dat ze volgens Mandelbrot maar het best als oneindig kan worden beschouwd.

Sommige onderzoekers geloven dat fractals een rol spelen in de natuur en in ons eigen lichaam. Bijvoorbeeld in de eindeloze vertakkingen van steeds kleinere bloedvaten. Of in de meest efficiënte verhouding tussen de omvang van onze longen en het oppervlak van de longblaasjes dat even groot is als een tennisveld. Als fractals een rol spelen in de levende natuur, moet er ook een wiskundig principe schuilgaan in de biologische evolutie.

Sommige onderzoekers gebruiken de fysica van dynamische systemen voor het bestuderen van het menselijk immuunsysteem met zijn miljarden componenten en zijn leervermogen, geheugen en patroonherkenning. Tegelijkertijd bestuderen ze ook de evolutie, in de hoop universele aanpassingsmechanismen te vinden. De makers van zulke modellen zien snel structuren ontstaan die zichzelf repliceren en via natuurlijke selectie evolueren.

„Evolutie is chaos met terugkoppeling”, zegt de Amerikaanse fysicus Joseph Ford van het Georgia Institute of Technology in het boek *Chaos van James Gleick*. „God dobbelt met het heelal”, zegt hij in antwoord op Albert Einsteins beroemde vraag. „Maar het zijn dobbelstenen die aan één kant zijn verzwaaard. En het belangrijkste doel van de fysica is nu uit te zoeken volgens welke regels ze werden verzwaaard en hoe we ze voor onze eigen doeleinden kunnen gebruiken.”

HANS FRIEDEMAN