

energiesdissipatie van  
monochromatische  
zeegolven in de turbulente  
bodengrenslaag

M. Visser

technische rapporten; TR- 104

# ENERGIEDISSIPATIE VAN MONOCHROMATISCHE ZEEGOLVEN

## IN DE TURBULENTE BODEMGRENSLAAG

door Marijke Visser



Bij de voorpagina:

Leonardo da Vinci maakte zo'n vijfhonderd jaar geleden een tekening van water dat rustig of onstuimig langs obstakels stroomt en door een opening in een vijver uitstroomt; de bewegingen ervan zijn met een scherpe nauwkeurigheid geanalyseerd.

Overgenomen uit Judson, 1982.

## INHOUD

Voorwoord	6
Samenvatting	7
Inleiding	8
Hoofdstuk 1: De Bewegingsvergelijkingen	12
1.1 continuïteitsvergelijking	12
1.2 impulsvergelijking	13
1.3 energievergelijking	14
Hoofdstuk 2: De Potentiaalstroming	16
2.1 bewegingsvergelijkingen	16
2.2 linearisatie	18
2.3 het snelheidsprofiel	19
2.4 energie	21
Hoofdstuk 3: Viscositeit	23
3.1 bodemgrenslaagvergelijkingen	24
3.2 het snelheidsprofiel	26
3.3 de energiedissipatie	28
Hoofdstuk 4: De Turbulente Bodemgrenslaag	29
4.1 ensemblemiddelen en ergodiciteit	29
4.2 turbulente bodemgrenslaagvergelijkingen	30
4.3 de wrijvingsnelheid	32
4.4 bodemruwheid	33
4.5 de energiedissipatie	36

Hoofdstuk 5: Turbulentiemodellen	39
I: Draglaw	39
5.1 de energiedissipatie	39
II: Lineaire Eddyviscositeit	39
5.2 beschrijving van het model	39
5.3 het snelheidsprofiel	42
5.4 de bepaling van de wrijvingsnelheid	44
5.5 de energiedissipatie	46
5.6 draglaw en eddyviscositeit	47
Hoofdstuk 6: Resultaten en Conclusies	48
6.1 de wrijvingsnelheid $u_*$	48
6.2 de wrijvingsfactor $f_w$	49
6.3 de energiedissipatie $\langle E \rangle$	52
6.4 conclusies	59
Notatielijst	60
Literatuurlijst	62

Voorwoord

In het kader van mijn wiskundestudie aan de Universiteit van Amsterdam (afstudeerdocent prof.dr. E.M. de Jager) heb ik vijf maanden stage gelopen bij de afdeling oceanografisch onderzoek van het KNMI in De Bilt. Deze scriptie is tijdens mijn stage tot stand gekomen.

Hierbij wil ik Nanne Weber, die mij begeleid heeft, en Gerbrand Komen bedanken voor alle steun, kritiek en adviezen die zij mij gegeven hebben. Ook wil ik alle anderen die mij met raad en daad hebben bijgestaan bedanken voor hun bijdrage aan het geheel.

Marijke Visser  
De Bilt, januari 1988.

### Samenvatting

Zeegolven op ondiep water verliezen energie ten gevolge van wrijving aan de bodem. Daar ontstaat namelijk een oscillerende turbulente grenslaag. We kunnen de energiedissipatie in deze grenslaag berekenen. Het resultaat is echter afhankelijk van de gekozen parametrisatie van de turbulentie.

We behandelen twee parametrisaties: de draglaw en het lineaire eddyviscositeitsmodel. Vervolgens onderzoeken we hoe de energiedissipatie en andere grootheden afhangen van de verschillende parameters. Vergelijking van de beide modellen toont, dat bij een gegeven turbulentieniveau de draglaw tot hogere dissipaties leidt dan het eddyviscositeitsmodel.

Grant & Madsen (1979, 1986) bepalen met het eddyviscositeitsmodel een snelheidsprofiel waarin de Kelvinfuncties voorkomen. Zij passen vervolgens een benadering toe waardoor ze het logaritmische snelheidsprofiel vinden. Ook Jonsson (1980) rekent met het logaritmische profiel. Als we echter doorrekenen met de Kelvinfuncties vinden we een kleinere wrijvingsfactor. Het verschil wordt groter naarmate de bodemruwheid toeneemt.

De berekende energiedissipatie wordt vergeleken met metingen in de zuidelijke Noordzee (Yan & Bouws, 1987). Voor realistische waarden van de bodemruwheid (ribbelhoogte 2 tot 4,5 cm) vinden we een redelijke overeenstemming met het eddyviscositeitsmodel.

## Inleiding

In deze scriptie zal ik de golfbeweging in ondiep water behandelen. Het uiteindelijke doel hiervan is de berekening van het energieverlies van enkelvoudige golven in de turbulente bodemgrenslaag.

In het eerste hoofdstuk behandel ik de bewegingsvergelijkingen die in de andere hoofdstukken zullen worden gebruikt. Vervolgens geef ik in hoofdstuk 2 een overzicht van de potentiaalstroming. Daarna wordt de bodemgrenslaag beschreven, eerst in het visceuze (hoofdstuk 3) en daarna in het turbulente geval (hoofdstuk 4). In hoofdstuk 5 zal ik tenslotte de twee belangrijkste turbulentiemodellen geven, namelijk de lineaire eddyviscositeit en de draglaw. Hoofdstuk 6 zal bestaan uit resultaten en conclusies. Allereerst zal ik echter een globale beschrijving geven van de golfbeweging.

De volgende beschrijving is ontleend aan Groen & Dorrestein (1976). Deze beschrijving is alleen juist voor enkelvoudige (monochromatische), stationaire golven met een zeer lage steilheid. De steilheid van een golf is de verhouding tussen golfhoogte en golflengte (zie figuur 1).

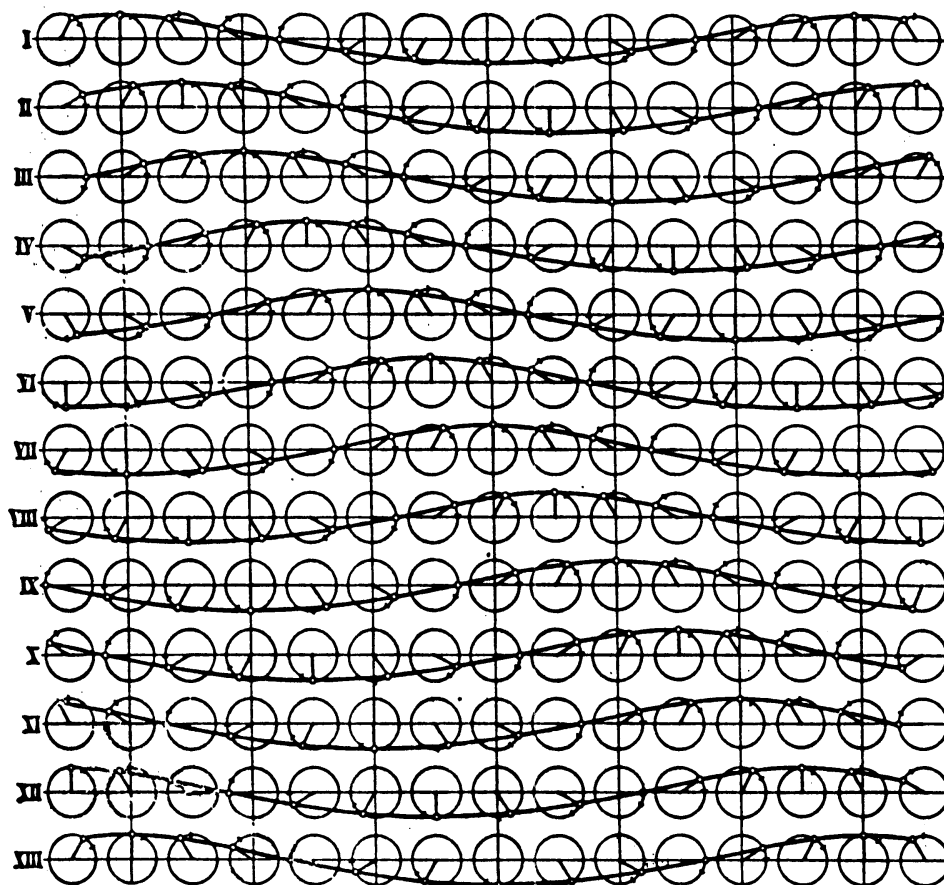


figuur 1: Profiel van een enkelvoudige golf,  
 H: golfhoogte,  $\lambda$ : golflengte.  
 Overgenomen uit Groen & Dorrestein (1976).

Als er golven over het water gaan, bewegen de waterdeeltjes vanzelfsprekend op en neer. Er blijkt echter dat de waterdeeltjes ook heen en weer bewegen. In feite beschrijven de waterdeeltjes kringen. In diep water zijn deze kringen nagenoeg cirkels. Strikt genomen is de baan van een waterdeeltje niet gesloten, maar in het geval van een geringe steilheid is de afwijking zo klein, dat we de baan als gesloten mogen beschouwen.



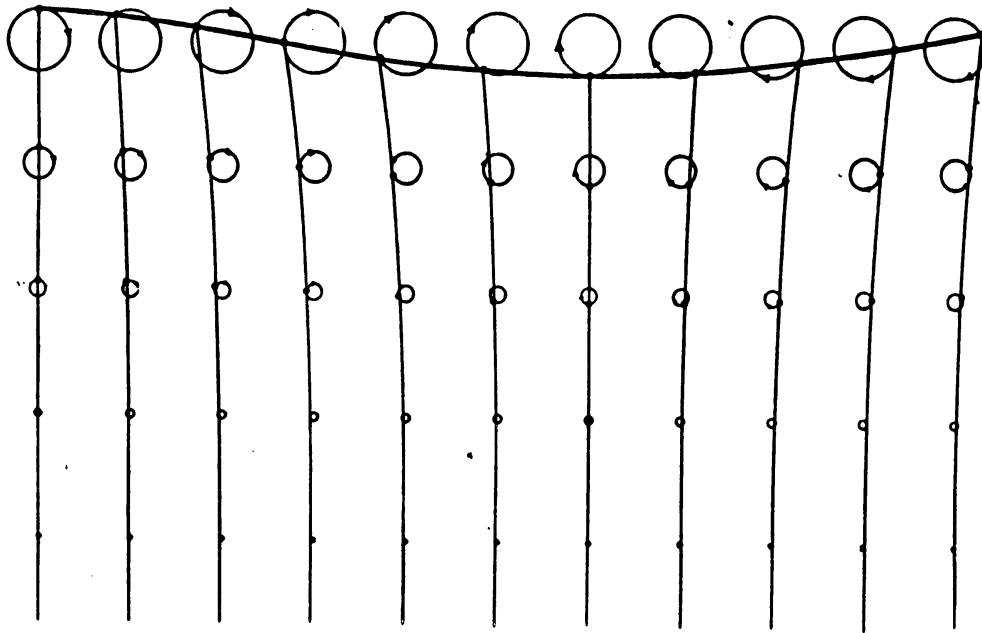
Bij een enkelvoudige golving bewegen alle waterdeeltjes aan het oppervlak in cirkels. Deze cirkels hebben een middellijn gelijk aan de golfhoogte. Elk deeltje doorloopt zijn cirkelbaan in dezelfde tijd, de golfperiode. Als de top van een golf passeert is het waterdeeltje op



figuur 2: Voortschrijding van een enkelvoudige golfbeweging.  
Dertien momentopnamen met een tijdsverschil van telkens  $1/12$  periode.  
Overgenomen uit Groen & Dorrestein (1976).

zijn hoogste punt; het heeft dan een voorwaartse beweging. Als het golfdal passeert is het op zijn laagste punt en heeft een teruggaande beweging. In figuur 2 is het verband te zien tussen de golfbeweging en de beweging van de waterdeeltjes.

Niet alleen het water aan het oppervlak beweegt, maar ook de waterdeeltjes daaronder. De deeltjes daar doen mee aan de cirkelbeweging. Met toenemende diepte worden de cirkels echter kleiner (zie figuur 3). Op een diepte van  $1/9 \lambda$  is de middellijn van de cirkel nog maar de helft

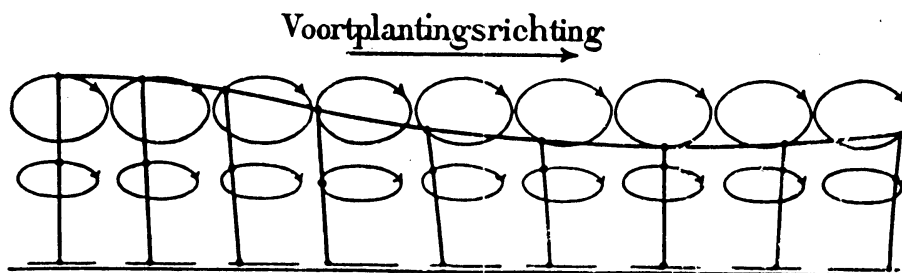


figuur 3: Banen van waterdeeltjes op verschillende diepten bij een enkelvoudige golf in diep water. De middelpunten van de cirkeltjes verschillen steeds  $1/9$  van de golflengte in hoogte.

Overgenomen uit Groen & Dorrestein (1976).

van die aan het oppervlak. Beneden een diepte van  $\frac{1}{2} \lambda$  bedragen de bewegingen van de waterdeeltjes al minder dan 4% van de bewegingen aan het oppervlak. We kunnen nu specificeren wanneer we van diep water zullen spreken. Aangezien er beneden een diepte van  $\frac{1}{2} \lambda$  weinig meer gemerkt wordt van de golfbeweging, zullen we het water diep noemen als het dieper is dan  $\frac{1}{2} \lambda$ . Dit betekent, dat water met een diepte van 50 m diep is voor golven met een golflengte van minder dan 100 m, maar niet voor langere golven.

In ondiep water zou het water aan de bodem cirkeltjes van een merkbare straal moeten beschrijven. Dit is echter onmogelijk, omdat het water op de bodem niet in verticale richting kan bewegen. De waterdeeltjes kunnen alleen maar langs de bodem heen en weer gaan. In ondiep water bewegen de deeltjes dan ook niet in cirkels, maar beschrijven ze afgeplatte kringen. Hoe dichterbij de bodem, hoe korter en hoe platter deze kringen zijn (zie figuur 4).

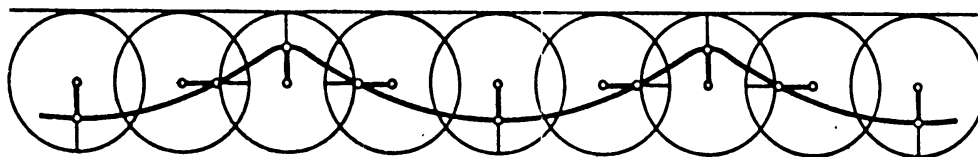


figuur 4: Banen van waterdeeltjes bij een enkelvoudige golf in ondiep water.

Overgenomen uit Groen & Dorrestein (1976).

Aan het oppervlak zijn de kringen het minst afgeplat, maar ook daar zijn het geen cirkels. De golven voelen de bodem als het ware. Golven op ondiep water worden gekenmerkt door een grotere horizontale beweging dan golven van dezelfde hoogte op diep water. Hierdoor zijn ze, voor zwemmers, gevaarlijker.

In figuur 1 is het golfprofiel geschetst als een sinusoïde. Zo ziet het golfprofiel er echter alleen uit als de steilheid gering is ( $H/\lambda < 1/40$ ). Bij een toenemende steilheid worden de toppen spits en de dalen breder. Het golfprofiel lijkt dan meer op een trochoïde (figuur 5). Als de steilheid  $H/\lambda$  groter wordt dan  $1/7$ , worden de golven onstabiel en breken ze.



figuur 5: Trochoïde

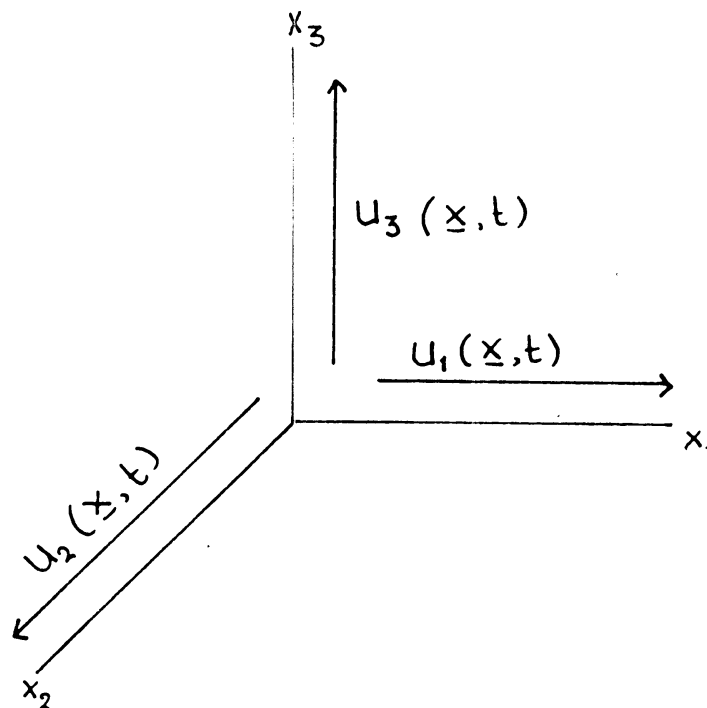
Overgenomen uit Groen & Dorrestein (1976).

In het vervolg van deze scriptie beperk ik me tot enkelvoudige golven van een geringe steilheid op ondiep water van een constante diepte.

## Hoofdstuk 1

De bewegingsvergelijkingen

In dit hoofdstuk worden de belangrijkste vergelijkingen van de vloeistofdynamica behandeld. Dit zijn de continuïteitsvergelijking, de impulsvergelijking en de vergelijking voor de mechanische energie, waaruit we de energiedissipatie kunnen bepalen. In dit hoofdstuk gaan we uit van een driedimensionaal systeem met plaatscoördinaten  $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$  en snelheidscomponenten  $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ .

1.1. Continuïteitsvergelijking

De totale hoeveelheid massa van een systeem blijft behouden. De massadichtheid (= massa per volume-eenheid) kan alleen veranderen door middel van massatransport. Dit wordt weergegeven in de continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \quad (1.1)$$

waarbij:  $\rho$ : massadichtheid  
 $\underline{u}$ : snelheidsvector  
 $t$ : tijd  
 $\nabla$ : gradiëntoperator  $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ .

Als de vloeistof incompressibel is (d.w.z. zeggen  $\rho$  is constant) gaat (1.1) over in:

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (1.2)$$

Bij constante temperatuur is water incompressibel. In het vervolg gebruiken we de continuïteitsvergelijking in de vorm (1.2).

### 1.2. Impulsvergelijking

De impuls van een systeem verandert onder inwerking van uitwendige krachten. Omdat impuls een vectoriële grootheid is, levert dit drie vergelijkingen, voor elke richting één. De impulsvergelijking (in vectornotatie) luidt als volgt:

$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\nabla p + \rho \underline{g} + \underline{f} \quad (1.3)$$

waarbij:  $p$ : druk  
 $\underline{g}$ : gravitatievector  $\underline{g} = (0,0,-g)$   
 $g$ : gravitatieversnelling  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$   
 $\underline{f}$ : resultante van de krachten t.g.v. de moleculaire viscositeit.

Een vloeistof heet visceus als beweging in de vloeistof gepaard gaat met het optreden van schuifkrachten. De viscositeit  $\mu$  is de evenredigheidsconstante tussen deze schuifkrachten en de snelheidsgradiënt. In het geval van een visceuze vloeistof wordt  $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$  gegeven door:

$$f_i = \sum_{j=1}^3 2\mu \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} \quad i = 1,2,3 \quad (1.4)$$

waarbij:  $\mu$ : viscositeit  
 $\underline{e}$ : deformatietensor.

De deformatietensor  $\underline{e}$  beschrijft de vervorming van een elastisch medium en wordt gedefinieerd door:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1,2,3 \quad (1.5)$$

Is de vloeistof niet visceus dan geldt

$$\underline{f} = 0 \quad (1.6)$$

Voor een visceuze incompressibele vloeistof leveren (1.2) t/m (1.5) de Navier-Stokes vergelijkingen (in vectornotatie):

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \underline{u} \quad (1.7)$$

waarbij:  $\nu$ : kinematische viscositeit  $\nu = \mu/\rho$   
 $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ : Laplace-operator.

### 1.3. Energievergelijking

De vergelijking van de mechanische energie wordt verkregen door de impulsvergelijking inwendig te vermenigvuldigen met  $\underline{u}$ :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} u^2) + \rho (\underline{u} \cdot \nabla) (\frac{1}{2} u^2) = \rho \underline{u} \cdot \underline{g} - \underline{u} \cdot \nabla p + \underline{u} \cdot \underline{f} \quad (1.8)$$

waarbij:  $u^2 = \underline{u} \cdot \underline{u}$

Stel nu  $\rho \underline{u} \cdot \underline{g} = -(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla) \rho g \eta$  met  $\eta$  de verticale verplaatsing van een vloeistofelement (naar boven gemeten). Hiermee en met (1.2) wordt (1.8):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g \eta) + \nabla \cdot \{ \underline{u} (\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g \eta + p) \} = \underline{u} \cdot \underline{f} \quad (1.9)$$

Voor een visceuze vloeistof geldt verder met (1.4):

$$\underline{u} \cdot \underline{f} = u_i f_i = 2\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i e_{ij}) - e_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\} \quad (1.10)$$

waarbij de sommatieconventie is gebruikt.

De eerste term van het rechterlid van (1.10) geeft de visceuze energieflex en de tweede term geeft de energiedissipatie per eenheidsvolume. We definiëren nu:

$$\hat{\epsilon} = 2\mu e_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 2\mu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]^2 \quad (\text{sommatie over } i \text{ en } j) \quad (1.11)$$

De energiedissipatie per waterkolom (geïntegreerd over de diepte) wordt gegeven door

$$\dot{E} = - \int_0^d \hat{\epsilon} dx_s \quad (1.12)$$

waarbij:  $d$ : waterdiepte  
 $\dot{E}$ : energiedissipatie.

## Hoofdstuk 2

### Potentiaalstroming

In dit hoofdstuk beschouwen we een niet-visceuze incompressibele vloeistof en leiden hiervoor de bewegingsvergelijkingen af. Vervolgens bepalen we het snelheidsprofiel en de totale energie van de golfbeweging.

#### 2.1. Bewegingsvergelijkingen

De bewegingsvergelijkingen voor een niet-visceuze incompressibele vloeistof worden gegeven door (1.2), (1.3) en (1.6):

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g} \quad (2.2)$$

We definiëren nu de vorticititeit  $\underline{\omega}$  als de rotatie van het snelheidsveld

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u} \quad (2.3)$$

Nu nemen we de rotatie van (2.2). M.b.v. (2.3) en de regel:

$$\frac{1}{2} \nabla u^2 = \underline{u} \times (\nabla \times \underline{u}) + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}$$

levert dit

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\underline{\omega} \times \underline{u}) = 0 \quad (2.4)$$

(2.4) heeft als oplossing  $\underline{\omega} = 0$ . Als een stroming op een bepaald moment rotatievrij is, blijft de stroming dat.

We nemen nu aan dat de golfbeweging rotatievrij is. Dit levert:

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u} = 0 \quad (2.5)$$

Nu kunnen we een snelheidspotentiaal  $\phi$  invoeren, zodat



$$\underline{u} = \nabla\phi \quad (2.6)$$

Rotatievrije stroming kan m.b.v. een snelheidspotentiaal beschreven worden en wordt dan ook potentiaalstroming genoemd. Als we (2.6) substitueren in (2.1) en (2.2) en daarna (2.2) integreren krijgen we:

$$\Delta\phi = 0 \quad (2.7)$$

en

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 = \frac{p_0 - p}{\rho} - gx_3 + c \quad (2.8)$$

waarbij  $p_0$  de luchtdruk en  $c$  een integratieconstante is.

Bij deze vergelijkingen horen randcondities aan de bodem en aan het oppervlak. Aan de bodem is de snelheid loodrecht op de bodem gelijk aan nul. We gaan nu uit van water van een constante diepte  $d$  waarbij we de bodem op  $x_3 = 0$  kiezen. De randconditie aan de bodem wordt dan

$$u_3 = \frac{\partial\phi}{\partial x_3} = 0 \quad \text{op } x_3 = 0 \quad (2.9)$$

Aan het vrije oppervlak moet aan twee condities worden voldaan. Het wateroppervlak wordt gedefinieerd door de eigenschap dat waterdeeltjes het niet passeren. We nemen nu aan, dat het oppervlak gegeven wordt door

$$x_3 = \hat{\eta}(\underline{\tilde{x}}, t) = \eta(\underline{\tilde{x}}, t) + d \quad (2.10)$$

waarbij  $\underline{\tilde{x}} = (x_1, x_2)$

De kinematische randconditie wordt gegeven door

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \frac{\partial\eta}{\partial x_1} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \frac{\partial\eta}{\partial x_2} = \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \quad \text{op } x_3 = \hat{\eta} \quad (2.11)$$

De tweede randconditie aan het oppervlak is de dynamische conditie dat de krachten die op het oppervlak werken met elkaar in evenwicht zijn. Dit levert  $p = p_0$  of met (2.8) waarin  $c = gd$  is gekozen:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + g\eta = 0 \quad \text{op } x_3 = \hat{\eta} \quad (2.12)$$

Het snelheidsprofiel  $\underline{u}$  kan nu worden opgelost uit de vergelijkingen (2.6), (2.7), (2.9), (2.11) en (2.12). De druk in de vloeistof volgt dan uit (2.8).

## 2.2. Linearisatie

We gaan nu zoeken naar golfoplossingen van de bovenstaande vergelijkingen. Om een lineair stelsel te verkrijgen, gaan we de vergelijkingen (2.11) en (2.12) lineariseren. Hiertoe ontwikkelen we  $\eta$  en  $\phi$  in een machtreeks, waarbij we de nulde-orde termen gelijk aan nul nemen. We beschouwen de golven namelijk als een kleine verstoring ten opzichte van de evenwichtstoestand  $\phi_0 = 0$  en  $\eta_0 = 0$ . We stellen dus

$$\phi = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \phi_j \quad (2.13)$$

$$\eta = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \eta_j \quad (2.14)$$

waarbij  $\epsilon = ak$  de steilheid van de golven is ( $a$ : amplitude,  $k$ : golfgetal  $k = 2\pi/\lambda$ ). Hieruit volgt dat de linearisatie alleen is toegestaan voor golven met een geringe steilheid. De convergentie van (2.13) en (2.14) is voor stationaire golven bewezen door Levi Civita (1924). In het algemene geval is convergentie niet bewezen. M.b.v. de meerschalen methode kan asymptotische convergentie verkregen worden (Nayfeh, 1973). We nemen nu aan, dat de steilheid voldoende klein is. Als we (2.13) en (2.14) substitueren in (2.11) en (2.12) levert dit:

$$\epsilon \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} - \epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} - \epsilon^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} = 0(\epsilon^3)$$

en

$$\epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \left\{ \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} \right]^2 \right\} + \epsilon g \eta_1 + \epsilon^2 g \eta_2 = 0(\epsilon^3).$$

Na weglating van de termen van  $0(\epsilon^2)$  krijgen we de gelineariseerde vergelijkingen:

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} = 0 \quad \text{op } x_3 = \hat{\eta} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g \eta_1 = 0 \quad \text{op } x_3 = \hat{\eta} \quad (2.16)$$

We kunnen nu nog verder lineariseren door deze randcondities niet op  $x_3 = \hat{\eta}$  maar op  $x_3 = d + \epsilon\eta_1 + \epsilon^2\eta_2 + \dots$  te nemen. We herschrijven (2.15) en (2.16) tot op de eerste orde:

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{op } x_3 = d \quad (2.17)$$

en

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 0 \quad \text{op } x_3 = d \quad (2.18)$$

Uit het lineaire stelsel (2.7), (2.9), (2.17) en (2.18) kunnen we  $\phi$  oplossen.

### 2.3. Het snelheidsprofiel

We gaan nu het snelheidsprofiel afleiden voor de potentiaalstroming. We zoeken golfoplossingen van de vorm

$$\eta = Ae^{-i(\underline{k} \cdot \tilde{\underline{x}} - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (2.19)$$

$$\phi = Z(x_3)e^{-i(\underline{k} \cdot \tilde{\underline{x}} - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (2.20)$$

waarbij:  $\underline{k} = (k_1, k_2)$  : golfvector  
 $k = |\underline{k}| = 2\pi/\lambda$  : golfgetal  
 $\tilde{\underline{x}} = (x_1, x_2)$   
 $\omega = 2\pi f$ : radiële frequentie  
 c.c.: complex geconjugeerde (ter verkrijging van reële oplossingen).

Substitutie van (2.20) in (2.7) levert

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_3^2} - k^2 Z = 0 \quad (2.21)$$

Substitutie van (2.20) in (2.9) levert

$$\frac{\partial Z}{\partial x_3} = 0 \quad \text{op } x_3 = 0 \quad (2.22)$$

(2.21) en (2.22) leveren nu

$$Z(x_3) \sim \cosh kx_3 \quad (2.23)$$

Substitutie van (2.19) en (2.20) in (2.17) levert

$$Z(d) = \frac{iAg}{\omega} \quad (2.24)$$

Uit (2.23) en (2.24) volgt

$$\phi(\underline{x}, t) = \frac{igA}{\omega} \frac{\cosh kx_3}{\sinh kd} e^{-i(k \cdot \tilde{\underline{x}} - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (2.25)$$

De resterende conditie (2.18) levert de dispersierelatie:

$$\omega^2 = gk \tanh kd \quad (2.26)$$

(2.25) is met (2.26) te herschrijven tot

$$\phi(\underline{x}, t) = \frac{\omega a}{k} \frac{\cosh kx_3}{\sinh kd} \sin(k \cdot \tilde{\underline{x}} - \omega t) \quad (2.27)$$

waarbij:  $a = 2A$ : amplitude.

Verder geldt:

$$\eta(\tilde{\underline{x}}, t) = a \cos(k \cdot \tilde{\underline{x}} - \omega t) \quad (2.28)$$

M.b.v. (2.6) levert (2.27) voor  $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ :

$$u_1(\underline{x}, t) = \frac{k_1 \omega a}{k} \frac{\cosh kx_3}{\sinh kd} \cos(k \cdot \tilde{\underline{x}} - \omega t) \quad (2.29a)$$

$$u_2(\underline{x}, t) = \frac{k_2 \omega a}{k} \frac{\cosh kx_3}{\sinh kd} \cos(k \cdot \tilde{\underline{x}} - \omega t) \quad (2.29b)$$

$$u_3(\underline{x}, t) = \omega a \frac{\sinh kx_3}{\sinh kd} \sin(k \cdot \tilde{\underline{x}} - \omega t) \quad (2.29c)$$

Voor de druk  $p(\underline{x}, t)$  in de vloeistof vinden we

$$p(\underline{x}, t) = p_0 - \rho g \left[ x_3 - d - \frac{\cosh kx_3}{\cosh kd} \eta(\tilde{\underline{x}}, t) \right] \quad (2.30)$$

### 2.4. Energie

De kinetische energie per volume-element wordt gegeven door  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\rho u^2$ . In de theorie van de oppervlakte golven beschouwen we echter de kinetische energie per waterkolom. Daartoe integreren we over de diepte:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\rho \int_0^{\eta+d} u^2 dx_3 \quad (2.31)$$

Voor een periodieke beweging middelen we dit geheel over één golfperiode. Tot op de eerste orde levert dit:

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{2}\rho \int_0^d \langle u^2 \rangle dx_3 \quad (2.32)$$

Met (2.29) volgt

$$u^2 = (\nabla\phi)^2 = \frac{\omega^2 a^2}{\sinh^2 kd} (\cosh^2 kx_3 \cos^2\theta + \sinh^2 kx_3 \sin^2\theta) \quad (2.33)$$

waarbij  $\theta = \underline{k} \cdot \underline{\tilde{x}} - \omega t$

$$\langle \sin^2\theta \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2} = \langle \cos^2\theta \rangle \quad (2.34)$$

Uit (2.33) en (2.34) volgt:

$$\langle u^2 \rangle = \frac{\omega^2 a^2}{2\sinh^2 kd} \cosh 2kx_3 \quad (2.35)$$

Met gebruikmaking van de dispersierelatie (2.26) en (2.32) volgt:

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{4}\rho g a^2 \quad (2.36)$$

Voor de potentiële energie geldt

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\rho g \eta^2 \quad (2.37)$$

De gemiddelde potentiële energie wordt gegeven door

$$\langle E_{\text{pot}} \rangle = \frac{1}{4}\rho g a^2 \quad (2.38)$$

De totale energie gemiddeld over één golfperiode volgt direct uit (2.37) en (2.38). Er geldt:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \rho g a^2 \quad (2.39)$$

### Hoofdstuk 3

#### Viscositeit

In het voorgaande hoofdstuk hebben we een niet-visceuze vloeistof beschouwd. Water is echter in geringe mate visceus ( $\mu = 1.3 \cdot 10^{-3}$  kg/ms bij  $10^\circ$  C). Hoe klein de viscositeit ook is, vlakbij de bodem heeft ze een essentiële invloed op het snelheidsprofiel. Aan de bodem moet nu namelijk worden voldaan aan de no-slip conditie: de visceuze vloeistof kan niet langs de bodem bewegen. Er ontstaat een dunne laag aan de bodem, waarin de snelheidsgradiënt loodrecht op de bodem erg groot is. De snelheid neemt hierin toe van nul aan de bodem tot de vrije stroomsnelheid aan de bovenkant van deze laag. Deze laag wordt de bodemgrenslaag genoemd. In de bodemgrenslaag kan de schuifspanning grote waarden aannemen. Buiten de bodemgrenslaag treden echter geen grote snelheidsgradiënten op. De invloed van de viscositeit is hier te verwaarlozen.

We vergelijken nu de grootte van de visceuze kracht en de traagheidskracht. De grootte van de traagheidsterm  $\rho(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}$  in (1.7) schatten we als

$$|\rho(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}| \sim \frac{\rho U^2}{L} \quad (3.1)$$

waarbij  $L$  een karakteristieke lengte en  $U$  een karakteristieke snelheidsschaal van het snelheidsveld is. Voor de grootte van de visceuze term krijgen we

$$|\mu \Delta \underline{u}| \sim \frac{\mu U}{L^2} \quad (3.2)$$

De verhouding tussen de traagheids- en de visceuze termen wordt nu gegeven door:

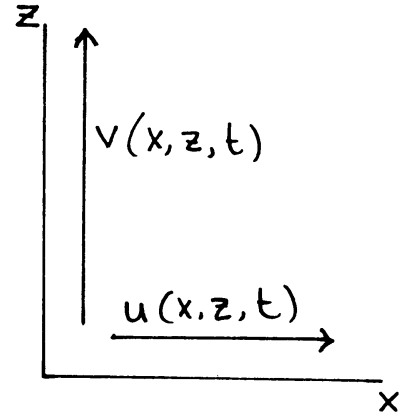
$$\left| \frac{\rho(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}}{\mu \Delta \underline{u}} \right| \sim \frac{UL}{\nu} =: R \quad (3.3)$$

Deze verhouding noemen we het Reynoldsgetal  $R$ . Het Reynoldsgetal is een dimensieloze grootte, die het relatieve belang van de visceuze kracht t.o.v. de traagheidskracht aangeeft. Als het Reynoldsgetal voldoende groot is, kunnen we (buiten de bodemgrenslaag) de viscositeit verwaarlozen.

### 3.1. Bodemgrenslaagvergelijkingen

In het vervolg gaan we uit van een twee dimensionale stroming  $\underline{u} = \underline{u}(x,z,t)$ , waarbij we de x-coördinaat horizontaal en de z-coördinaat vertikaal nemen.

$$\underline{u}(x,z,t) = [u(x,z,t), v(x,z,t)].$$



We beschouwen de gelineariseerde Navier-Stokes vergelijkingen voor deze tweedimensionale stroming:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (3.5a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \quad (3.5b)$$

Met als randcondities aan de bodem

$$u = 0 \quad \text{op } z = 0 \quad (3.6a)$$

$$v = 0 \quad \text{op } z = 0 \quad (3.6b)$$

We gaan nu (3.4) en (3.5) dimensieloos maken m.b.v. de transformaties:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x/L \\ \mathbf{z} &= z/L \\ \mathbf{t} &= tU/L \\ \mathbf{u} &= u/U \\ \mathbf{v} &= v/U \\ \mathbf{p} &= (p - p_0)/\rho U^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$



Dit levert

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial z} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial z^2} \right) \quad (3.9a)$$

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial z^2} \right) \quad (3.9b)$$

Voor grote Reynoldsgetallen mogen we de visceuze termen verwaarlozen, we krijgen dan de vergelijkingen voor de potentiaalstroming terug. De oplossing  $\underline{u} = \nabla\phi$  die we in dat geval krijgen voldoet echter niet aan (3.6a). In de bodemgrenslaag moeten we een correctiefunctie  $\tilde{\underline{u}}$  invoeren, zodat

$$\underline{u} = \nabla\phi + \tilde{\underline{u}} \quad (3.10)$$

waarbij  $\tilde{\underline{u}}$  aan de volgende condities moet voldoen:

$$\tilde{\underline{u}} = -\nabla\phi \quad z = 0 \quad (3.11)$$

$$\tilde{\underline{u}} = 0 \quad z \rightarrow d \quad (3.12)$$

Om het snelheidsprofiel in de bodemgrenslaag te bepalen mogen we de viscositeit niet verwaarlozen. We gaan nu een 'stretching'-transformatie toepassen waarbij we de verticale coördinaat en de snelheid in de verticale richting gaan schalen met  $R^{1/2}$ :

$$\tilde{z} = R^{1/2} z \quad (3.13a)$$

$$\tilde{\underline{v}} = R^{1/2} \underline{v} \quad (3.13b)$$

Als we dit in (3.8) en (3.9) substitueren levert dit:

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\underline{v}}}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial \tilde{z}^2} \quad (3.15a)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\underline{v}}}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \tilde{\underline{v}}}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \tilde{\underline{v}}}{\partial \tilde{z}^2} \quad (3.15b)$$

Als we nu de termen van  $O\left(\frac{1}{R}\right)$  weglaten krijgen we de bodemgrenslaagvergelijkingen. Het hele proces om van (3.5) naar de bodemgrenslaagvergelijkingen (3.17) te komen wordt gerechtvaardigd met behulp van het maximumprincipe uit de theorie van de singuliere storingen (de Jager, 1983). Als we in (3.14) en (3.15) de termen van  $O\left(\frac{1}{R}\right)$  weglaten en het geheel weer met dimensies schrijven, levert dit de gelineariseerde bodemgrenslaagvergelijkingen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3.16a)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.16b)$$

Deze vergelijkingen werden voor het eerst afgeleid door Prandtl in 1905.

### 3.2. Het snelheidsprofiel

In de vorige paragraaf hebben we gezien, dat de snelheid in de bodemgrenslaag niet beschreven kan worden door een snelheidspotentiaal  $\phi$ . De stroming in de bodemgrenslaag is niet rotatievrij. In ons model heeft de snelheid maar twee componenten (in de x-richting en de z-richting)  $\underline{u} = (u, 0, v)$ , waarbij u en v functies zijn van x, z en t. Voor  $\underline{u}$  hebben we (3.10), waarbij  $\phi$  gegeven wordt door (zie 2.27)

$$\phi(x, z, t) = \frac{\omega a}{k} \frac{\cosh kz}{\sinh kd} \sin(kx - \omega t) \quad (3.17)$$

Het snelheidsprofiel in de bodemgrenslaag is dus bekend als we  $\underline{\tilde{u}}$  kennen,  $\underline{\tilde{u}} = (\tilde{u}, 0, \tilde{v})$ . We beschouwen nu de gelineariseerde Navier-Stokes vergelijkingen, zie (1.7).

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \underline{u} \quad (3.18)$$

Als we van (3.18) de rotatie nemen krijgen we met (2.3) een vergelijking voor de vorticheit  $\underline{\omega}$

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} = \nu \Delta \underline{\omega} \quad (3.19)$$

Uit (2.3) en (3.10) volgt

$$\underline{\omega} = \nabla x(\nabla\phi + \tilde{u}) = \nabla x\tilde{u} \quad (3.20)$$

en met  $\underline{u} = (u, 0, v)$  en  $\tilde{u} = (\tilde{u}, 0, \tilde{v})$  volgt nu

$$\underline{\omega} = (0, \frac{\partial\tilde{u}}{\partial z} - \frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}, 0) \quad (3.21)$$

In de bodemgrenslaag is de snelheidsgradiënt in de z-richting veel groter dan de snelheidsgradiënt in de x-richting. We mogen dus stellen met (3.19) en (3.21)

$$\underline{\omega} \sim (0, \frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}, 0) \quad (3.22)$$

en

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial z} \right] = \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial z} \right] \quad (3.23)$$

De oplossing  $\tilde{u}$  van (3.23) die voldoet aan de randcondities (3.11) en (3.12) wordt gegeven door:

$$\tilde{u} = - \frac{\omega a}{\sinh kd} e^{-\beta z} \cos(\theta + \beta z) \quad (3.24)$$

waarbij  $\beta = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$  en  $\theta = kx - \omega t$

Uit de continuïteitsvergelijking (3.4) volgt nu

$$\tilde{v} = \frac{\omega a k}{2\beta \sinh kd} \{ e^{-\beta z} [\cos(\theta + \beta z) + \sin(\theta + \beta z)] - \sin\theta - \cos\theta \} \quad (3.25)$$

Door substitutie van (3.17), (3.24) en (3.25) is het snelheidsprofiel in de bodemgrenslaag bepaald. We voeren de volgende notatie in:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \Big|_{z=0} = U_b = \hat{U}_b \cos\theta \quad (3.26)$$

met  $\hat{U}_b = \omega a / \sinh kd$

We kunnen nu iets zeggen over de dikte  $\delta_v$  van de bodemgrenslaag. Als we de bovenrand van de bodemgrenslaag definiëren op de hoogte waarop de maximale snelheid  $\hat{U}_b + \tilde{u}$  95% bedraagt van de maximale vrije stroomsnel-

heid  $\hat{U}_b$ , vinden we  $\delta_v = 3/\beta$ . Op de hoogte  $z = 5/\beta$  bedraagt de snelheid  $U_b + \tilde{u}$  al 99% van de vrije stroomsnelheid  $\hat{U}_b$ . Hoe we precies de dikte  $\delta_v$  definiëren doet er niet toe. In ieder geval is  $\delta_v$  van de grootte-orde  $\sqrt{\nu}$ . Voor water komt dit dus neer op een dikte van enkele millimeters.

### 3.3 De energiedissipatie

Tengevolge van de viscositeit van het water zal er energiedissipatie optreden. De energiedissipatie is het grootst op de plaatsen waar de schuifkrachten het grootst zijn. Als het water ondiep is zal er aan de bodem een grenslaag ontstaan waarin de snelheidsgradiënt groot is. Hier zal de meeste energie verloren gaan.

We berekenen nu de gemiddelde energiedissipatie m.b.v. (1.12), waarbij we middelen over één golfperiode. In de bodemgrenslaag geldt  $\underline{u} = \nabla\phi + \tilde{u}$  en met (1.12) en (2.39) levert dit na middeling

$$\langle \dot{E} \rangle = -2\nu\beta \frac{k}{\sinh 2kd} \langle E \rangle + O(\nu) \quad (3.27)$$

In diep water ( $kd \gg 1$ ) is er echter geen bodemgrenslaag. Het water in de buurt van de bodem beweegt immers niet. In diep water komt de energiedissipatie dus volledig uit de potentiaalstroming waar  $\underline{u} = \nabla\phi$ . Dit levert een gemiddelde energiedissipatie van

$$\langle \dot{E} \rangle = -\nu k^2 \langle E \rangle \quad (3.28)$$

Vergelijking van (3.27) en (3.28) toont, dat de energiedissipatie in diep water van grootte orde  $\nu$  is, terwijl in ondiep de grootte-orde  $\sqrt{\nu}$  is. Voor water is  $\nu \sim 1 \cdot 10^{-6}$ . De visceuze energiedissipatie is in ondiep water dus een factor 1000 groter dan in diep water.

## Hoofdstuk 4

### De turbulente bodemgrenslaag

In de oceanografie worden we, evenals in vele andere takken van de geofysica, geconfronteerd met stromingen die turbulent zijn. Turbulentie treedt op bij grote waarden van het Reynoldsgetal  $R$ . Turbulente stromingen variëren willekeurig in ruimte en tijd. Het is daarom, zelfs onder zorgvuldig gecontroleerde laboratorium-omstandigheden, onmogelijk om in een turbulente stroming meetresultaten te reproduceren. Alleen het gemiddelde en andere statistische eigenschappen van de stroming hebben een zinvolle betekenis.

#### 4.1. Ensemblemiddelen en ergodiciteit

Gewoonlijk zullen we het gemiddelde van een grootheid interpreteren als het statistische gemiddelde genomen over een groot aantal metingen, waarbij de begin- en randcondities identiek zijn. De gemiddelde snelheid  $\bar{u}(\underline{x}_0, t_0)$  op plaats  $\underline{x}_0$  en tijdstip  $t_0$  zal dan gegeven worden door het gemiddelde van de snelheden  $u_{(i)}(\underline{x}_0, t_0)$ , waarbij  $u_{(i)}(\underline{x}_0, t_0)$  de snelheid in het  $i$ -de experiment op plaats  $\underline{x}_0$  en tijd  $t_0$  is en de begin- en randcondities in alle experimenten identiek zijn. Dus:

$$\bar{u}(\underline{x}_0, t_0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_{(i)}(\underline{x}_0, t_0) \quad (4.1)$$

In de praktijk is het meestal onmogelijk om een experiment onder dezelfde condities te herhalen. We zijn dan gedwongen een gemiddelde te bepalen aan de hand van één enkel experiment. We vervangen het ensemblemiddelen in dit geval door middeling over een ruimte- of tijdsinterval. Bij een oscillerende stroming middelen we (na experimentele bepaling van de periode) de metingen met een gelijke fase, zodat de periodiciteit behouden blijft. De overgang van het theoretische ensemblemiddelen naar het praktische geval van ruimte- of tijdsmiddeling wordt gerechtvaardigd met de zgn. ergodiciteitshypothese:

Als het interval waarover gemiddeld wordt nadert naar oneindig, convergeert het ruimte- of tijdsgemiddelde naar het corresponderende ensemblegemiddelde.

In een aantal gevallen kan deze aanname strikt worden bewezen met behulp van de ergodiciteitsstellingen uit de theorie van randomprocessen en -velden (zie Monin en Yaglom, 1971). In alle andere gevallen wordt deze hypothese als een goede benadering beschouwd.

We splitsen nu de snelheid  $\underline{u}(\underline{x},t)$  in een gemiddeld en een fluctuerend deel:

$$\underline{u}(\underline{x},t) = \bar{\underline{u}}(\underline{x},t) + \underline{u}'(\underline{x},t)$$

waarbij de operator  $\bar{\quad}$  staat voor ensemblemiddelen. De gemiddelde snelheid  $\bar{\underline{u}}(\underline{x},t)$  blijft dus een functie van  $\underline{x}$  en  $t$ . Het gemiddelde van het fluctuerende deel  $\underline{u}'(\underline{x},t)$  is gelijk aan nul. Voor de middelingsoperator gelden de volgende eigenschappen:

$$\overline{\bar{f} + \bar{g}} = \bar{f} + \bar{g} \quad (4.2a)$$

$$\bar{a} = a \quad \text{als } a \text{ constant} \quad (4.2b)$$

$$\overline{a\bar{f}} = a\bar{f} \quad \text{als } a \text{ constant} \quad (4.2c)$$

$$\overline{\bar{f}\bar{g}} = \bar{f}\bar{g} \quad (4.2d)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} \quad s = x, y, z \text{ of } t \quad (4.2e)$$

## 4.2 Turbulente bodemgrenslaagvergelijkingen

Om de turbulente bodemgrenslaagvergelijkingen af te leiden keren we terug naar de tweedimensionale stroming  $\underline{u}(x,z,t) = (u,0,v)$ . We splitsen  $u, v$  en de druk  $p$  in een gemiddeld en een fluctuerend deel

$$u = \bar{u} + u' \quad (4.3a)$$

$$v = \bar{v} + v' \quad (4.3b)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (4.3c)$$

Als we nu (4.3) substitueren in de Navier-Stokes vergelijkingen en de continuïteitsvergelijking en daarna het ensemblagemiddelde nemen, krijgen we m.b.v. (4.2):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = 0 \quad (4.4)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'\bar{v}'}{\partial z} \right\} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right\} \quad (4.5a)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}'\bar{v}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial z} \right\} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \left\{ \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right\} \quad (4.5b)$$

De termen in (4.5) waarin  $u'$  en  $v'$  voorkomen zijn spanningstermen. We voegen deze samen in een spanningstensor. We definiëren de Reynolds-stress tensor  $\tau$  door:

$$\tau_{xx} = - \rho \bar{u}'^2 \quad (4.6a)$$

$$\tau_{zz} = - \rho \bar{v}'^2 \quad (4.6b)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = - \rho \bar{u}'\bar{v}' \quad (4.6c)$$

De vergelijkingen (4.5) kunnen nu herschreven worden tot

$$\rho \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial z} \right\} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \tau_{xx} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \tau_{xz} \right\} \quad (4.7a)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial z} \right\} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \tau_{xz} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \tau_{zz} \right\} \quad (4.7b)$$

Als we op (4.7) de bodemgrenslaagbenaderingen toepassen en lineariseren (analoog aan het visceuze geval), krijgen we de turbulente bodemgrenslaagvergelijkingen voor de gemiddelde snelheid:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\tau_{xz}}{\rho} \right\} \quad (4.8a)$$

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \quad (4.8b)$$

In het vervolg zullen we het altijd over de gemiddelde snelheid hebben en de  $'$  weglaten. In analogie met het visceuze geval wordt vaak de volgende aanname gemaakt:

$$\tau_{xz} = A_\tau \frac{\partial u}{\partial z} = \rho \epsilon \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.9)$$

$A_\tau$  wordt dan de eddyviscositeit genoemd en  $\epsilon = A_\tau/\rho$  de kinematische eddyviscositeit. Deze analogie heeft als nadeel, dat de eddyviscositeit geen eigenschap is van de vloeistof (zoals de viscositeit  $\mu$ ) maar een eigenschap van de stroming.

De randcondities waaraan de snelheid moet voldoen zijn hetzelfde als in het geval van laminaire stroming. Aan de bodem geldt de no-slip conditie. Bovendien zijn alle turbulente componenten aan de bodem nul en zijn ze zeer klein in de directe omgeving daarvan. De overheersende krachten aan de bodem zijn de visceuze krachten.

Doordat de visceuze schuifspanning aan de bodem overheerst is er in elke turbulente stroming vlakbij de bodem een dun laagje waarin de stroming in essentie laminair is. Dit laagje staat bekend als de visceuze sublaag. De snelheden zijn hierin zo klein, dat er geen turbulentie kan optreden.

De visceuze sublaag grenst aan een overgangslaag waarin de snelheidsfluctuaties groot genoeg zijn om aanleiding te geven tot turbulente schuifspanningen van dezelfde grootte-orde als de visceuze schuifspanning. Op nog grotere afstand van de bodem overheerst de turbulentie. Dit is de eigenlijke turbulente bodemgrenslaag.

#### 4.3. De wrijvingsnelheid

Zoals we in de vorige paragraaf hebben gezien wordt de turbulente schuifspanning gegeven door

$$\tau_{xz} = - \rho \overline{u'v'} \quad (4.6c)$$

In ons tweedimensionale model is dit de enige turbulentieterm die we meenemen. In het vervolg zullen we deze dan ook gewoon met  $\tau$  aangeven. De turbulente schuifspanning wordt veroorzaakt door snelheidsfluctuaties in horizontale en verticale richting. Het is aannemelijk, dat deze fluctuaties van vergelijkbare grootte zijn.

Voor een stationaire grenslaag definiëren we een karakteristieke snelheid  $u_*$  door

$$u_*^2 = \left| \frac{\tau}{\rho} \right| \quad (4.10)$$

$u_*$  wordt de wrijvingsnelheid genoemd en representeert de grootte van de snelheidsfluctuaties. In 5.2 zullen we zien hoe dit voor een oscillerende stroming kan worden aangepast. In veel turbulentietheorieën wordt gebruik gemaakt van het concept van een wrijvingsnelheid.



#### 4.4. Bodemruwheid

In paragraaf 4.2 hebben we gezien, dat we de bodemgrenslaag kunnen splitsen in een deel waarin de viscositeit overheerst en een deel waarin de turbulentie overheerst. Eigenlijk hebben we dus een twee-lagenmodel, met een visceuze sublaag ter dikte  $\delta_v$  en daar bovenop een turbulente laag die zich uitstrekt tot  $z = \delta$ . De dikte van de visceuze sublaag  $\delta_v$  wordt gegeven door

$$\delta_v \sim \nu/u_* \quad (4.11)$$

en de dikte van de bodemgrenslaag  $\delta$  door

$$\delta \sim u_*/\omega \quad (4.12)$$

In de praktijk is de dikte van de visceuze sublaag veel kleiner dan de dikte van de bodemgrenslaag:

$$\frac{\delta_v}{\delta} = \frac{\nu\omega}{u_*^2} \ll 1 \quad (4.13)$$

met  $\nu \sim 10^{-6}$ ,  $u_* \sim 10^{-2}$ ,  $\omega < 5$ .

Meestal hebben we in de praktijk te maken met een ruwe bodem. De mate van turbulentie wordt mede bepaald door de ruwheid van de bodem. Hoe ruwer de bodem is, des te groter de turbulentie zal zijn. Voor de vorming van een turbulentiemodel moeten we dus een maat voor de bodemruwheid opstellen.

De ruwheid van de bodem wordt bepaald door de vorm, de grootte en de verdeling van de ruwheidselementen (bijv. zandkorreltjes). J. Nikuradse heeft een aantal metingen gedaan met zandkorreltjes van verschillende grootte in pijpen met verschillende diameters. Hij bepaalde hierbij de bodemruwheid  $k_s$ . Deze lengtemaat  $k_s$  wordt equivalente zandruwheid (ook wel: Nikuradse's zandruwheid) genoemd. Later is dit, aan de hand van metingen, uitgebreid tot andere ruwheidselementen (figuur 6).

Nu we een maat voor de bodemruwheid hebben ingevoerd, zullen we moeten bepalen wanneer we een bodem ruw noemen. Het lijkt aannemelijk dat, als de ruwheidslengte  $k_s$  (veel) kleiner is dan de dikte van de visceuze sublaag, de bodem glad genoemd mag worden en als  $k_s$  groter is dan de visceuze sublaag we een ruwe bodem hebben.

De verhouding  $k_s/\delta_v$  is een maat waarmee we de invloed van de bodemruwheid kunnen bepalen:  $k_s/\delta_v \sim \frac{u}{v} * k_s$ .

No	item	dimensions	D [cm]	d [cm]	k [cm]	$k_s$ [cm]	photographs
1	spheres		4	0.41	0.41	0.093	
2			2	0.41	0.41	0.344	
3			1	0.41	0.41	1.26	
4			0.6	0.41	0.41	1.56	
5			densest arrgt.	0.41	0.41	0.257	
6			1	0.21	0.21	0.172	
7			0.5	0.21	0.21	0.759	
8	spherical segments		4	0.8	0.26	0.031	
9			3	0.8	0.26	0.049	
10			2	0.8	0.26	0.149	
11			densest arrgt.	0.8	0.26	0.365	
12	cones		4	0.8	0.375	0.059	
13			3	0.8	0.375	0.164	
14			2	0.8	0.375	0.374	
15	'short' angles		4	0.8	0.30	0.291	
16			3	0.8	0.30	0.618	
17			2	0.8	0.30	1.47	

1	2
3	4 5
6	7
8	10
9	11
12	13 14
15	17
16	

figuur 6: Resultaten van metingen aan regelmatige patronen van ruwheidselementen.  
Overgenomen uit Schlichting (1955)

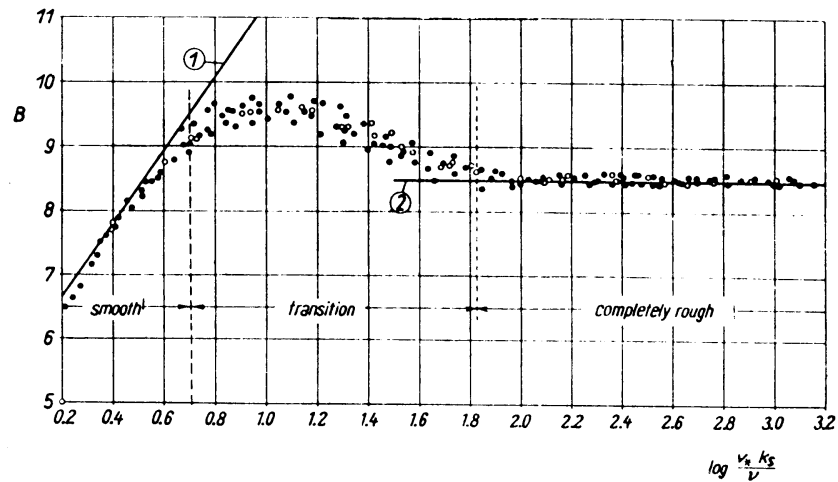
Eigenlijk moeten we de no-slip conditie aan de bodem nemen. Maar bij een ruwe bodem is door oneffenheden op microscopische schaal het nul-niveau van de bodem slecht gedefinieerd. We parametriseren de bodemoneffenheden door in het vervolg de no-slip conditie te nemen op hoogte  $z = z_0$ . Dus

$$u = 0 \quad \text{op } z = z_0 \quad (4.14)$$

waarbij we  $z_0$  moeten bepalen voor verschillende waarden van de bodemruwheid. Dit kunnen we doen door de bodemgrenslaagvergelijkingen op te lossen met als randconditie (4.14). Het zo verkregen snelheidsprofiel met als onbekende constante  $z_0$  kunnen we vergelijken met metingen. Uit de meetresultaten kunnen we dan  $z_0$  bepalen.

Aan de hand van stationaire stromingen zijn veel metingen gedaan. We beschouwen nu een stationaire stroming en gaan de resultaten hiervan generaliseren naar het geval van de periodieke golfbeweging.

We bepalen  $z_0$  als functie van  $u_* k_s / \nu$ . Hiervoor is in figuur 7  $B = 5.75 \log(k_s / z_0)$  uitgezet tegen  $\log(u_* k_s / \nu)$ . Deze grafiek is gebaseerd op metingen gedaan aan een stationaire stroming door ruwe pijpen. In figuur 7 onderscheiden we drie gebieden: gladde bodem, ruwe bodem en een overgangsgebied.



figuur 7:  $B = 5.75 \log(k_s / z_0)$  uitgezet tegen  $\log(u_* k_s / \nu)$  aan de hand van metingen aan een stationaire stroming door ruwe pijpen.

Overgenomen uit Schlichting (1955)

Voor  $\frac{u_* k_s}{\nu} < 5$  hebben we te doen met een gladde bodem. Lijn (1) in figuur 7 wordt gegeven door:

$$B = 5.75 \log \left[ \frac{u_* k_s}{\nu} \right] + 5.5$$

Dit komt overeen met  $z_0 \approx 0.11 \frac{\nu}{u_*}$ . In het geval van een gladde bodem is de ruwheid zo klein, dat de ruwheidselementen geheel bevat zijn in de visceuze sublaag. In het overgangsgebied  $5 \leq u_* k_s / \nu \leq 70$  steken de ruwheidselementen voor een deel uit de visceuze sublaag. Als  $u_* k_s / \nu > 70$  dan hebben we te doen met een volledig ruwe bodem. Lijn (2) in figuur 7 wordt gegeven door  $B = 8.5$ . Dit komt overeen met  $z_0 = k_s / 30$ . Alle ruwheidselementen komen nu buiten de visceuze sublaag.

We generaliseren het voorgaande voor de golfbeweging. Hiertoe stellen we

$$z_0 = 0.11 \frac{v}{u_*} \quad \text{als } \frac{u_* k_s}{v} < 5 \quad (4.15a)$$

$$z_0 = k_s/30 \quad \text{als } \frac{u_* k_s}{v} > 70 \quad (4.15b)$$

Het overgangsgebied laten we buiten beschouwing, omdat we daar geen goede waarde van  $z_0$  voor kunnen bepalen. In het overgangsgebied is  $z_0$  zowel een functie van  $v/u_*$  als van  $k_s$ .

In het geval van een gladde bodem is  $z_0$  kleiner dan  $\delta_v$ . Als we het snelheidsprofiel voor een gladde bodem willen bepalen moeten we dus met een twee-lagenmodel werken, de viscositeit mag hier niet verwaarloosd worden.

Als we echter met een ruwe bodem te maken hebben, komen de ruweheidselementen door de visceuze sublaag heen en nemen we de no-slip conditie boven deze visceuze laag ( $z_0 > \delta_v$ ). Hier hoeven we alleen maar rekening te houden met de turbulente schuifspanningen. In de rest van deze scriptie beperk ik me tot het geval van een ruwe bodem.

#### 4.5 De energiedissipatie

In de turbulente bodemgrenslaag worden de bewegingsvergelijkingen gegeven door (4.4) en (4.8). We kunnen (4.8a) en (4.8b) nog enigszins vereenvoudigen.

Uit (4.8b) volgt dat de druk  $p(x,z,t)$  onafhankelijk is van de z-coördinaat. Om de functie  $p(x,t)$  te bepalen kunnen we dus op een willekeurige hoogte boven de bodem gaan kijken. Buiten de bodemgrenslaag wordt  $p(x,t)$  gegeven door (2.30). Hieruit is direct  $\frac{\partial p}{\partial x}$  te berekenen:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\rho g a k \sin \theta}{\cosh kd} \quad (4.16)$$

Dit levert met (2.26) en (3.26):

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_b}{\partial t} \quad (4.17)$$

Als we nu (4.17) in (4.8a) substitueren levert dit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ v \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\tau}{\rho} \right] \quad (4.18)$$

In de turbulente bodemgrenslaag kunnen we de viscositeit verwaarlozen en aldus (4.18) herschrijven tot

$$\frac{\partial}{\partial t} [u - U_b] = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\tau}{\rho} \quad (4.19)$$

De energiedissipatie volgt nu uit de energievergelijking (zie (1.9) en (1.10)):

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} u [u - U_b] = \frac{\partial}{\partial z} [u\tau] - \tau \frac{\partial u}{\partial z}$$

en wordt gegeven door

$$\dot{E} = - \int_{z_0}^d \tau \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (4.20)$$

Het rechterlid van (4.20) is m.b.v. de kettingregel en de stelling van Gauss te herschrijven tot

$$\begin{aligned} - \int_{z_0}^d \tau \frac{\partial u}{\partial z} dz &= - \int_{z_0}^d \frac{\partial u \tau}{\partial z} dz + \int_{z_0}^d u \frac{\partial \tau}{\partial z} dz = \int_{z_0}^d u \frac{\partial \tau}{\partial z} dz = \\ &= - \int_{z_0}^d U_b \frac{\partial \tau}{\partial z} dz + \int_{z_0}^d (u - U_b) \frac{\partial \tau}{\partial z} dz = \\ &= -U_b \tau_b + \int_{z_0}^d (u - U_b) \rho \frac{\partial}{\partial t} (u - U_b) dz = \\ &= -U_b \tau_b + \frac{\rho}{2} \int_{z_0}^d \frac{\partial}{\partial t} (u - U_b)^2 dz \end{aligned} \quad (4.21)$$

We gaan uit van de golfbeweging, waarbij  $(u - U_b) = A \cos \theta$ . De energiedissipatie gemiddeld over één periode wordt gegeven door (zie (4.20) en (4.21))

$$\langle \dot{E} \rangle = - \langle U_b \tau_b \rangle + \frac{\rho}{2} \int_{z_0}^d \langle \frac{\partial}{\partial t} [u - U_b]^2 \rangle dz \quad (4.22)$$

Door uitschrijven is te zien, dat de tweede term van het rechterlid altijd wegvalt. Voor de golfbeweging wordt de energiedissipatie dus

gegeven door

$$\langle \dot{E} \rangle = - \langle U_b \tau_b \rangle \quad (4.23)$$

Als we de energiedissipatie willen berekenen is het niet noodzakelijk om het snelheidsprofiel in de bodemgrenslaag te kennen. Als we de turbulente schuifspanning aan de bodem en de vrijestroomsnelheid kennen, kunnen we m.b.v. (4.23) de energiedissipatie bepalen. We zullen hier in het vervolg gebruik van maken.

## Hoofdstuk 5

### Turbulentiemodellen

In dit hoofdstuk behandel ik twee parametrisaties van de turbulentie. De eerste is de draglaw, een experimentele wet waarin de turbulentie aan de bodem wordt gerelateerd aan de vrije stroomsnelheid. Daarna behandel ik het lineaire eddyviscositeitsmodel, dat uitvoerig is beschreven door Kajiura (1968) en Grant & Madsen (1979, 1986).

#### I. Draglaw

De draglaw is een experimentele wet, die de turbulente schuifspanning aan de bodem relateert aan de vrije stroomsnelheid:

$$\tau_b = \frac{\rho}{2} f_w U_b |U_b| = \frac{\rho}{2} f_w \hat{U}_b^2 \cos\theta |\cos\theta| \quad (5.1)$$

waarbij  $f_w$  een experimenteel te bepalen constante, de wrijvingsfactor is. De draglaw levert geen snelheidsprofiel in de bodemgrenslaag, omdat alleen de schuifspanning aan de bodem bekend is. De energiedissipatie kan echter wel worden berekend.

#### 5.1. De energiedissipatie

Aangezien de draglaw meteen de turbulente schuifspanning aan de bodem geeft, is de energiedissipatie m.b.v. (4.23) eenvoudig te berekenen. We hebben namelijk (met 2.39):

$$\langle \dot{E} \rangle = - \frac{\rho}{2} f_w \hat{U}_b^3 \langle \cos^2\theta |\cos\theta| \rangle = - \frac{16}{3\pi} f_w \hat{U}_b \frac{k}{\sinh 2kd} \langle E \rangle \quad (5.2)$$

#### II. Lineaire eddyviscositeit

#### 5.2. Beschrijving van het model

In het model van de lineaire eddyviscositeit wordt de aanname gemaakt dat de eddyviscositeit lineair afhangt van de afstand tot de bodem. We stellen dus dat

$$\epsilon = cz \quad (5.3)$$

We weten dat  $\epsilon$  de dimensie heeft van een afstand  $\times$  een snelheid. De constante  $c$  in (5.3) heeft dus de dimensie van een snelheid. De karakteristieke snelheid in dit turbulentiemodel is de wrijvingsnelheid  $u_*$ . We beschouwen de periodieke golfbeweging en definiëren  $u_*$  nu als

$$u_* = \left\langle \left[ \frac{|\tau_b|}{\rho} \right]^{1/2} \right\rangle \quad (5.4)$$

waarbij  $\tau_b$  de waarde van de turbulente schuifspanning aan de bodem is en we middelen over één golfperiode. Deze versimpeling t.o.v. (4.10) passen we toe om de bewegingsvergelijkingen oplosbaar te maken. We stellen vervolgens

$$\epsilon = \hat{c} u_* z \quad (5.5)$$

waarbij  $\hat{c}$  een dimensieloze constante is. We kunnen het concept van een lineaire eddyviscositeit aannemelijk maken als we een stationaire stroming beschouwen.

In het geval van een stationaire stroming (d.w.z.  $u$  is onafhankelijk van de tijd) kunnen de bodemgrenslaagvergelijkingen herschreven worden tot (zie (4.19)):

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\tau}{\rho} = 0 \quad (5.6)$$

Met (4.9) en (5.5) levert dit na integratie

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{u_*}{z} \quad (5.7)$$

waarin we de integratieconstante (die de dimensie van (snelheid)<sup>2</sup> had) gelijk hebben gekozen aan  $u_*^2$ .

De oplossing van (5.7) wordt gegeven door

$$u(z) = \frac{u_*}{c} \ln z + c_1 \quad (5.8)$$

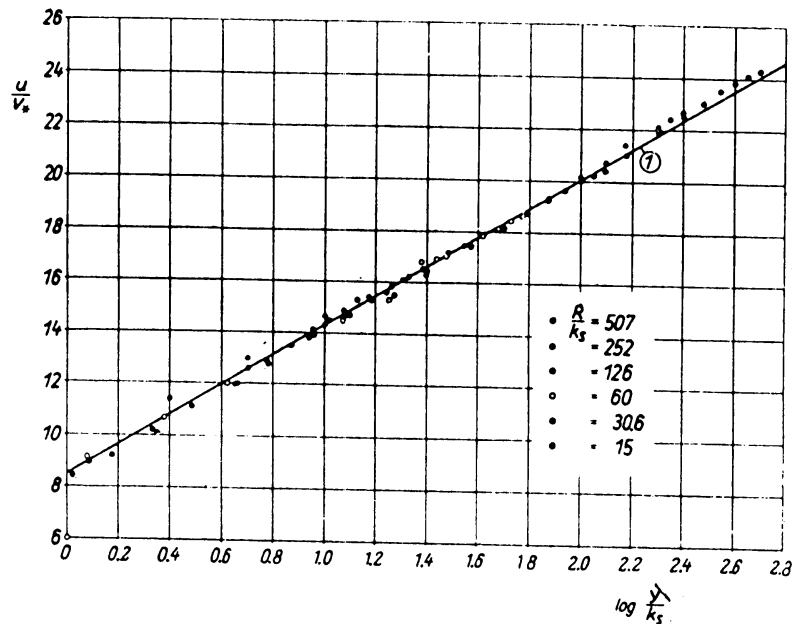
$c_1$  wordt nu gegeven door de randconditie dat  $u(z)$  op de bodem (d.w.z. in  $z = z_0$ ) gelijk is aan nul (no-slip conditie). Dit levert:

$$u(z) = \frac{u_*}{c} \ln \left[ \frac{z}{z_0} \right] \quad (5.9)$$



De constante  $\hat{c}$  blijkt een universele constante te zijn (zie figuur 8). Deze constante wordt aangegeven met de letter  $\kappa$  en wordt Von Kármán's constante genoemd.

$$\kappa = 0.4 \quad (5.10)$$



figuur 8: Het universele logaritmische snelheidsprofiel voor stationaire stroming door pijpen met verschillende ruwheidslengten.

Overgenomen uit Schlichting (1955).

Naar analogie van het stationaire model gaan we dit concept toepassen op de periodieke golfbeweging. Hierbij gebruiken we dus

$$\epsilon = \kappa u_* z \quad (5.11)$$

Uit recente metingen van Sleath (1987) aan een oscillerende grenslaag is gebleken, dat de eddyviscositeit vlak bij de bodem ook negatieve waarden kan aannemen. Dit zou verregaande consequenties kunnen hebben voor de energiedissipatie. Het is wenselijk dat de gevolgen hiervan onderzocht worden. Ik zal hier echter verder niet op ingaan.

### 5.3. Het snelheidsprofiel

We gaan nu het snelheidsprofiel in de turbulente bodemgrenslaag bepalen voor de golfbeweging in het geval van een lineaire eddyviscositeit (5.11). Voor de turbulente schuifspanning nemen we dus

$$\tau = \rho \kappa u_* z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (5.12)$$

waarbij we de wrijvingsnelheid  $u_*$  definiëren als in (5.4).

De turbulente bodemgrenslaagvergelijkingen hebben we in 4.5 herschreven. We gaan nu uit van (4.19) en met (5.12) levert dit

$$\frac{\partial}{\partial t} (u - U_b) = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \kappa u_* z \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad (5.13)$$

We zoeken naar golfoplossingen en stellen hiertoe

$$u - U_b = W = w(z) e^{-i\theta} + c.c. \quad (5.14)$$

en

$$U_b = \hat{U}_b \cos \theta \quad (5.15)$$

In (5.14) is separatie van variabelen toegepast. Aangezien  $U_b$  onafhankelijk is van  $z$  mogen we (5.13) herschrijven tot

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \kappa u_* \frac{\partial W}{\partial z} = \kappa u_* z \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \quad (5.16)$$

Deze vergelijking heeft de vorm van een transportvergelijking met als transportsnelheid  $u_*$  en het rechterlid als diffusie-term. Met (5.14) kunnen we (5.16) uitwerken tot

$$i w = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\kappa u_*}{\omega} z \frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad (5.17)$$

De term  $\kappa u_*/\omega$  is een karakteristieke lengteschaal van de turbulente bodemgrenslaag. De dikte  $\delta$  van de turbulente bodemgrenslaag is evenredig met  $\kappa u_*/\omega$ . We definiëren nu:

$$\lambda = \frac{\kappa u_*}{\omega} \quad (5.18)$$

Vervolgens gaan we in vergelijking (5.17) over op de dimensieloze variabele

$$\xi = \left[ \frac{4z}{l} \right]^{1/2} = \left[ \frac{4\omega z}{\kappa u_*} \right]^{1/2} \quad (5.19)$$

Dit levert

$$\xi^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial w}{\partial \xi} - i \xi^2 w = 0 \quad (5.20)$$

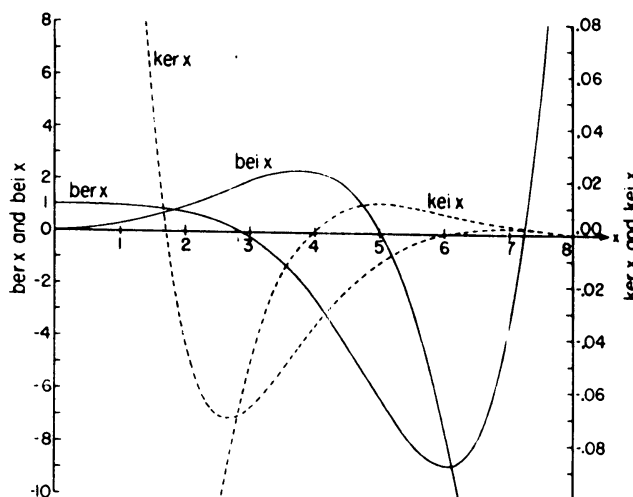
De oplossing van deze vergelijking wordt gegeven door een lineaire combinatie van de nulde orde Kelvinfuncties  $ber$  +  $ibe$  en  $ker$  +  $ike$  (Abramowitz & Stegun (1965)).  $w$  moet voldoen aan de randcondities

$$w \rightarrow 0 \quad \text{als } \xi \gg 1 \quad (5.21a)$$

$$w = -\hat{U}_b \quad \text{als } \xi = \xi_0 \quad (5.21b)$$

waarbij  $\xi_0$  de waarde van  $\xi$  in  $z = z_0$  voorstelt.

(5.21a) is de conditie dat de snelheid buiten de bodemgrenslaag gelijk is aan de potentiaalsnelheid  $u = U_b$ . (5.21b) is de no-slip conditie aan de bodem.



figuur 9: Nulde orde Kelvinfuncties  $ber$ ,  $bei$ ,  $ker$  en  $kei$ .  
Overgenomen uit Abramowitz & Stegun (1965).

Aangezien  $\text{ber}$  en  $\text{bei}$  niet kunnen voldoen aan conditie (5.21a) (zie figuur 9), wordt  $w$  gegeven door

$$w(\xi) = c(\text{ker}\xi + i \text{kei}\xi) \quad (5.22)$$

De constante  $c$  in (5.22) wordt nu bepaald m.b.v. (5.21b). Er volgt nu voor het snelheidsprofiel  $u(\xi, \theta)$  in de bodemgrenslaag:

$$u(\xi, \theta) = \frac{1}{2} \hat{U}_b \left[ 1 - \frac{\text{ker}\xi + i \text{kei}\xi}{\text{ker}\xi_0 + i \text{kei}\xi_0} \right] e^{-i\theta} + \text{c.c.} \quad (5.23)$$

We voeren de volgende notaties in:

$$F(\xi) = (\text{ker}^2\xi + \text{kei}^2\xi)^{1/2} \quad (5.24)$$

$$F_0 = F(\xi_0) \quad (5.24a)$$

$$\phi(\xi) = \begin{cases} \arctan(\text{kei}\xi/\text{ker}\xi) & \text{als } \text{ker}\xi \geq 0 \\ \arctan(\text{kei}\xi/\text{ker}\xi) + \pi & \text{als } \text{ker}\xi < 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

$$\phi_0 = \phi(\xi_0) \quad (5.25a)$$

Hiermee en met (5.15) herschrijven we (5.23) tot:

$$u(\xi, \theta) = U_b - \hat{U}_b \frac{F(\xi)}{F_0} \cos[\theta - \phi(\xi) + \phi_0] \quad (5.26)$$

We hebben nu een uitdrukking voor het snelheidsprofiel gevonden. In het argument  $\xi$  komt echter de wrijvingsnelheid  $u_*$  voor. Willen we het snelheidsprofiel expliciet berekenen dan zullen we  $u_*$  moeten bepalen.

#### 5.4. De bepaling van de wrijvingsnelheid

De wrijvingsnelheid  $u_*$  is gedefinieerd in (5.4). Als we nu de uitdrukking voor  $\tau$  uit (5.12) in (5.4) substitueren zien we dat (5.4) geen expliciete uitdrukking voor  $u_*$  is. Als we  $u_*$  willen bepalen hebben we immers het snelheidsprofiel  $u(\xi, \theta)$  nodig en om het snelheidsprofiel te bepalen hebben we  $u_*$  nodig. Ook fysisch is dit duidelijk. In hoofdstuk 4 hebben we al gesteld dat turbulentie een eigenschap van de stroming is. Het is dus voor de hand liggend, dat we  $u_*$  (een maat voor de turbulentie) alleen kunnen bepalen als we het snelheidsprofiel

kennen. Omgekeerd is het snelheidsprofiel alleen te bepalen als we de turbulentie kennen.

Nu het onmogelijk blijkt te zijn  $u_*$  expliciet te bepalen, gaan we een iteratief proces voor  $u_*$  opstellen. Hierbij gebruiken we (zie (5.4) en (5.12))

$$u_* = \langle [|\kappa u_* z_0 \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=z_0}]^{1/2} \rangle \quad (5.27)$$

We bepalen nu eerst een uitdrukking voor  $\frac{\partial u}{\partial z}|_{z=z_0}$  met behulp van de notaties

$$G_0 = G(\xi_0) = [(\ker' \xi_0)^2 + (\kei' \xi_0)^2]^{1/2} \quad (5.28)$$

$$\psi_0 = \begin{cases} \arctan(\ker' \xi_0 / \kei' \xi_0) & \text{als } \ker' \xi_0 \geq 0 \\ \arctan(\ker' \xi_0 / \kei' \xi_0) + \pi & \text{als } \ker' \xi_0 < 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

waarbij  $\ker' x = \frac{\partial}{\partial x} \ker x$

$$\kei' x = \frac{\partial}{\partial x} \kei x$$

en met (5.26) volgt na enig rekenwerk:

$$\frac{\partial u}{\partial z}|_{z=z_0} = \frac{-2\omega \hat{U}_b}{\kappa u_* \xi_0} \frac{G_0}{F_0} \cos(\theta + \phi_0 - \psi_0) \quad (5.30)$$

en met (5.27) wordt  $u_*$

$$u_* = \left[ \frac{2\omega z_0 \hat{U}_b}{\pi \xi_0} \frac{G_0}{F_0} \right]^{1/2} \frac{4\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \quad (5.31)$$

want  $2^{1/2} \int_0^{1/2\pi} \cos^{1/2} \theta \, d\theta = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}$  (Abramowitz & Stegun (1965))

Hiermee stellen we het volgende iteratieve proces op:

1. Schat een waarde  $u_*^{(0)}$  voor  $u_*$

2.  $\xi_0^{(n)} = [4\omega z_0 / \kappa u_*^{(n)}]^{1/2}$

3.  $u_*^{(n+1)} = 4 \left[ \frac{2\omega z_0}{\xi_0^{(n)} \pi} \hat{U}_b \frac{G_0^{(n)}}{F_0^{(n)}} \right]^{1/2} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}$

4. als  $|u_{\star}^{(n+1)} - u_{\star}^{(n)}| >$  nauwkeurigheid dan naar 2

anders  $u_{\star} = u_{\star}^{(n+1)}$

Het bovenstaande iteratieve proces is nauwelijks gevoelig voor variatie in de startwaarde. Het proces convergeert in ongeveer 12 stappen met een nauwkeurigheid van  $10^{-6}$ . De resultaten van de berekening van  $u_{\star}$  staan in paragraaf 6.1.

### 5.5. De energiedissipatie

De energiedissipatie in de bodemgrenslaag kunnen we berekenen met (4.24). Met de notaties uit de vorige paragraaf schrijven we:

$$\tau_b = \frac{-2\omega z_0 \rho}{\xi_0} \hat{U}_b \frac{G_0}{F_0} \cos(\theta + \phi_0 - \psi_0) \quad (5.32)$$

$$U_b = \hat{U}_b \cos \theta \quad (5.33)$$

De energiedissipatie wordt nu gegeven door

$$\langle \dot{E} \rangle = - \langle \tau_b U_b \rangle = - \rho \omega z_0 \frac{\hat{U}_b^2}{\xi_0} \frac{G_0}{F_0} \cos(\psi_0 - \phi_0 + \pi) \quad (5.34)$$

De energiedissipatie is een functie van  $\xi_0$  en dit kunnen we tot uitdrukking brengen door te schrijven (met 2.39)

$$\langle \dot{E} \rangle = - \rho \omega z_0 \hat{U}_b^2 \chi(\xi_0) = - 4\omega z_0 \frac{k}{\sinh 2kd} \langle E \rangle \chi(\xi_0) \quad (5.35)$$

$$\text{met } \chi(\xi_0) = \frac{G_0 \cos(\psi_0 - \phi_0 + \pi)}{F_0 \xi_0} \quad (5.36)$$

In het volgende hoofdstuk zullen we  $\langle \dot{E} \rangle$  in een aantal gevallen bepalen.

### 5.6. Draglaw en eddyviscositeit

Als we (5.1) en (5.32) met elkaar vergelijken kunnen we twee dingen opmerken. Ten eerste stemmen de fases van (5.1) en (5.32) niet met elkaar overeen. Ten tweede is (5.1) kwadratisch in  $\hat{U}_b$  en (5.32) lineair. In (5.32) komt echter de term  $\omega z_0$  voor die ook als "snelheid" fungeert.

Het is dus duidelijk, dat voor een oscillerende stroming de draglaw en de lineaire eddyviscositeitshypothese twee wezenlijk verschillende turbulentieparametrisaties zijn. In het geval van een stationaire stroming zijn ze echter niet tegenstrijdig.

In het volgende hoofdstuk zullen we de energiedissipatie in beide modellen numeriek bepalen. In het geval van de draglaw moeten we dan een acceptabele waarde voor  $f_w$  hebben (zie 5.2). Voor  $f_w$  kunnen we de volgende uitdrukkingen opschrijven

$$\tau_b = \frac{1}{2} \rho f_w \hat{U}_b^2 \cos\theta | \cos\theta | \quad (5.1)$$

$$\tau_{b,max} = \frac{1}{2} \rho f_w \hat{U}_b^2 \quad (5.37)$$

en met behulp van (5.4)

$$u_*^2 = \frac{2}{\pi^2} f_w \hat{U}_b^2 \quad (5.38)$$

Experimenteel wordt  $f_w$  in het algemeen bepaald met (5.37). Onder aanname van de geldigheid van (5.1) zijn (5.37) en (5.38) equivalent met (5.1).

In het eddyviscositeitsmodel kunnen we, bij gegeven  $\hat{U}_b$ ,  $u_*$  en  $\tau_b$  berekenen. Als we deze waarden invullen zijn de verschillende definities van  $f_w$  echter niet equivalent. Zoals hiervoor al opgemerkt zijn (5.1) en het eddyviscositeitsmodel zelfs strijdig. De wrijvingsfactor bepaald uit (5.37) geven we in het vervolg aan met  $\tilde{f}_w$  en die uit (5.38) met  $f_w$ . Er geldt  $f_w = 1.4 \tilde{f}_w$ .

In het vervolg zal ik (5.38) gebruiken om de modellen te vergelijken. Hiertoe berekenen we vanuit het eddyviscositeitsmodel de wrijvingsnelheid  $u_*$  met

$$u_*^2 = \left\langle \left| \frac{\tau_b}{\rho} \right|^{1/2} \right\rangle^2 = \frac{32}{\pi} \frac{\omega z_0}{\xi_0} \frac{G_0}{F_0} \hat{U}_b \left[ \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \right]^2 \quad (5.39)$$

Vervolgens kunnen we met (5.38)  $f_w$  berekenen en dan met (5.2) de energiedissipatie met de draglaw. We hebben hiermee een methode gevonden om bij eenzelfde turbulentieniveau  $u_*^2$  de draglaw en het eddyviscositeitsmodel met elkaar te vergelijken. Dit gaan we in hoofdstuk 6 doen.

## Hoofdstuk 6

### Resultaten en Conclusies

In dit hoofdstuk vergelijken we de draglaw en het eddyviscositeitsmodel numeriek. Hiertoe onderzoeken we hoe de grootheden  $u_*$ ,  $f_w$  en  $\langle \dot{E} \rangle$  afhangen van de variabelen  $k_s$ ,  $\omega$ ,  $d$ ,  $a$ ,  $k$  en  $\hat{U}_b$ . Hierbij merken we op, dat  $k$  en  $\hat{U}_b$  m.b.v. (2.26) en (3.26) uit te drukken zijn in de overige variabelen. Als we de frequentie ( $\omega$ ), de amplitude ( $a$ ), de waterdiepte ( $d$ ) en de ruweidslengte ( $k_s$ ) kennen, kunnen we  $u_*$ ,  $f_w$  en  $\langle \dot{E} \rangle$  berekenen.

#### 6.1. De wrijvingsnelheid $u_*$

De wrijvingsnelheid  $u_*$  is een belangrijke grootte, omdat het een maat voor de turbulentie is en het verband tussen de draglaw en het eddyviscositeitsmodel wordt verkregen via  $u_*$ . Met behulp van het iteratieve proces uit paragraaf 5.4 is  $u_*$  expliciet te berekenen.

De dimensieloze grootte  $u_*/\hat{U}_b$  blijkt alleen afhankelijk te zijn van de verhouding tussen  $k_s$  en  $\hat{U}_b/\omega = \hat{A}_b$ . De verhouding  $k_s/\hat{A}_b$  wordt de relatieve bodemrutheid genoemd.  $u_*/\hat{U}_b$  is onafhankelijk van de waterdiepte  $d$  en de frequentie  $\omega$  (bij constante verhouding  $k_s/\hat{A}_b$ ).

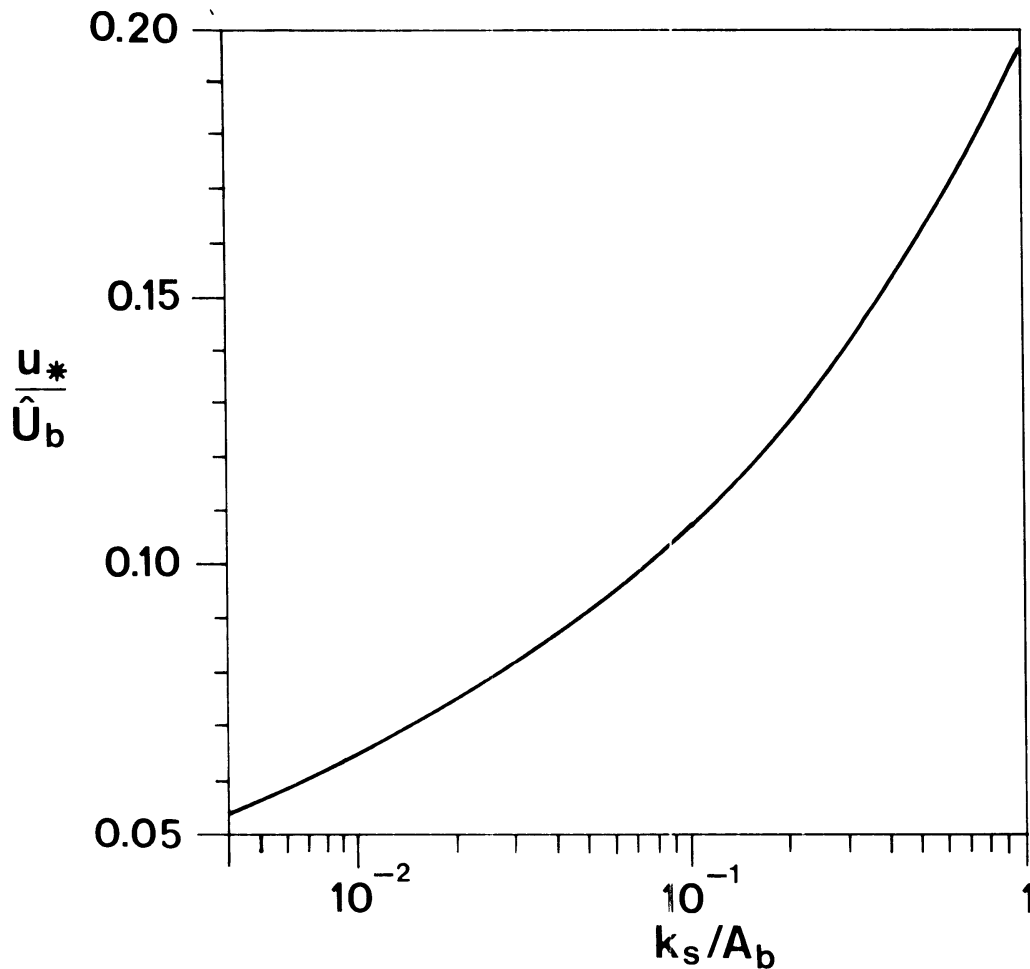
$$u_* = f(k_s/\hat{A}_b) \hat{U}_b \quad (6.1)$$

In figuur 10 is  $u_*/\hat{U}_b$  uitgezet tegen  $k_s/\hat{A}_b$  voor een ruwe bodem (het geval van een gladde bodem laten we buiten beschouwing, zie 4.4).

Nu we weten, dat  $u_*/\hat{U}_b$  alleen afhankelijk is van  $k_s/\hat{A}_b$  kunnen we inzien dat het argument  $\xi_0$  in (5.34) ook alleen afhankelijk is van  $k_s/\hat{A}_b$ .

$$\xi_0 = \left[ \frac{4\omega z_0}{k u_*} \right]^{1/2} = \left[ \frac{1}{3} \frac{k_s}{\hat{A}_b} \frac{\hat{U}_b}{u_*} \right]^{1/2} = \hat{f}(k_s/\hat{A}_b)$$





figuur 10: De wrijvingsnelheid uitgezet tegen de relatieve bodemruwheid ( $u_*/\hat{U}_b$  tegen  $k_s/A_b$ ) voor een ruwe bodem.

### 6.2. De wrijvingsfactor $f_w$

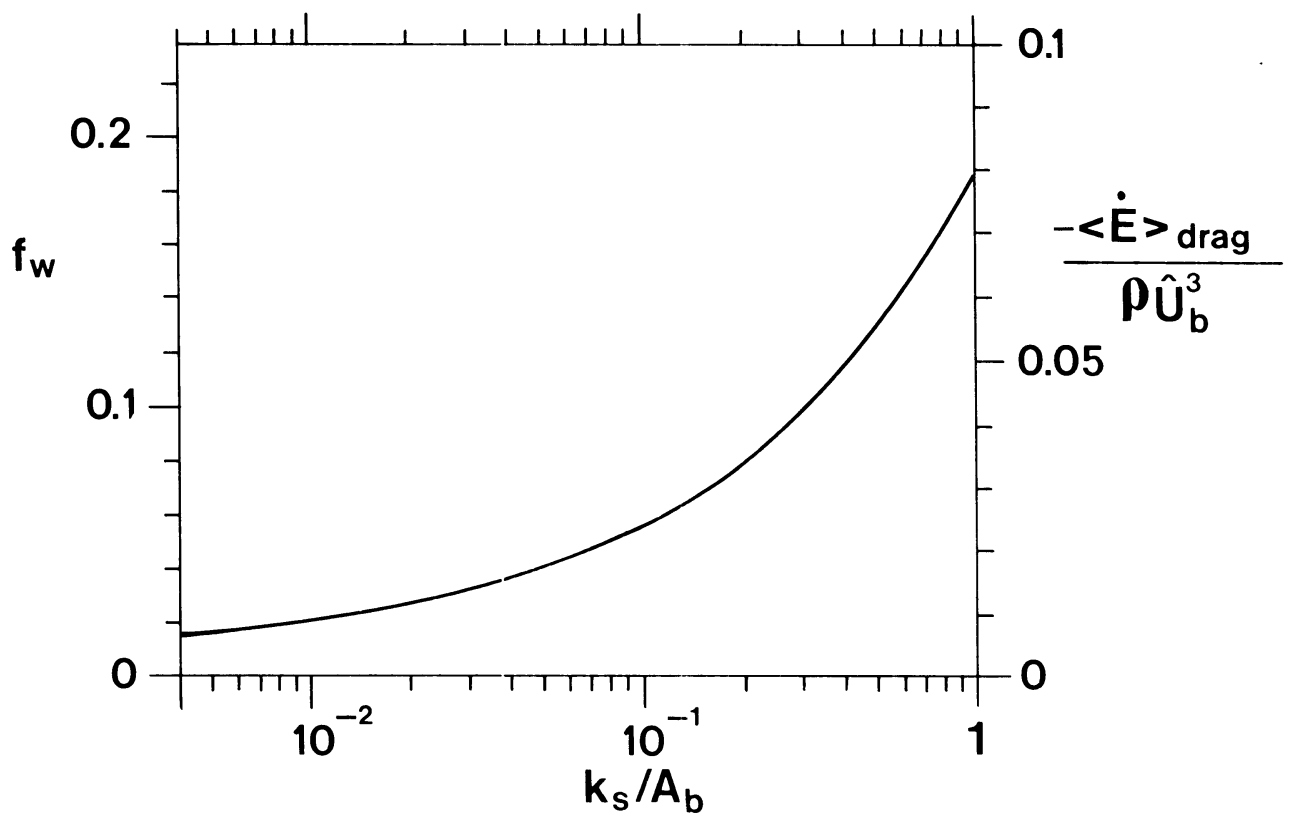
Nadat we in de vorige paragraaf  $u_*$  hebben bepaald kunnen we nu met (5.38) de wrijvingsfactor  $f_w$  bepalen. Aangezien  $u_*/\hat{U}_b$  alleen afhankelijk is van de relatieve bodemruwheid  $k_s/A_b$  is ook  $f_w$  onafhankelijk van de diepte en de frequentie. Met (6.1) volgt uit (5.38)

$$f_w = \frac{\pi^2}{2} f^2[k_s/A_b] \quad (6.2)$$

In figuur 11 is  $f_w$  uitgezet tegen  $k_s/A_b$ . De energiedissipatie berekend met de draglaw is rechtevenredig met  $f_w$  (zie (5.29)). Als we  $-\langle \dot{E} \rangle / \rho \hat{U}_b^3$  uitzetten tegen  $k_s/A_b$  levert dit

$$-\langle \dot{E} \rangle / \rho \hat{U}_b^3 = \frac{4}{3\pi} f_w \quad (6.3)$$

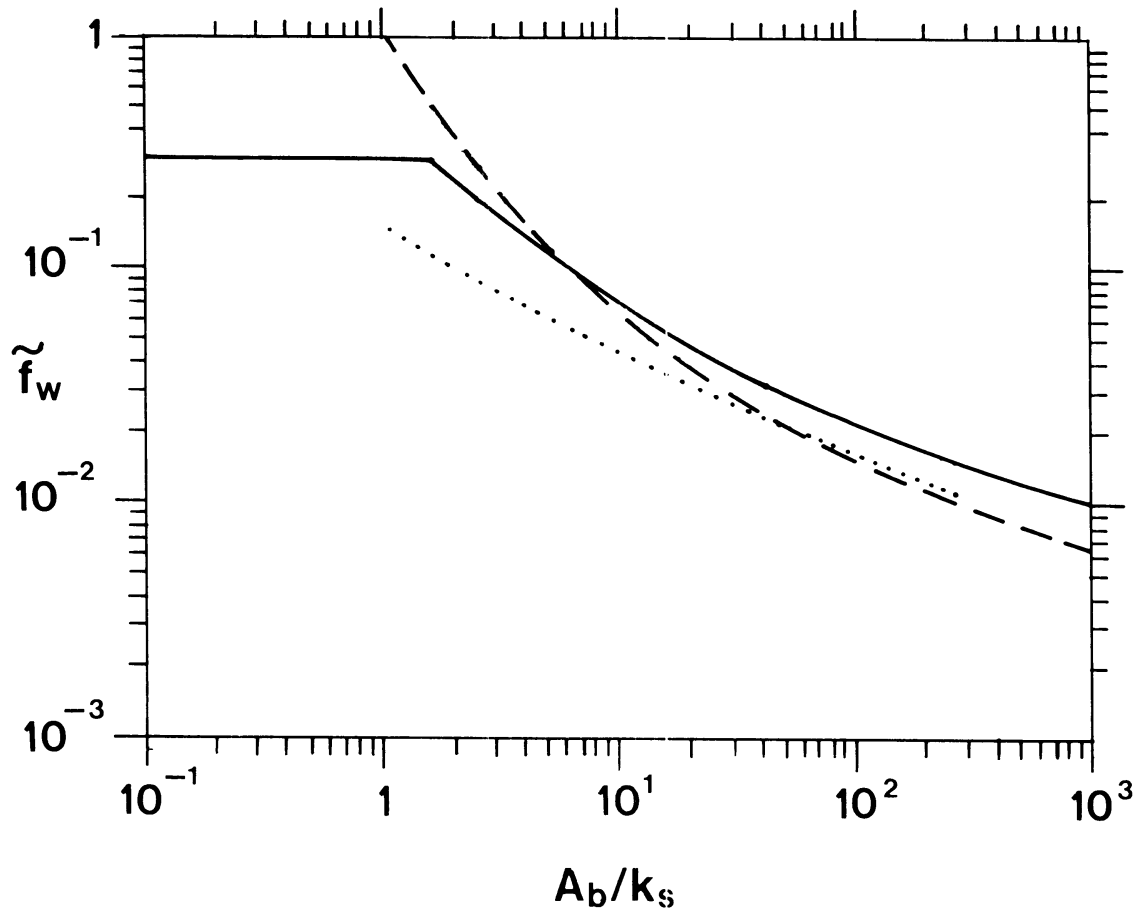
Als we de schaal in figuur 11 met de factor  $\frac{4}{3\pi}$  veranderen kunnen we hier direkt de energiedissipatie uit afleiden.



figuur 11: De wrijvingsfactor en de energiedissipatie met de draglaw uitgezet tegen de relatieve bodemruwheid voor een ruwe bodem ( $f_w$  tegen  $k_s/A_b$  en  $-\langle \dot{E} \rangle_{\text{drag}} / \rho \hat{U}_b^3$  tegen  $k_s/A_b$ )

In figuur 12 vergelijken we de met (5.37) berekende wrijvingsfactor met metingen van Jonsson en Kamphuis. Voor  $k_s/A_b < 0.1$  is de overeenstemming tussen de modellen goed. Voor  $k_s/A_b > 0.1$  is de wrijvingsfactor berekend met (5.37) lager dan die in de modellen van Jonsson en Kamphuis. Jonsson maakt echter de aanname dat er in de bodemgrenslaag een logaritmisch snelheidsprofiel is.

Voor kleine waarden van  $\xi_0$  (en  $k_s/A_b$ ) leveren de ker- en keifuncties een logaritmisch profiel. Als echter  $\xi_0$  en  $k_s/A_b$  toenemen wordt de afwijking t.o.v. het logaritmische profiel steeds groter. Daardoor levert (5.37) kleinere waarden voor  $\tilde{f}_w$  dan Jonsson bij toenemende  $k_s/A_b$ .



figuur 12: Vergelijking van het lineaire eddyviscositeitsmodel met metingen.

.....  $\tilde{f}_w$  berekend met (5.37)

— Jonsson (1963, 1976a), semi empirisch

- - - Kamphuis (1975), empirisch

Deze grafiek is gedeeltelijk overgenomen uit Jonsson, 1980 (figuur 7).

### 6.3. Energiedissipatie $\langle \dot{E} \rangle$

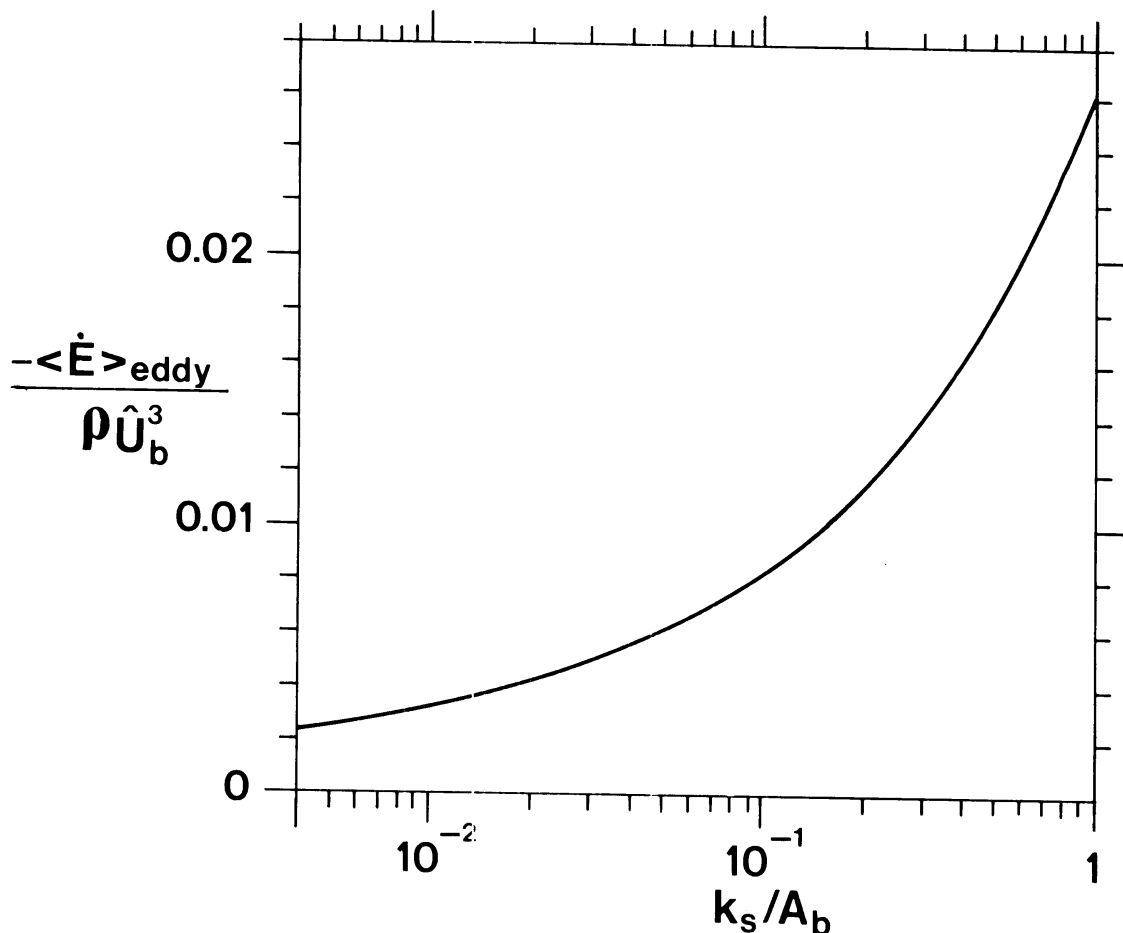
#### De afhankelijkheid van de bodemruwheid

In figuur 11 hebben we de energiedissipatie berekend met de draglaw uitgezet tegen de relatieve bodemruwheid. We gaan dit nu ook doen voor de energiedissipatie uit het lineaire eddyviscositeitsmodel.

We kunnen formule (5.35) herschrijven tot

$$\langle \dot{E} \rangle = - \rho \hat{U}_b^3 \tilde{f}(k_s/A_b) \quad (6.4)$$

In figuur 13 is de dimensieloze grootheid  $-\langle \dot{E} \rangle / \rho \hat{U}_b^3$  uitgezet tegen  $k_s/A_b$ .



figuur 13: De energiedissipatie in het eddyviscositeitsmodel uitgezet tegen de relatieve bodemruwheid voor een ruwe bodem ( $-\langle \dot{E} \rangle_{\text{eddy}} / \rho \hat{U}_b^3$  tegen  $k_s/A_b$ ).

Met gebruikmaking van (5.38) en (5.39) is een verband af te leiden tussen de energiedissipatie in beide modellen bij een turbulentieniveau  $u_*^2$ .

$$\frac{32}{\pi} \frac{\omega z_0}{\xi_0} \frac{G_0}{F_0} \hat{U}_b \left[ \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \right]^2 = \frac{2}{\pi^2} f_w \hat{U}_b^2 \quad (6.5)$$

Dit levert voor de wrijvingsfactor  $f_w$

$$f_w = \frac{8\pi}{15} \left[ \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \right]^2 \frac{k_s}{A_b} \frac{G_0}{\xi_0 F_0} \quad (6.6)$$

We kunnen nu  $\langle \dot{E} \rangle_{\text{eddy}}$  uitdrukken in  $f_w$ :

$$\langle \dot{E} \rangle_{\text{eddy}} = \frac{-1}{4\pi} f_w \hat{U}_b \left[ \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)} \right]^2 \cos(\psi_0 - \phi_0 + \pi) \frac{k}{\sinh 2kd} \langle E \rangle \quad (6.7)$$

Als we (5.2) en (6.7) met elkaar vergelijken krijgen we een verband tussen de energiedissipatie in de beide modellen:

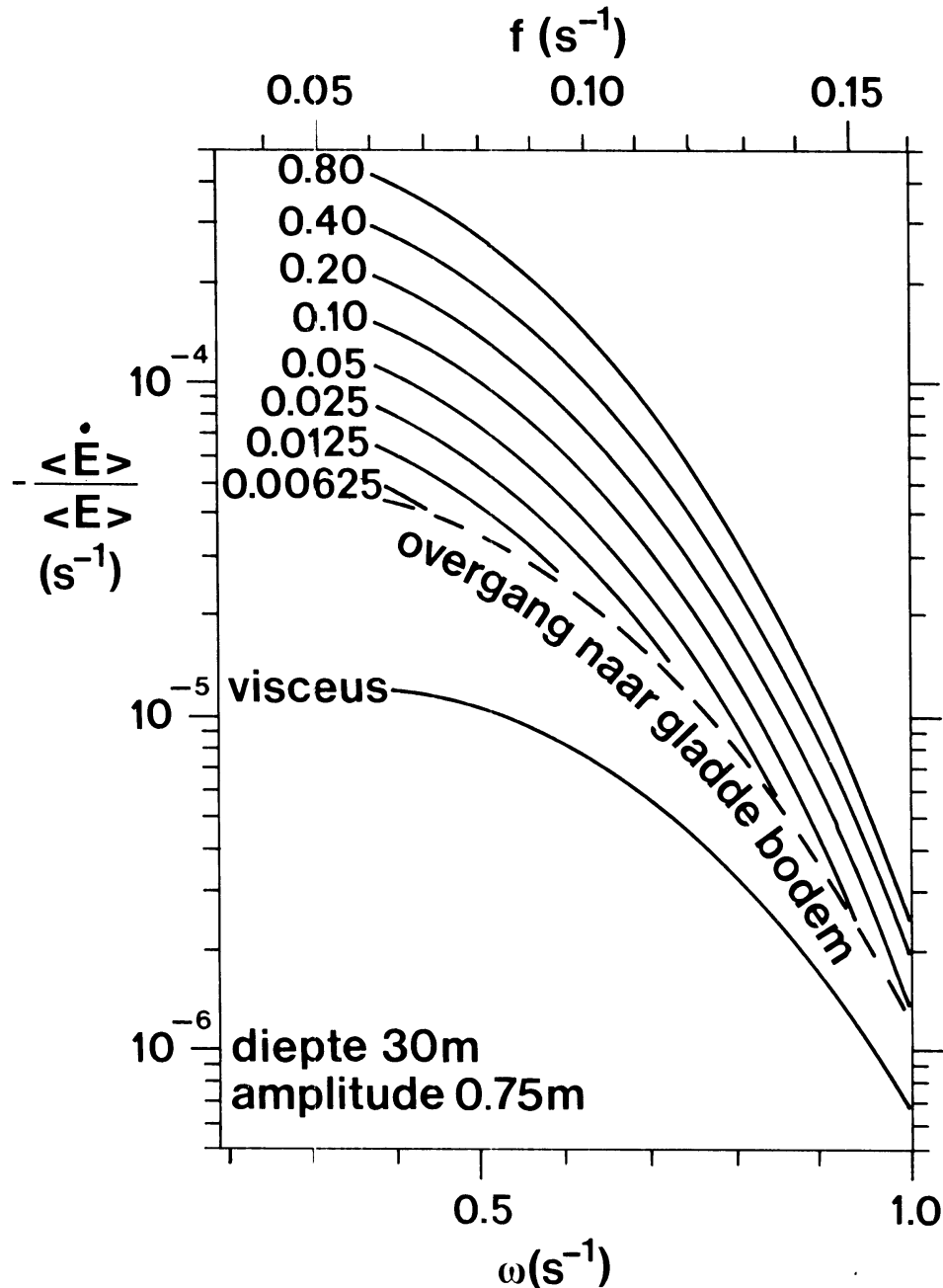
$$\frac{\langle \dot{E} \rangle_{\text{eddy}}}{\langle \dot{E} \rangle_{\text{drag}}} = \frac{3}{64} \left[ \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)} \right]^2 \cos(\psi_0 - \phi_0 + \pi) \quad (6.8)$$

$\psi_0$  en  $\phi_0$  zijn beide alleen afhankelijk van  $k_s/A_b$ .  $\langle \dot{E} \rangle_{\text{eddy}}$  en  $\langle \dot{E} \rangle_{\text{drag}}$  schelen (bij constante relatieve bodemruwheid) een constante. Deze constante varieert van 0.335 (bij  $k_s/A_b = 1$ ) tot 0.387 (bij  $k_s/A_b = 0.004$ ). De energiedissipatie in het model van de draglaw is dus een factor 2.5 tot 3 hoger dan de energiedissipatie in het eddyviscositeitsmodel. Gebruiken we in de draglaw een experimenteel bepaalde wrijvingsfactor dan verandert de evenredigheidsconstante in (6.8) licht als functie van de bodemruwheid (zie figuur 12).

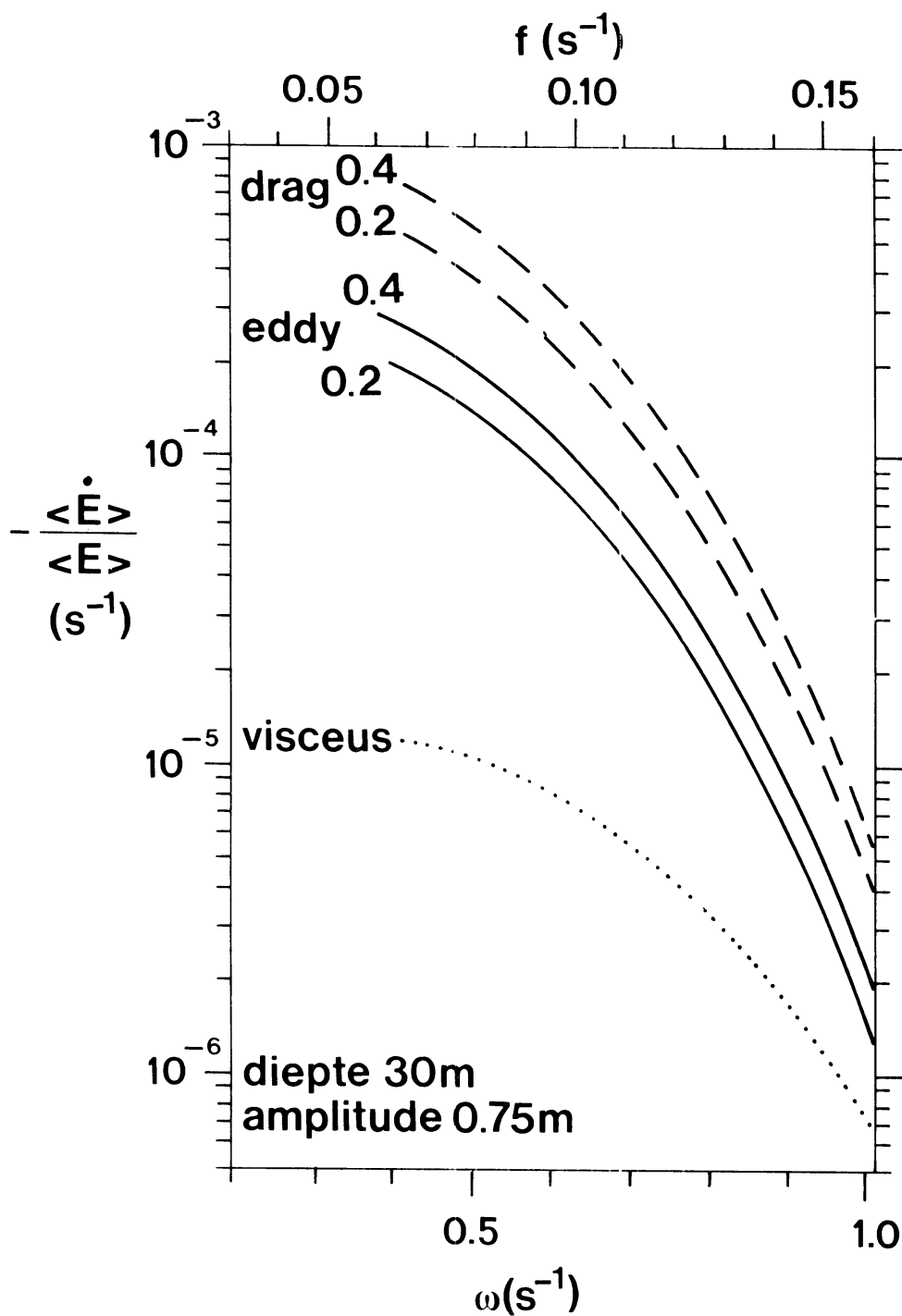
### De afhankelijkheid van de frequentie

De energiedissipatie is in beide modellen afhankelijk van de relatieve bodemruwheid  $k_s/A_b$  en van de vrijestroomsnelheid  $U_b$ . In het voorgaande hebben we bepaald hoe  $\langle \dot{E} \rangle$  afhangt van  $k_s/A_b$ . Nu zullen we onderzoeken hoe  $\langle \dot{E} \rangle$  afhangt van de frequentie  $\omega$ . Als  $\omega$  verandert, verandert het golfgetal  $k$  ook. We nemen nu  $k_s/A_b$  vast en laten  $f (= \omega/2\pi)$  variëren van 0.06 tot 0.16. Hierbij beschouwen we water van 30 m diep en golven met een amplitude van 0.75 m.

In figuur 14 is  $\langle \dot{E} \rangle$  uitgezet tegen de frequentie voor verschillende waarden van  $k_s/A_b$  en alleen voor een ruwe bodem.  $\langle \dot{E} \rangle$  is berekend met het eddyviscositeitsmodel. Uit (6.9) is af te leiden dat we voor de draglaw dezelfde grafiek krijgen alleen ligt de turbulente energiedissipatie dan ongeveer een factor 3 hoger.



figuur 14: De energiedissipatie uitgezet tegen de frequentie; voor het lineaire eddyviscositeitsmodel met verschillende bodemruwheden ( $k_s/A_b = 0.00625 - 0.80$ ) en de visceuze energiedissipatie.  
 $d = 30$  m,  $a = 0.75$  m,  $\langle E \rangle = 2759$  kg/s<sup>2</sup>  
 $(-\langle \dot{E} \rangle / \langle E \rangle$  tegen  $\omega = 2 \pi f)$ .



figuur 15: Vergelijking van de energiedissipatie berekend met de draglaw en het eddyviscositeitsmodel en visceus  $d = 30$  m,  $a = 0.75$  m,  $\langle E \rangle = 2759$  kg/s<sup>2</sup>.

..... visceuze energiedissipatie

— energiedissipatie met eddyviscositeit

( $k_s/A_b = 0.2, 0.4$ )

- - - energiedissipatie met draglaw

( $k_s/A_b = 0.2, 0.4$ )

[ $-\langle \dot{E} \rangle / \langle E \rangle$  tegen  $\omega = 2\pi f$ ]

We zien in figuur 14, dat de energiedissipatie afneemt als de frequentie toeneemt. Dit komt enerzijds doordat een hogere frequentie een groter golfgetal tot gevolg heeft waardoor  $A_b$  daalt en (aangezien  $k_s/A_b = \text{constant}$ ) ook de bodemruwheid daalt. Anderzijds correspondeert een hogere frequentie (en dus een kortere golflengte) met relatief dieper water, waarbij de golven de bodem minder snel voelen. Ter illustratie is in figuur 14 ook de visceuze energiedissipatie uitgezet (m.b.v. (3.26)). We zien dat de turbulente energiedissipatie inderdaad groter is dan de visceuze zoals al eerder was verondersteld.

Voor alle duidelijkheid is in figuur 15 een vergelijking gegeven van de energiedissipatie met de draglaw en het eddyviscositeitsmodel. Deze grafiek is af te leiden uit de grafieken 11, 13 en 14.

De grootte  $-\langle \dot{E} \rangle / \langle E \rangle$  uit figuur 13, 14 en 15 kunnen we interpreteren als een maat voor de halveringstijd van de energie. Uit  $-\langle \dot{E} \rangle / \langle E \rangle = \gamma$  volgt

$$E(t) = E(0) e^{-\gamma t} \quad (6.9)$$

De halveringstijd  $T_{1/2}$ , waarvoor geldt  $E(T_{1/2}) = \frac{1}{2}E(0)$ , wordt gegeven door

$$T_{1/2} = \ln 2 / \gamma \quad (6.10)$$

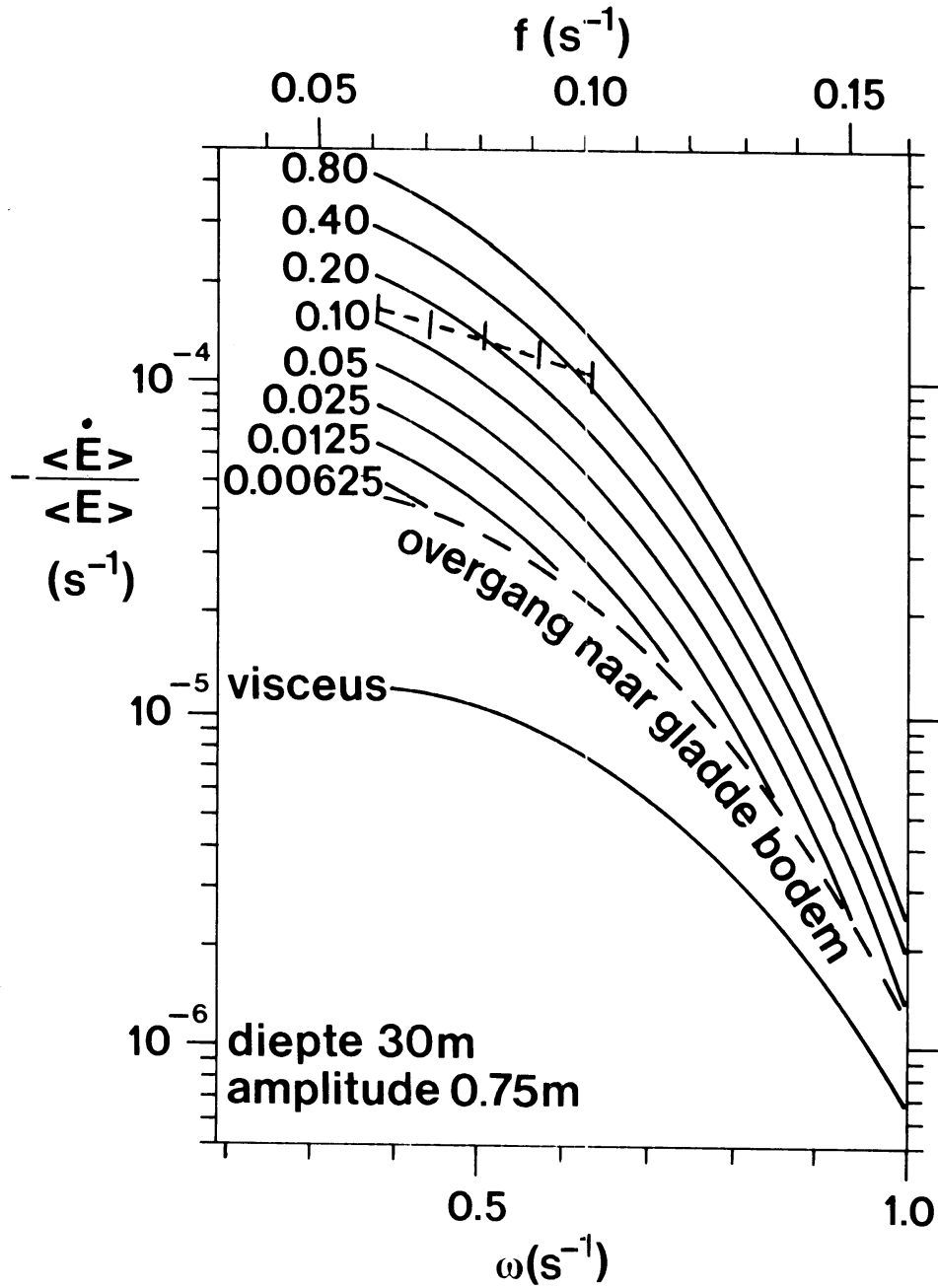
In de onderstaande tabel is voor een aantal waarden van  $\gamma$  de halveringstijd  $T_{1/2}$  berekend.

$\gamma$	$T_{1/2}$
$10^{-3}$	12 <sup>min</sup>
$10^{-4}$	2 <sup>h</sup>
$10^{-5}$	20 <sup>h</sup>
$10^{-6}$	200 <sup>h</sup>

Bij de berekening van  $\gamma$  (en dus van  $T_{1/2}$ ) is alleen rekening gehouden met het energieverlies ten gevolge van bodemwrijving. Dit energieverlies vindt geheel plaats in de bodemgrenslaag ( $\delta \approx 30$  cm).



In figuur 16 vergelijk ik het eddyviscositeitsmodel met gegevens van tien stormen op de Noordzee die zijn verwerkt door Yan & Bouws (1987).



figuur 16: Vergelijking van het eddyviscositeitsmodel (figuur 13) met gegevens van Yan & Bouws (1987) van golven op de zuidelijke Noordzee.

De interpretatie van deze gegevens moet voorzichtig geschieden, omdat er in de Noordzee sprake is van stroming tengevolge van het getij. In deze scriptie heb ik me beperkt tot de invloed van de golven en de getijdestroom buiten beschouwing gelaten. We zien in figuur 15 dat deze meetgegevens niet samenvallen met een kromme in ons eddyviscositeitsmodel. We moeten ons hierbij echter realiseren, dat deze krommen zijn getekend voor een constante verhouding  $k_s/A_b$ . Als we veronderstellen dat de Noordzeebodem op het beschouwde traject tussen K-13 (53.2° NB) en EURO (52°NB) een constante ruwheids-lengte  $k_s$  heeft, dan zou moeten gelden dat  $A_b = a/\sinh kd$  constant is gedurende de metingen. Dit is echter moeilijk te controleren, omdat we niet met monochromatische golven te doen hebben.

We kunnen echter wel iets zeggen over de grootte-orde. Als we uitgaan van  $0.1 < k_s/A_b < 0.4$  en  $0.06 < f < 0.10$  dan levert dit bij  $d = 30$  en  $a = 0.75$ :

$$0.09 < k_s < 0.17$$

Dit komt overeen met zandribbeltjes ter hoogte  $k_s/4$ . Dus ribbeltjes van 2.25 - 4.25 cm. Dit zijn realistische waarden. Het lineaire eddyviscositeitsmodel is dus in redelijke overeenstemming met de metingen van Yan en Bouws.

#### 6.4 Conclusies

De wrijvingsnelheid en de energiedissipatie in het eddyviscositeitsmodel zijn alleen afhankelijk van de vrije stroomsnelheid en de relatieve bodemruwheid.

De energiedissipatie berekend met de draglaw is bij eenzelfde turbulentieniveau een factor 2.5 à 3 hoger dan de energiedissipatie in het eddyviscositeitsmodel. Deze factor is alleen afhankelijk van de relatieve bodemruwheid.

Als we de wrijvingsfactor berekend vanuit het eddyviscositeitsmodel vergelijken met die van Jonsson en Kamphuis (Jonsson, 1980) vinden we voor kleine waarden van de relatieve bodemruwheid ( $k_s/A_b < 0.1$ ) een goede overeenstemming (zie figuur 12). Voor grotere waarden is de berekende wrijvingsfactor echter aanmerkelijk lager, omdat Jonsson rekent met het logaritmische snelheidsprofiel dat voor grotere waarden van  $k_s/A_b$  geen goede benadering is.

Het lineaire eddyviscositeitsmodel is in redelijke overeenstemming met metingen in de zuidelijke Noordzee (Yan & Bouws, 1987). We moeten hierbij echter voorzichtig zijn, omdat in het eddyviscositeitsmodel geen rekening is gehouden met de getijdestroom.

De draglaw en de lineaire eddyviscositeit zijn beide parametrisaties van de turbulentie die gebaseerd zijn op analogie met een stationaire stroming. Recente metingen (Sleath, 1987) tonen aan, dat er in een oscillerende stroming meer aan de hand is. Het is wenselijk dat er in de toekomst een model wordt opgesteld, waarin deze metingen verwerkt worden.

## Notatielijst

a:	amplitude	$[a] = m$
$A_b =$	$\hat{U}_b/\omega$ : amplitude aan bodem	$[A_b] = m$
$A_\tau$ :	eddyviscositeit	$[A_\tau] = \text{kg/ms}$
d:	waterdiepte	$[d] = m$
$\underline{e}$ :	deformatietensor	
E:	totale energie per waterkolom	$[E] = \text{kg/s}^2$
$\dot{E}$ :	energiedissipatie per waterkolom	$[\dot{E}] = \text{kg/s}^3$
f:	frequentie	$[f] = 1/s$
$f_w$ :	wrijvingsfactor	
g:	gravitatieversnelling	$g = 9.81 \text{ m/s}^2$
$\underline{g}$ :	gravitatievector	$\underline{g} = (0, 0, -g)$
H:	golfhoogte	$[H] = m$
k:	golfgetal	$k = 2\pi/\lambda, [k] = 1/m$
$\underline{k}$ :	golfvector	$\underline{k} = (k_1, k_2),  \underline{k}  = k$
$k_s$ :	Nikuradse's bodemruwheid	$[k_s] = m$
$\ell =$	$\kappa u_* / \omega$	$[\ell] = m$
p:	druk	$[p] = \text{kg/m}^2\text{s}$
R:	Reynoldsgetal	
t:	tijd	$[t] = s$
T:	golfperiode	$[T] = s$
$\underline{u}$ :	snelheidsvector	$[\underline{u}] = \text{m/s}$
u:	horizontale snelheidscomponent (2-dim. model)	
$u_i$ :	i-de snelheidscomponent (3-dim. model)	
$u_*$ :	wrijvingsnelheid	$[u_*] = \text{m/s}$
$\hat{U}_b =$	$U_b \cos\theta$ : vrije stroomsnelheid aan bodem	
$U_b =$	$\omega a / \sinh kd$	
v:	vertikale snelheidscomponent (2-dim. model)	
$\underline{x}$ :	plaatsvector	$[\underline{x}] = m$
x:	horizontale plaatscoördinaat (2-dim. model)	
$x_i$ :	i-de plaatscoördinaat (3-dim. model)	
$\tilde{\underline{x}} =$	$(x_1, x_2)$	
z:	vertikale plaatscoördinaat (2-dim. model)	
$z_o$ :	ruwheidslengte	$[z_o] = m$
$\beta =$	$(\omega/2\nu)^{1/2}$	

$\Gamma$ :	Gammafunctie	
$\delta$ :	dikte bodemgrenslaag	$[\delta] = m$
$\delta_v$ :	dikte visceuze bodemgrenslaag (visceuze sublaag)	$[\delta_v] = m$
$\underline{\epsilon}$ :	kinematische viscositeit	$[\underline{\epsilon}] = m^2/s$
$\epsilon$ :	energiedissipatie	$[\epsilon] = kg/ms^3$
$\eta =$	$\text{acos}\theta$ $z = \eta$ : wateroppervlak	
$\theta =$	$\underline{k} \cdot \underline{\bar{x}} - \omega t$	
$\kappa =$	0.4: Von Kármán's constante	
$\lambda$ :	golflengte	$[\lambda] = m$
$\mu$ :	viscositeit	$[\mu] = kg/ms$
$\nu$ :	kinematische viscositeit	$[\nu] = m^2/s$
$\rho$ :	massadichtheid	$[\rho] = kg/m^3$
$\xi =$	$(4\omega z / \kappa u_* )^{1/2}$	
$\tau$ :	turbulente schuifspanning	$[\tau] = kg/ms^2$
$\tau_b$ :	turbulente schuifspanning aan de bodem (op $z = z_o$ )	
$\phi$ :	snelheidspotentiaal	
$\omega =$	$2\pi f$ : radiële frequentie	$[\omega] = 1/s$
$\underline{\omega} =$	$\nabla \times \underline{u}$ : vorticititeit	
$\nabla$ :	gradiënt operator	$\nabla = [\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3]$
$\Delta$ :	Laplace operator	$\Delta = [\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2]$
$\bar{x}$ :	ensemble gemiddelde van $x$	
$x' =$	$x - \bar{x}$ : fluctuaties van $x$	
$\langle x \rangle$ :	$x$ gemiddeld over één golfperiode	
$ x $ :	absolute waarde van $x$	
$x$ :	uitproduct	
$\cdot$ :	inproduct	
c.c.:	complex geconjugeerde	

## Literatuurlijst

- Abramowitz, M. & Stegun, I.A., 1965, Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, Washington D.C.
- Grant, W.D. & Madsen, O.S., 1979, Combined wave and current interaction with a rough bottom, Journal of Geophysical Research, 84 (C4), pp. 1797-1808.
- Grant, W.D. & Madsen, O.S., 1986, The continental shelf bottom boundary layer, Annual Review Fluid Mechanics 18, pp. 265-305.
- Groen, P. & Dorrestein, R., 1976, Zeegolven, Opstellen op oceanografisch en maritiem meteorologisch gebied, no. 11 3<sup>e</sup> dr. zeegolven, Staatsdrukkerij, 's Gravenhage.
- Jager, E.M. de, 1983, Introduction to the theory of singular perturbations, Astérisque 109-110, pp. 67-100, Société Mathématique de France.
- Jonsson, I.G., 1980, A new approach to oscillatory rough turbulent boundary layers, Ocean Engineering 7, pp. 109-152.
- Judson, H.F., 1982, Op zoek naar Oplossingen, Veen, Utrecht/Antwerpen.
- Kajiura, K., 1968, A model of the bottom boundary layer in water waves, Bulletin of Earthquake Research Institute, University of Tokyo, 46 (1), pp. 75-123.
- Levi Civita, T., 1924, Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'amplitude finie, Mathematische Annalen 93, pp. 269-314.
- Monin, A.S. & Yaglom, A.M., 1971, Statistical Fluid Mechanics of Turbulence, Vol. I, MIT Press.

- Nayfeh, A.H., 1973, Perturbation Methods, Wiley & Sons, New York.
- Schlichting, H., 1955, Boundary layer theory, McGraw Hill, New York.
- Sleath, J.F.A., 1987, Turbulent oscillatory flow over rough beds, Journal of Fluid Mechanics, 182, pp. 369-409.
- Yan, L. & Bouws, E., 1987, Possible causes of the attenuation of swell in the southern North Sea, Memorandum 00-87-21, KNMI Afd. Oceanografisch Onderzoek, De Bilt.