

**KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT**

TECHNISCHE RAPPORTEN

T.R. - 16

A.E. Kranenburg

De invloed van een berg op een ondiep-water-model
van de atmosfeer, lineair en niet-lineair beschouwd
(afstudeerverslag)

De Bilt, 1982

Publikatienummer: K.N.M.I. TR-16(DM)

Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut,
Dynamisch Meteorologisch Onderzoek,
Postbus 201,
3730 AE De Bilt,
Nederland.

U.D.C.: 551.509.313 :
551.588.2

0. Inleiding

1. Het model

1.1. De oorspronkelijke modelvergelijkingen

1.1.1. De vorticitetsvergelijking en de divergentievergelijking

1.1.2. De continuïteitsvergelijking

1.2. De nieuwe modelvergelijkingen

1.2.1. Orografie

1.2.2. Wrijving

1.2.3. Diffusie

1.3. Stroomfunctie en snelheidspotentiaal

2. Numerieke oplossing van de modelvergelijkingen

2.1. De modelvergelijkingen in spektrale vorm

2.1.1. De variabelen ξ , U en V uitgedrukt in de basisvariabelen

2.1.2. De spektrale modelvergelijkingen

2.2. De tijdsdiskretisatie

3. Verdere gegevens, nodig voor het doen van de experimenten

3.1. Initialisatie

3.1.1. De beginsituatie

3.1.2. De balansvergelijking

3.1.3. De begintijdstappen

3.2. De berg

3.3. Hoe maak je een lineaire berekening met een niet-lineair model

4. De experimenten

4.1. De lineaire run

4.2. De niet-lineaire runs

4.2.1. Zonder herstel van de zonale componenten

4.2.2. Met herstel van de zonale componenten

5. Kinetische energie

5.1. Afleiding van de vergelijking

5.2. De spektrale verdeling van kinetische energie

6. Samenvatting en conclusie

Appendices:

I. Lijst van gebruikte symbolen

II. Bolfuncties

Referenties

0. INLEIDING.

De invloed van externe forcering (verwarming, bergen) op de atmosfeer wordt vaak bestudeerd aan de hand van lineaire modellen (Charney en Eliassen, 1949; Egger, 1976; Grose en Hoskins, 1979; Opsteegh en Van den Dool, 1980; e.a.).

Lineaire modellen hebben het voordeel dat ze gemakkelijk te maken en fysisch overzichtelijk zijn, en bovendien weinig computer capaciteit nodig hebben. Maar omdat de atmosfeer een niet-lineair systeem is, zullen lineaire modellen slechts een benadering van de werkelijkheid kunnen geven. Hoewel er goede resultaten bereikt zijn met dergelijke modellen, blijft de vraag hoe goed, of hoe slecht is een lineaire benadering?

De bedoeling van deze studie is, om voor een simpel geval van externe forcering, een cirkelvormige berg, de lineaire en de niet-lineaire respons met elkaar te vergelijken. Recente studies naar de invloed van een cirkelvormige berg zijn gedaan door Grose en Hoskins (1979) en Quiby (1980). Grose en Hoskins (1979) gebruiken een lineair stationair ondiep-water-model om de invloed van een berg op verschillende breedtegraden, in zes verschillende zonale (= onafhankelijk van de lengtegraad) stromingen, te bestuderen. Zij kijken ook naar de invloed van realistische bergen, en vinden resultaten die goed overeenkomen met de waargenomen gemiddelde stroming. Quiby (1980) doet drie experimenten met een niet-lineair tijdsafhankelijk ondiep-water-model. Twee met een cirkelvormige berg en één met realistische bergen. De resultaten van één van de experimenten van zowel Grose en Hoskins (1979) als Quiby (1980), zullen we vergelijken met onze resultaten.

Het model dat wij gebruiken is een niet-lineair, tijdsafhankelijk, spectraal, ondiep-water-model, dat op de Universiteit van Reading, door Hoskins en Simmons gemaakt is. Met dit niet-lineaire model wordt ook de lineaire respons van de berg berekend. Dit gebeurt door de berg erg klein te maken, zodat de door de berg veroorzaakte verstoringen klein zijn t.o.v. de beginstroming. De op deze manier gevonden respons wordt achteraf met dezelfde faktor vergroot, als we de berg verkleind hadden. Gekontroleerd wordt of de op deze manier verkregen "lineaire" respons inderdaad lineair is.

Uitgaande van de 500 mb december-februari waargenomen zonaal gemiddelde

wind, volgens Oort en Rasmusson (1971), worden drie experimenten gedaan: Een lineair experiment, een niet-lineair experiment, en tenslotte een niet-lineair experiment waarbij op iedere tijdstap de beginstrooming hersteld wordt.

In hoofdstuk 1 worden de modelvergelijkingen afgeleid, en in hoofdstuk 2 wordt de numerieke oplosmethode gegeven. De beginsituatie wordt in hoofdstuk 3 geschetst, evenals de exakte vorm van de berg, en de manier van lineariseren. De experimenten worden besproken in hoofdstuk 4, en in hoofdstuk 5 wordt nog naar de spektrale verdeling van de kinetische energie in de experimenten gekeken.

1. HET MODEL.

1.1. De oorspronkelijke modelvergelijkingen.

Het model waar we mee gaan werken is gebaseerd op de ondiep-water-vergelijkingen. Men spreekt van ondiep-water-vergelijkingen als aan twee punten is voldaan. Ten eerste: de diepte van het medium is klein t.o.v. de lengte en de breedte. En ten tweede: de dichtheid is konstant. Een gevolg van deze aannamen is dat bij een beginsnelheid die onafhankelijk is van de hoogte, de snelheid onafhankelijk blijft van de hoogte (Haltiner en Williams, 1980). De ondiep-water-vergelijkingen in het oorspronkelijke model zien er als volgt uit:

$$\text{vorticiteitsvergelijking: } \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{-1}{1-\mu} \frac{\partial U \zeta}{\partial \lambda} - \frac{\partial V \zeta}{\partial \mu} \quad (1.1.1)$$

$$\text{divergentievergelijking: } \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{1-\mu} \frac{\partial V \zeta}{\partial \lambda} - \frac{\partial U \zeta}{\partial \mu} - \nabla^2 \left(\frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} + \phi' \right) \quad (1.1.2)$$

$$\text{continuïteitsvergelijking: } \frac{\partial \phi'}{\partial t} = \frac{-1}{1-\mu} \frac{\partial U \phi'}{\partial \lambda} - \frac{\partial V \phi'}{\partial \mu} - \phi D \quad (1.1.3)$$

Deze vergelijkingen zullen we hieronder afleiden.

Voor de betekenis van de gebruikte symbolen zie appendix I.

1.1.1. De vorticiteitsvergelijking en de divergentievergelijking.

Deze twee zijn af te leiden uit de horizontale bewegingsvergelijkingen (Kranenburg, 1981):

$$\frac{du}{dt} = vf - \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{dv}{dt} = -uf - \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

In vektorvorm luiden deze vergelijkingen:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{k} \times \vec{v}f - \vec{\nabla} \phi \quad \text{of} \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = -\vec{k} \times \vec{v}f - \vec{\nabla} \phi$$

Hierin is $-\vec{k} \times \vec{v}f$ de corioliskracht en $-\vec{\nabla} \phi$ de drukgradientkracht. Met behulp van de relatie $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{v}) + \vec{k} \times \vec{v} \xi$, waarin

$\xi = \vec{k} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})$, is dit te herschrijven als

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{k} \times \vec{v}(\xi + f) - \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + \phi \right) - \omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial p}$$

omdat de snelheid onafhankelijk van de hoogte is, is $\frac{\partial \vec{v}}{\partial p} = 0$:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{k} \times \vec{v}(\xi + f) - \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + \phi \right) \quad (1.1.4)$$

Door van deze horizontale bewegingsvergelijking respectievelijk de rotatie $\vec{k} \cdot (\vec{\nabla} \times \dots)$ en de divergentie $\vec{\nabla} \cdot \dots$ te nemen krijgen we de vorticitateitsvergelijking:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\xi + f) \\ &= -\frac{\partial u(\xi + f)}{\partial x} - \frac{\partial v(\xi + f)}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

en de divergentievergelijking:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \cdot (\vec{k} \times \vec{v}(\xi + f)) - \nabla^2 \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + \phi \right) \\ &= \frac{\partial v(\xi + f)}{\partial x} - \frac{\partial u(\xi + f)}{\partial y} - \nabla^2 \left(\frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \phi \right) \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Hierin is $\xi = \vec{k} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})$ de relatieve vorticititeit en $D = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ de divergentie.

Door: 1. over te gaan op bolcoördinaten (want de aarde is een bol):

$$dx = a \cos \theta d\lambda, \quad dy = a d\theta,$$

$$2. \text{ te substitueren } u = \frac{U}{\cos \theta} \text{ en } v = \frac{V}{\cos \theta},$$

3. $\mu = \sin \theta$ als onafhankelijk veranderlijke te gebruiken

i.p.v. θ ,

gaan de vergelijkingen (1.1.5) en (1.1.6) er als volgt uit zien:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{-1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial U(\xi + f)}{\partial \lambda} - \frac{\partial V(\xi + f)}{a \partial \mu} \quad (1.1.7)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial V(\xi + f)}{\partial \lambda} - \frac{\partial U(\xi + f)}{a \partial \mu} - \nabla^2 \left(\frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} + \phi \right) \quad (1.1.8)$$

De nieuwe variabelen U en V voor de zonale, respectievelijk meridionale, wind gebruiken we omdat de oude u en v niet continu zijn aan de pool.

Dat is als volgt in te zien: stel er waait een wind w evenwijdig aan de 0° -meridiaan over de pool. In de volgende vier punten geldt dan:

$$\begin{aligned} \lambda = 0^\circ \text{ O.L.}, \theta = 90^\circ \text{ N.B.} & : u = 0, v = w \\ \lambda = 90^\circ \text{ O.L.}, \theta = 90^\circ \text{ N.B.} & : u = w, v = 0 \\ \lambda = 180^\circ \text{ O.L.}, \theta = 90^\circ \text{ N.B.} & : u = 0, v = -w \\ \lambda = 90^\circ \text{ W.L.}, \theta = 90^\circ \text{ N.B.} & : u = -w, v = 0 \end{aligned}$$

Maar deze vier punten vallen samen op de noordpool, dus u noch v zijn continu. Door beide grootheden met $\cos \theta$ te vermenigvuldigen, gaan ze op de pool naar nul, en is het probleem ondervangen.

We kunnen de vergelijkingen (1.1.7) en (1.1.8) nog verder vereenvoudigen door:

1. te substitueren $\xi + f = \zeta$, ζ is de absolute vortciteit. Hierdoor geldt $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$, want $f = 2\Omega\mu$
2. te substitueren $\phi = \Phi + \phi'$, Φ is de gemiddelde geopotentiële hoogte en ϕ' de afwijking ervan. Hieruit volgt $\nabla^2 \phi = \nabla^2 \phi'$
3. ze dimensieloos te maken m.b.v. de straal van de aarde $a = 6,371 \cdot 10^6$ meter en de rotatiesnelheid van de aarde $\Omega = 7,292 \cdot 10^{-5}$ rad/sec.

Voeren we deze drie punten uit dan vinden we de vergelijkingen (1.1.1) en (1.1.2) uit het begin van deze paragraaf:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{-1}{1-\mu} \frac{\partial U \zeta}{\partial \lambda} - \frac{\partial V \zeta}{\partial \mu} \quad (1.1.9)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{1-\mu} \frac{\partial V \zeta}{\partial \lambda} - \frac{\partial U \zeta}{\partial \mu} - \nabla^2 \left(\frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} + \phi' \right) \quad (1.1.10)$$

De reden waarom de vortciteits- en divergentievergelijking gebruikt worden, in plaats van de horizontale bewegingsvergelijkingen, is dat de semi-impliciete methode voor tijdsintegratie (paragraaf 2.2) op de eerste vergelijkingen veel eenvoudiger toe te passen is. De divergentie die in de continuïteitsvergelijking impliciet behandeld moet worden is dan namelijk expliciet voorhanden. Bovendien moeten bij de spektrale representatie van de horizontale bewegingsvergelijkingen lastige correcties uitgevoerd worden (Machenauer, 1979).

1.1.2. De continuïteitsvergelijking.

Bij de ondiep-water-vergelijkingen gaan we ervan uit dat de dichtheid

konstant is. Dat houdt in dat we met een onsamendrukbaar medium te maken hebben. In ons geval betekent dat dat de atmosfeer als een vloeistof op de aarde ligt. Willen we hiervan de continuïteitsvergelijking (wet van massabehoud) opstellen, dan bekijken we een vaste kolom lucht met hoogte h . De massainhoud van die kolom is gelijk aan de dichtheid maal het volume. Dat is evenredig met de hoogte h . De verandering van massa kunnen we dus voorstellen door de hoogteverandering $\frac{\partial h}{\partial t}$. Dit moet gelijk zijn aan de hoeveelheid massa/hoogte die de kolom instroomt minus de massa/hoogte die er weer uitstroomt, anders gezegd: de massa/hoogte divergentie $-\nabla \cdot (h \vec{v})$. Dus de continuïteitsvergelijking luidt:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (h \vec{v})$$

Door hoogte h te vervangen door de geopotentiële hoogte $\phi = gh$ (g is de versnelling van de zwaartekracht), krijgt de continuïteitsvergelijking de vorm:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{v}) = -\phi \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \phi \quad (1.1.11)$$

Door ook hier, evenals bij de vorticiïteitsvergelijking en de diver-tievergelijking:

1. over te gaan op bolcoördinaten,
2. te substitueren $u = \frac{U}{\cos \theta}$ en $v = \frac{V}{\cos \theta}$,
3. $\mu = \sin \theta$ als onafhankelijk veranderlijke te gebruiken i.p.v. θ ,
4. te substitueren $\phi = \Phi + \phi'$,
5. de vergelijking dimensieloos te maken,

gaat vergelijking (1.1.11) over in vergelijking (1.1.3) uit het begin van deze paragraaf:

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} = \frac{-1}{1-\mu^2} \frac{\partial U \phi'}{\partial \lambda} - \frac{\partial V \phi'}{\partial \mu} - \Phi D \quad (1.1.12)$$

1.2. De nieuwe modelvergelijkingen.

Vergelijkingen (1.1.1)-(1.1.3) zijn de modelvergelijkingen zoals ze in het programma aanwezig waren. Daar hebben we een paar aanvullingen op gemaakt. Er is orografie (bergen) ingebouwd, en er is wrijving en

diffusie toegevoegd.

1.2.1. Orografie.

We gaan een berg gebruiken als veroorzaker van verstoringen in de luchtstroming. Daarom moet de aanwezigheid van die berg ingebouwd worden in de modelvergelijkingen.

Als we fig. 1.1 bekijken dan zien we dat de geopotentiële hoogte ϕ samengesteld wordt uit de gemiddelde geopotentiële hoogte $\bar{\phi}$, de afwijking daarvan ϕ' , en de geopotentiële hoogte van de berg ϕ^* volgens:

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' - \phi^* \quad (1.2.1)$$

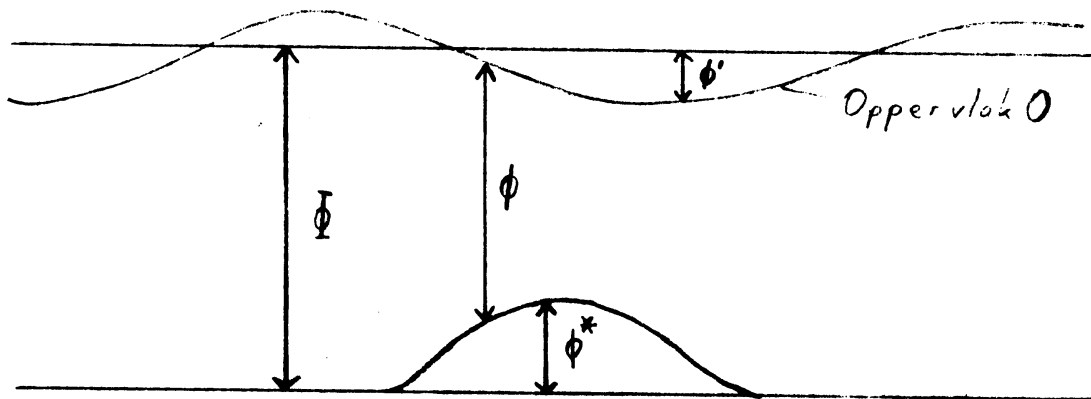


Fig. 1.1: De geopotentiële hoogte $\phi = \bar{\phi} + \phi' - \phi^*$.

Dit kan niet zonder meer i.p.v. $\phi = \bar{\phi} + \phi'$ in de modelvergelijking ingevuld worden, want het aanbrengen van een berg heeft geen invloed op de drukgradiëntkracht $-\vec{\nabla}\phi$. Dit is de kracht die het vrije oppervlak 0 (zie fig. 1.1) glad probeert te trekken. De term $\nabla^2\phi'$ in divergentievergelijking (1.1.10) blijft dus ongewijzigd. In continuïteitsvergelijking (1.1.12) kunnen we (1.2.1) wel invullen zodat deze de vorm krijgt:

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} = \frac{-1}{1-\mu^2} \frac{\partial U(\phi' - \phi^*)}{\partial \lambda} - \frac{\partial V(\phi' - \phi^*)}{\partial \mu} - \phi D$$

De vorm van ϕ^* wordt in paragraaf 3.2. besproken.

1.2.2. Wrijving.

De stromende lucht ondervindt wrijving aan het aardoppervlak. Het is algemeen gebruikelijk om deze wrijving te parametriseren door in de horizontale bewegingsvergelijking (1.1.4) een term $-k_w \vec{v}$ toe te voegen. k_w is de wrijvingsconstante. Als we deze nieuwe bewegingsvergelijking op dezelfde manier uitwerken als in de vorige paragraaf, vinden we een extra term $-k_w \xi$ in de vorticitetsvergelijking (1.1.1) en een extra term $-k_w D$ in divergentievergelijking (1.1.2):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{-1}{1-\mu^2} \frac{\partial U \zeta}{\partial \lambda} - \frac{\partial V \xi}{\partial \mu} - k_w \xi$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial V \zeta}{\partial \lambda} - \frac{\partial V \zeta}{\partial \mu} - \nabla^2 \left(\frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} + \phi' \right) - k_w D$$

1.2.3. Diffusie.

Om ons model op te lossen ontwikkelen we de variabelen in spektrale componenten. Dat wil zeggen dat we de velden van de variabelen opgebouwd denken uit golven met verschillende golflengten. Omdat we niet alle golven kunnen meenemen, laten we vanaf een bepaalde golflengte alle kortere golven weg.

Door niet-lineaire effecten verplaatst de energie die golven bezitten zich in de richting van de kortere golven. Doordat we vanaf een bepaalde golflengte alle kortere golven weggelaten hebben, kan de energie niet meer daar naar toe stromen, en hoopt zich op in de kortste golven die nog wel in het model zitten. Dit is natuurlijk een ongewenst verschijnsel, en dat willen we tegengaan door een "energielek" te creëren in de vorm van diffusie.

Diffusie kan geparametriseerd worden door een extra term $-k_d \nabla^4 \vec{v}$ in de horizontale bewegingsvergelijking. k_d is de diffusieconstante. Evenals bij wrijving resulteert een extra term $-k_d \nabla^4 \vec{v}$ in de horizontale bewegingsvergelijking in een extra term $-k_d \nabla^4 \xi$ in de vorticitetsvergelijking (1.1.1) en een extra term $-k_d \nabla^4 D$ in de divergentievergelijking (1.1.2).

De spektrale vorm van ∇^4 (zie appendix II) is $n^2(n+1)^2$ waarin n een golfgetal is. Je kunt $-k_d \nabla^4 \vec{v} = -k_d n^2(n+1)^2 \vec{v}$ dan opvatten als een extra wrijving, die selectief werkt op de golven met grotere

golfgetallen (dus kortere golven).

Na het aanbrengen van deze drie aanvullingen zien de modelvergelijkingen er als volgt uit:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{-1}{1-\mu} \frac{\partial U \zeta}{\partial \lambda} - \frac{\partial V \zeta}{\partial \mu} - (k_w + k_d v^4) \xi \quad (1.2.2)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{1-\mu} \frac{\partial V \zeta}{\partial \lambda} - \frac{\partial U \zeta}{\partial \mu} - v^2 \left(\frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} + \phi' \right) - (k_w + k_d v^4) D \quad (1.2.3)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} = \frac{-1}{1-\mu} \frac{\partial U(\phi' - \phi^*)}{\partial \lambda} - \frac{\partial V(\phi' - \phi^*)}{\partial \mu} - \phi D \quad (1.2.4)$$

Grose en Hoskins (1979) hanteren dezelfde vergelijkingen. Zij hebben voor de wrijvings- en diffusieconstante de waarden

$$k_w = 7,874 \cdot 10^{-7} \text{ 1/sec,}$$

$$k_d = 2,338 \cdot 10^{16} \text{ m}^4/\text{sec,}$$

genomen. Wij zullen ook deze waarden gebruiken, om vergelijking van onze resultaten met die van Grose en Hoskins mogelijk te maken.

Om de zonale beginstroming zoveel mogelijk intact te laten wordt de wrijving en diffusie niet toegepast op het zonale deel van de stroming.

1.3. Stroomfunctie en snelheidspotentiaal.

Naast de modelvergelijkingen (1.2.2)-(1.2.4) gelden er nog een paar andere relaties. Die zijn van belang bij het oplossen van de modelvergelijkingen. We kunnen ze vinden door de horizontale snelheid \vec{v} te schrijven in termen van een stroomfunctie ψ en een snelheidspotentiaal χ (theorema van Helmholtz):

$$\vec{v} = \vec{k} \times \vec{\nabla} \psi + \vec{\nabla} \chi \quad (1.3.1)$$

Als we van deze vergelijking respectievelijk de verticale component van de vorticititeit $k \cdot (\vec{\nabla} \times \dots)$ en de divergentie $\vec{\nabla} \cdot \dots$ nemen, vinden we:

$$\xi = \nabla^2 \psi \quad (1.3.2)$$

$$D = \nabla^2 \chi \quad (1.3.3)$$

Dus de stroomfunctie is zeer nauw gerelateerd aan de relatieve vortichiteit, en de snelheidspotentiaal is zeer nauw gerelateerd aan de divergentie.

Twee andere relaties kunnen we vinden door vergelijking (1.3.1) in componenten uit te schrijven:

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

Om deze vergelijkingen in overeenstemming te brengen met de modelvergelijkingen:

1. gaan we over op bolcoördinaten
2. substitueren we $U = u \cos \theta$ en $V = v \cos \theta$,
3. substitueren we $\mu = \sin \theta$,
4. maken we de vergelijkingen dimensieloos.

Ze zien er daarna als volgt uit:

$$U = \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} - (1-\mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \quad (1.3.4)$$

$$V = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + (1-\mu^2) \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \quad (1.3.5)$$

Met deze twee vergelijkingen en de relaties (1.3.2) en (1.3.3) kunnen we, gegeven ξ en D , de zonale snelheid U en de meridionale snelheid V berekenen.

2. NUMERIEKE OPLOSSING VAN DE MODELVERGELIJKINGEN.

2.1. De modelvergelijkingen in spektrale vorm.

Als hulpmiddel om de modelvergelijkingen (1.2.2)-(1.2.4) op te lossen gaan we de basisvariabelen ζ , D en ϕ' ontwikkelen in eindige reeksen. In zonale richting λ gebruiken we hiervoor Fourierreeksen en in meridionale richting μ geassocieerde Legendrefuncties. Deze combinatie van Fourierreeksen en Legendrefuncties op een bol worden bolfuncties genoemd. Zij zijn het gereedschap waarmee we de modelvergelijkingen aanpakken. In appendix II worden de bolfuncties gedefinieerd en enige eigenschappen ervan genoemd.

De ontwikkeling in bolfuncties van de variabelen ζ , D en ϕ' volgens de driehoekige afkapping, is:

$$\zeta(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \zeta_n^m(t) P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (2.1.1)$$

$$D(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N D_n^m(t) P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (2.1.2)$$

$$\phi'(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \phi_n^m(t) P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (2.1.3)$$

Uitgaande van deze reeksontwikkelingen zullen we de spektrale vorm van de modelvergelijkingen (1.2.2)-(1.2.4) afleiden.

2.1.1. De variabelen ζ , U en V uitgedrukt in de basisvariabelen.

Omdat in de modelvergelijkingen naast ζ , D en ϕ' ook nog ξ , U en V als variabelen voorkomen, moeten deze laatsten eerst in ζ , D en ϕ' uitgedrukt worden. (De gemiddelde geopotentiële hoogte ϕ is een konstante, en ϕ^* , de berg, is voorgeschreven.)

Uit ζ is ξ te berekenen volgens $\zeta = \xi + f$, en omdat $f = 2\mu$ en $P_1^0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \mu$ mogen we voor ξ schrijven:

$$\xi(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \zeta_n^m(t) P_n^m(\mu) e^{im\lambda} - \sqrt{\frac{8}{3}} \mu \quad (2.1.4)$$

Voor de spektrale coëfficiënten ξ_n^m betekent dat:

$$\xi_n^m = \zeta_n^m \quad \text{voor } m \neq 0 \text{ en } n \neq 1$$

$$\xi_1^0 = \zeta_1^0 - \sqrt{\frac{8}{3}}$$

De uitdrukkingen voor U en V zijn te vinden met behulp van de volgende relaties uit paragraaf 1.3.

$$U = \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} - (1-\mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \quad (1.3.4) \quad V = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + (1-\mu^2) \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \quad (1.3.5)$$

en

$$\xi = \nabla^2 \psi \quad (1.3.2) \quad D = \nabla^2 \chi \quad (1.3.3)$$

Uit de laatste twee formules is met behulp van (2.1.1) en (2.1.2) en eigenschap (A2.14) af te leiden:

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, \mu, t) &= \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{-1}{n(n+1)} \xi_n^m(t) P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \\ \chi(\lambda, \mu, t) &= \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{-1}{n(n+1)} D_n^m(t) P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \end{aligned}$$

Vullen we dit in in (1.3.4) en (1.3.5) en passen we eigenschap (A2.15) toe, dan vinden we voor U en V de volgende uitdrukkingen:

$$\begin{aligned} U(\lambda, \mu, t) &= \sum_{m=-N}^N \left[\sum_{n=|m|}^N \left[\frac{-im}{n(n+1)} D_n^m(t) - \frac{1}{n} \xi_{n-1}^m(t) E_n^m - \frac{1}{n+1} \xi_{n+1}^m E_{n+1}^m \right] P_n^m(\mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{N+1} \xi_N^m(t) E_{N+1}^m P_{N+1}^m \right] e^{im\lambda} \quad (2.1.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\lambda, \mu, t) &= \sum_{m=-N}^N \left[\sum_{n=|m|}^N \left[\frac{-im}{n(n+1)} \xi_n^m(t) + \frac{1}{n} D_{n-1}^m(t) E_n^m + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{n+1} D_{n+1}^m(t) E_{n+1}^m \right] P_n^m(\mu) \right] e^{im\lambda} \quad (2.1.6) \end{aligned}$$

We zien dat de reeksontwikkeling van de zonale wind U in n-richting één spektrale component meer heeft dan ζ , D en ϕ' . We moeten deze extra component in de berekeningen meenemen, want alleen dan corresponderen U en V exakt met ξ en D.

2.1.2. De spektrale modelvergelijkingen.

Nu we voor alle variabelen in de modelvergelijkingen de reeksontwikkelingen kennen, kunnen we deze vergelijking in spektrale vorm gaan

schrijven. Met behulp van eigenschap (A2.14) vinden we:

$$\sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{d\zeta_n^m}{dt}(t) P_n^m(\mu) e^{im\lambda} = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \left[\frac{-1}{1-\mu} \frac{(\partial U \zeta)_n^m}{\partial \lambda}(t) - \left(\frac{\partial V \zeta}{\partial \mu} \right)_n^m(t) - (k_w + k_d n^2 (n+1)^2) \xi_n^m(t) \right] P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (2.1.7)$$

$$\sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{dD_n^m}{dt}(t) P_n^m(\mu) e^{im\lambda} = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \left[\frac{1}{1-\mu} \frac{(\partial V \zeta)_n^m}{\partial \lambda}(t) - \left(\frac{\partial U \zeta}{\partial \mu} \right)_n^m(t) + \frac{n(n+1)}{2(1-\mu^2)} (U^2 + V^2)_n^m + n(n+1) \phi_n^m(t) - (k_w + k_d n^2 (n+1)^2) D_n^m(t) \right] P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (2.1.8)$$

$$\sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{d\phi_n^m}{dt}(t) P_n^m(\mu) e^{im\lambda} = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \left[\frac{-1}{1-\mu} \frac{(\partial U(\phi' - \phi^*))_n^m}{\partial \lambda}(t) - \left(\frac{\partial V(\phi' - \phi^*)}{\partial \mu} \right)_n^m(t) - \phi D_n^m \right] P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (2.1.9)$$

Omdat de bolfuncties $P_n^m(\mu) e^{im\lambda}$ een volledige verzameling orthogonale functies vormen ((A2.5)) mogen we door $P_n^m(\mu) e^{im\lambda}$ delen en de sommatie-tekens weglaten:

$$\frac{d\zeta_n^m}{dt} = \frac{-1}{1-\mu} \frac{(\partial U \zeta)_n^m}{\partial \lambda} - \left(\frac{\partial V \zeta}{\partial \mu} \right)_n^m - (k_w + k_d n^2 (n+1)^2) \xi_n^m \quad (2.1.10)$$

$$\frac{dD_n^m}{dt} = \frac{1}{1-\mu} \frac{(\partial V \zeta)_n^m}{\partial \lambda} - \left(\frac{\partial U \zeta}{\partial \mu} \right)_n^m + \frac{n(n+1)}{2(1-\mu^2)} (U^2 + V^2)_n^m + n(n+1) \phi_n^m - (k_w + k_d n^2 (n+1)^2) D_n^m \quad (2.1.11)$$

$$\frac{d\phi_n^m}{dt} = \frac{-1}{1-\mu} \frac{(\partial U(\phi' - \phi^*))_n^m}{\partial \lambda} - \left(\frac{\partial V(\phi' - \phi^*)}{\partial \mu} \right)_n^m - \phi D_n^m \quad (2.1.12)$$

Van de niet-lineaire termen in de spektrale modelvergelijkingen (2.1.10)-(2.1.12) moet nog aangegeven worden hoe we ze berekenen. Nemen we bijvoorbeeld de term $\left(\frac{\partial U \zeta}{\partial \lambda} \right)_n^m$ dan kunnen we deze berekenen door de reeksontwikkelingen van V (2.1.6) en ζ (2.1.1) met elkaar te vermenig-

vuldigen en daaruit de spektrale coëfficiënten $(U\zeta)_n^m$ te bepalen. Door daarna volgens (A2.12) naar λ differentiëren hebben we de spektrale coëfficiënten $(\frac{\partial U\zeta}{\partial \lambda})_n^m$ gevonden. Deze manier van berekenen wordt de interactiecoëfficiëntmethode genoemd.

Wij zullen deze methode niet hanteren, maar gebruik maken van de rekentechnisch snellere (Machenhauer, 1979) transformatiemethode, die eveneens exakt is, mits we bij de representatie op roosterpunten gebruik maken van equidistante punten langs Gaussische breedtegraden (zie appendix II). Bij de transformatiemethode berekenen we $U(\lambda, \mu)$ en $\zeta(\lambda, \mu)$ op roosterpunten uit de spektrale vorm van U en ζ . Daarna vermenigvuldigen we $U(\lambda, \mu)$ en $\zeta(\lambda, \mu)$ met elkaar (op roosterpunten). En als laatste transformeren we het produkt $U\zeta(\lambda, \mu)$ volgens (A2.11) terug in spektrale vorm. Door nog naar λ te differentiëren (volgens (A2.12)) vinden we de volgende vorm voor de spektrale coëfficiënten $(\frac{\partial U\zeta}{\partial \lambda})_n^m$:

$$(\frac{\partial U\zeta}{\partial \lambda})_n^m = im (U\zeta)_n^m$$

Een bijkomend voordeel van transformatiemethode is dat het mogelijk is om een parametrisatie van fysische processen op roosterpunten toe te voegen. Wij doen iets dergelijks in de termen $(\frac{\partial U(\phi' - \phi^*)}{\partial x})_n^m$ en $(\frac{\partial V(\phi' - \phi^*)}{\partial \mu})_n^m$. We berekenen hier eerst ϕ' op roosterpunten, trekken er daarna ϕ^* vanaf en vermenigvuldigen dan met respectievelijk U en V . De andere afgeleide termen naar λ gaan op dezelfde manier. Ook de afgeleide termen naar μ kunnen we met de transformatiemethode berekenen. Alleen de terugtransformatie naar de spektrale vorm gaat iets anders. De terugtransformatie is gedefinieerd in (A2.4):

$$x_n^m = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} x(\lambda, \mu) P_n^m(\mu) e^{-im\lambda} d\lambda d\mu$$

Dus voor $(\frac{\partial x}{\partial \mu})_n^m$ geldt:

$$\begin{aligned} (\frac{\partial x}{\partial \mu})_n^m &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{\partial x}{\partial \mu}(\lambda, \mu) P_n^m(\mu) e^{im\lambda} d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [x(\lambda, \mu) P_n^m(\mu) \left| \int_{-1}^1 - \int_{-1}^1 x(\lambda, \mu) \frac{d P_n^m}{d\mu}(\mu) d\mu \right] d\lambda \end{aligned}$$

In de drie termen die wij willen berekenen is $x(\lambda, \mu)$ respectievelijk $U\zeta(\lambda, \mu)$, $V\zeta(\lambda, \mu)$ en $V(\phi' - \phi^*)(\lambda, \mu)$. Omdat zowel U als V op beide polen

($\mu = 1$ en $\mu = -1$) nul zijn, mogen wij in ons geval schrijven:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)_n^m = \frac{-1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} x(\lambda, \mu) \frac{d P_n^m}{d\mu}(\mu) e^{-im\lambda} d\lambda d\mu$$

Deze integraal is te vervangen door een sommatie zoals in appendix II beschreven is. De terugtransformatie van de naar μ afgeleide termen geschiedt dus volgens sommatie (A2.11), waarin $P_n^m(\mu)$ vervangen is door $-\frac{d P_n^m}{d\mu}(\mu)$.

De laatste niet-lineaire term die nog berekend moet worden is de energieterm $U^2 + V^2$. Ook dit is met de transformatiemethode te berekenen, waarbij de optelling zowel op roosterpunten als in de spektrale ruimte kan gebeuren:

$$(U^2 + V^2)_n^m = (U^2)_n^m + (V^2)_n^m.$$

Machenhauer (1979) geeft een zeer gedetailleerde beschrijving van de toepassing van bolfuncties bij atmosferische modellen, compleet met mathematische verantwoordingen. De mathematisch geïnteresseerde lezer wordt daarnaar verwezen.

2.2. De tijdsdiskretisatie.

De spektrale modelvergelijkingen (2.1.10)-(2.1.12) kunnen we schematisch en onder weglating van de indices m en n schrijven:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = A_\xi - K\xi \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = A_D + n(n+1)\phi' - KD \quad (2.2.2)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} = A_\phi - \phi D \quad (2.2.3)$$

Hierin zijn: $A_\xi = \frac{-1}{1-\mu^2} \frac{\partial U\xi}{\partial \lambda} - \frac{\partial V\xi}{\partial \mu}$

$$A_D = \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial V\xi}{\partial \lambda} - \frac{\partial U\xi}{\partial \mu} + n(n+1) \left(\frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} \right)$$

$$A_\phi = \frac{-1}{1-\mu^2} \frac{\partial U(\phi' - \phi^*)}{\partial \lambda} - \frac{\partial V(\phi' - \phi^*)}{\partial \mu}$$

$$\text{en } K = k_w + k_d n^2 (n+1)^2 .$$

Om deze vergelijkingen numeriek op te lossen moeten we de tijdsafgeleiden benaderen met een differentieschema. Een in de meteorologie veel gebruikt schema is het centrale differentieschema, ook wel leap-frogschema genoemd:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x,t) \rightarrow x^{t+\Delta t} = x^{t-\Delta t} + 2\Delta t f^t \quad (2.2.4)$$

Dit schema is stabiel voor de advectionvergelijking $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, als voldaan is aan het stabiliteitskriterium van Courant, Friedrichs en Lewy (CFL). Dit CFL-kriterium zegt dat de advectionssnelheid* $|c|$ niet zo groot mag zijn dat de in één tijdstap afgelegde weg groter is dan $\frac{1}{2\pi}$ maal de golflengte van de beschouwde kortste golf. In formulevorm is dat:

$$|c| \Delta t < \frac{L}{2\pi}$$

Het stelsel (2.2.1)-(2.2.3) kunnen we opvatten als een stelsel van 3 advectionvergelijkingen, mits we de wrijvings- en diffusie termen $K\xi$ en KD weglaten.

Vullen we het centrale differentieschema (2.2.4) in, in het stelsel (2.2.1)-(2.2.3), onder weglating van de termen $K\xi$ en KD dan krijgen we:

$$\begin{aligned} \xi^{t+\Delta t} &= \xi^{t-\Delta t} + 2\Delta t A_{\xi}^t \\ D^{t+\Delta t} &= D^{t-\Delta t} + 2\Delta t (A_D^t + n(n+1) \phi'^t) \\ \phi'^{t+\Delta t} &= \phi'^{t-\Delta t} + 2\Delta t (A_{\phi}^t - \phi D^t) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

In de eerste plaats beschrijft dit stelsel natuurlijk meteorologisch interessante golven, maar daarnaast worden er ook zwaartekrachtsgolven beschreven. De grootste snelheid van meteorologisch interessante golven is zo'n 30 m/sec. Dat is de snelheid van de straalstroom die op een hoogte van 200 mbar ligt. De snelheid van zwaartekrachtsgolven is $\sqrt{gh} = \sqrt{9,81 \cdot 10^4} \approx 300$ m/sec (h is de gemiddelde hoogte van het vrije

* Advection is convectie in het horizontale vlak. In de meteorologie is de term convectie gereserveerd voor convectie in het verticale vlak.

oppervlak). De laatste snelheid is veel groter dan de eerste en dus bepalend voor de grootte van de advectiesnelheid. En daarmee ook bepalend voor de grootte van tijdstap Δt die we kunnen nemen. Dat betekent dat we door de aanwezigheid van de voor ons minder belangrijke zwaartekrachtsgolven gedwongen worden om een 10 keer zo kleine tijdstap te nemen.

Dat kunnen we ondervangen door de termen die bepalend zijn voor de zwaartekrachtsgolven, namelijk $n(n+1)\phi'$ en $-\phi D$, in het differentieschema anders te behandelen. Zo kunnen we in (2.2.5) in plaats van $n(n+1)\phi'^t$ en ϕD^t hun tijdsgemiddelden $\frac{1}{2}(n+1)(\phi'^{t+\Delta t} + \phi'^{t-\Delta t})$ en $\frac{1}{2}\phi(D^{t+\Delta t} + D^{t-\Delta t})$ invullen. Dat is equivalent met het toepassen van het differentieschema:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x,t) \rightarrow x^{t+\Delta t} = x^{t-\Delta t} + \Delta t (f^{t+\Delta t} + f^{t-\Delta t}) \quad (2.2.6)$$

op de termen $n(n+1)\phi'$ en $-\phi D$. Dit is een impliciet schema, dat is altijd stabiel, ongeacht de tijdstapgrootte.

De combinatie van een expliciet - met een impliciet schema wordt semi-impliciet genoemd. Dit semi-impliciet schema is dus stabiel als $|c|\Delta t < \frac{L}{2\pi}$. Waarin c de snelheid is van de snelste meteorologisch interessante golven. Als golflengte voor de kortste golf kunnen we $L = 1000$ km nemen en $c = 30$ m/sec. We vinden dan $\Delta t = 5300$ sec $\approx 1,5$ uur. Dan resten ons nog de wrijvings- en diffusie termen $K\xi$ en KD . Het centrale differentieschema is voor deze termen niet stabiel, dat is als volgt te zien. We passen het centrale differentieschema toe op de vorticiteitsvergelijking (2.2.1) met aan de rechterzijde alleen de term $-K\xi$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -K\xi \quad (2.2.7)$$

en veronderstellen $\xi^{t+\Delta t} = \gamma \xi^t$. We vinden dan de volgende vergelijking voor γ :

$$\gamma^{t+1} \xi^0 = \gamma^{t-1} \xi^0 - 2\Delta t K \gamma^t \xi^0$$

lossen we γ hieruit op dan krijgen we $\gamma = -K\Delta t \pm \sqrt{K^2 \Delta t^2 + 1}$. De eis voor stabiliteit is $|\gamma| < 1$. Aangezien $K > 0$, is $\gamma = -K\Delta t -$

$\sqrt{K^2 \Delta t^2 + 1}$ altijd kleiner dan -1, en dus is het schema instabiel.
Nemen we het voorwaartse differentieschema

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x, t) \rightarrow x^{t+\Delta t} = x^{t-\Delta t} + 2\Delta t f^{t-\Delta t} \quad (2.2.9)$$

en passen we dat toe op de vorticiteitsvergelijking (2.2.7) dan vinden we $\gamma = \pm \sqrt{1-2\Delta t K}$. Dus voor $\Delta t K < \frac{1}{2}$ is dit schema stabiel. Aangezien $K = 0$ (10^{-7}) hoeven we ons over de grootte van de tijdstap geen zorgen te maken en hebben we ook voor de wrijvings- en diffusietermen een stabiel schema.

Vullen we de drie gevonden differentieschema's voor de juiste termen in in het stelsel (2.2.1)-(2.2.3) dan zien we:

$$\xi^{t+\Delta t} = \xi^{t-\Delta t} + 2\Delta t (A_{\xi}^t - K\xi^{t-\Delta t}) \quad (2.2.9)$$

$$D^{t+\Delta t} = D^{t-\Delta t} + 2\Delta t (A_D^t + \frac{1}{2}n(n+1)(\phi^{t+\Delta t} + \phi^{t-\Delta t}) - KD^{t-\Delta t}) \quad (2.2.10)$$

$$\phi^{t+\Delta t} = \phi^{t-\Delta t} + 2\Delta t (A_{\phi}^t - \frac{1}{2}\phi(D^{t+\Delta t} + D^{t-\Delta t})) \quad (2.2.11)$$

We kunnen nog (2.2.11) substitueren in (2.2.10), waardoor de laatste de vorm krijgt:

$$(1+\Delta t^2 n(n+1)\phi)D^{t+\Delta t} = (1-\Delta t^2 n(n+1)\phi)D^{t-\Delta t} + 2\Delta t (A_D^t + n(n+1)\phi^{t-\Delta t} + \Delta t n(n+1)A_{\phi}^t - KD^{t-\Delta t})$$

ofwel

$$D^{t+\Delta t} = \frac{1-a}{1+a} D^{t-\Delta t} + \frac{2\Delta t}{1+a} (A_D^t + n(n+1)\phi^{t-\Delta t} + \Delta t n(n+1)A_{\phi}^t - KD^{t-\Delta t}) \quad (2.2.12)$$

waarin $a = \Delta t^2 n(n+1)\phi$.

Stellen we nu nog $\tilde{\phi}^{t+\Delta t} = \phi^{t-\Delta t} + 2\Delta t A_{\phi}^t$, dan kunnen we het differentiestelsel (2.2.9)-(2.2.11) herschrijven als:

$$\tilde{\phi}^{t+\Delta t} = \phi^{t-\Delta t} + 2\Delta t A_{\phi}^t \quad (2.2.13)$$

$$\xi^{t+\Delta t} = \xi^{t-\Delta t} + 2\Delta t (A_{\xi}^t - K\xi^{t-\Delta t}) \quad (2.2.14)$$

$$D^{t+\Delta t} = \frac{1-a}{1+a} D^{t-\Delta t} + \frac{2\Delta t}{1+a} (A_D^t + \frac{1}{2}n(n+1)(\tilde{\phi}^{t+\Delta t} + \phi^{t-\Delta t}) - K D^{t-\Delta t}) \quad (2.2.15)$$

$$\phi^{t+\Delta t} = \tilde{\phi}^{t+\Delta t} - \Delta t \phi (D^{t+\Delta t} + D^{t-\Delta t}) \quad (2.2.16)$$

De stabiliteitsbeschouwingen die hier gegeven zijn, zijn summier en niet specifiek voor het gegeven stelsel vergelijkingen. Dus we kunnen geen absolute geldigheid ontleen aan de uitspraken. Maar volgens Robert (1979) blijken dergelijke algemene beschouwingen voor semi-impliciete schema's verrassend nauwkeurig. In de praktijk blijkt dit stelsel stabiel opgelost te worden met een tijdstap $\Delta t = 1$ uur. Meer over stabiliteit en aanverwante numerieke problemen is te vinden in Mesinger en Arakawa (1976).

3. VERDERE GEGEVENS, NODIG VOOR HET DOEN VAN DE EXPERIMENTEN.

3.1. Initialisatie.

3.1.1. De beginsituatie.

In de vorige twee hoofdstukken zijn de algemene formulering en de oplosmethode gegeven van het model. Details als van welke windsituatie we uitgaan, welk deel van de wereld we beschouwen, en hoeveel spektrale componenten we bekijken, zullen we nu invullen.

Om bij het laatste te beginnen: In de reeksontwikkelingen van ζ , D en ϕ' (2.1.1)-(2.1.3) nemen we $N = 21$. Hiermee samenhangend kiezen we het aantal roosterpunten langs een breedtegraad $M_L = 64$, en het aantal breedtegraden $M_B = 32$. De samenhang tussen deze grootheden is als volgt: In de modelvergelijkingen komen ten hoogste kwadratische termen voor. Volgens (A2.11) geschiedt de transformatie van zulke termen exakt mits $M_B > \frac{3M+1}{2} = 32$ en $M_L > 3N+1 = 64$.

De keuze van N houdt in dat de golflengte van de kortste golf op de evenaar 1900 km is. Deze lengte wordt in het algemeen voldoende beschouwd om de meteorologisch interessante golven te beschrijven. De reden dat speciaal $N = 21$, en daarmee $M_L = 64$ gekozen is, is dat de ontwikkeling in een Fourierreeks in het programma gedaan wordt door een Fast Fourier Transform (FFT). En deze werkt het meest efficiënt als M_L een macht van 2 is.

De spektrale representatie is vooral geschikt om de atmosfeer rond de gehele aarde te beschrijven. Toch zullen wij slechts één halfmond beschouwen. Dat is te realiseren door te veronderstellen dat de atmosfeer symmetrisch is t.o.v. de evenaar. De geassocieerde Legendrefuncties $P_n^m(\mu)$ zijn namelijk polynomen in μ , dat betekent dat zij symmetrisch (als $n-m$ even is) of antisymmetrisch (als $n-m$ oneven is) t.o.v. de evenaar zijn. Een symmetrische atmosfeer houdt dan in dat alle D_n^m , ϕ_n^m en U_n^m voor $n-m =$ oneven, en ζ_n^m en V_n^m voor $n-m =$ even nul zijn.

De gemiddelde hoogte \bar{h} van de atmosfeer nemen we 10 km. Dat betekent dat de gemiddelde geopotentiële hoogte $\phi = g \cdot \bar{h} = 9,81 \cdot 10^4 \text{ m}^2/\text{sec}^2$. Deze waarde wordt ook door Grose en Hoskins (1979) gebruikt.

De vorm van de orografie ϕ^* wordt in paragraaf 3.2 gegeven.

Als beginwind kiezen we de 500 mb december-februari waargenomen zonaal gemiddelde wind, zoals die gegeven wordt door Oort en Rasmusson (1971). Grose en Hoskins (1979) gebruiken o.a. deze wind in hun experimenten. In fig. 3.1 is deze wind uitgezet tegen de breedtegraad ϕ .

De zonale wind $U(\mu)$ en de meridionale wind V , die hier nul is, leggen de vortichiteit ξ en de divergentie D vast, want

$$\xi = k \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial V}{\partial \lambda} - \frac{\partial U}{\partial \mu} = - \frac{\partial U}{\partial \mu}$$

en

$$D = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{\partial V}{\partial \mu} = 0 .$$

Een uitdrukking voor de geopotentiële hoogte ϕ' in de beginsituatie leiden we hieronder af.

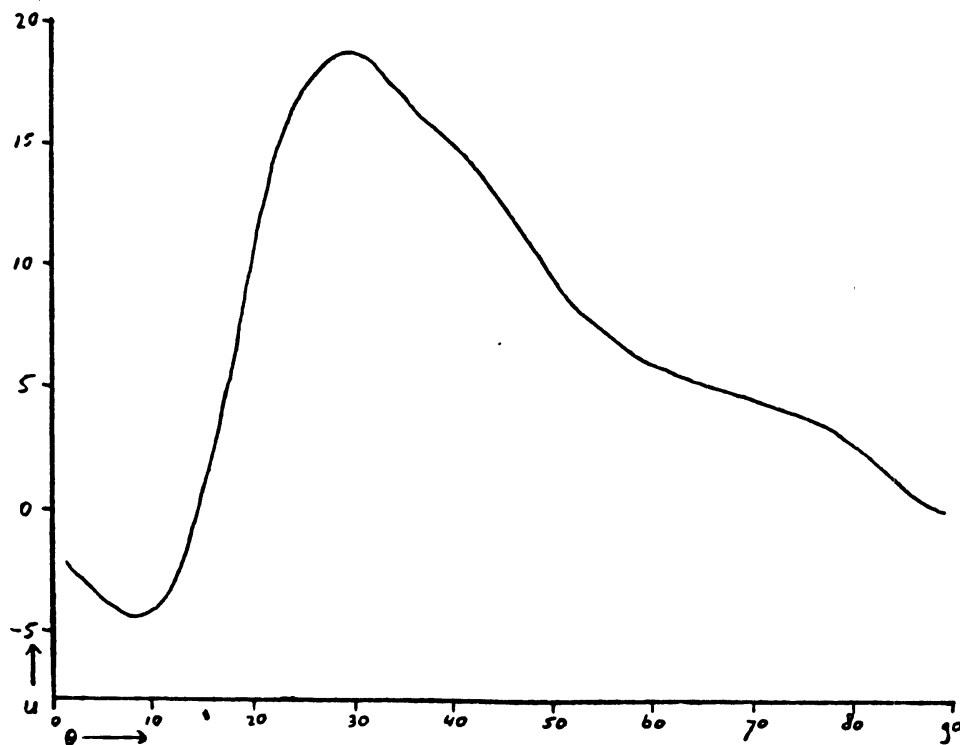


Fig. 3.1: De beginwind u in m/sec, uitgezet tegen de breedtegraad θ , zoals deze gerepresenteerd wordt door bolfuncties.

3.1.2. De balancering.

In principe zijn we vrij om de beginwaarde van ϕ' te kiezen. Maar omdat onze modelvergelijkingen naast meteorologisch relevante golven ook zwaartekrachtgolven beschrijven, moeten we ϕ' zodanig kiezen dat we deze laatste zoveel mogelijk vermijden.

In de atmosfeer is er in eerste benadering een evenwicht tussen corioliskracht en drukgradiëntkracht; dit betekent dat de divergentie bij benadering nul is. Voor zwaartekrachtgolven geldt dit evenwicht niet. Door er in de beginsituatie voor te zorgen dat divergentie nul is en blijft, d.w.z. D en $\frac{\partial D}{\partial t}$ zijn nul, vermijden we zwaartekrachtgolven bij de start van het programma.

Vullen de $D = \frac{\partial D}{\partial t} = 0$ in in de divergentievergelijking (1.2.3), samen met $V = 0$, dan krijgt deze de vorm:

$$-\frac{\partial U \zeta}{\partial \mu} - \nabla^2 \left(\frac{1}{1-\mu^2} U^2 + \phi' \right) = 0 \quad (3.1.1)$$

Met deze vergelijking kunnen we uit het beginsnelheidsveld U (of -vorticiteitsveld ζ) het beginhoogteveld ϕ' berekenen. Wat we doen is bij een gegeven windveld \vec{v} , en dus gegeven corioliskracht $-\vec{k} \times \vec{v}$, een drukgradiëntkracht $-\vec{\nabla} \phi$ zoeken die daarmee in evenwicht is. Dit proces wordt balancering genoemd, en vergelijking (3.1.1) de balansvergelijking.

In het rekenprogramma wordt de divergentievergelijking gegeven door (2.2.12). Hierin was $\frac{\partial D}{\partial t}$ benaderd met $\frac{1}{2\Delta t} (D^{t+\Delta t} - D^{t-\Delta t})$. Nul stellen van D en $\frac{\partial D}{\partial t}$ betekent dus dat $D^{t+\Delta t} = D^{t-\Delta t} = 0$. Vullen we dit in in (2.2.12), en laten we alle tijdsreferenties weg, dan krijgt de balansvergelijking in het rekenprogramma de volgende vorm:

$$\phi'_n{}^m = \frac{-1}{n(n+1)} (A_D)_n^m - \Delta t (A_\phi)_n^m. \quad (3.1.2)$$

Door met deze vergelijking twee "tijdstappen" te doen, krijgen we een goede benadering van het gebalanceerde hoogteveld ϕ' .

3.1.3. De begintijdstappen.

Na de balancering moet met de tijdsintegratie begonnen worden. In paragraaf 2.2 hebben we laten zien dat we daarvoor gebruik maken van een semi-impliciet differentieschema dat gebaseerd is op het centrale differentie- of leapfrogschema. Daarbij gaan we ervan uit dat de basis-

variabelen ζ , D en ϕ' op twee achtereenvolgende tijdstippen bekend zijn. In de beginsituatie is dat niet het geval, want we kennen alleen

ζ , D en ϕ' op $t = 0$. We zullen dus een schatting moeten maken van deze variabelen op $t = 1$. Dat moet nauwkeurig gebeuren want $\zeta(t=1)$, $D(t=1)$ en $\phi'(t=1)$ hebben een grote invloed op de verdere tijdsintegratie. Het centrale differentieschema is namelijk een benadering van een tweede orde differentiaal, en geeft daarom twee oplossingen. Wij gebruiken het om een eerste orde differentiaal te benaderen, dat betekent dat we een oplossing te veel krijgen. Deze extra oplossing, ook wel "computational mode" genoemd, is te onderdrukken door in de tijdsintegratie op $t = 1$ de juiste waarden van ζ , D en ϕ' te gebruiken (Mesinger en Arakawa, 1976). We zullen $\zeta(t=1)$, $D(t=1)$ en $\phi'(t=1)$, die we verder gemakshalve zullen schrijven, als $x(1)$, berekenen door eerst de tijdstap Δt een faktor 16 te verkleinen. We stellen $x(\frac{1}{16}) = x(0)$ en berekenen dan $x(\frac{1}{8})$ uitgaande van $x(0)$ en $x(\frac{1}{16})$, volgens het semi-impliciete differentieschema. Door nu de tijdstapgrootte te verdubbelen kunnen we $x(\frac{1}{4})$ berekenen, uitgaande van $x(0)$ en $x(\frac{1}{8})$. Zo gaan we door tot we $x(1)$ berekend hebben en op de oorspronkelijke tijdstapgrootte, die we een uur genomen hadden, terug zijn.

De op deze manier berekende waarden van $\zeta(t=1)$, $D(t=1)$ en $\phi'(t=1)$ blijken nauwkeurig genoeg te zijn om de invloed van de extra oplossing in de verdere tijdsintegratie te verwaarlozen.

3.2. De berg.

In navolging van Grose en Hoskins (1979) hebben we een cirkelvormige berg genomen waarvan we het middelpunt neerleggen in het punt c , $\vec{c} = (\lambda_c, \theta_c)$. Omdat we uit zullen gaan van een beginsituatie met zonale wind maakt het niet uit op welke lengtegraad de berg ligt, dus kiezen we een vast $\lambda_c = 180^\circ$. De breedtegraad θ_c is variabel, maar in onze experimenten zullen we uitsluitend $\theta_c = 30^\circ$ NB gebruiken.

Als we de hoek tussen de plaatsvektor \vec{c} en de plaatsvektor \vec{x} naar een willekeurig punt x op de aardbol, δ noemen, dan wordt de hoogte van de berg in het punt x gegeven door:

$$\phi^*(x) = \frac{1}{2}A (1 + \cos \delta W) \quad \text{voor } 0 < \delta < \frac{\pi}{W}$$

$$\phi^*(x) = 0 \quad \text{elders}$$

Hierin is $W = 8$ gekozen, zodat de diameter van de berg 45 breedtegraden beslaat, en $A = 2500$ meter is de hoogte van het middelpunt van de berg. De berekening van de hoek δ tussen \vec{c} en \vec{x} gebeurt als volgt: Een willekeurig punt x , $\vec{x} = (\lambda_x, \theta_x)$, heeft in een arthesisch coördinatenstelsel de coördinaten:

$$\vec{x} = (\cos \lambda_x \cdot \cos \theta_x, \sin \lambda_x \cdot \cos \theta_x, \sin \theta_x)$$

Het middelpunt c van de berg heeft in dat stelsel de coördinaten:

$$\vec{c} = (-\cos \theta_c, 0, \sin \theta_c)$$

Het scalair produkt van \vec{c} en \vec{x} is:

$$(\vec{c} \cdot \vec{x}) = |\vec{c}| \cdot |\vec{x}| \cdot \cos \delta$$

Aangezien $|\vec{c}| = |\vec{x}| = 1$ geldt voor δ de uitdrukking:

$$\delta = \arccos(\vec{c} \cdot \vec{x}) = \arccos(\cos \lambda_c \cdot \cos \lambda_x \cdot \cos \theta_c + \sin \theta_c \cdot \sin \theta_x)$$

3.3. Hoe maak je een lineaire berekening met een niet-lineair model.

Bij de bestudering van de stromingen in de atmosfeer wordt veel gebruik gemaakt van lineaire modellen. Daarin wordt gelineariseerd rond een zonaal gemiddelde stroming. De afwijkingen rond deze stroming worden zo klein verondersteld, dat kwadratische produkten van de afwijkingen verwaarloosd worden. Een niet-lineair model verwaarloost deze produkten niet. Willen we met een niet-lineair model een lineaire berekening maken, dan zullen we dus ervoor moeten zorgen dat de afwijkingen werkelijk zo klein zijn dat kwadratische produkten van die afwijkingen verwaarloosbaar zijn.

In ons model doen we dit door in de zonale beginstroming een kleine i.p.v. een grote verstoring aan te brengen. Hierdoor blijven de afwijkingen in de zonale stroming gering. We doen dat door de berg een faktor 1000 kleiner te maken. Omdat de stroming (bij benadering) lineair is mogen we de berekende afwijkingen achteraf met een faktor 1000 vermenigvuldigen, zodat we de resultaten kunnen interpreteren alsof de berg normale hoogte had. Hierdoor krijgen we ook de mogelijkheid om te

kontrolleren of de stromingen inderdaad lineair zijn. De resultaten van een berekening met de berg een faktor 10000 kleiner zouden dan namelijk gelijk moeten zijn aan die van $\frac{1}{1000}$ maal de berg. Terwijl een berekening met een berg van normale hoogte daar duidelijk van moet afwijken, omdat er niet-lineaire effecten optreden.

We hebben deze test uitgevoerd door drie runs te maken met berghoogten van respectievelijk 2500, 2,5 en 0,25 meter. In tabel I zijn de amplitudes van een aantal spektrale componenten van de vortiniteit na 10 dagen gegeven. Zij laten inderdaad zien dat de resultaten van de twee "lineaire" runs in hoge mate aan elkaar gelijk zijn, terwijl die van de niet-lineaire run daar duidelijk van afwijkt. Bovendien zien we dat de zonale stroming (zonaal: golfgetal $m = 0$) in het niet-lineaire geval aangetast wordt, in tegenstelling tot de beide "lineaire" gevallen.

Tabel I: De amplitude van een aantal spektrale componenten van de vorticiteit ξ (dimensieloos), in de beginsituatie en na 10 dagen voor 2 "lineaire" runs en een niet-lineaire run.

spektrale komponent (m,n)	ξ_n^m in de beginsituatie	"lineaire" run berghoogte 0,25m ξ_n^m na 10 dagen	"lineaire" run berghoogte 2,5m ξ_n^m na 10 dagen	niet-lineaire run berghoogte 2500m ξ_n^m na 10 dagen
0,3	0,06027	0,06027	0,06027	0,06171
0,5	0,08892	0,08892	0,08892	0,08001
0,9	0,01451	0,01451	0,01451	0,03827
0,13	0,04722	0,04722	0,04722	0,03413
1,6	---	0,01728	0,01730	0,03431
2,7	---	0,03031	0,03032	0,03266
3,10	---	0,02513	0,02515	0,03106
4,7	---	0,04009	0,04008	0,02224
4,11	---	0,03546	0,03547	0,02515
5,8	---	0,03667	0,03365	0,02848
6,7	---	0,03055	0,03057	0,03204
7,8	---	0,03113	0,03116	0,03150
7,10	---	0,02968	0,02968	0,03064
8,9	---	0,02098	0,02100	0,02147
9,18	---	0,002726	0,002718	0,01198
11,16	---	0,0009174	0,0009266	0,01448
12,19	---	0,0006040	0,0006071	0,01702
13,20	---	0,0002914	0,0002972	0,01162
16,17	---	0,0003142	0,0003155	0,004907
20,21	---	0,0001456	0,0001462	0,004384

4. DE EXPERIMENTEN.

4.1. De lineaire run.

Uitgaande van de beginsituatie die in paragraaf 3.1. geschetst is, maken we een "lineaire" run, die we over 32 dagen integreren. De berekende vortcriteitsvelden na 8, 20 en 32 dagen zijn te zien in respectievelijk de figuren 4.1, 4.2 en 4.3. In deze plaatjes zijn de zonale componenten (d.i. die spektrale componenten waarvoor $m=0$) weggelaten, zodat we alleen de afwijking van het zonaal gemiddelde veld zien, waardoor de door de berg veroorzaakte verstoringen duidelijker zichtbaar zijn. Hetzelfde geldt voor alle volgende vortcriteitsplaatjes.

Op dag 8 zien we dat zich stroomafwaarts van de berg twee golfreinen ontwikkeld hebben. Een zuidelijke, ten zuiden van 30° NB, met sterk NO-ZW gerekte minima en maxima, en een noordelijke op $+ 60^{\circ}$ NB. Op dag 20 zijn zij nog iets verder ontwikkeld, vooral de noordelijke golfreinen is sterker geworden. Het vortcriteitsveld van dag 32 laat t.o.v. dag 20 geen wezenlijke veranderingen meer zien. Hieruit mogen we konkluderen dat een stationaire toestand bereikt is. Dit stationaire patroon zullen we vergelijken met de resultaten die Grose en Hoskins (1979) vonden. Grose en Hoskins (1979) gebruiken een lineair stationair spectraal model dat, evenals het onze, gebaseerd is op de ondiep-water-vergelijkingen (1.2.2)-(1.2.4). Zij bekijken de invloed van een berg (identiek aan de onze), met middelpunt op o.a. 30° NB, op zes verschillende zonale stromingen. Hiervan beschouwen wij alleen de 500 mbar december-februari waargenomen zonaal gemiddelde stroming.

We hebben zoveel mogelijk geprobeerd het experiment van Grose en Hoskins te benaderen, maar er blijven nog een aantal verschilpunten, namelijk:

1. De resolutie van hun model is hoger. Zij gebruiken een rhomboïdale afkapping met $N=32$, wij een driehoekige met $N=21$.
2. Zij gebruiken een globaal model, het onze is hemisferisch.
3. De beginwind zal niet geheel identiek zijn omdat zowel Grose en Hoskins als wij, de benodigde gegevens ontleen aan een, op basis van de data van Oort en Rasmusson (1971), zelf getekende grafiek.

Het door Grose en Hoskins gevonden vortcriteitspatroon staat in figuur 4.4. Dit komt tot in details overeen met het door ons gevonden stationaire patroon. Hieruit mogen we dus konkluderen dat onze manier van lineariseren goede resultaten geeft.

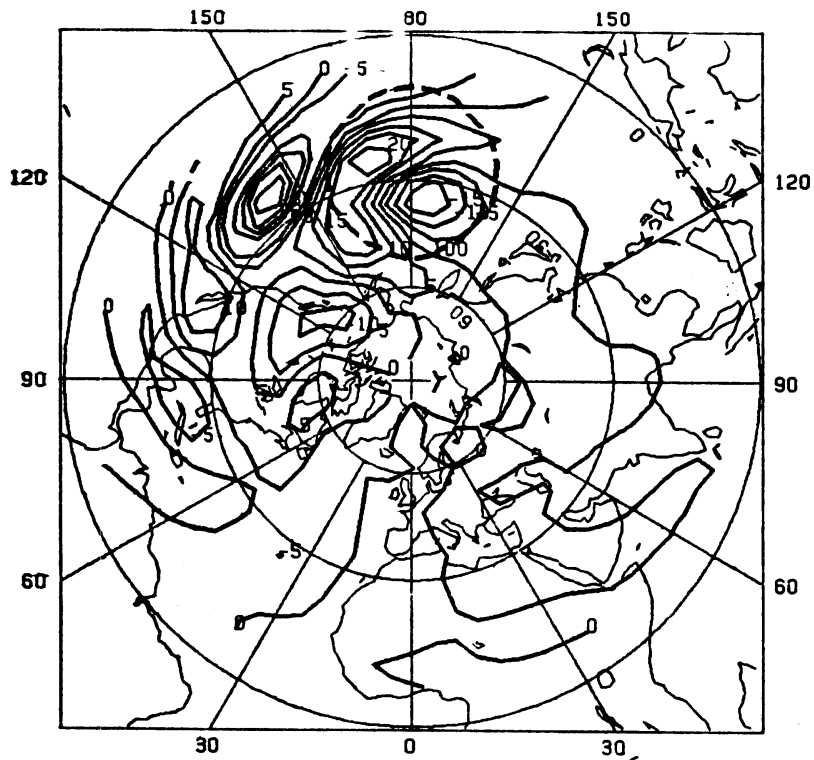


Fig. 4.1: Lineaire run: vorticititeit op dag 8, in 10^6 1/sec.

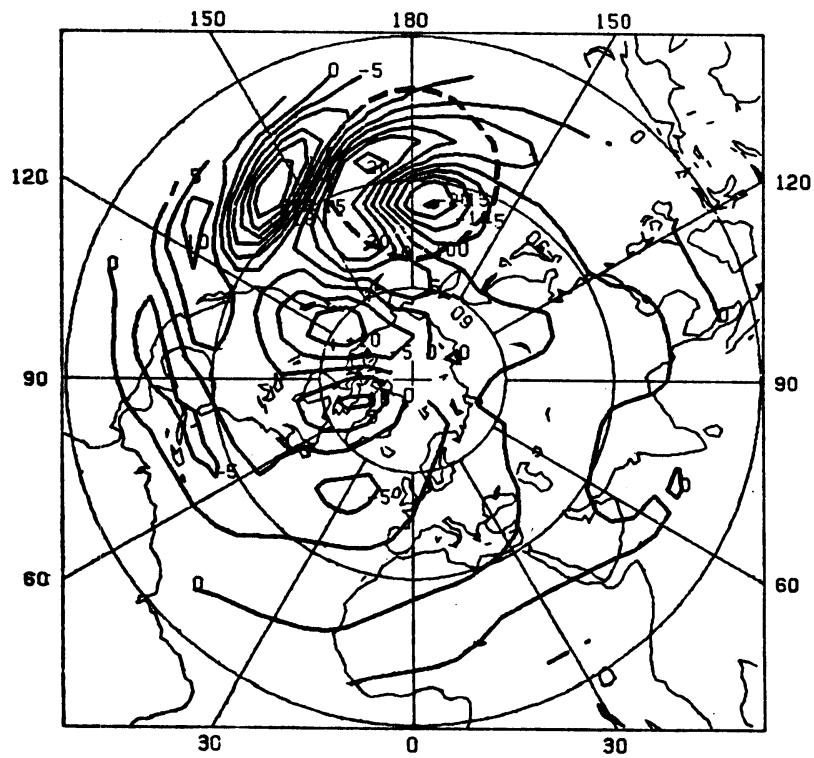


Fig. 4.2: Lineaire run: vorticititeit op dag 20, in 10^6 1/sec.

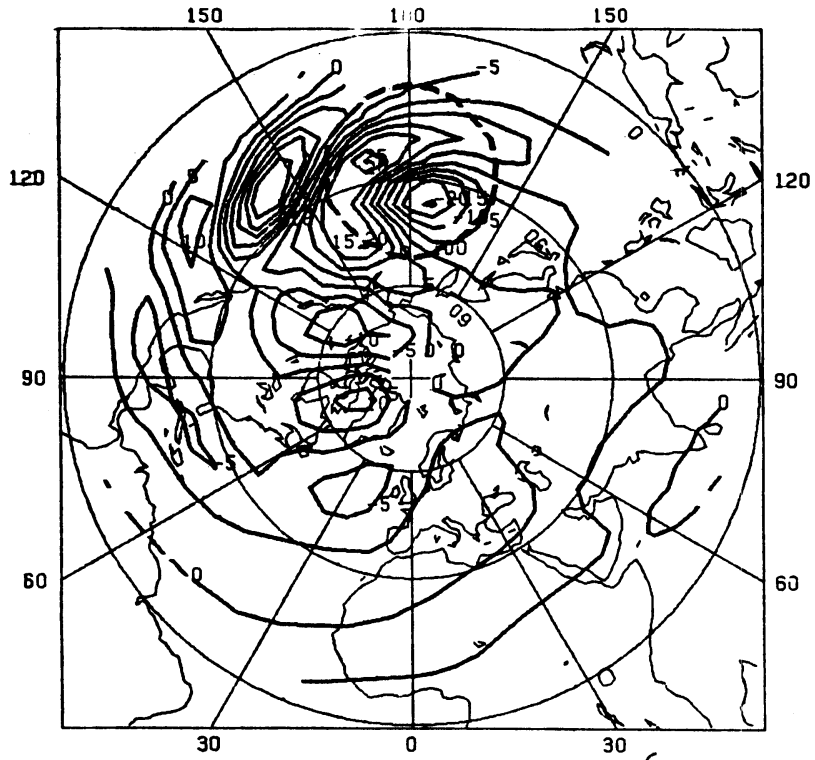


Fig. 4.3: Lineaire run: vorticiteit op dag 32, in 10^6 1/sec.



Fig. 4.4: De door Grose en Hoskins (1979) gevonden vorticiteit.

Omdat we de verschillen tussen een lineaire en een niet-lineaire benadering willen bekijken, doen we nu twee niet-lineaire runs.

4.2. De niet-lineaire runs.

4.2.1. Zonder herstel van de zonale componenten.

Vanuit dezelfde beginsituatie, maar met een berg van normale hoogte (m.a.w. niet-lineair), maken we nu een run over 32 dagen. In de figuren 4.5, 4.6 en 4.7 is het vortciteitsveld na respectievelijk 8, 20 en 32 dagen te zien. Omdat er geen stationaire toestand bereikt lijkt te zijn, integreren we door tot 100 dagen. De vortciteitsvelden op dag 50 en 100 staan in figuren 4.8 en 4.9.

Ook in deze run ontwikkelen zich een noordelijke en een zuidelijke golftrein, maar de noordelijke is veel minder sterk en op dag 32 al vrijwel verdwenen. De zuidelijke golftrein daarentegen, is sterker en langer dan in het lineaire geval. Deze golftrein loopt evenwijdig aan een breedtegraad en schuift in de loop van de run op naar het noorden en verzwakt.

In figuur 4.10 hebben we de gemiddelde zonale wind \bar{u} uitgezet tegen de breedtegraad θ , op de dagen 0, 20, 40, 60, 80 en 100. De zone van sterke westenwind, de jet, verschuift ook in de loop van de tijd naar het noorden en verzwakt eveneens. We zien dat de golftrein zich steeds in de zuidelijke flank van de jet bevindt. Met name op deze plaats wordt er, door interactie van de berg met de zonale stroming, energie aan de jet onttrokken ten behoeve van de golftrein, van waaruit ze door wrijving en diffusie gedissipeerd wordt. Daarom zien we de jet verzwakken en het maximum ervan naar het noorden opschuiven. Omdat er tevens westelijke impuls aan zuidelijke breedten onttrokken wordt en getransporteerd naar middelbare breedten (Holton, 1979), breidt de zone van oostelijke wind zich naar het noorden uit.

Onder anderen Grose en Hoskins (1979) en Opsteegh en Van den Dool (1980) laten in hun experimenten zien dat de zone van oostelijke wind op zuidelijke breedten een effectieve barriere vormen voor stationaire golven, die zich naar zuidelijke breedten voort willen planten. Vandaar dat we, ook in het tweede gedeelte van de run, als de berg zich grotendeels in de zone van oostelijke wind bevindt, geen golven zien

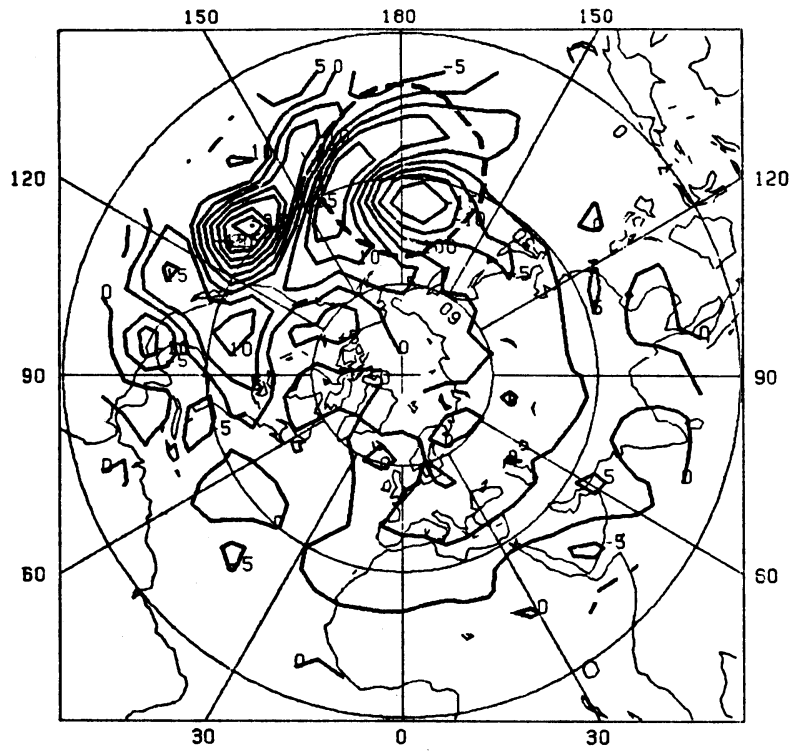


Fig. 4.5: Niet-lineaire run, zonder herstel van de zonale componenten:
vorticititeit op dag 8, in 10^6 1/sec.

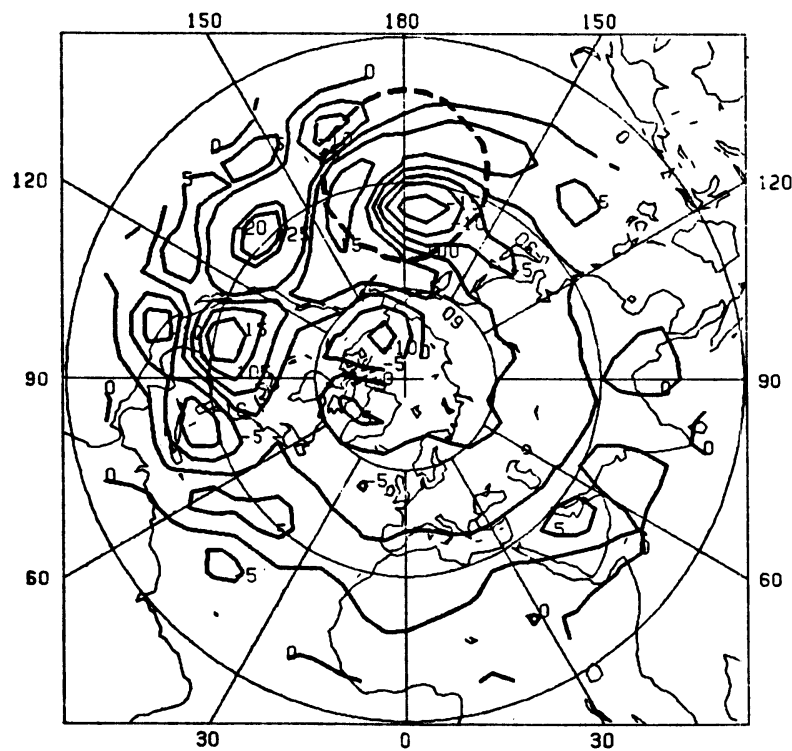


Fig. 4.6: Niet-lineaire run, zonder herstel van de zonale componenten:
vorticititeit op dag 20, in 10^6 1/sec.

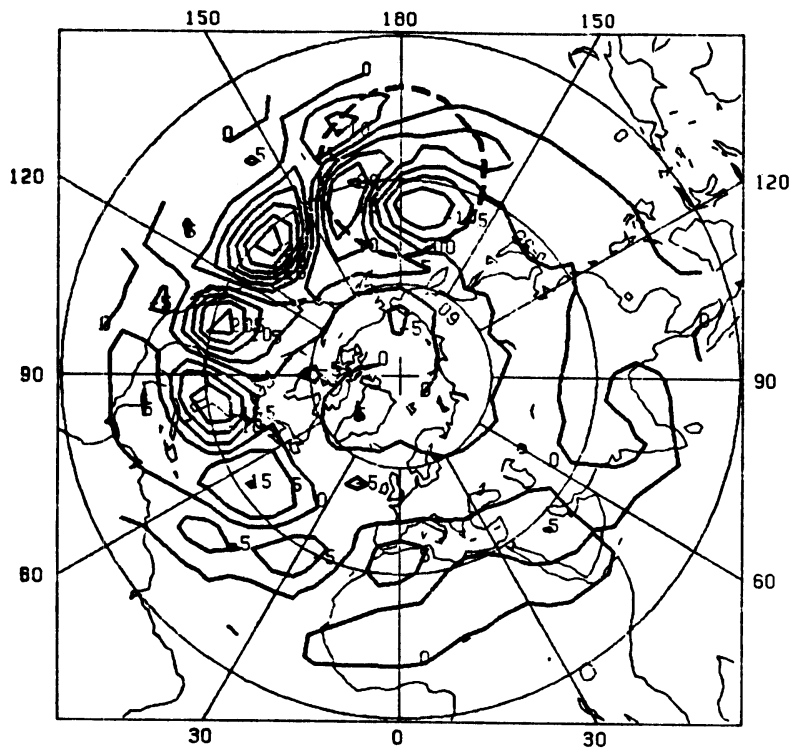


Fig. 4.7: Niet-lineaire run, zonder herstel van de zonale componenten:
vorticititeit op dag 32, in 10^6 1/sec.

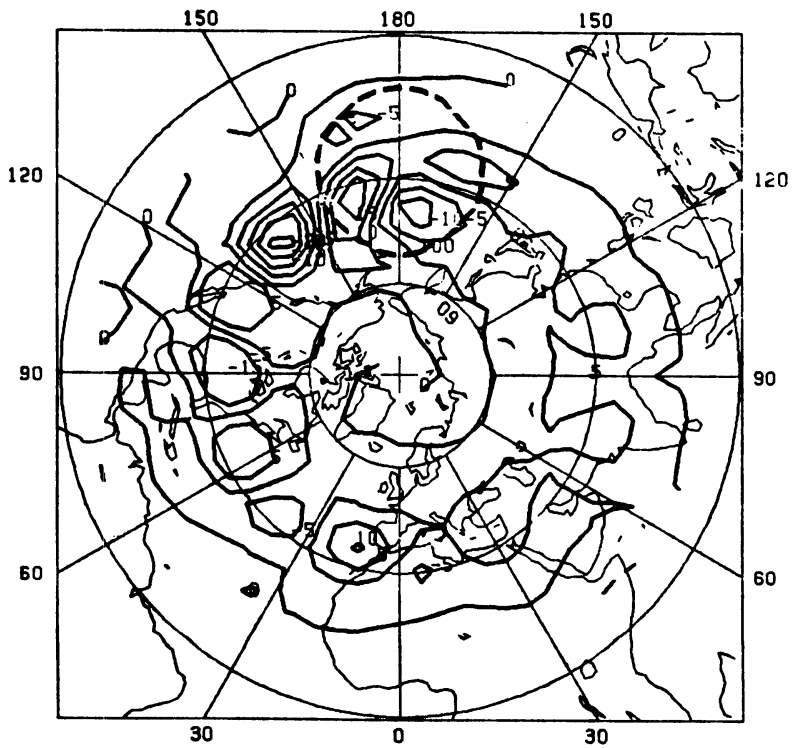


Fig. 4.8: Niet-lineaire run, zonder herstel van de zonale componenten:
vorticititeit op dag 50, in 10^6 1/sec.

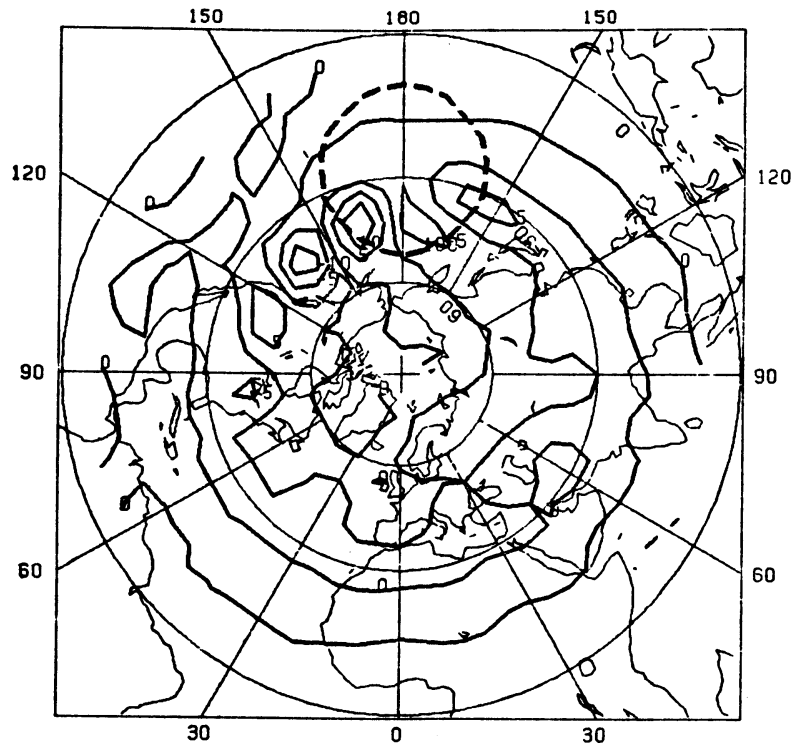


Fig. 4.9: Niet-lineaire run, zonder herstel van de zonale componenten: vorticititeit op dag 100, in 10^6 1/sec.

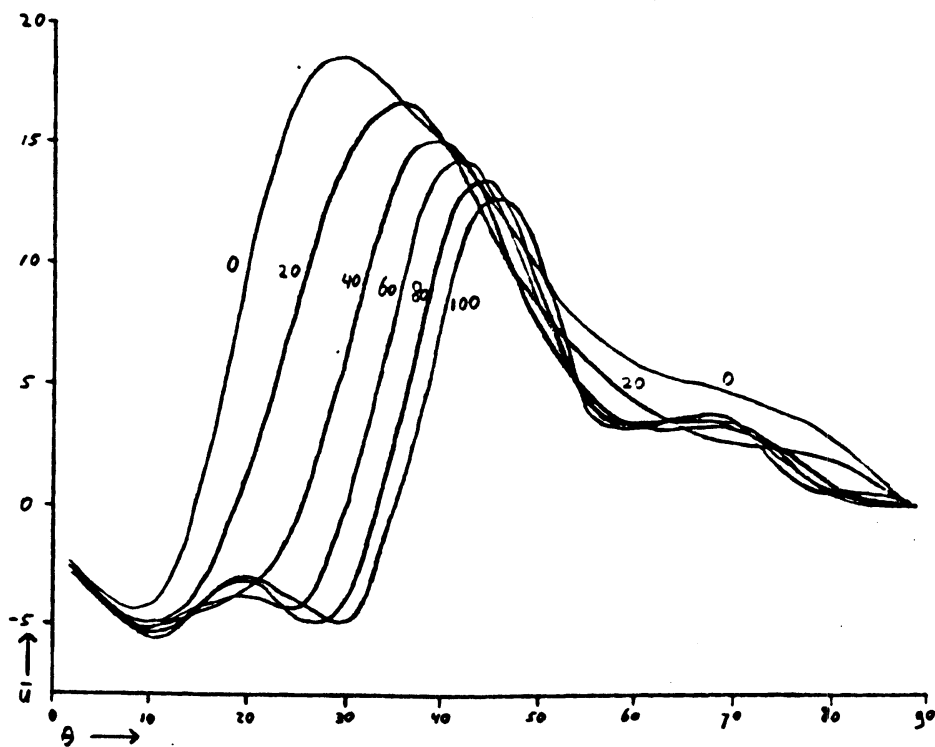


Fig. 4.10: Niet-lineaire run, zonder herstel van de zonale componenten: gemiddelde zonale wind \bar{u} in m/sec op de dagen 0,20,40,60,80 en 100, uitgezet tegen de breedtegraad θ .

ontwikkelen in die zone.

Omdat de jet afgebroken wordt en er dus geen stationaire toestand ontstaat, is deze run minder geschikt om met de lineaire run te vergelijken. Daarom doen we nog een keer een niet-lineaire run, maar ditmaal geven we de zonale componenten op iedere tijdstap hun beginwaarde terug.

4.2.2. Met herstel van de zonale componenten.

Door de zonale stroming iedere tijdstap te herstellen, benaderen we de werkelijke atmosfeer beter. Hier wordt namelijk de zonale stroming instand gehouden door de zon, die door instraling steeds nieuwe energie toevoert.

De figuren 4.11, 4.12 en 4.13 laten het vortcriteitspatroon op de dagen 8, 20 en 32 zien. Omdat er niet duidelijk een stationaire toestand ontstaan is, integreren we ook hier door tot 100 dagen. De figuren 4.14 en 4.15 geven het vortcriteitspatroon op dag 50 en dag 100. Het vortcriteitsveld is nu wel stationair.

Op dag 8 is het verschil met de vorige run nog gering, daarna worden de verschillen groter. In de stationaire toestand zien we opnieuw de noordelijke en de zuidelijke golfreïn. De zuidelijke loopt evenwijdig aan een breedtegraad op $\pm 20^{\circ}$ NB, de noordelijke loopt vanaf de berg in noordwestelijke richting langs de pool, en lijkt een grootcirkel te volgen.

Bekijken we nu de overeenkomsten met de lineaire run, dan zien we het volgende: In de direkte omgeving van de berg, tot een afstand van ± 3500 km van het middelpunt, geven beide runs hetzelfde beeld. Hier spelen niet-lineaire effecten dus geen rol van betekenis. Op grotere afstand beperkt de overeenkomst zich tot het in beide gevallen voorkomen van een noordelijke en een zuidelijke golfreïn. Waarbij in de lineaire run de noordelijke het sterkste is, terwijl in het niet-lineaire geval de zuidelijke veel sterker en langer is. Bovendien zijn de maxima en minima van de zuidelijke golfreïn in de lineaire run veel sterker NO-ZW gerekt.

Quiby (1980) heeft ook naar de invloed van een cirkelvormige berg gekeken, met een niet-lineair tijdsafhankelijk roosterpuntmodel, dat eveneens gebaseerd is op de ondiep-water-vergelijkingen. Hij maakt o.a. gebruik van een geïdealiseerde zonale beginstroming met een maximum van

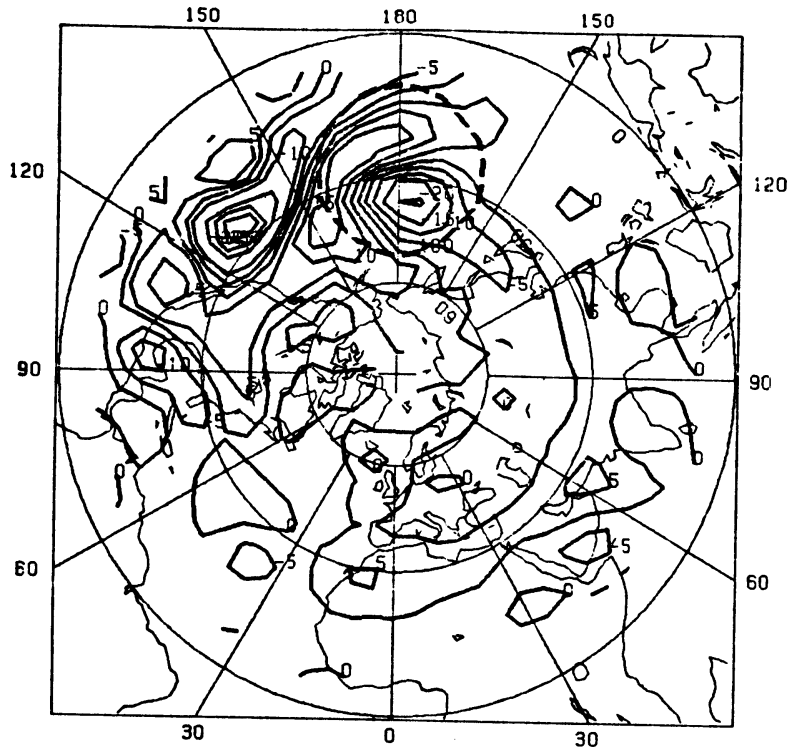


Fig. 4.11: Niet-lineaire run, met herstel van de zonale componenten:
vorticiteit op dag 8, in 10^6 1/sec.

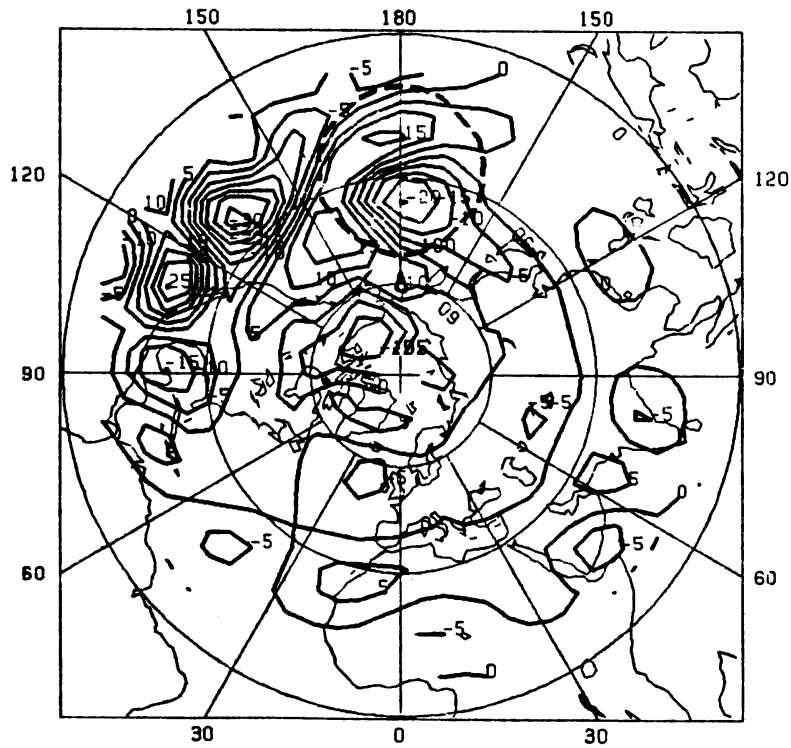


Fig. 4.12: Niet-lineaire run, met herstel van de zonale componenten:
vorticiteit op dag 20, in 10^6 1/sec.

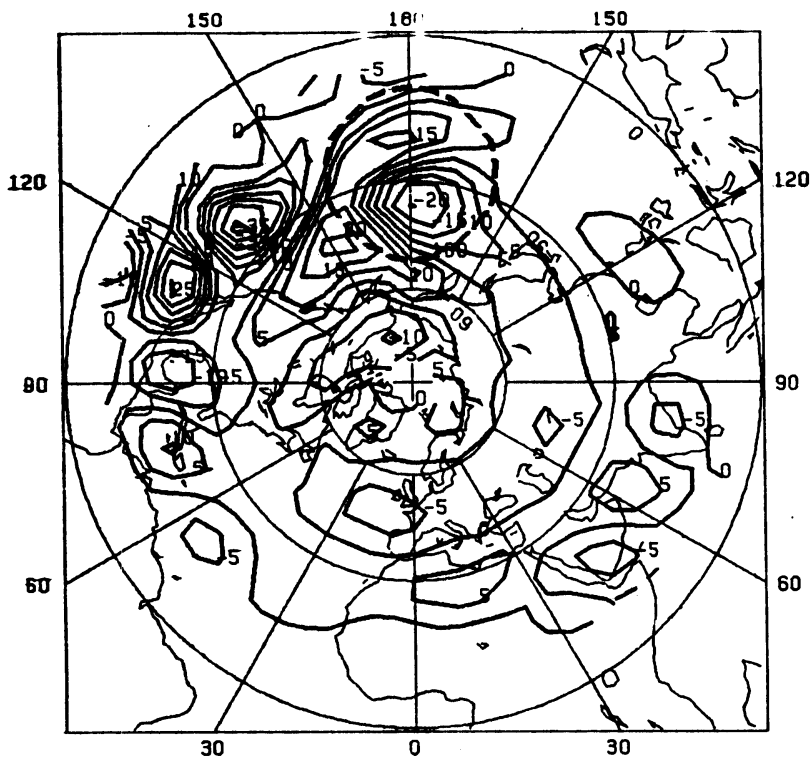


Fig. 4.13: Niet-lineaire run, met herstel van de zonale componenten:
vorticiteit op dag 32, in 10^6 1/sec.

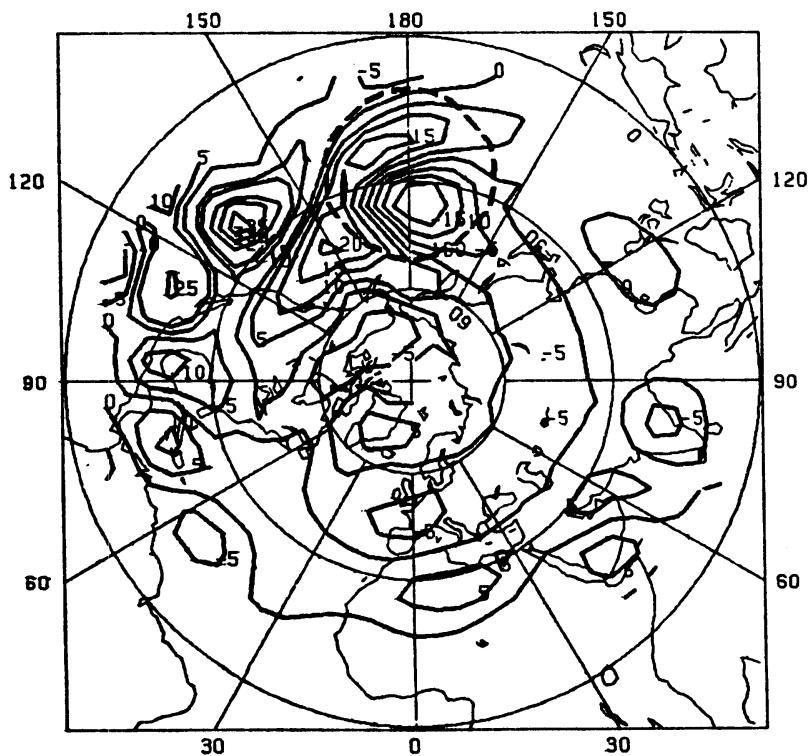


Fig. 4.14: Niet-lineaire run, met herstel van de zonale componenten:
vorticiteit op dag 50, in 10^6 1/sec.

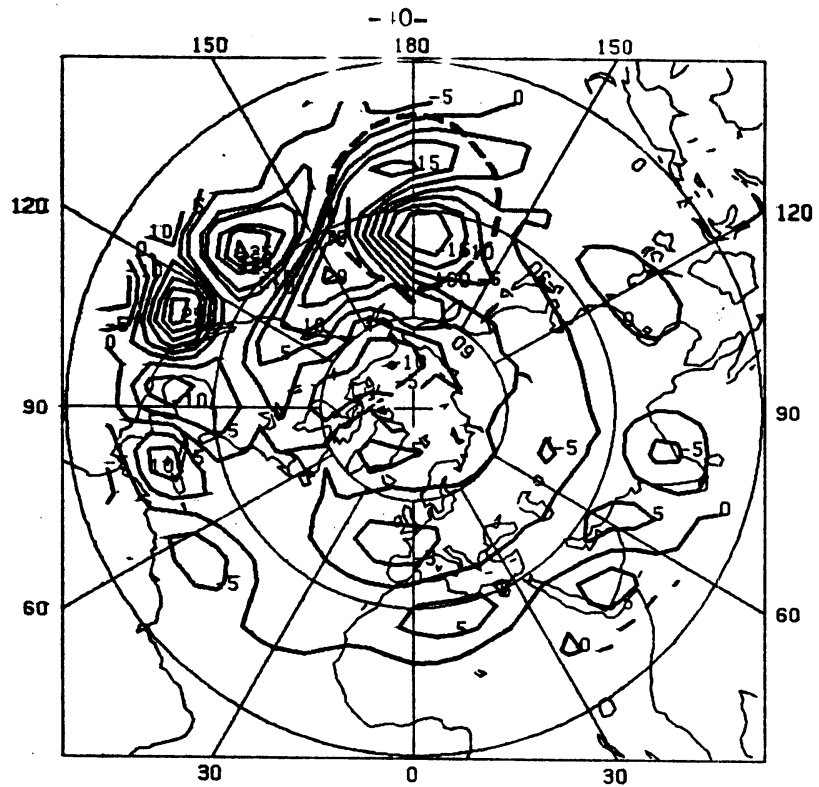


Fig. 4.15: Niet-lineaire run, met herstel van de zonale componenten:
vorticiteit op dag 100, in 10^6 1/sec.

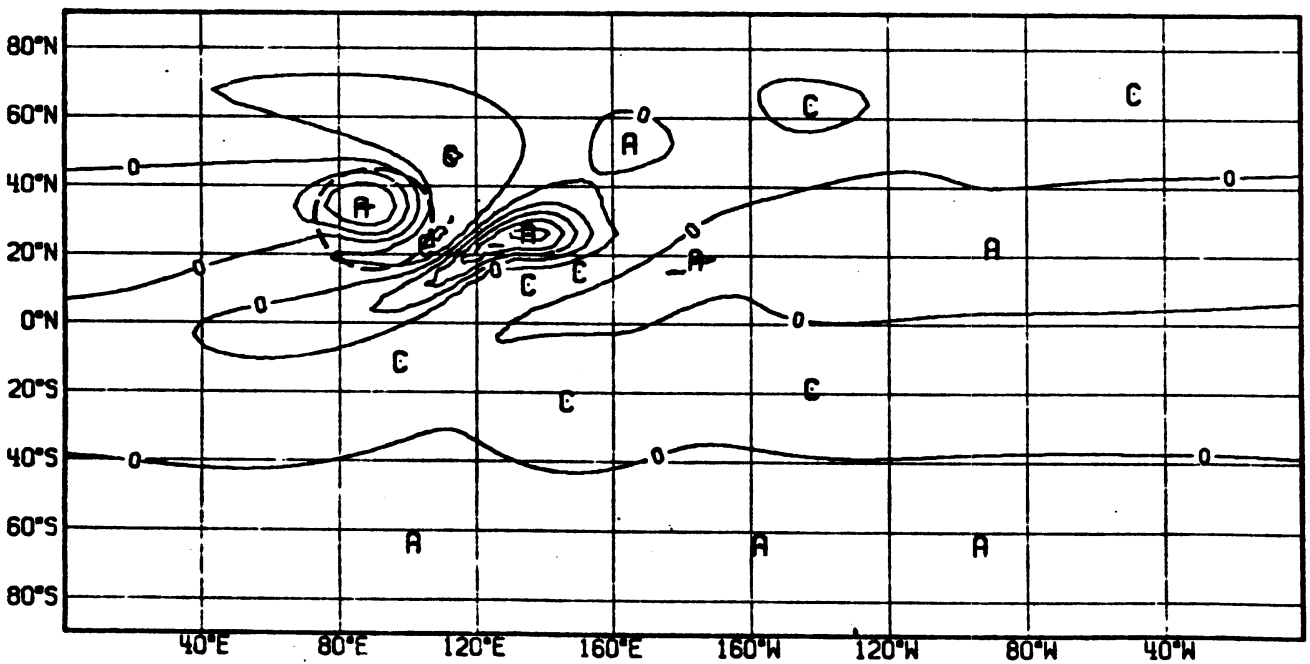


Fig. 4.16: De door Quiby (1980) gevonden vorticiteit,
isolijnafstand 10^5 1/sec.

18 m/sec op 45° NB (bij ons 18,5 m/sec op 30° NB) en een minimum van 0 m/sec op de evenaar (bij ons -4,2 m/sec op 8° NB). Bovendien is zijn berg hoger: 3 km, en zijn atmosfeer minder diep: 7 km. Ook andere zaken als de vorm van de berg en de wrijvings- en diffusieconstante wijken af. Wel ligt het middelpunt van zijn berg op 30° NB. Het resultaat dat Quiby vond staat in fig. 4.16. Het geeft de afwijking van het zonaal gemiddelde vorticititeitsveld op dag 10. Ook hier zien we weer de twee golftreinen. Hoewel Quiby een niet-lineair model gebruikt, vertoont zijn resultaat meer overeenkomst met onze lineaire run. Hij heeft zijn resultaten zelf met die van Grose en Hoskins (1979) vergeleken, en komt tot de konklusie dat zijn golftrein (de zuidelijke, de noordelijke noemt hij niet) veel korter is. Als mogelijke oorzaak daarvan geeft hij aan dat de stationaire toestand op dag 10 wellicht nog niet bereikt is. Dit wordt aannemelijker als we bedenken dat zijn berg pas op dag 4 de volle hoogte krijgt, en de integratie dus eigenlijk maar 6 dagen beslaat. Dit zou tevens kunnen verklaren waarom zijn resultaten meer overeenkomst vertonen met onze lineaire run. Gedurende de eerste dagen van de integratie lopen de lineaire en de niet-lineaire run namelijk niet erg uiteen, dat is te zien in de figuren 4.1 en 4.11. Kort daarna bereikt de lineaire run de stationaire toestand, terwijl de niet-lineaire run zich nog verder ontwikkelt, om pas later een stationaire toestand te bereiken. Het niet-lineaire verstoringpatroon op dag 6 vertoont daarom meer overeenkomst met de lineaire stationaire toestand als met de niet-lineaire.

Om iets meer inzicht te krijgen in de verschillen tussen de lineaire en de niet-lineaire resultaten, bekijken we in het volgende hoofdstuk de kinetische energiespektra.

5. KINETISCHE ENERGIE.

5.1. Afleiding van de vergelijking.

De kinetische energie per massa-eenheid wordt gegeven door

$$K(\lambda, \mu, t) = \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \quad (5.1.1)$$

Voor \vec{v} geldt: $\vec{v} = \vec{k} \times \vec{\nabla}\psi + \vec{\nabla}\chi$, waarin $\nabla^2\psi = \xi$ en $\nabla^2\chi = D$. Omdat de divergentie D een orde kleiner is dan de relatieve vortichtheid ξ , verwaarlozen we het divergente deel van de stroming en schrijven voor K :

$$K(\lambda, \mu, t) = \frac{1}{2} |\vec{v}_\psi|^2 = \frac{1}{2} |\vec{\nabla}\psi|^2 = \frac{1}{2} \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi \quad (5.1.2)$$

De over de gehele aarde gemiddelde kinetische energie \bar{K} is dan:

$$\bar{K}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi \, d\lambda d\mu \quad (5.1.3)$$

Door partiële integratie gaat deze uitdrukking over in:

$$\bar{K} = \frac{-1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \psi \nabla^2 \psi \, d\lambda d\mu = \frac{-1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \psi \xi \, d\lambda d\mu \quad (5.1.4)$$

Vullen we hierin de reeksontwikkelingen van ψ en ξ in dan reduceert dit tot een sommatie over de spektrale componenten:

$$\bar{K} = \frac{1}{2} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{1}{n(n+1)} (2 - \delta_{0m}) \xi_n^m \xi_n^{*m} = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \bar{K}_n^m \quad (5.1.5)$$

De totale gemiddelde kinetische energie wordt dus berekend uit de som van de gemiddelde kinetische energieën van de spektrale componenten. We kunnen ook de gemiddelde kinetische energie per zonaal golfgetal m en per component n berekenen:

$$\bar{K}^m = \sum_{n=|m|}^N \bar{K}_n^m, \quad (5.1.6)$$

$$\bar{K}_n = \sum_{m=-N}^N \bar{K}_n^m. \quad (5.1.7)$$

Baer (1972) en Wiin-Nielsen (1972) beargumenteren dat het zinvoller is

\bar{K}_n te beschouwen dan \bar{K}^m , m zegt namelijk alleen iets over golflengte in λ -richting, terwijl n een schaalindex is in beide richtingen. Want bij een vaste n is $n-m$ het aantal nulpunten tussen noord- en zuidpool (μ -richting), en m het golfgetal in λ -richting, met $m < n$.

Daar staat tegenover dat we gelineariseerd hebben rond een zonale stroming, d.w.z. $m=0$ en n vrij. Bovendien loopt de zuidelijke golf trein evenwijdig aan een breedtegraad, en heeft dus een vaste m . Voor de noordelijke golf trein is dit minder duidelijk.

5.2. De spektrale verdeling van kinetische energie.

We hebben voor de lineaire run (dag 32) en de niet-lineaire run met herstel van de zonale componenten (dag 50) zowel \bar{K}^m als \bar{K}_n berekend. Tabel II geeft de gemiddelde kinetische energie per golfgetal m , en de tabel III per index n . In de laatste kolom van de beide tabellen is het quotiënt van de energieën van de twee runs gegeven.

Bekijken we tabel II dan zien we dat vrijwel alle energie in de zonale stroming zit. De energie in $m=0$ is voor beide runs hetzelfde omdat in de lineaire run de zonale stroming niet aangetast wordt, en in de niet-lineaire run de zonale stroming hersteld wordt.

Interessanter is het om naar de afwijkingen van de zonale stroming te kijken. Hier zien we dat de meeste energie in de lagere golfgetallen zit, vooral in de lineaire run. Kijken we naar de quotiënten dan zien we dat de lineaire run in de golfgetallen 4-6 meer energie heeft, terwijl in alle andere golfgetallen de niet-lineaire run sterker is. Dit toont aan dat er door niet-lineaire interacties energie van middelbare golven naar kortere en hele lange golven wordt getransporteerd.

In tabel III, de energieverdeling per spektrale index n , is de energie van golfgetal $m=0$ weggelaten. Deze is namelijk zo groot dat ze de energie van alle oneven indices n volledig zou beheersen. Dit is ook de reden dat $n=1$ in de tabel geen energie bevat. Vergeleken met tabel II, laat tabel III een veel minder duidelijk beeld zien. De meeste energie zit weliswaar in de componenten met middelbare n , maar dit is veel minder uitgesproken dan bij de verdeling per golfgetal m . Ook de quotiënten geven geen duidelijke aanwijzing waar verschillen tussen de lineaire en niet-lineaire run zouden kunnen zitten. Daarom zullen we ons verder op de energie per golfgetal m richten.

Tabel II: Gemiddelde kinetische energie per zonaal golfgetal m in m^2/sec^2 .

m	A: niet-lineaire run, dag 50	B: lineaire run, dag 32	A/B
0	$2,37 \cdot 10^2$	$2,37 \cdot 10^2$	1,0
1	$2,22 \cdot 10^1$	$4,15 \cdot 10^0$	5,4
2	$1,24 \cdot 10^1$	$1,04 \cdot 10^1$	1,2
3	$8,87 \cdot 10^0$	$7,17 \cdot 10^0$	1,2
4	$1,20 \cdot 10^1$	$1,73 \cdot 10^1$	0,7
5	$5,29 \cdot 10^0$	$1,09 \cdot 10^1$	0,5
6	$5,81 \cdot 10^0$	$6,70 \cdot 10^0$	0,9
7	$4,69 \cdot 10^0$	$3,46 \cdot 10^0$	1,4
8	$5,29 \cdot 10^0$	$1,99 \cdot 10^0$	2,6
9	$1,61 \cdot 10^0$	$7,99 \cdot 10^{-1}$	2,0
10	$2,32 \cdot 10^0$	$1,87 \cdot 10^{-1}$	12,4
11	$3,99 \cdot 10^{-1}$	$4,84 \cdot 10^{-2}$	8,3
12	$7,18 \cdot 10^{-1}$	$1,24 \cdot 10^{-2}$	58
13	$1,16 \cdot 10^{-1}$	$1,69 \cdot 10^{-3}$	69
14	$9,87 \cdot 10^{-2}$	$7,55 \cdot 10^{-5}$	1310
15	$1,56 \cdot 10^{-2}$	$1,29 \cdot 10^{-4}$	121
16	$1,63 \cdot 10^{-2}$	$2,77 \cdot 10^{-4}$	59
17	$1,94 \cdot 10^{-2}$	$1,02 \cdot 10^{-4}$	191
18	$1,47 \cdot 10^{-2}$	$6,71 \cdot 10^{-5}$	220
19	$1,31 \cdot 10^{-2}$	$3,04 \cdot 10^{-5}$	432
20	$4,88 \cdot 10^{-3}$	$1,03 \cdot 10^{-5}$	474

Aan de hand van het energiespektrum in tabel II gaan we wat experimenteren met de vorticitetsvelden van beide runs. We nemen van de lineaire run het vorticitetsveld op dag 32 en van de niet-lineaire run op dag 50. Beide zijn dan stationair. We zagen al dat de energie voornamelijk in de lagere golfgetallen zit. Laten we de golfgetallen $m=11$ en hoger weg uit het vorticitetsveld, dan levert dat in het lineaire geval, fig. 5.1, geen noemenswaardige veranderingen op. In het

Tabel III: Gemiddelde kinetische energie per spektrale index n
in m^2/sec^2 (zonder $m=0$)

n	A: niet-lineaire run, dag 50	B: lineaire run, dag 32	A/B
1	0	0	1,0
2	$6,50 \cdot 10^{-1}$	$2,13 \cdot 10^{-1}$	1,5
3	$7,19 \cdot 10^{-1}$	$4,01 \cdot 10^{-1}$	0,9
4	$2,45 \cdot 10^0$	$4,47 \cdot 10^{-1}$	2,7
5	$4,56 \cdot 10^0$	$1,01 \cdot 10^0$	2,3
6	$1,45 \cdot 10^1$	$2,64 \cdot 10^0$	2,8
7	$1,52 \cdot 10^1$	$1,07 \cdot 10^1$	0,7
8	$1,46 \cdot 10^1$	$5,72 \cdot 10^0$	1,3
9	$8,40 \cdot 10^0$	$2,50 \cdot 10^0$	1,7
10	$5,44 \cdot 10^0$	$1,86 \cdot 10^0$	1,5
11	$4,70 \cdot 10^0$	$1,87 \cdot 10^0$	1,3
12	$2,71 \cdot 10^0$	$1,18 \cdot 10^0$	1,2
13	$2,89 \cdot 10^0$	$1,08 \cdot 10^0$	1,3
14	$1,59 \cdot 10^0$	$5,57 \cdot 10^{-1}$	1,4
15	$7,54 \cdot 10^{-1}$	$2,38 \cdot 10^{-1}$	1,6
16	$5,68 \cdot 10^{-1}$	$2,43 \cdot 10^{-1}$	1,2
17	$5,97 \cdot 10^{-1}$	$2,18 \cdot 10^{-1}$	1,4
18	$4,32 \cdot 10^{-1}$	$2,52 \cdot 10^{-1}$	0,9
19	$4,74 \cdot 10^{-1}$	$2,09 \cdot 10^{-1}$	1,1
20	$2,34 \cdot 10^{-1}$	$1,47 \cdot 10^{-1}$	0,8
21	$3,77 \cdot 10^{-1}$	$9,37 \cdot 10^{-2}$	2,0

niet-lineaire geval, fig. 5.2 zijn de veranderingen iets groter, maar nog steeds gering. De hogere golfgetallen spelen dus in het niet-lineaire geval een grotere rol.

In een tweede experiment worden de golfgetallen $m=1-6$ uit de twee runs verwisseld. Omdat de golfgetallen $m=11-20$ heel weinig invloed bleken te hebben worden die weggelaten. In fig. 5.3 zien we het vorticitetsveld samengesteld uit de golfgetallen $m=1-6$ van de niet-lineaire run en

golfgetallen $m=7-10$ van de lineaire run. Vergelijken we dit met het lineaire vorticitetsveld in fig. 5.1, dan herkennen we, afgezien van het gebied direkt rond de berg, alleen het begin van het zuidelijke golfstrein. Vergelijking met het niet-lineaire veld in fig. 5.2 laat zien dat de noordelijke golfstrein tot in detail gerepresenteerd wordt. Doen we het andersom, d.w.z. stellen we het vorticitetsveld samen uit de golfgetallen $m=1-6$ van de lineaire run en de golfgetallen $m=7-10$ van de niet-lineaire run, dan krijgen we een plaatje waarin zowel de "lineaire" noordelijke golfstrein te zien is als, de "niet-lineaire" zuidelijke. Opnieuw is de noordelijke golfstrein tot in detail gerepresenteerd, terwijl de zuidelijke golfstrein nu sterker is. Gaan we na wat er uit deze plaatjes te leren is dan kunnen we konkluderen dat de noordelijke golfstrein zowel in het lineaire als het niet-lineaire geval geheel beschreven wordt door de golfgetallen $m=1-6$. Terwijl de zuidelijke golfstrein in het niet lineaire geval geheel in de golfgetallen $m=7-10$ (en hoger) zit. In het lineaire geval zit het begin van de zuidelijke golfstrein in $m=7-10$ en het eind in $m=1-6$, want in fig. 5.3 valt dit eind weg, terwijl het in fig. 5.4 de zuidelijke golfstrein van de niet-lineaire run helpt versterken. Uit tabel II hadden we al gekonkludeerd dat er door niet-lineaire interacties energie uit middelbare golven naar kortere en hele lange golven stroomt. In de figuren 5.3 en 5.4 zien we dat nogmaals geïllustreerd, met name het energietransport naar kortere golven. In de lineaire run is namelijk de noordelijke golfstrein erg sterk, d.i. de middelbare (en langere) golven $m=1-6$. Zelfs de zuidelijke golfstrein wordt gedeeltelijk door $m=1-6$ gerepresenteerd. T.o.v. de lineaire run is er in de niet-lineaire run energie uit deze groep golven weggestroomd, ten gunste van de kortere golven ($m=7-10$ en hoger). Dat is te zien in de noordelijke golfstrein die veel zwakker is geworden, en de zuidelijke golfstrein ($m=7-10$ en hoger) die hier veel sterker is. Grose en Hoskins (1979) laten op een kwalitatieve manier zien dat de lokale stationaire oplossing van de vorticitetsvergelijking varieert van een golf met golfgetal 0 aan de pool tot golven met golfgetal 8 à 9 aan de evenaar. Dit is berekend voor een superrotatie (= konstante hoeksnelheid) met 15 m/sec aan de evenaar en de 300 mb. dec.-febr. waargenomen zonaal gemiddelde stroming. De oplossingen voor de 500 mb dec.-febr. wind zullen daar niet zoveel van afwijken. In onze

vorticiteitsplaatjes zien we ook inderdaad kortere golven op zuidelijke breedten (de zuidelijke golftrein) en langere golven op noordelijke breedten (de noordelijke golftrein). Uit onze experimenten blijkt dat voor een cirkelvormige berg op 30° NB de lineaire respons in de langere ($m=1-6$) golven te groot, en in de kortere ($m=7-20$) golven te klein is. Indien er hier een samenhang is tussen golfgetal en geografische breedte, zoals Grose en Hoskins (1979) dat aangeven, dan betekent dat tevens dat de lineaire berekening een te grote respons geeft op noordelijke breedten, en een te kleine respons op zuidelijke breedten.

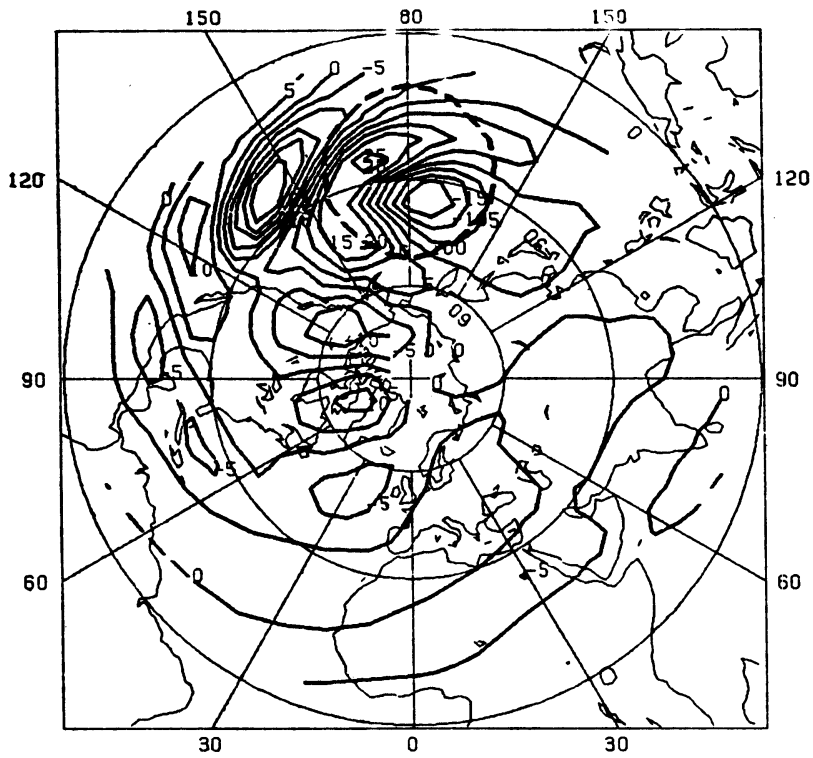


Fig. 5.1: Vorticiteitsveld in 10^6 1/sec., samengesteld uit de golfgetallen $m=1-10$ van de lineaire run op dag 32.

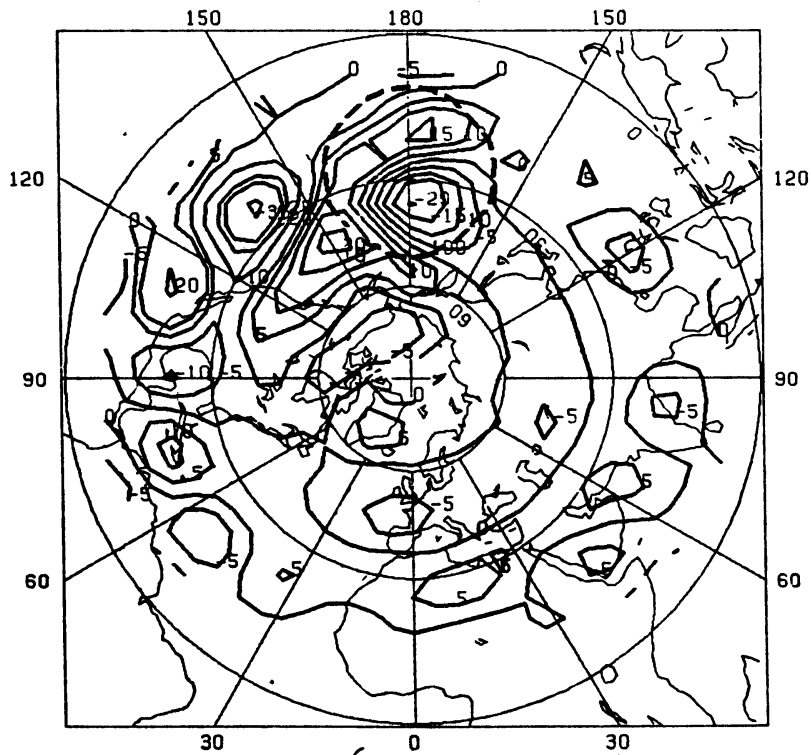


Fig. 5.2: Vorticiteitsveld in 10^6 1/sec., samengesteld uit de golfgetallen $m=1-10$ van de niet-lineaire run met herstel van de zonale componenten op dag 50.

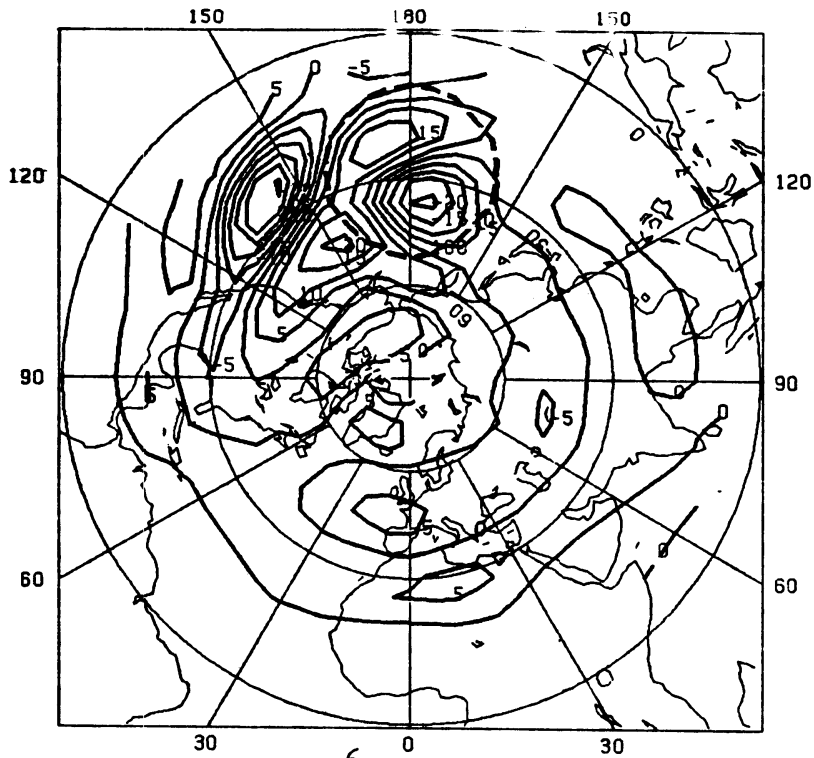


Fig. 5.3: Vorticiteitsveld in 10^6 1/sec., samengesteld uit de golfgetallen $m=1-6$ van de niet-lineaire run met herstel van de zonale componenten op dag 50, en de golfgetallen $m=7-10$ van de lineaire run op dag 32.

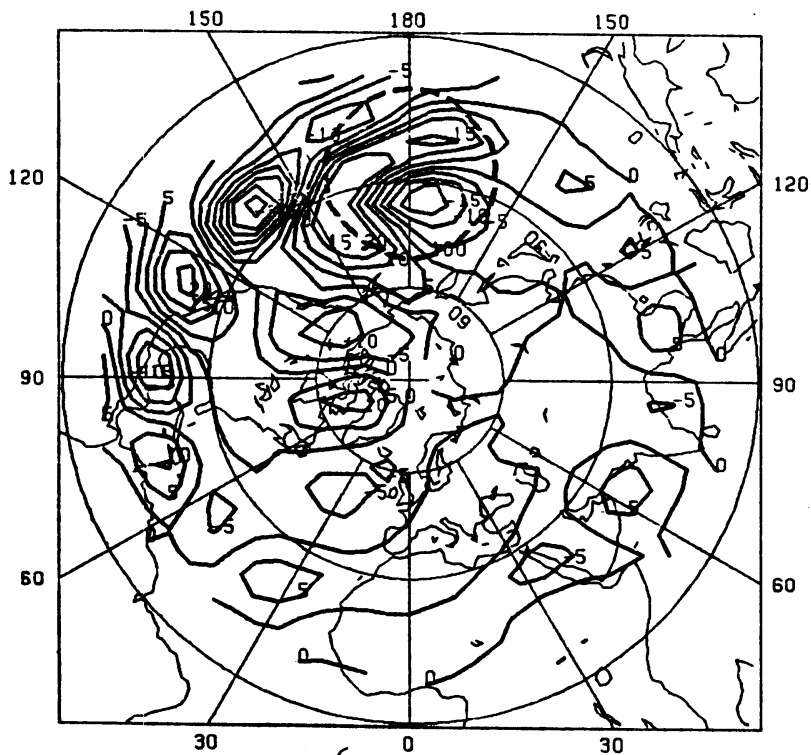


Fig. 5.4: Vorticiteitsveld in 10^6 1/sec., samengesteld uit de golfgetallen $m=1-6$ van de lineaire run op dag 32, en de golfgetallen $m=7-10$ van de niet-lineaire run met herstel van de zonale componenten op dag 50.

6. SAMENVATTING EN CONCLUSIE.

Met een niet-lineair spectraal model, gebaseerd op de ondiep-water-vergelijkingen, wordt de invloed van een cirkelvormige berg op 30° NB, op de 500 mb dec.-febr. waargenomen zonaal gemiddelde wind bestudeerd. Naast twee niet-lineaire berekeningen wordt met dit model ook een lineaire berekening gemaakt. Dit gebeurt door de berg 1000 x kleiner te maken, en de hiermee berekende verstoringen achteraf met 1000 te vermenigvuldigen. Twee kontroleruns laten zien dat deze manier van lineariseren goede resultaten geeft. De lineaire berekening resulteert in een stationaire toestand met twee golfstreinen ten oosten van de berg. Een noordelijke op 45° - 80° NB, en een zuidelijke evenwijdig aan een breedtegraad op 10° - 30° NB, met sterk NO-ZW gerekte minima en maxima. Dit komt geheel overeen met de resultaten die Grose en Hoskins (1979) vonden met een lineair stationair model. Een niet-lineaire berekening, uitgaande van dezelfde situatie, laat in het begin een zwakke noordelijke golfstrein zien en een sterke zuidelijke golfstrein. Door interactie van de berg met de zonale basisstroom verzwakt deze laatste. Dit heeft tot gevolg dat de noordelijke golfstrein verdwijnt en de zuidelijke naar het noorden opschuift en uitdempt. Daarom is een tweede niet-lineaire berekening gemaakt, waarin de zonale basisstroom op iedere tijdstap hersteld wordt. Na \pm 30 dagen wordt er een stationaire toestand bereikt waarin dezelfde twee golfstreinen weer zichtbaar zijn. T.o.v. de lineaire run is de noordelijke golfstrein zwakker en de zuidelijke golfstrein sterker en langer. Bovendien zijn de minima en maxima van de zuidelijke golfstrein veel minder NO-ZW gerekt. In een gebied tot \pm 3500 km van het middelpunt van de berg wijken de lineaire en de niet-lineaire berekening vrijwel niet van elkaar af.

De resultaten die Quiby (1980) vond met een niet-lineair ondiep-water-model lijken het meest op onze lineaire resultaten. De reden daarvoor zou, naast het starten met een iets andere beginsituatie, kunnen zijn dat er in zijn experiment nog geen stationaire toestand bereikt was. Uit de kinetisch energiespektrum blijkt dat de noordelijke golfstrein in z'n geheel samengesteld wordt uit langere golven (zonaal golfgetal $m=1-6$). De zuidelijke golfstrein bestaat voor een belangrijk deel uit kortere golven ($m=7-20$). In de niet-lineaire run wordt door niet-lineaire interacties energie onttrokken aan, met name, de golfgetallen

$m=4-6$, ten behoeve van hele lange en kortere golven. Daarom geeft de niet-lineaire run een zwakke noordelijke golftrain te zien en een sterke zuidelijke golftrain.

Grose en Hoskins (1979) signaleren dat het golfgetal van de lokale stationaire oplossing van de vorticitetsvergelijking varieert van 0 aan de pool tot 8 à 9 bij de evenaar. Wij vinden dat t.o.v. de niet-lineaire berekening de lineaire berekening een te sterke respons in de lange golven, en een te zwakke respons in de kortere golven geeft. Samen betekent dit dat de lineaire berekening een te grote respons op noordelijke breedten en een te kleine respons op zuidelijke breedten geeft.

De kinetische energie per spektrale index n levert geen eenvoudig interpreteerbaar resultaat.

De uiteindelijke konklusie die we kunnen trekken is: Er bestaat een aanzienlijk verschil tussen de lineaire en de niet-lineaire respons van een berg op 30° N, maar een goede fysische verklaring hebben we nog niet kunnen geven. Het verdient aanbeveling de studie voort te zetten met orografische forcering in slechts een enkele spektrale komponent, en daarbij alle energie omzettingen te berekenen.

Appendix I: Lijst van gebruikte symbolen.

a	straal van de aarde ($a = 6,371 \cdot 10^6$ m)
D	divergentie
E	enstrofie
f	coriolisparameter ($f = 2\Omega\mu$)
g	versnelling van de zwaartekracht
G	Gaussisch gewicht
h	hoogte
k_d	diffusieconstante
k_w	wrijvingsconstante
\vec{k}	eenheidsvektor in z-richting
K	kinetische energie
m	zonaal golfgetal
M_B	aantal roosterpunten langs een meridiaan
M_L	aantal roosterpunten langs een breedtecirkel
n	spektrale index ($n-m =$ meridionaal golfgetal)
N	aantal spektrale componenten
p	druk
P_n^m	geassocieerde legendrefunctie van de eerste soort, m^{de} orde en n^{de} graad
t	tijd
u	zonale windsnelheid
U	$u \cos \theta$
v	meridionale windsnelheid
V	$v \cos \theta$
x	coördinaat in carthesisch assenstelsel
y	coördinaat in carthesisch assenstelsel
z	coördinaat in carthesisch assenstelsel
ζ	absolute vorticititeit ($\xi + f$)
ξ	relatieve vorticititeit
λ	lengtegraad
μ	$\sin \theta$
θ	breedtegraad
ϕ	geopotentiële hoogte
Φ	gemiddelde geopotentiële hoogte
χ	snelheidspotentiaal

ψ stroomfunctie
 ω verticale windsnelheid
 Ω rotatie van de aarde ($= 7,292 \cdot 10^{-5}$ rad/sec)

Appendix II: Bolfunkties.

Een funktie $x(\lambda, \mu)$ wordt ontwikkeld in bolfunkties volgens:

$$x(\lambda, \mu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} x_n^m P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (A2.1)$$

hierin is $P_n^m(\mu)$ de geassocieerde Lengendrefunktie van de eerste soort, m^{de} orde en n^{de} graad:

$$P_n^m(\mu) = \left[\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^n n!} (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}} (\mu^2-1)^n \quad n > m \quad (A2.2)$$

Omdat we een funktie $x(\lambda, \mu)$ slechts in een eindige reeks bolfunkties ontwikkelen ziet vergelijking (A2.1) er voor ons als volgt uit:

$$x(\lambda, \mu) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N x_n^m P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (A2.3)$$

De manier van afkappen wordt de driehoekige afkapping genoemd, omdat in een carthesisch assenstelsel met coördinatenassen m en n , de beschouwde spektrale punten (m, n) een driehoek vormen. Er zijn ook andere manieren van afkappen mogelijk.

De spektrale coëfficiënten x_n^m zijn te berekenen met:

$$x_n^m = \int_{-1}^1 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\lambda, \mu) P_n^m(\mu) e^{-im\lambda} d\lambda d\mu \quad (A2.4)$$

Uit deze relatie volgt tevens dat de bolfunkties $P_n^m(\mu) e^{im\lambda}$ een volledige verzameling orthogonale funkties vormen want

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n^m(\mu) e^{im\lambda} P_s^r(\mu) e^{-ir\lambda} d\lambda d\mu = \delta_{mr} \delta_{ns} \quad (A2.5)$$

Integraal (A2.4) kunnen we splitsen in twee integralen,

$$x_n^m(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\lambda, \mu) e^{-im\lambda} d\lambda \quad (A2.6)$$

$$x_n^m = \int_{-1}^1 x_n^m(\mu) P_n^m(\mu) d\mu \quad (A2.7)$$

en deze zijn beide te vergangen door een sommatie. Bij de eerste

integraal, de Fouriertransformatie, maken we daarvoor gebruik van de trapezoidale kwadratuurformule:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\lambda) d\lambda = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M g(\lambda_k) \quad \lambda_k = \frac{2\pi}{M} (k-1) \quad (\text{A2.8})$$

Deze formule is exakt als $g(\lambda)$ te ontwikkelen is in een eindige Fourierreeks met maximum golfgetal $N < M-1$ (Krylov, 1962). In plaats van integraal (A2.6) kunnen we dus schrijven:

$$x^m(\mu) = \frac{1}{M_L} \sum_{k=1}^{M_L} x(\lambda_k, \mu) e^{-im\lambda_k} \quad M_L > 2N+1$$

waarin M_L het aantal equidistante punten is langs breedtegraad μ . Integraal (A2.7) is te vervangen door gebruik te maken van de Gaussische kwadratuurformule:

$$\int_{-1}^1 g(\mu) d\mu = \sum_{k=1}^M G_k g(\mu_k) \quad (\text{A2.9})$$

hierin zijn μ_k ($k=1, \dots, M$) de wortels van het Legendrepolynoom $P_m^0(\mu)$, en G_k de bijbehorende Gaussische gewichten. Deze kwadratuurformule is exakt voor elk polynoom $g(\mu)$ met graad $N < 2M-1$ (Krylov, 1962).

Integraal (A2.7) is dus te vervangen door:

$$x_n^m = \sum_{k=1}^{M_B} G_k x^m(\mu_k) P_n^m(\mu_k) \quad M_B > \frac{2N+1}{2}$$

waarin M_B het aantal (Gaussische) breedtegraden is.

Nemen we de twee gevonden sommaties samen dan vinden we het equivalent van integraal (A2.4):

$$x_n^m = \frac{1}{M_L} \sum_{k=1}^{M_B} \sum_{l=1}^{M_L} G_k x(\lambda_l, \mu_k) P_n^m(\mu_k) e^{-im\lambda_l} \quad (\text{A2.10})$$

$$M_B > \frac{2N+1}{2}, \quad M_L > 2N+1$$

Deze uitdrukking is numeriek wel te berekenen, in tegenstelling tot (A2.4).

De spektrale coëfficiënten van het produkt van twee functies $x(\lambda, \mu)$ en $y(\lambda, \mu)$, beide in bolfuncties te ontwikkelen volgens (A2.3),

volgen dan uit:

$$(xy)_n^m = \frac{1}{M_L} \sum_{k=1}^{M_B} \sum_{l=1}^{M_L} G_k x(\lambda_1, \mu_k) y(\lambda_1, \mu_k) P_n^m(\mu_k) e^{-im\lambda_1} \quad (A2.11)$$

$$M_B > \frac{3N+1}{2}, \quad M_L > 3N+1$$

Nadat we hierboven aangegeven hebben hoe een functie in een reeks bolfuncties ontwikkeld kan worden, noemen we nu nog een aantal eigenschappen van bolfuncties.

Twee eenvoudig af te leiden eigenschappen zijn:

$$\frac{\partial x(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N im x_n^m P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (A2.12)$$

$$\frac{\partial x(\lambda, \mu)}{\partial \mu} = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N x_n^m \frac{d}{d\mu} P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (A2.13)$$

Een heel belangrijke eigenschap is dat bolfuncties eigenfuncties zijn van de ∇^2 -operator:

$$\nabla^2 [P_n^m(\mu) e^{im\lambda}] = -n(n+1) P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (A2.14)$$

Verder zullen we nog gebruik maken van een aantal relaties voor de geassocieerde Legendrefunctie $P_n^m(\mu)$:

$$(1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n^m(\mu) = -n E_{n+1}^m P_{n+1}^m(\mu) + (n+1) E_n^m P_n^m(\mu) \quad (A2.15)$$

$$P_{n+1}^m(\mu) = \frac{1}{E_{n+1}^m} \mu P_n^m(\mu) - \frac{E_n^m}{E_{n+1}^m} P_{n-1}^m(\mu) \quad (A2.16)$$

Waarin: $E_n^m = \sqrt{\frac{2-n}{4n^2-1}}$.

$$P_{m+1}^{m+1}(\mu) = -\sqrt{\frac{2m+3}{2m+2}} \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} P_m^m(\mu) \quad (A2.17)$$

$$P_{m+1}^m(\mu) = \sqrt{2m+3} \mu P_m^m(\mu) \quad (A2.18)$$

$$P_n^{-m}(\mu) = (-1)^m P_n^m(\mu) \quad (A2.19)$$

De Legendrefunkties $P_n^m(\mu_k)$ en afgeleide Legendrefunkties $\frac{d P_n^m}{d\mu}(\mu_k)$ op Gaussische breedtegraden worden aan het begin van het numerieke rekenprogramma berekend en in een file opgeslagen, zodat zij steeds beschikbaar zijn. De berekening van $P_n^m(\mu_k)$ geschiedt als volgt: Uit definitie (A2.2) volgen:

$$P_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{en} \quad P_1^0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \mu_k$$

Uitgaande van P_0^0 kunnen met behulp van de relaties (A2.17) en (A2.18) $P_m^m(\mu_k)$ respectievelijk $P_{m+1}^m(\mu_k)$ berekend worden. Is dat gebeurd dan volgen $P_n^m(\mu_k)$ voor $n > m+2$ uit de relatie (A2.16). De functies $P_n^{-m}(\mu_k)$ worden niet apart berekend en opgeslagen omdat zij heel simpel volgens (A2.19) met $P_n^m(\mu_k)$ samenhangen.

De afgeleide Legendrefunkties $\frac{d P_n^m}{d\mu}(\mu_k)$ berekenen we met behulp van relatie (A2.15) uit de $P_n^m(\mu_k)$'s. Hierbij stellen we $P_{m-1}^m \equiv 0$. Ook hier worden de functies van negatieve orde niet apart berekend omdat zij op dezelfde manier als in (A2.19) met die van positieve orde samenhangen:

$$\frac{d P_n^{-m}}{d\mu}(\mu) = (-1)^m \frac{d P_n^m}{d\mu}(\mu) \quad (\text{A2.20})$$

Meer over de berekening van geassocieerde Legendrefunkties is te vinden in Belousov (1962).

Referenties:

- F. Baer, 1972: An alternate scale representation of atmospheric energy spectra, *Journal of Atmospheric Sciences*, vol. 29, blz. 649-664.
- S.L. Belousov, 1962: Tables of normalized associated Legendre polynomials, *Mathematical tables series*, vol. 18, Pergamon Press, Oxford, 379 blz.
- J.G. Charney en A. Eliassen, 1949: A numerical method for predicting the perturbations of the middle latitude westerlies. *Tellus*, vol. 1, blz. 38-55.
- J. Egger, 1976: The linear response of a hemispheric two-level primitive equation model to forcing by topography, *Monthly Weather Review*, vol. 104, blz. 351-363.
- W.I. Grose en B.J. Hoskins, 1979: On the influence of orography on large-scale atmospheric flows, *Journal of Atmospheric Sciences*, vol. 36, blz. 223-234.
- G.J. Haltiner en R.T. Williams, 1980: Numerical prediction and dynamic meteorology, 2nd edition, John Wiley and Sons, New York, 477 blz.
- J.R. Holton, 1979: An introduction to dynamic meteorology, 2nd edition, *International geophysics series*, vol. 23, Academic Press, New York, 391 blz.
- A.E. Kranenburg, 1981: Een inleiding in de dynamische meteorologie, KNMI, De Bilt, 46 blz.
- V.I. Krylov, 1962: Approximate calculation of integrals, The Macmillan Company, New York, 357 blz.
- B. Machenhauer, 1979: The spectral method, In: Numerical methods used in atmospheric models, vol. II, GARP Publications series no. 17, blz. 121-275.

- F. Mesinger en A. Arakawa, 1976: Numerical methods used in atmospheric models, vol. I, GARP Publications series no. 17, 64 blz.
- A.H. Oort en E.M. Rasmusson, 1971: Atmospheric circulation statistics, NOAA professional paper 5, U.S. government printing office, Washington D.C., 323 blz.
- J.D. Opsteegh en H.M. van den Dool, 1980: Seasonal differences in the stationary response of a linearized primitive equation model: Prospects for long-range weather forecasting?, Journal of Atmospheric Sciences, vol. 37, blz. 2169-2185.
- J. Quiby, 1980: The response of a global barotropic model to forcing by large-scale orography. Technical Report no. 17, ECMWF, Reading, 29 blz.
- A. Robert, 1979: The semi-implicit method, In: Numerical methods used in atmospheric models, vol. II, GARP Publications series no. 17, blz. 417-437.
- A. Wiin-Nielsen, 1972: A study of power laws in the atmospheric kinetic energy spectrum using spherical harmonic functions, Meteorologiske Annaler, vol. 6, blz. 107-124.