

**KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT**

TECHNISCHE RAPPORTEN

T.R. - 13

A.P.M.Baede

Wiskundige modellen en het weer.

De Bilt, 1982

Publikationummer: K.N.M.I. TR-13(DM)

Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut,
Dynamisch Meteorologisch Onderzoek,
Postbus 201,
3730 AE De Bilt,
Nederland.

U.D.C.: 551.509.313

Les 10

Wiskundige Modellen en het weer

Deze les is met toestemming herdrukt uit de
Cursus Wiskundige Modellen van de Stichting
Teleac - Utrecht 1981.

A. Weer modellen

A.P.M. Baede

Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut, de Bilt

Fons Baede, geboren in 1940, studeerde Wis- en Natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam. Na zijn afstuderen in 1966 trad hij in dienst van het FOM-Instituut voor Atoom- en Molecuulfysica te Amsterdam en promoveerde in 1972 op een experimenteel onderzoek op het gebied van de atomaire botsingsfysica. Eind 1971 trad hij in dienst van het KNMI, waar hij tot 1975 werkte aan de toepassing van eenvoudige numerieke modellen voor lange-termijn weersverwachting. Van 1975 tot 1978 was hij verbonden aan het Europese Centrum voor Weersverwachtingen op Middellange Termijn in Engeland, waar hij verantwoordelijk was voor de constructie van een van de grote atmosfermodellen. Sinds zijn terugkeer in 1978 is hij hoofd van de afdeling Dynamische Meteorologie van het KNMI.

1. Een stukje geschiedenis

Dynamische meteorologie, de kennis van de *dynamica* der aardse atmosfeer, is een onderdeel van de klassieke natuurkunde. Dat wil zeggen dat kwantummechanische verschijnselen hierin geen rol spelen. Weliswaar speelt absorptie en emissie van straling een belangrijke rol in de atmosfeer, maar de dynamische meteorologie bestudeert niet zozeer deze processen zelf, als wel hun effect op de dynamica van de atmosfeer. In feite kan men de dynamische meteorologie beschouwen als een onderdeel van de klassieke vloeistofmechanica, waarvan de fysische wetten in principe reeds lang bekend zijn. Toch heeft het tot 1904 moeten duren voordat het inzicht doorbrak, dat deze wetten zouden kunnen worden gebruikt om het gedrag van de atmosfeer te voorspellen. Het was de beroemde meteoroloog V. Bjerkness die dit idee opperde. Getuigde dit idee van groot inzicht, moed was vereist om dit idee ook werkelijk uit te voeren, gezien de immense complexiteit van de aardse atmosfeer en haar interactie met de vaste aarde. Toch waagde de Brit L.F. Richardson een poging gedurende de Eerste Wereldoorlog. Hij probeerde in één enkel punt in Duitsland de luchtdrukverandering over een periode van zes uur te voorspellen. Alle berekeningen werden met de hand uitgevoerd: computers ontbraken nog. Zijn poging was helaas tot falen gedoemd. Het ontbrak in die tijd nog aan fysisch inzicht om de noodzakelijke vereenvoudigingen in de vergelijkingen aan te brengen en het ontbrak aan numeriek-wiskundig inzicht om de berekeningen tot een goed eind te brengen. Wel leverde deze poging de wetenschap het eerste boek over *numerieke weersverwachting* op, een boek dat helaas door een soms exotische notatie en een ongelooflijke gedetailleerdheid voor de moderne lezer onleesbaar is (Richardson, 1922).

Dertig jaar lang gebeurde er weinig. Weliswaar werd ons inzicht in de numerieke oplossing van de vergelijking, die de atmosfeer beheersen, vergroot door het werk van de wiskundigen Courant, Friedrichs en Lewy (1928), maar

voor toepassing van deze kennis op meteorologisch gebied, moesten we wachten op de komst van de elektronische computer direct ná de Tweede Wereldoorlog. Toen vond de doorbraak plaats, dankzij de gelukkige combinatie van enkele geniale geleerden: de wiskundige Von Neumann, die onmiddellijk het grote belang van de computer inzag, en de meteorologen Charney en Fjörtoft (1950). Charney had enige jaren eerder aangetoond dat de atmosfeer in eerste benadering voldoet aan één enkele simpele vergelijking: de wet van behoud van *vorticiteit*. Deze wet stelt dat voor elk luchtdeeltje de vorticiteit (de verticale component van de rotatie van het deeltje) behouden blijft. We zullen deze vergelijking later nog tegenkomen. Het hele complexe gedrag van de atmosfeer wordt hiermee in eerste benadering gereduceerd tot één enkele homogene partiële differentiaalvergelijking. Toegegeven, het was slechts een eerste benadering, maar het werkte en betekende een definitieve doorbraak.

In de dertig jaar nadien zijn de modellen veel gecompliceerder geworden, gelijk opgaand met de ontwikkeling van de computer. Deze ontwikkeling vond in twee richtingen plaats. Enerzijds legden talrijke meteorologische centra zich toe op de ontwikkeling van modellen die van dienst konden zijn bij de dagelijkse operationele weersvoorspelling. Een absolute vereiste is dan dat de voorspelling sneller, en liefst zeer veel sneller, verloopt dan de werkelijkheid! Deze operationele eis stelt randvoorwaarden aan de complexiteit van het model, gegeven een bepaalde computer. Ook het KNMI is rond 1970 begonnen met de ontwikkeling van een eigen wiskundig model, dat thans, zoals we later nog zullen zien, ook operationeel wordt toegepast.

De andere lijn van ontwikkeling vindt plaats in onderzoeksinstituten, waar zeer complexe en verfijnde modellen van de atmosfeer worden gemaakt, om na te gaan of we de atmosfeer echt goed begrijpen. De operationele eis komt dan te vervallen. Het model hoeft niet elke dag voorspellingen te leveren en het model mag best langzamer rekenen dan de werkelijkheid verloopt. Met zulke modellen kan de invloed van allerlei natuurkundige processen worden nagegaan; ook de invloed van numerieke methoden kan worden bestudeerd. Verder kan worden bekeken of het 'klimaat' van het model hetzelfde is als dat van de atmosfeer. En als dat zo is, kan het model worden gebruikt om klimaatsveranderingen te bestuderen ten gevolge van door de mens of de natuur veroorzaakte veranderingen. Het Geophysical Fluid Dynamics Laboratory te Princeton in de VS, dat thans 25 jaar bestaat, heeft op dit gebied een belangrijke rol gespeeld. Zulke modellen worden aangeduid met *Algemene Circulatie Modellen*, in tegenstelling tot de operationele *Weer Voorspel Modellen*.

Deze laatste lijn van ontwikkeling zou strikt genomen buiten het bestek van dit hoofdstuk vallen, ware het niet dat beide ontwikkelingslijnen de laatste jaren weer zijn samengekomen. De huidige computers zijn zo snel dat ook de zeer complexe modellen operationeel voor weersvoorspelling gebruikt kunnen worden. Dit gebeurt sinds kort door het Europese Centrum voor Weersverwachting op Middellange Termijn te Reading, Engeland. Daar is men thans zo ver dat op operationele basis goed bruikbare verwachtingen van de circulatie van de atmosfeer tot vijf dagen vooruit kunnen worden geleverd.

Daarmee zijn we gekomen in 1980. We zijn nog ver af van het doel dat het Europese Centrum zich heeft gesteld: een bruikbare verwachting tien dagen

liger verschijnselen die we kunnen aanduiden met de *atmosferische circulatie* en die de oorzaak zijn van het weer in engere zin. Omdat de meeste mensen niet vertrouwd zijn met de atmosferische circulatie geven we hier een kwalitatieve schets, alvorens we wat dieper op de natuurkunde ingaan. We hebben dan tenminste een ruw idee van wat we willen modelleren.

Allereerst nog even de vraag: waarom wel modellen van de circulatie en niet van het weer in strikte zin? Het antwoord is: juist omdat het weer zo kleinschalig van karakter is! We kennen niet eens de toestand van de atmosfeer op die kleine schaal; de mistlaag en de bui glippen vaak tussen de mazen van het waarnemingsnet door. En als we de huidige toestand niet kennen, zullen we ook nooit met een model een voorspelling kunnen maken. Noodzakelijkerwijs moeten we ons dus beperken tot grootschaliger verschijnselen die we wel met ons meetnet kunnen meten. We komen hier later nog op terug.

Hoe komt nu de circulatie tot stand? Verreweg het grootste deel van de massa van de atmosfeer is geconcentreerd in de onderste 10 km. De atmosfeer kan dus worden beschouwd als een dunne laag gas van deze dikte op een draaiende bol. De zon verwarmt de lucht in de buurt van de evenaar meer dan nabij de polen, zodat er temperatuur verschillen ontstaan die de lucht in beweging zetten. Dichtbij de evenaar stijgt warme lucht op en stroomt boven in de atmosfeer uit in de richting van beide polen. Tengevolge van de draaiing van de aarde (*Coriolis-kracht*) wordt deze poolwaarts stromende lucht op beide halfronden in westwaartse richting afgebogen en concentreert zich daarbij tot een nauw begrensde stroming op middelbare breedte (de *straalstroom*) die zich als een kronkelende rivier rond de hele aarde voortbeweegt. Dit is goed te zien in afbeelding 1, die laat zien hoe de atmosfeer er op 14 november 1980 boven een deel van het Noordelijk Halfrond uitzag op ongeveer 5 km hoogte. Nauwkeuriger: deze kaart toont de hoogte van het 500 mbar vlak als functie van de plaats op het Noordelijk Halfrond. De getrokken lijnen verbinden punten van gelijke hoogte: *isohypsen*. De afstand tussen de isohypsen correspondeert met een hoogteverschil van 40 m. Het gedrag van de atmosfeer is zodanig dat de wind waait in de richting van deze isohypsen en wel des te sterker naarmate ze dichter bij elkaar liggen. De sterkste winden zijn dus geconcentreerd in een nauwe zône die al kronkelend het Noordelijk Halfrond omspant. Onder bepaalde voorwaarden wordt deze stroming instabiel en ontstaan er wervelvormige storingen, die corresponderen met de bekende hoge en lage druk gebieden. Het zijn deze storingen, met hun bijbehorende windvelden en temperatuur contrasten (*'fronten'*) die, op middelbare breedte op aarde waar wij wonen, verantwoordelijk zijn voor het dagelijkse weerbeeld.

Naast deze voor ons weer zo belangrijke frontale storingen, wervelt en beweegt de atmosfeer op alle mogelijke ruimtelijke schalen. Iedereen kent de kleine werveltjes die in een straathoek het stof doen opwaaien. Aan de andere kant van het spectrum vinden we op de weerkaarten grote golfvormige bewegingen met golflengten van duizenden kilometers. Toch hebben dat werveltje en die hele lange golven met elkaar te maken. Zoals we later zullen zien wordt het gedrag van de atmosfeer beschreven door *niet-lineaire* vergelijkingen. Het is juist dit niet-lineaire karakter van de atmosfeer dat er voor zorgt dat verschijnselen op allerlei ruimtelijke schalen elkaar kunnen beïnvloeden en dat zelfs de kleinste storing op den duur de grootste golfbewegingen kan veranderen. Dit maakt de theorie van de atmosfeer zo buitengewoon ingewikkeld en de voorspelling van het weer zo moeilijk.

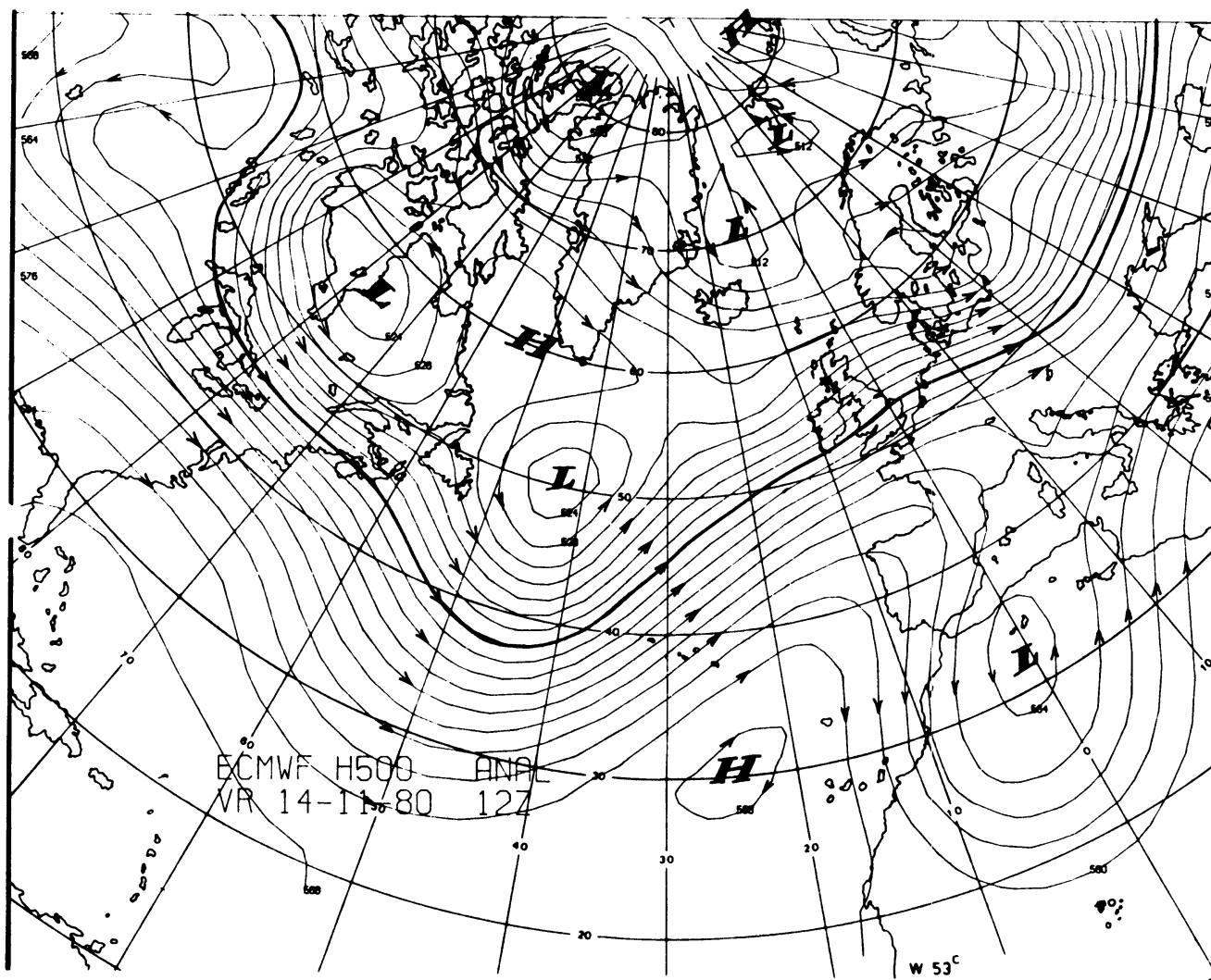
vooruit. Elk volgend stapje vooruit zal moeilijker zijn, maar nog nooit te voren is door zoveel mensen zó toegewijd aan dit probleem gewerkt.

In de volgende paragrafen hopen we iets van de sluier te kunnen oplichten en de achtergronden en de werking van de wiskundige modellen van de atmosfeer te kunnen laten zien.

2. Physica van de atmosfeer

2.1. Een kwalitatieve beschrijving

'Weer' in de gebruikelijke betekenis van het woord, is datgene wat mensen ervaren als ze zich buiten bevinden: een buitje afgewisseld door zon, een mistlaag van enkele meters dik, een overtrekkend warmtefront. In het algemeen zijn het vrij kleinschalige verschijnselen, soms, zoals in het geval van de mistlaag, beperkt tot enkele meters. Dit is niet het weer waarmee we ons in dit hoofdstuk zullen bezighouden. We zullen ons bemoeien met grootscha-



Afb. 1

Hoogte van het 500 mbar drukvlak op 14 november 1980, 12 uur GMT. De lijnen verbinden de punten met dezelfde hoogte (isohypsen). De wind vaait in de richting van de isohypsen en wel des te sterker naarmate deze dichter bij elkaar liggen. De circulatie is geconcentreerd in een betrekkelijk nauwe zone op middelbare breedte.

We zullen nu bovenstaande wetten één voor één nader bekijken en wiskundig formuleren, zodat we aan het eind van deze paragraaf beschikken over een volledig stelsel modelvergelijkingen.

2.3. De wet van Newton of de bewegingsvergelijkingen

De wet van Newton zegt dat de versnelling van een deeltje lucht gelijk is aan de som van de krachten per eenheid van massa die er op inwerken. Deze wet geldt in een stilstaand of zich eenparig voortbewegend coördinatensysteem. We beschouwen ons deeltje lucht echter in een met de aarde meedraaiend systeem, waarin de bewegingsvergelijkingen er in vector-vorm als volgt uitzien:

$$(1) \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2 \vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \vec{g} + \vec{F}.$$

Hierin is \vec{V} : de snelheid van het luchtdeeltje; p : de luchtdruk ter plaatse van het deeltje en dus is ∇p : de gradiënt van de druk; $\vec{\Omega}$: de hoeksnelheid van de draaiende aarde; \vec{r} : de positie vector van het deeltje vanaf het centrum van de aarde; \vec{g} : de zwaartekracht; ρ : de dichtheid van de lucht; \vec{F} : andere krachten die op het deeltje werken, bijvoorbeeld wrijving.

De linkerzijde van de vergelijking stelt de versnelling van het deeltje lucht voor. De eerste term rechts is de drukgradiëntkracht, de kracht die het gevolg is van drukverschillen rond het deeltje. De tweede en derde term zijn het gevolg van de transformatie van de vergelijkingen naar een met de aarde meedraaiend coördinatensysteem. De tweede term is de zogenaamde Coriolis-kracht, de kracht die men ervaart als men probeert te lopen in een tram die door de bocht gaat. De derde term is de middelpuntvliedende kracht, die men voelt als men in dezelfde tram in de bocht stil blijft zitten. Deze is zó klein in het spel van krachten aan de rechterzijde, dat we hem kunnen verwaarlozen. De vierde term is de naar het aardoppervlak, dus langs de z-as, gerichte zwaartekracht, terwijl \vec{F} alle andere krachten, zoals wrijving samenvat.

Behalve de middelpuntvliedende kracht, kunnen we nóg enkele termen in bovenstaande vergelijking verwaarlozen. Het blijkt namelijk dat de zwaartekracht g en de verticale drukgradiëntkracht $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ elkaar steeds goed in evenwicht houden (de natuurkundige zegt: de atmosfeer is in *hydrostatisch* evenwicht). De verticale versnelling $\frac{dw}{dt}$ en de verticale component van de Coriolis-kracht zijn dus verwaarloosbaar klein. Als we dan vectorvergelijking (1) in zijn drie componenten uitschrijven krijgen we:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + f \cdot v + F_x,$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - f \cdot u + F_y,$$

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g.$$

Hierin is f een afkorting voor $2\Omega \sin \phi$ waarin ϕ de breedtegraad op aarde is waarop we aan het rekenen zijn.

Bovenstaande schets geeft uiteraard een zeer vereenvoudigd beeld van de werkelijkheid. Zo bestaat de atmosfeer niet eenvoudig uit 'lucht', maar zit er ook waterdamp in die kan condenseren tot wolken, waarbij warmte vrijkomt en waardoor de stralingshuishouding wordt beïnvloed. Ook zitten er gassen in zoals kooldioxyde en ozon, die weliswaar geen wolken vormen, maar wel invloed uitoefenen op de wijze waarop zonnestraling wordt geabsorbeerd. Bovendien stroomt de atmosfeer niet over een gladde bol, maar over een aarde met z'n bergketens en oceanen, z'n tropische wouden en woestijnen. Dit alles maakt het gedrag van de atmosfeer zeer gecompliceerd. Hieronder zullen we zien hoe we dit met een wiskundig model kunnen beschrijven.

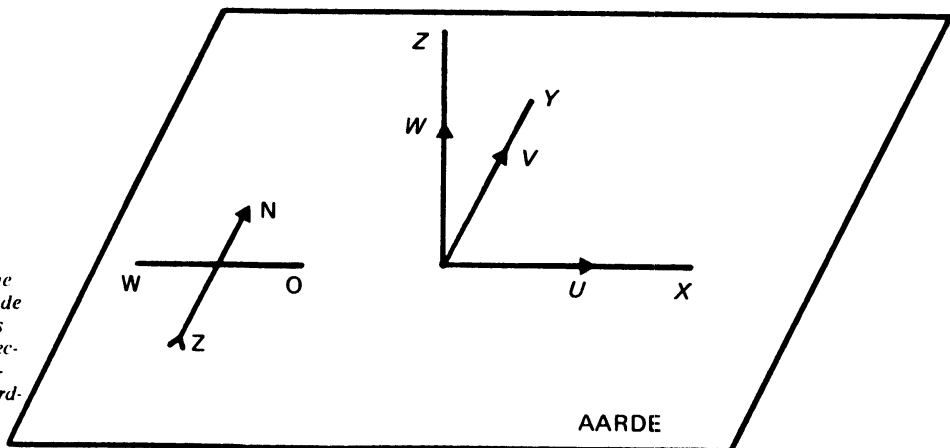
2.2. De fysische wetten en de wiskundige vergelijkingen van de atmosfeer

De atmosfeer moet voldoen aan de wetten van de klassieke natuurkunde. We zullen deze wetten toepassen op een 'deeltje' lucht, dat wil zeggen een volume lucht, in afmetingen klein vergeleken met de verschijnselen die we willen beschrijven, maar groot vergeleken met de afstanden van luchtmoleculen. De wetten die voor ons doel met name van belang zijn en met behulp waarvan we ons model kunnen construeren zijn:

- de wet van Newton (' $K = m \cdot a$ '), toegepast op een deeltje lucht;
- de wet van behoud van energie;
- de wet van behoud van massa;
- de toestandsvergelijking, in ons geval de wet van Boyle-Gay Lussac voor een ideaal gas.

Voordat we deze wetten wiskundig kunnen formuleren, moeten we eerst een *coördinatensysteem* definiëren. We kiezen hier voor een *carthesisch* stelsel en zetten zo'n systeem vast op de draaiende aarde, de *x*-as in oostelijke richting, de *y*-as in noordelijke richting en de *z*-as loodrecht op het aardoppervlak naar boven. De bijbehorende snelheidscomponenten (de componenten van de wind) worden aangeduid met *u*, *v* en *w* in respectievelijk de *x*, *y* en *z*-richting (afbeelding 2).

De oplettende lezer zal hebben opgemerkt dat de aarde bolvormig is en dat ons coördinatensysteem hieraan moet zijn aangepast. Dat is juist en in feite zouden we een of ander kromlijinig systeem moeten gebruiken. In de modellen gebeurt dat natuurlijk ook, maar het zou in dit artikel de wiskundeodeloos ingewikkeld maken en niet bijdragen tot vergroting van het inzicht.



Afb. 2
Het in dit artikel gebruikte carthesische coördinatensysteem. Voor het gemak is de aarde vlak verondersteld. De *x*- en *y*-as liggen in het vlak van de aarde in respectievelijk oostelijke en noordelijke richting. De *z*-as staat loodrecht op het aardoppervlak. De snelheidscomponenten worden met *u*, *v* en *w* aangeduid.

(7) met zes onbekenden u, v, w, p, ρ, T . Er staan weliswaar nog drie onge-specificeerde grootheden in: F_x, F_y en Q , maar die zullen we moeten formuleren in termen van de zes onbekenden. Dit is een probleem apart waarop we nog terugkomen. Overigens zijn er vele varianten van dit stelsel vergelijkingen in de literatuur te vinden. Andere coördinatenstelsels, andere variabelen. Maar de verschillen zijn nooit wezenlijk. De vergelijkingen zijn steeds gebaseerd op de vier wetten van de klassieke *hydrodynamica*.

Dit stelsel van vijf gekoppelde, partiële, niet-lineaire differentiaal-vergelijkingen en één diagnostische vergelijking, is in principe oplosbaar, mits de waarden van de onbekenden voor een zeker tijdstip $t = t_0$ bekend zijn. Analytische oplossingen zijn niet bekend en we zullen dus onze toevlucht moeten nemen tot een numerieke methode bij de oplossing van dit probleem. Hoewel we nu de vergelijkingen tot onze beschikking hebben, hebben we nog geen 'model'. Daar is nog heel wat meer voor nodig en dat zullen we in de volgende paragraaf bekijken.

3. De constructie van een model

3.1. Inleiding

Van een model kunnen we pas spreken, als we hebben aangegeven hoe we eventueel de vergelijkingen denken te vereenvoudigen, gebruik makend van onze kennis van de atmosfeer; hoe we de termen F_x, F_y en Q formuleren, hoe we aan begin voorwaarden komen en vooral hoe we de vergelijkingen numeriek denken op te lossen. We zullen deze aspecten in deze paragraaf kort bespreken, maar zullen eerst wat langer stilstaan bij het wiskundige probleem van de numerieke oplossing.

3.2. Numerieke oplossing

Alle belangrijke aspecten van de numerieke oplossing van het stelsel vergelijkingen kunnen worden bestudeerd aan de hand van de veel eenvoudigere homogene, niet-lineaire, vergelijking

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Het vinden van een oplossing van deze vergelijking betekent: vindt een functie $u(x, t)$ die aan deze vergelijking voldoet. Dit is alleen mogelijk als deze functie voor een zeker tijdstip $t = t_0$ bekend is. Met andere woorden, dit is een beginwaarde probleem. De vraag is dan: gegeven $u(x, t = t_0)$ op zeker tijdstip t_0 , wat is $u(x, t)$ op tijdstippen $t > t_0$. Oplossing van dit probleem betekent dan ook dat we het gedrag van u kunnen voorspellen, als we u als functie van de ruimte coördinaat x kennen op zeker tijdstip t_0 .

Er zijn verschillende methoden bekend om dit probleem numeriek aan te pakken. Alle methoden gaan uit van het principe dat een digitale computer geen continue processen aan kan en alleen maar discreet stapje voor stapje, kan rekenen. We beperken ons hier tot de differentiemethode, die het meest wordt toegepast in de gangbare modellen. Daarbij worden zowel de tijd-coördinaat t als de ruimte-coördinaat x opgedeeld in discrete stapjes Δt en Δx zodat

$$t = m \cdot \Delta t,$$

$$x = n \cdot \Delta x,$$

In de praktijk zijn we niet zo zeer geïnteresseerd in de snelheid en versnelling van een luchtdeeltje, als wel in de wind en de verandering daarvan op een bepaald punt op aarde. Wiskundig gezegd: we zijn niet zo zeer geïnteresseerd in de totale afgeleide $\frac{du}{dt}$ als wel in de lokale, partiële, afgeleide $\frac{\partial u}{\partial t}$. Nu geldt in ons coördinatensysteem:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z},$$

en dus volgt:

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + F_x,$$

$$(3) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + F_y,$$

$$(4) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g.$$

2.4. Wet van behoud van energie

De mathematische formulering van de overige natuurkundige wetten zullen we minder uitgebreid behandelen, maar volstaan met een verwijzing naar de tekstboeken die aan het eind van dit hoofdstuk worden genoemd.

De wet van behoud van energie geeft aan dat warmte, toegevoegd aan een volume lucht, niet verloren gaat, maar ten dele ten goede komt aan de interne energie (dus de temperatuur T) van het volume, ten dele wordt gebruikt om arbeid te verrichten bij uitzetting van het volume. Ook deze wet kan worden geschreven als een partiële differentiaal-vergelijking:

$$(5) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{c_p \rho} \frac{dp}{dt} = \frac{Q}{c_p},$$

waarin Q : de hoeveelheid toegevoerde warmte per seconde per kg lucht;
 c_p : soortelijke warmte bij constante druk.

2.5. Wet van behoud van massa

Deze wet geeft aan dat de dichtheid van een volume lucht moet toenemen als er per seconde meer lucht in, dan uitstroomt:

$$(6) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0.$$

2.6. De wet van Boyle-Gay Lussac

Dit is een toestandsvergelijking en zegt dus niets over het gedrag in de tijd:

$$(7) \quad p = RT\rho.$$

We zeggen dat dit een *diagnostische* vergelijking is, in tegenstelling tot de andere vergelijkingen die een tijdsafgeleide bevatten en daarom *prognostisch* worden genoemd.

We zijn er nu in geslaagd de natuurkundige wetten die het gedrag van een droge atmosfeer beschrijven samen te vatten in zes vergelijkingen (2) t/m

en de functie u alleen gedefinieerd is voor gehele waarden van m en n :

$$u_{m,n} = u(m\Delta t, n\Delta x).$$

Er wordt dus zowel in de tijd als in de ruimte een rooster van punten gedefinieerd, waarop de berekeningen plaatsvinden (zie afbeelding 3). De numerieke oplossing van het probleem is nu om de afgeleiden in vergelijking (8) te benaderen met behulp van de discrete stapjes Δx en Δt . Als deze maar klein zijn kunnen we bijvoorbeeld schrijven:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{m,n} \approx \frac{u_{m+1,n} - u_{m-1,n}}{2\Delta t},$$

(9)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{m,n} \approx \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n-1}}{2\Delta x}.$$

De lezer zal inzien dat in de limiet $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ de benadering aan de rechterkant inderdaad exact gelijk wordt aan de afgeleiden. Vullen we deze benaderingen in vergelijking (8) in dan volgt (ga na):

$$(10) \quad u_{m+1,n} = u_{m-1,n} - u_{m,n} \cdot (u_{m,n+1} - u_{m,n-1}) \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Aan de rechterkant van deze vergelijking vinden we alleen waarden van u op tijdstippen $m-1$ en m . Kennen we deze dan kunnen we de waarde op tijdstip $m+1$, in de toekomst dus uitrekenen! We kunnen dit proces daarna weer herhalen en zo steeds met stapjes Δt verder rekenen, totdat we het tijdstip hebben bereikt waarop we de grootte u wilden voorspellen.

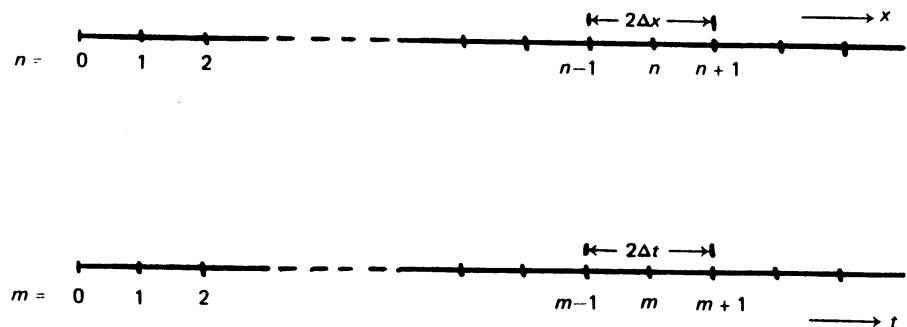
Dit proces blijft een benadering en we zullen zo dus nooit de exacte oplossing van vergelijking (8) vinden. Om dat nader te bekijken vereenvoudigen we vergelijking (7) nog verder tot een lineaire vergelijking:

$$(11) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

waar we de vergelijking van u in de tweede term constant en gelijk aan u_0 hebben gemaakt. De functie

$$u(x, t) = A \cdot e^{ik(x - u_0 t)},$$

is een oplossing van deze vergelijking. Deze oplossing stelt een golf voor met amplitude A en golfgetal k , die zich in de x -richting voortplant met snelheid



Afb. 3.
Opdeling van de ruimte-coördinaat x en
tijdscoördinaat t in discrete stapjes met
lengte Δx en Δt .

u_0 . Nu vervangen we vergelijking (10) weer door een differentie-benadering en gaan kijken of die benadering ook een golfoplossing heeft en, zo ja, met welke snelheid die zich voortplant. Nemen we aan dat er zo'n golfoplossing bestaat, dan heeft die de vorm

$$(12) \quad u_{m,n} = A \cdot e^{ik(nx - c \cdot m \Delta t)},$$

waar in c de snelheid is waarmee deze golf zich voortplant. Het is een leuke oefening voor de lezer om na te gaan of dit inderdaad een oplossing is van de differentievergelijking en dat voor de voortplantingssnelheid c geldt:

$$(13) \quad c = \frac{1}{k\Delta t} \operatorname{bg} \sin \left[u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x) \right].$$

Weliswaar heeft de differentievergelijking nog steeds een golfoplossing, maar de snelheid c waarmee deze zich voortplant is anders dan die van de oplossing van de oorspronkelijke vergelijking. Wel is het zo dat $c \rightarrow u_0$ als $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ (ga na!).

Uit vergelijking (13) wordt nog een ander belangrijk probleem zichtbaar. Wil de numerieke golfoplossing-vergelijking (12) een stabiele golf zijn, dan moet z'n voortplantingssnelheid c een reëel getal zijn. Wiskundig betekent, dat het argument van de $\operatorname{bg} \sin$ in vergelijking (13) onder alle omstandigheden kleiner dan of hoogstens gelijk aan 1 mag zijn en dus dat

$$(14) \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x}{u_0}.$$

Dat wil zeggen: gegeven de afstand Δx en de voortplantingssnelheid u_0 , dan mag de tijdstap Δt niet groter zijn dan $\frac{\Delta x}{u_0}$, of met andere woorden: de tijdstap Δt moet zó zijn gekozen, dat de golf zich per tijdstap niet over méér dan een ruimtestap Δx voortplant. Voldoet de oplossing hier niet aan, dan wordt de golfoplossing instabiel, een verschijnsel dat bekend staat als *lineaire instabiliteit*. De amplitude van de golf groeit dan in zeer korte tijd tot grote waarden.

Dit is het beroemde CFL-criterium, genoemd naar de wiskundigen Courant, Friedrich en Lewy, die het in 1928 formuleerden. Eén van de redenen waarom Richardson's berekening mislukte, is dat zijn tijdstap niet aan dit criterium voldeed.

Hoewel afgeleid voor een lineaire vergelijking, geldt dit criterium ook voor de niet-lineaire vergelijking (8) en is essentieel voor atmosfeer modellen. Welke beperkingen legt dit ons nu in de praktijk op? Daartoe moeten we iets weten over het soort golven dat in de atmosfeer voorkomt en dat door de vergelijkingen, die we in de vorige paragraaf hebben opgesteld, wordt beschreven. Dat zijn in hoofdzaak twee soorten: de meteorologische interessante golfverschijnselen, die wij kennen als hoge en lage drukgebieden, en zwaartekrachtsgolven die vergelijkbaar zijn met golven in een vijver als we er een steen ingooien. De eerste planten zich voort met snelheden u_0 van ten hoogste zo'n 30 m/sec, terwijl zwaartekrachtsgolven zich kunnen voortplanten met veel hogere snelheden: $u_0 = 300$ m/sec. Het zijn dus deze laatste die in feite de grootte van de tijdstap bepalen.

we een roosterpuntafstand $\Delta x = 300$ km nemen en een tijdstap $\Delta t = 3600$ sec., beide gebruikelijke getallen in hedendaagse weermodellen. De lezer kan zelf nagaan dat de tijdstap ruimschoots aan het CFL-criterium (vergelijking (14)) voldoet.

Voor de berekening van de voortplantingssnelheid c met vergelijkingen (13) en (17) hebben we dus de volgende numerieke waarden:

$$\begin{aligned} u_0 &= 10 \text{ m/sec.} \\ \Delta t &= 3600 \text{ sec.} \\ \Delta x &= 300.000 \text{ m.} \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda} = 3.1416 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1}. \end{aligned}$$

Noemen we de voortplantingssnelheden, die we met de expliciete vergelijking (13) en de impliciete vergelijking (17) berekenen, respectievelijk C_{expl} en C_{impl} dan volgt:

$$\begin{aligned} C_{\text{expl}} &= 8.60 \text{ m/sec.} \\ C_{\text{impl}} &= 8.56 \text{ m/sec.} \end{aligned}$$

Beide methoden geven dus ongeveer dezelfde uitkomst, maar beduidend langzamer dan de echte snelheid $u_0 = 10$ m/sec. We zullen zo dus de aankomst van het lage drukgebied boven ons land te laat voorspellen tengevolge van de afbreekfout, een euvel waaraan inderdaad veel wiskundige weermodellen lijden.

We zullen nu proberen uit te zoeken hoe de afbreekfout afhangt van onze keuze van Δt en Δx . Daartoe nemen we eerst eens aan dat $\Delta x = 0$ en dat de afbreekfout alléén wordt veroorzaakt door de eindige waarde van Δt . Doen we dat, dan worden vergelijkingen (13) en (17) eenvoudiger:

$$\begin{aligned} C_{\text{expl}} &= \frac{1}{k \cdot \Delta t} \text{bg sin}(k \cdot u_0 \cdot \Delta t), \\ C_{\text{impl}} &= \frac{1}{k \cdot \Delta t} \text{bgtg}(k \cdot u_0 \cdot \Delta t). \end{aligned}$$

Voor verschillende waarden van Δt berekenen we hieruit de volgende waarden voor de voortplantingssnelheid:

Δt (sec)	C_{expl} (m/sec)	C_{impl} (m/sec)
0	10	10
1800	10.005	9.989
3600	10.021	9.958
5400	10.049	9.906
7200	10.087	9.835
10.800	10.203	9.641

Uit deze tabel vallen twee dingen op. In de eerste plaats zijn de afbreekfouten nu heel klein en zelfs bij een tijdstap van 3 uur (10.800 sec) liggen de berekende snelheden nog dichtbij de echte snelheid van 10 m/sec. In de

Stel we hebben een model met een roosterafstand van $\Delta x = 300$ km. Dit is een gebruikelijke afstand in hedendaagse modellen, dan volgt met $u_0 = 300$ m/sec

$$\Delta t \leq \frac{300.000}{300} \text{ sec} = 1000 \text{ sec} \simeq 15 \text{ min} .$$

We mogen dus in ons model geen tijdstapjes langer dan 15 minuten nemen. Dat is erg kort als men bedenkt, dat in een kwartier de meteorologische situatie vrijwel niet verandert. Dit komt omdat het criterium in feite wordt gedictieerd door golfverschijnselen waarin we niet zijn geïnteresseerd. Dit is geen bevredigende situatie waaraan we op de volgende manieren kunnen proberen te ontkomen: óf we veranderen de vergelijkingen zo dat er geen zwaartekrachtgolven meer in voorkomen (hierop komen we in de volgende paragraaf terug) óf we proberen een andere numerieke methode te vinden die niet onderhevig is aan het CFL-criterium. En zo'n methode is er. We benaderen daartoe de ruimtelijke afgeleide op een veel ingewikkelder manier.

$$(15) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{m,n} \simeq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{m+1,n} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{m-1,n} \right];$$

dat wil zeggen: we schrijven de ruimtelijke afgeleide op tijdstip n als een gemiddelde van de afgeleiden op de omringende tijdstippen $m+1$ en $m-1$ en vinden dan:

$$(16) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{m,n} \simeq \frac{u_{m+1,n+1} - u_{m+1,n-1} + u_{m-1,n+1} - u_{m-1,n-1}}{4\Delta t} .$$

Dit lijkt vreemd omdat we de waarden van u op het toekomstige tijdstip $m+1$ bekend veronderstellen, terwijl we die juist willen berekenen. Om deze reden heet deze methode 'impliciet', in tegenstelling, tot de expliciete methode, die we hierboven hebben behandeld. We laten het graag aan de lezer over om aan te tonen dat het probleem toch oplosbaar is en dat we in plaats van vergelijking (13) krijgen:

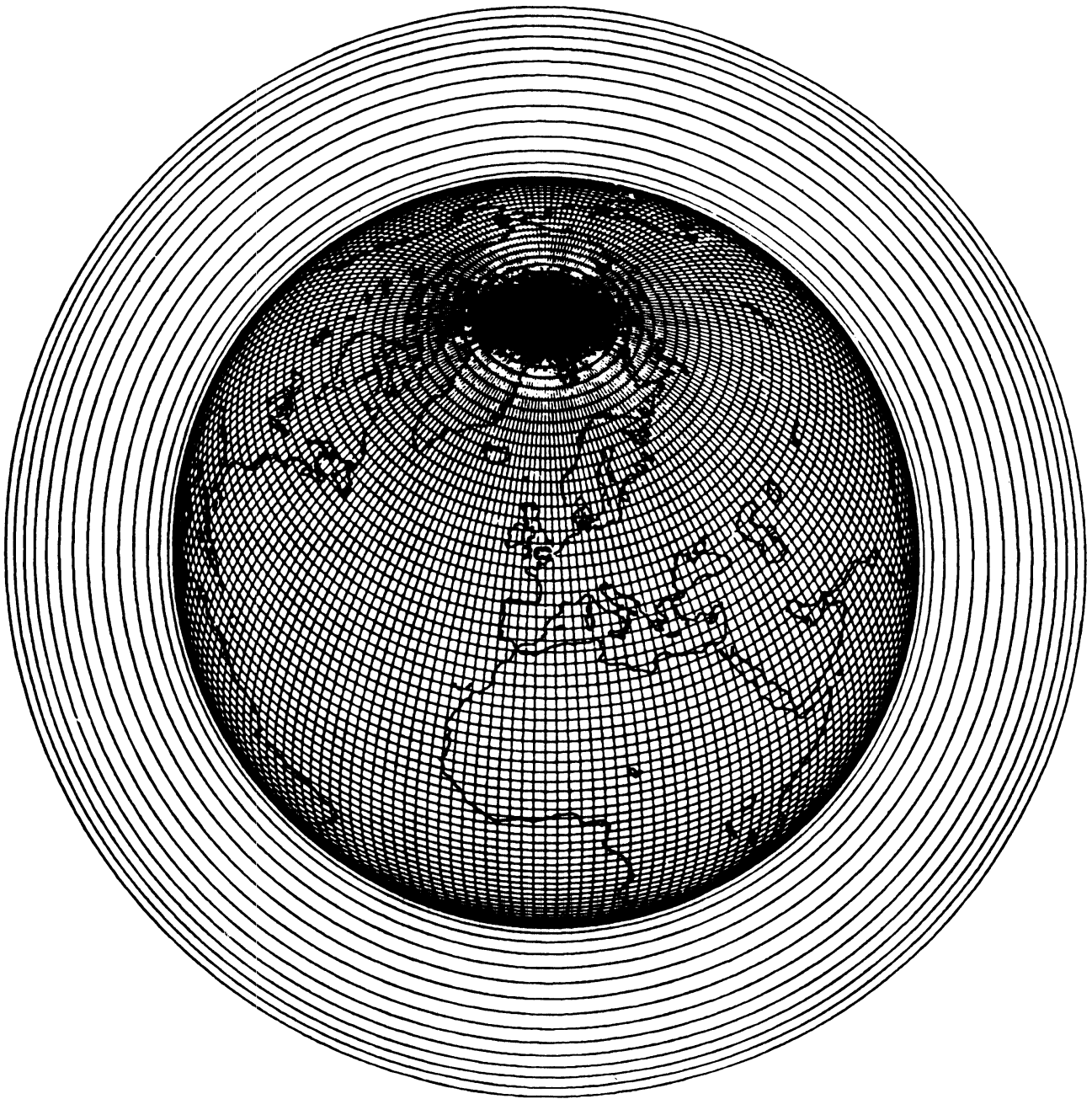
$$(17) \quad c = \frac{1}{k\Delta t} \operatorname{bgtg} \left[u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x) \right].$$

Ook hier is dus de voortplantingssnelheid ten gevolge van de numerieke benadering veranderd, maar omdat het argument van *bgtg* alle waarden mag hebben, is de oplossingsmethode niet meer aan het CFL-criterium onderhevig.

De fout in de berekening van de voortplantingssnelheid ten gevolge van de differentie-benaderingen (9) en (16) heet: *afbrekfout*. In ons voorbeeld wordt de afbrekfout gedeeltelijk veroorzaakt door de eindige tijdstap Δt en gedeeltelijk door de eindige roosterpuntafstand Δx . Om enig gevoel te krijgen voor de grootte van deze fout, zullen we een voorbeeld uitwerken.

We bekijken een golfvormige verstoring die voldoet aan vergelijking (11). We veronderstellen dat deze verstoring een golflengte heeft van $\lambda = 2000$ km en dat hij zich in oostelijke richting voortplant met een snelheid $u_0 = 10$ m/sec. Meteorologisch moeten we dan denken aan een lage drukgebied gevolgd door een rug van hoge luchtdruk, elk met een diameter van zo'n 1000 km, die zich met deze snelheid over de Atlantische Oceaan in onze richting bewegen. We proberen nu de voortplantingssnelheid van dit systeem numeriek te berekenen en we gebruiken daartoe vergelijkingen (13) en (17). Laten

scheidingsvlakken van de lagen worden in beide horizontale richtingen roosterpunten vastgelegd, zodat een drie-dimensionaal netwerk van roosterpunten ontstaat met behulp waarvan, juist als in het hierboven besproken één-dimensionale geval, ruimtelijke afgeleiden berekend kunnen worden. En tenslotte wordt weer een 'rooster' van tijdstapjes vastgelegd waarlangs de berekening in de tijd kan voortgaan. Afbeelding 4 laat het netwerk van roosterpunten en de verticale verdeling in lagen zien van het model van het Europese Centrum. De verticale afstanden tussen de vlakken is naar verhouding



Afb. 4.

Het netwerk van roosterpunten op de aardbol van het ECMWF-model. De concentrische cirkels om de aardbol laten de verdeling van de atmosfeer in 15 lagen zien. De onderste laag is zó dun dat hij op deze afbeelding niet te zien is. De bovenste laag ligt op ongeveer 25 km hoogte (~ 25 mbar). De verticale en horizontale schaal van deze afbeelding verschillen uiteraard sterk.

tweede plaats zien we dat de expliciete benadering (vergelijking (9)) een iets te hoge snelheid geeft, terwijl de impliciete benadering (vergelijking (16)) een iets te lage snelheid oplevert. Maar beide benaderingen geven goede resultaten.

Kijken we nu eens naar de afbreekfout, ten gevolge van de eindige roosterpuntafstand Δx . We veronderstellen nu dat $\Delta t = 0$, zodat zowel vergelijking (13) als vergelijking (17) vereenvoudigen tot¹

$$c = u_0 \frac{\sin(k\Delta x)}{k\Delta x}.$$

Voor verschillende waarden van de roosterpuntafstand Δx krijgen we nu:

Δx (km)	C (m/sec)
0	10
100	9.84
200	9.35
300	8.58
400	7.57
500	6.37

Onmiddellijk valt op, dat de afbreekfout ten gevolge van de eindige Δx , veel groter is dan die tengevolge van de eindige tijdstap Δt . Willen we de voortplantingssnelheid van een golf van 2000 km nog redelijk beschrijven, dan mogen we eigenlijk geen grotere roosterpuntafstand dan $\Delta x = 100$ km nemen.

We kunnen uit dit simpele rekenvoorbeeld dus de volgende conclusies trekken:

- de tijd-afbreekfout is klein vergeleken met de ruimtelijke afbreekfout;
- zowel de impliciete als de expliciete benadering geeft goede resultaten;
- de expliciete methode berekent een iets te hoge, de impliciete een iets te lage voortplantingssnelheid.

Het leuke van dit buitengewoon simpele voorbeeld is, dat het leidt tot conclusies die stuk voor stuk ook voor de ingewikkelde modellen gelden. Bij de invoering van nieuwe numerieke methoden, is het dan ook steeds heel zinvol eerst een simpel voorbeeld en model uit te werken, alvorens de nieuwe methode in een ingewikkeld model te proberen.

We hebben gezien hoe de homogene niet-lineaire partiële differentiaal-vergelijking (8) numeriek kan worden opgelost. De methode van oplossing van het volledige stelsel vergelijkingen (2) t/m (7) is in wezen precies hetzelfde. In verticale richting wordt de atmosfeer in een aantal lagen verdeeld. Het aantal varieert van model tot model. Het operationele KNMI-model heeft vier lagen, terwijl de grootste klimaatmodellen wel 40 lagen hebben. Op de

¹ Wie dat niet direct inziet, moet bedenken dat $b \sin a \rightarrow a$ voor $a \rightarrow 0$, zodat voor $\Delta t \rightarrow 0$ geldt:

$$b \sin \left[u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin k \Delta x \right] \simeq u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k \Delta x)$$

hetzelfde geldt voor $b \sin a$.

rotatie om de verticale as (de vorticeit ζ) van ieder pakketje lucht behouden blijft:

$$\frac{d}{dt} \zeta = 0.$$

Deze verbazend simpele vergelijking blijkt het grootschalig gedrag van de atmosfeer op zo'n 5 km hoogte en op middelbare breedte vrij goed te beschrijven voor een periode van 1 à $1\frac{1}{2}$ dag. Dit *barotrope* model heeft echter een groot nadeel: het gedrag van bestaande hoge en lage drukgebieden beschrijft het, maar de veronderstelling dat de atmosfeer uit één laag van uniforme dichtheid bestaat, laat geen vorming van nieuwe depressies toe. Niettemin blijft de eerste succesvolle voorspelling van Charney een zeer fraaie prestatie en een hoogtepunt in de meteorologie.

Naarmate de computers sneller werden, konden de modellen ingewikkelder worden en hoefden minder vereenvoudigingen te worden aangebracht. Het KNMI beschikt thans over een model, waaruit de zwaartekrachtsgolven door de geostrofische veronderstelling zijn weggefilterd, maar waarin de atmosfeer wel uit vier onderling samenhangende lagen is opgebouwd. Dit model, dat door Heijboer en zijn medewerkers in de jaren zeventig is opgebouwd, staat wel toe dat er nieuwe depressies ontstaan: het is een zogenaamd *baroklien* model. Het voorspelt het gedrag van de atmosfeer op het Noordelijke Halfrond tot 36 uur vooruit en wordt op het KNMI gebruikt bij de operationele weersverwachting (Heijboer, 1977).

Wil men met succes voorspellingen doen van drie dagen en langer vooruit, dan moet het aantal benaderingen beperkt blijven tot het absolute minimum. We moeten terug naar de oorspronkelijke vergelijkingen van de vorige paragraaf, in het vakjargon de 'primitieve vergelijkingen' genoemd. Moderne computers kunnen dat aan en de modellen van de grote meteorologische centra zijn er op gebaseerd. Groot probleem blijft dan nog de formulering van de drijvende krachten F_x , F_y en Q . Hieraan zullen we in de volgende paragraaf enige aandacht besteden.

3.4. Parametrisatie van fysische processen

Het stelsel van primitieve vergelijkingen is gesloten, en dus oplosbaar alleen dan, als we er in slagen de grootheden F_x , F_y en Q uit te drukken (te 'parametriseren') in de zes afhankelijke variabelen u , v , w , p , ρ en T . Deze drie grootheden vertegenwoordigen een scala van processen. Er zitten termen in die tot nu toe verwaarloosde processen beschrijven, zoals de absorptie van straling door de atmosfeer maar ook termen die het effect beschrijven van processen die werken op kleinere schaal dan ons rekenrooster en die dus niet kunnen worden opgelost door het model. Hun totale effect op de grootschalige processen in de atmosfeer kan niettemin aanzienlijk zijn, een uiting van het niet-lineaire karakter van de atmosfeer. Voorbeelden hiervan: kleinschalige turbulentie en wrijving nabij het aardoppervlak, verwarming door condensatieprocessen in grote verzamelingen cumulus-wolken en de interactie van zulke wolken met de stralingshuishouding.

Voor een succesvolle weersvoorspelling op langere termijn is een goede *parametrisatie* van deze processen in termen van de modelvariabelen van essentieel belang. Het vereist groot fysisch inzicht, mede gebaseerd op grote hoeveelheden atmosferisch waarnemingsmateriaal.

veel groter getekend, dan de horizontale afstand van de roosterpunten. In werkelijkheid is de verticale afstand zo'n honderd maal kleiner dan de horizontale.

Naast talrijke varianten op de hier besproken roosterpuntmethoden, bestaan er nog twee wezenlijk andere methoden om de modelvergelijkingen op te lossen: de spectrale en de eindige-elementen methoden. Ook combinaties van deze methoden worden aangetroffen. Een bespreking valt buiten het bestek van dit artikel en we verwijzen de geïnteresseerde lezer naar de vakliteratuur, genoemd in de literatuurlijst.

3.3. Vereenvoudiging van de vergelijkingen

Modellenbouw is de kunst van de vereenvoudiging. Zelfs voor de huidige snelle computers, is de oplossing van het volledige stelsel vergelijkingen op een netwerk van roosterpunten dat met een onderlinge afstand van 100 km de gehele aarde omspant, en dat ook in verticale richting voldoende gedetailleerd is, een gigantische taak. In de jaren vijftig toen de eerste modellen werden gemaakt, was het eenvoudig onmogelijk. De snelste nu beschikbare computer rekt ongeveer 20 minuten over een 24-uursvoorspelling met het meest geavanceerde operationele model van dit moment: het model van het Europese Centrum voor Weersverwachting op Middellange Termijn te Reading in Engeland. Maar de CRAY-1 is zo'n 10.000 maal sneller dan de computers die in het begin van de jaren vijftig beschikbaar waren! De modellenbouwers van toen waren eenvoudigweg gedwongen hun toevlucht te nemen tot vereenvoudiging op grond van hun inzicht in de werking van de atmosfeer en op grond van zorgvuldige afweging en onderlinge vergelijking van alle termen in de vergelijkingen. En ze deden dit op meesterlijke wijze!

De eerste vereenvoudiging hebben we in de vorige paragraaf al aangebracht. Door aan te nemen dat de atmosfeer steeds in *hydrostatisch* evenwicht verkeert, zijn we de meteorologisch niet-interessante geluidsgolven al kwijt geraakt.

Maar veel verdergaande vereenvoudigingen zijn mogelijk. Zo kan men laten zien dat de drijvende krachten F_x , F_y en Q pas na enkele dagen van belang zijn. Op kortere termijn gedraagt de atmosfeer zich alsof hij aan z'n lot wordt overgelaten!

Ook blijkt dat de Coriolis-krachten en de drukgradiëntkracht elkaar goed in evenwicht houden, ze zijn in *geostrofisch* evenwicht, zegt de meteoroloog. (Althans buiten de tropen, want op de evenaar is $f = 0$ in vergelijking (2) en (3) en is er geen Coriolis-kracht!) Dat wil zeggen dat winden als wervels om centra van hoge en lage druk heen waaien, een feit dat iedereen kent die wel eens een weerkaart heeft gezien.

Wiskundig uitgedrukt: de *rotatie* van het windveld is veel groter dan de *divergentie*. Voor zwaartekrachtgolven geldt dit niet en daarvan kan listig gebruik gemaakt worden. De vergelijkingen worden zó gewijzigd dat wind en drukveld steeds in geostrofisch evenwicht zijn. Dit zijn de gefilterde vergelijkingen: de zwaartekrachtgolven zijn er uitgefilterd.

Een nog veel verder gaande vereenvoudiging volgt uit de waarneming dat er een grote samenhang tussen druk- en temperatuurvelden bestaat. Dat wil zeggen de atmosfeer gedraagt zich in goede benadering als een dunne laag vloeistof met een uniforme dichtheid, die alleen horizontale bewegingen toestaat. Op deze wijze slaagde Charney er in het gedrag van de atmosfeer te benaderen met behulp van een differentiaalvergelijking, die aangeeft dat de

moet de begintoestand bekend zijn en deze moet uiteraard gebaseerd zijn op waarnemingen. Een voldoende dicht wereldwijd netwerk van stations dat op operationele basis waarnemingen verricht, óók van de hogere luchtlagen, is pas in en na de 2de Wereldoorlog tot stand gekomen. Naast een uitgebreid netwerk van grondwaarnemingen en van bovenluchtwaarnemingen met behulp van zogenaamde *radiosondes* die met behulp van ballonnen, tot op grote hoogte worden opgelaten, beschikken we thans ook nog over metingen vanaf schepen en vanuit satellieten en vliegtuigen. Toch zijn er ook nog grote gebieden op aarde, met name op het Zuidelijke Halfrond, maar ook wel boven de oceanen van het Noordelijk Halfrond, waar vrijwel geen waarnemingen worden gedaan. Het waarnemingsnetwerk is daardoor bijzonder inhomogeen. Verbetering van deze situatie is een van de grote taken waarmee de internationale meteorologie de komende decennia wordt geconfronteerd.

Wat het model nodig heeft zijn de waarden van de modelvariabelen op het rekenrooster van het model, zowel in horizontale als in verticale richting. Het proces met behulp waarvan deze waarden uit de waarnemingen worden afgeleid heet *analyse*. We zullen de analyse niet in detail beschrijven maar volstaan met de opmerking, dat men er thans wonderwel in slaagt goede analyses te leveren dankzij allerlei verfijnde numerieke en statistische technieken.

Zoals hierboven al werd opgemerkt, zijn in de atmosfeer wind- en drukveld in goede benadering in geostrofisch evenwicht. Ook de analyses van wind- en drukveld moeten in geostrofisch evenwicht zijn, anders ontstaan er sterke zwaartekrachtgolven in het model. Dit probleem bestaat vanzelfsprekend niet in gefilterde modellen, omdat daarin geen zwaartekrachtgolven kunnen optreden, maar wel in modellen gebaseerd op de primitieve vergelijkingen. Daarom vereisen dergelijke modellen een extra stap: de *initialisatie*, waarbij druk en windveld met elkaar in evenwicht worden gebracht. Ook dit is een wiskundig boeiend onderwerp, maar het bestek van dit artikel staat niet toe dat we hier nader op ingaan.

3.6. Technische aspecten

Voor een succesvolle voorspelling van de atmosfeer, hebben we niet alleen een numeriek model nodig, maar ook moeten we beschikken over technische apparatuur van ongekende complexiteit. We moeten beschikken over een *telecommunicatiesysteem* voor de inzameling van de waarnemingen en de verspreiding van de voorspellingen naar onze gebruikers en we moeten een snelle computer voor onze berekeningen hebben.

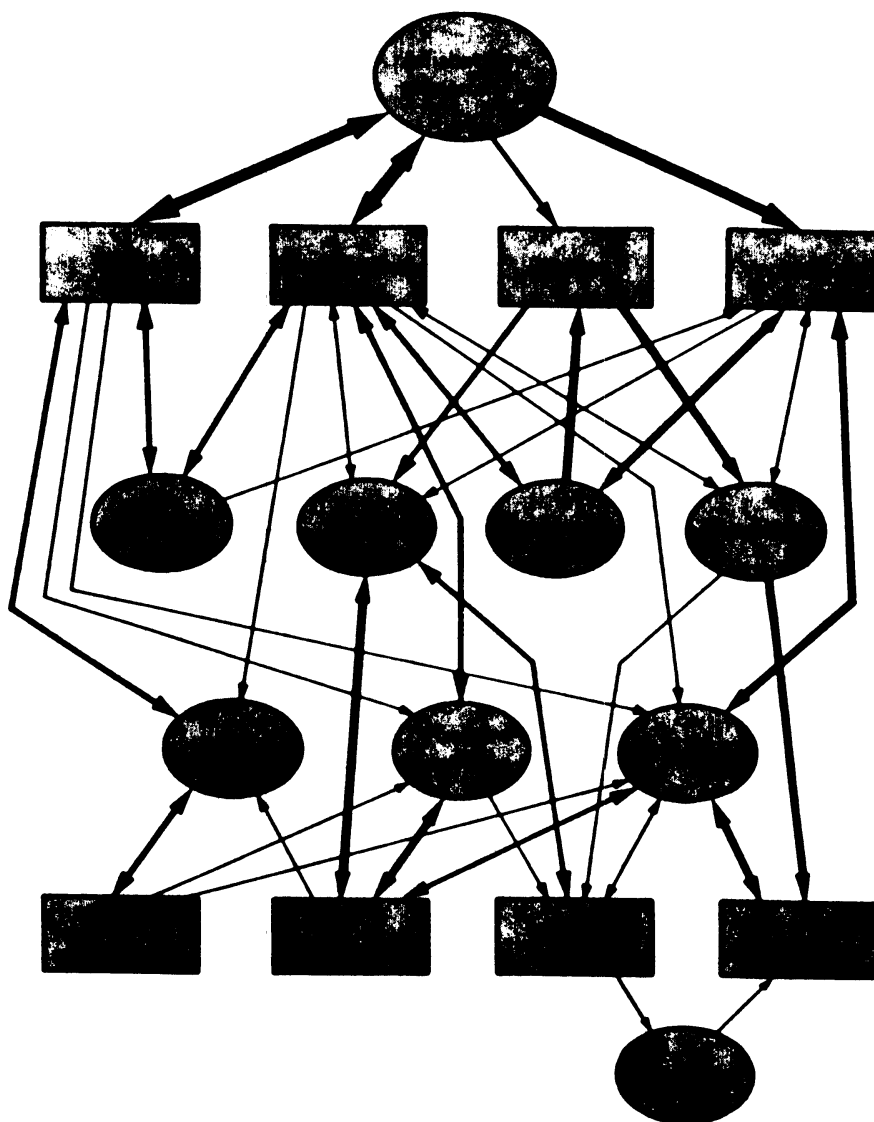
De inzameling van de waarnemingen van een wereldwijd net van meetstations en de verspreiding van deze waarnemingen naar de meteorologische centra binnen enkele uren na waarnemingstijd, is een logistiek probleem van de hoogste orde. Dat een dergelijk netwerk thans bestaat en werkt moet als een monument van internationale samenwerking beschouwd worden. Het systeem heet: *GTS (Global Telecommunication System)* en is een onderdeel van de *World Weather Watch* dat wordt beheerd door de WMO (Wereld Meteorologische Organisatie) een onderdeel van de Verenigde Naties.

In een vorige paragraaf zijn al enige woorden gewijd aan de fantastische ontwikkeling van de snelheid van computers vanaf 1950 tot heden. Dit is in afbeelding 6 in een grafiek uitgezet. De snelheid van de computers (in MIPS)

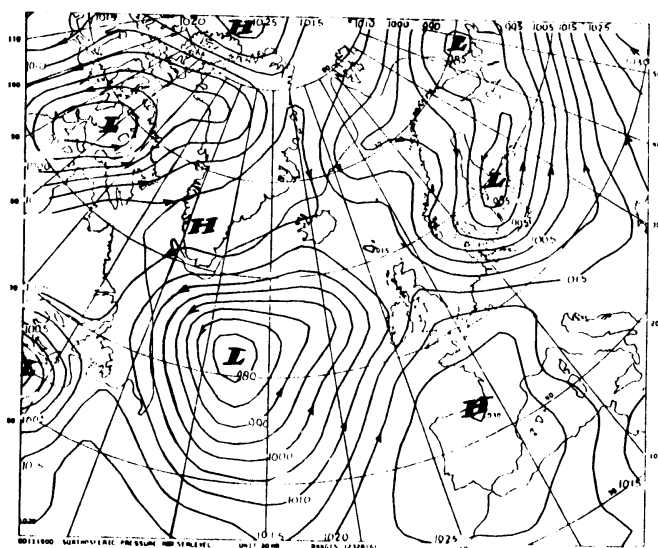
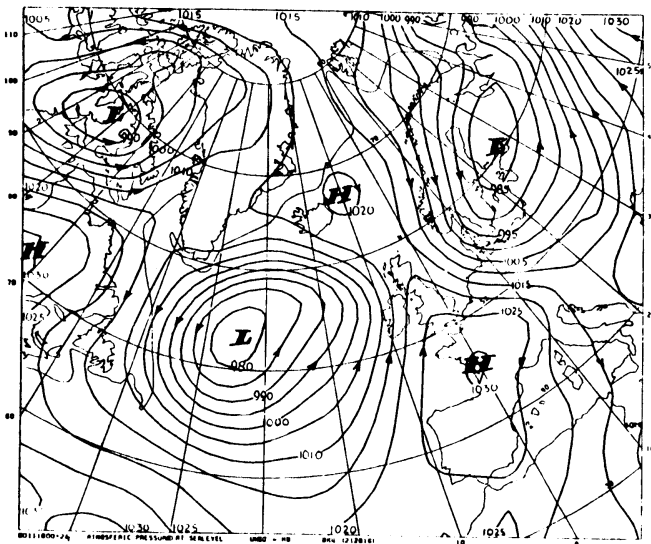
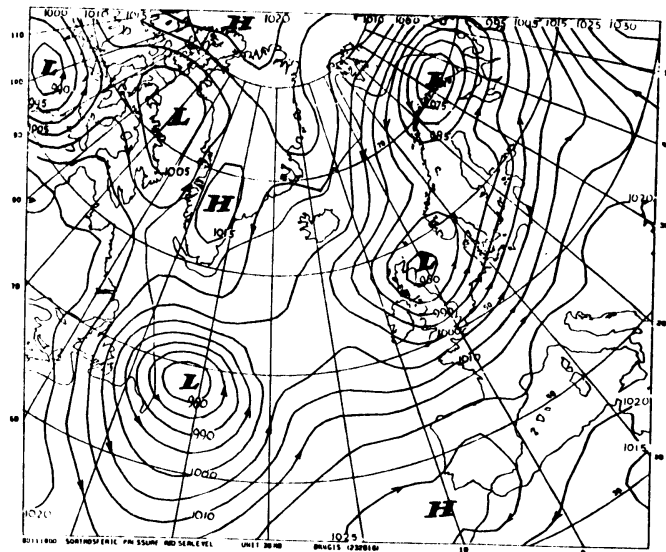
Afbeelding 5 toont schematisch alle processen die in het model van het al genoemde Europese Centrum zijn geparametriseerd. In rechthoekige vakjes staan de variabelen van het model en in elliptische vakjes de werkzame processen. Pijlen geven aan op welke grootheden de processen inwerken, waarbij de dikte van de pijl ruwweg aangeeft, hoe belangrijk die interactie is. Onder 'adiabatische processen' verstaan we die processen, die zouden optreden indien de grootheden F_x , F_y en Q in de vergelijkingen (2) t/m (7) gelijk aan nul zouden zijn, dat wil zeggen de processen die zich zouden afspelen in een geïdealiseerde volledig droge atmosfeer, die geheel van de buitenwereld geïsoleerd zou zijn. Afbeelding 5 geeft een goede indruk van de complexiteit van het model en laat zien welke fysische problemen er komen kijken bij de constructie van zo'n model.

3.5. Waarnemingen, analyse en initialisatie

De oplossing van het stelsel vergelijkingen dat de atmosfeer beschrijft is, zoals we hebben gezien, een beginwaarde probleem. Dat wil zeggen om de waarden van de model-variabelen in de toekomst uit te kunnen rekenen,



Afb. 5.
Schematische weergave van de natuurkundige processen, die een rol spelen in het model van het Europese Centrum. De dikte van de pijlen is een maat voor de belangrijkheid van het proces.



Afb. 7.
 Een 24 uren voorspelling van de luchtdrukverdeling door het operationele KNMI-model. De bovenste kaart geeft de uitgangssituatie op 18 november 1980. De middelste laat de voorspelling van het model zien voor 24 uur later. De onderste kaart toont wat er in werkelijkheid gebeurd is. Voor een verdere bespreking zie de tekst.

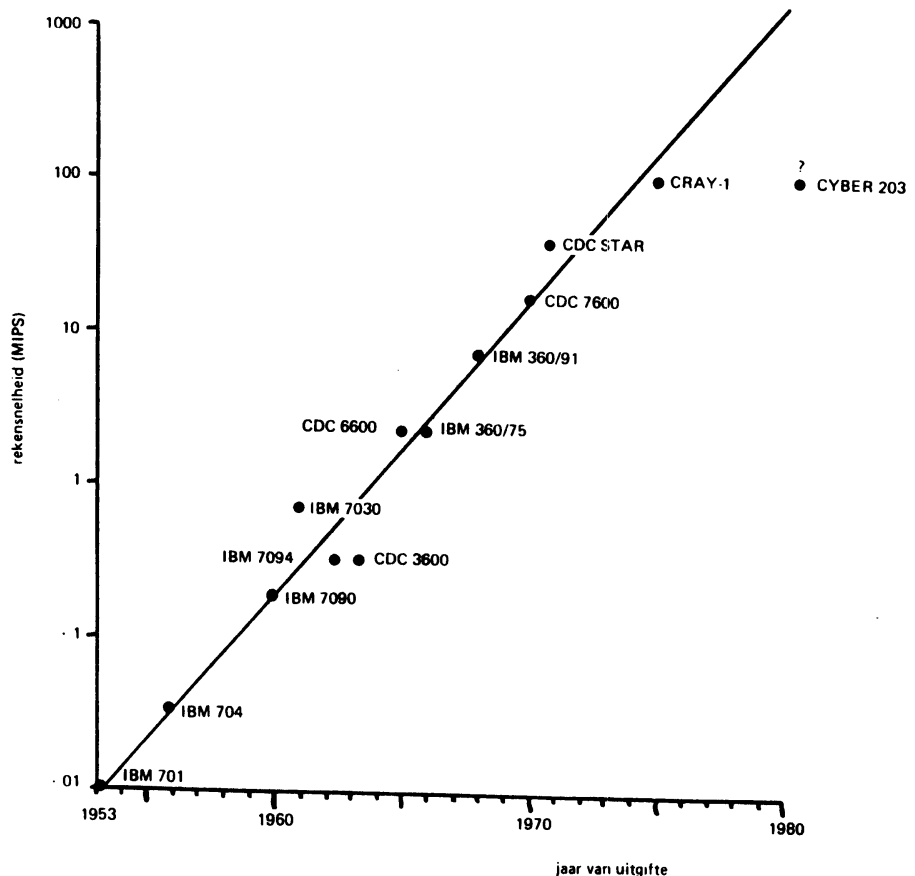
is uitgezet tegen het jaar waarin ze beschikbaar kwamen. *Let wel*: de snelheid is logaritmisch uitgezet! De punten liggen vrij goed op een rechte lijn met een stijfheid van een factor 10 per $5\frac{1}{2}$ jaar. Een exponentiële ontwikkeling dus, waarbij de computers elke $5\frac{1}{2}$ jaar tien maal sneller worden!

Uit de afbeelding valt op te maken dat er de laatste vijf jaar wellicht sprake is van een verzadiging van deze ontwikkeling. Welke snelheid uiteindelijk bereikbaar is valt nog niet te zeggen. Maar dat het einde nog niet bereikt is, is wel zeker. Bovendien worden de computers relatief goedkoper. Er valt dus op dit gebied nog wel wat te verwachten waardoor onze modellen nog complexer kunnen worden.

4. Resultaten en toepassingen van wiskundige modellen van de atmosfeer

4.1. Wat leveren de modellen?

Wat het model in feite voorspelt, is de waarde van de modelvariabelen op de roosterpunten van het model. Om deze voorspellingen toepasbaar te maken voor operationeel gebruik, worden ze in het algemeen gepresenteerd in de vorm van weerkaarten, een vorm waaraan meteorologen gewend zijn. Afbeelding 7 laat een geslaagde voorspelling zien van het luchtdrukpatroon boven het westelijk deel van de Atlantische Oceaan en West Europa. De *bovenste* kaart is de uitgangssituatie: de analyse van 18 november 1980, 00 uur GMT. Er ligt een depressie boven Schotland die voor een stevige zuidwester

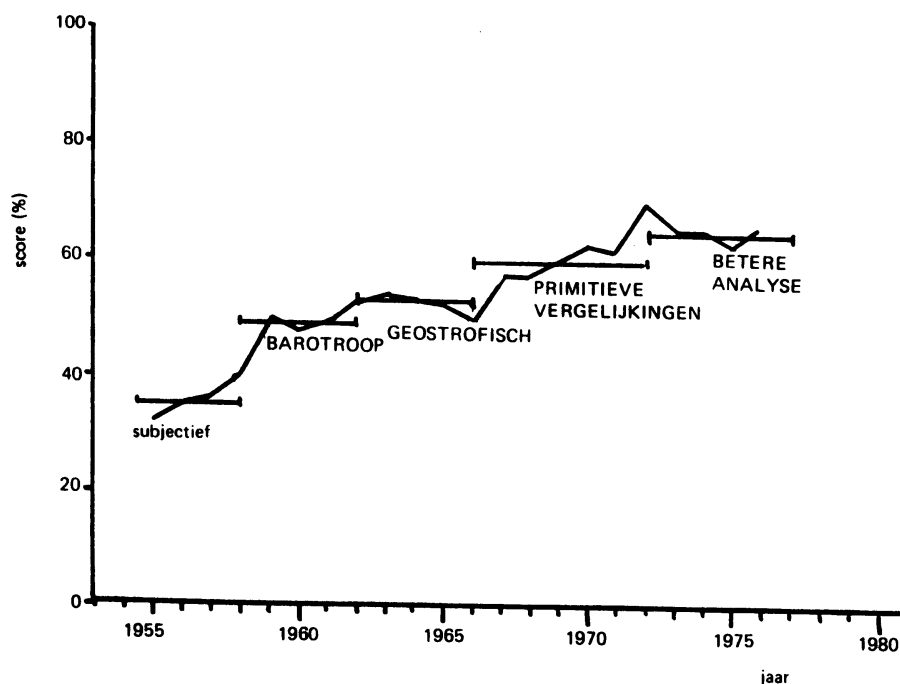


Afb. 6. Historisch overzicht van de ontwikkeling van de rekensnelheid van computers. De rekensnelheid (in miljoenen instructies per seconde, MIPS) staat logaritmisch uitgezet tegen het jaar van uitgifte. De MIPS is niet nauwkeurig gedefinieerd en de hier gegeven getallen bezitten dan ook een onzekerheid van een factor twee naar beide zijden.

drag van het front en daaruit volgt dan de voorspelling: morgenochtend vanuit het westen toenemende bewolking gevolgd door regen.

Meteorologen kunnen dit soort voorspellingen tot 24 of hoogstens 36 uur vooruit leveren. Maar ze kunnen het voor die periode in het algemeen dan ook beter dan onze modellen. Dit komt omdat ze, in tegenstelling tot de huidige modellen, gebruik kunnen maken van de 'laatste' kleinschalige informatie: een net binnengekomen *scheepswaarneming* die de positie van het front nauwkeurig vastlegt, of een serie *satellietfoto's* die een snelle toename van de bewolking laat zien.

Voor voorspelperioden langer dan 36 uur moet de meteoroloog het echter afleggen. Zoals we hierboven al in wiskundige termen hebben gezien, gedraagt de atmosfeer zich niet-lineair. Dat wil zeggen kleinschalige verschijnselen oefenen invloed uit op grootschalige en omgekeerd. Onze menselijke hersenen zijn niet erg goed in 'niet-lineair denken'. Hoewel we er enige greep op kunnen krijgen door jarenlange ervaring, zullen we essentieel niet-lineaire processen zoals het ontstaan van een nieuwe depressie gemakkelijk over het hoofd zien. Dergelijke processen worden vooral belangrijk voor langere voorspelperioden dan 24 uur, en daarom zullen modellen voor die termijn in het algemeen betere voorspellingen van het stromingspatroon leveren. In het American National Meteorological Center heeft men de langste ervaring met de toepassing van operationele wiskundige modellen. Al in 1958 werd het eerste model in gebruik genomen, dat sindsdien steeds verder is verbeterd of uitgebreid. Afbeelding 8 laat zien hoe de kwaliteitsverbetering van de voorspelling van het 500 mbar stromingspatroon gelijke tred met deze verbetering heeft gehouden. Een perfecte voorspelling zou een score 100 halen, terwijl een waardeloze een score 0 haalt. De score, hoewel lang niet perfect, is in de loop van de afgelopen 25 jaren bijna verdubbeld!



47b x

De waargemiddelde prestatie-score van de 48-uurs voorspelling van de 500 mbar circulatie boven Noord Amerika. De voorspellingen werden gemaakt door het American National Meteorological Center, vóór 1958 met de hand, daarna door de aangegeven modellen op de computer. Een volmaakte voorspelling heeft een score van 100%, een waardeloze van 0%. De score is over de afgelopen 25 jaar bijna twee maal zo hoog geworden.

wind boven Nederland zorgt. Bovendien ligt er een nieuwe depressie boven de oceaan ten zuiden van Groenland. Op basis van deze analyse berekende het operationele KNMI-model de drukverdeling voor 24 uur later: 19 november, 00 uur. Het model voorspelt aanzienlijke veranderingen: de depressie boven Schotland schuift op naar het noordoosten; tegelijk neemt het hoge drukgebied toe, en daartussen voorspelt het model een noordwesten wind boven Nederland. Ook de oceaan-depressie beweegt zich in onze richting en hoewel deze niet uitdiept, strekt z'n invloed zich verder in onze richting uit. De *onderste* kaart laat zien wat er in werkelijkheid is gebeurd. De voorspelde ontwikkelingen hebben inderdaad plaatsgevonden; een geslaagde voorspelling die de meteoroloog met voordeel heeft kunnen benutten bij z'n weersverwachting voor 19 november.

Naast luchtdrukpatronen leveren vooral de grote modellen nog veel meer: stromingspatronen op een groot aantal drukvlakken, temperaturen, luchtvochtigheid maar ook grootheden die niet eens waargenomen kunnen worden, zoals verticale windsnelheden. Daarnaast levert de parametrisatie van fysische processen (zie paragraaf 3.4.) talrijke bijproducten zoals verdeling van de bewolking, neerslag, zowel regen als sneeuw of zelfs een exotische grootheid als bodemvochtigheid. Vele van deze voorspelproducten zijn alleen intern in het model van belang en worden nooit operationeel toegepast.

Al met al hebben we nu een voorspelling van stromingspatronen, maar nog steeds geen weersverwachting. Bovendien konden meteorologen al weersverwachtingen leveren, vóórdat er van enig wiskundig model sprake was. Wat zijn we dan met zulke modellen opgeschoten? Daarover gaan de volgende paragrafen.

4.2. *Wat doen de modellen beter en wat doen ze slechter?*

Om hierin enig inzicht te krijgen, moeten we een paar woorden wijden aan de klassieke wijze van weersvoorspelling: de *synoptische* methode. 'Synoptisch' betekent zoveel als: 'gelijktijdig waarnemen'. Op vele plaatsen in de wereld worden volgens een strak, internationaal overeengekomen tijdschema, gelijktijdig meteorologische waarnemingen gedaan, zowel van het weer aan de grond, als van de toestand van de bovenlucht. Al deze gegevens, die het meteorologische instituut via telecommunicatielijnen bereiken, worden in kaart gebracht en vervolgens 'geanalyseerd'. Dat wil zeggen belangrijke verschijnselen zoals fronten en neerslaggebieden worden gelocaliseerd en isobaren of isohypsen worden getrokken. Uit een reeks van dergelijke weerkaarten, gemaakt met tussenpozen van enkele uren, krijgt de meteoroloog een beeld van de ontwikkelingen in de atmosfeer: de verplaatsingssnelheid van een front, het uitdiepen of opvullen van een naderende depressie, enz. Door middel van zijn fysisch inzicht in de werking van de atmosfeer en door extrapolatie, probeert de meteoroloog zich dan voor te stellen hoe de weerkaart er over 12 of 24 uur uit zal zien en probeert dan de toekomstige ontwikkeling van het stromingspatroon te vertalen in een voorspelling van de bijbehorende weersverschijnselen. Bijvoorbeeld: de meteoroloog ziet op een serie achtereenvolgende weerkaarten een warmtefront met zekere snelheid over de oceaan nabij komen. Uit scheepswaarnemingen ziet hij bovendien dat de intensiteit van de bijbehorende regenzone nog toeneemt. Hij weet echter uit ervaring dat bij het soort stromingspatronen waarvan hier sprake is, warmtefronten de neiging hebben te vertragen en in intensiteit af te zwakken als ze het continent bereiken. Onbewust 'weet' hij misschien door z'n jarenlange ervaring nog een heleboel meer over het gedrag van warmtefronten. Uit dit alles vormt hij zich een beeld van het toekomstig ge-

Stel nu dat we een ideaal waarnemingsnet hebben en een 'volmaakt' model met een roosterpuntafstand van 100 km. De kleinste schalen in het model zullen tengevolge van de verwaarlozing van verschijnselen kleiner dan 100 km, al gauw voorspelfouten gaan vertonen en wel na een tijd karakteristiek voor verschijnselen van 100 km (enkele uren). Deze fouten zullen langzamerhand gaan doordringen in de grotere schalen en na een aantal voorspeldagen of weken de hele voorspelling vergiftigd hebben. Verkleining van de roosterpuntafstand tot 10 km zal nauwelijks helpen, want nu zullen reeds na enkele minuten de eerste fouten in de kleine schalen merkbaar worden, om zich vervolgens naar de grotere schalen uit te breiden. Verkleining van de roosterpuntafstand met een factor 10 heeft dus de voorspelbaarheidstermijn van de grotere schalen hoogstens met enkele minuten tot een uur uitgebreid! Lorenz heeft dit alles theoretisch wiskundig uitgewerkt en kwam tot de conclusie dat de atmosfeer tot hoogstens 2 à 3 weken vooruit voorspelbaar is. Dit is een principiële grens waar we nooit overheen zullen komen door verbeteringen aan het model of waarnemingsnet. Dit is een buitengewoon boeiende consequentie van het niet-lineaire karakter van de atmosfeer. Het laat zien hoe een deterministisch systeem principieel beperkt kan zijn in z'n voorspelbaarheid.

Samenvattend kunnen we zeggen dat wiskundige modellen het mogelijk hebben gemaakt, weersvoorspellingen te maken voor twee tot vijf dagen vooruit. Voor kortere perioden doet de meteoroloog met zijn synoptische methode het nog altijd beter. Voor langere perioden zijn de kwaliteit van de modellen en de dichtheid van het waarnemingsnetwerk de beperkende factoren. Maar ook als we deze problemen weten op te lossen zullen we aanlopen tegen een principiële voorspelbaarheidsgrens van twee à drie weken.

In de volgende paragraaf zullen we enige aandacht schenken aan de toepassing van wiskundige modellen in onze eigen meteorologische dienst, het KNMI.

4.3. *Toepassing van wiskundige modellen op het KNMI*

Zoals we al in paragraaf 3.3. gezien hebben, beschikt het KNMI over een eigen gefilterd, vier lagen, baroklien model. De toepassing van dit model is echter niet zo zeer gelegen in de operationele weersvoorspelling, als wel in de voorspelling tot 24 uur vooruit van het windveld boven de Noordzee en een deel der Atlantische Oceaan ten behoeve van typisch Nederlandse belangen: de berekening van de wateropzet langs de Nederlandse kust en de golven op de Noordzee. Uitermate belangrijke toepassingen dus voor de veiligheid van westelijk Nederland en voor onze economie. Ook de wateropzet en het golfveld worden met behulp van wiskundige modellen berekend, die door respectievelijk Timmerman en Sanders werden ontwikkeld.

Daarnaast wordt voor de weersverwachting van twee en drie dagen vooruit, gebruik gemaakt van voorspelde stromingspatronen die ons vanuit Engeland en Amerika bereiken. Deze landen beschikken over geavanceerde modellen, waarvan de resultaten vrij voor andere landen toegankelijk zijn. In feite is weersverwachting op deze termijn pas mogelijk geworden door deze modellen, zoals we al in de vorige paragraaf gezien hebben.

Voor de opstelling van de weersverwachting vanuit het voorspelde stromingspatroon, maakt de meteoroloog gebruik van zijn synoptisch inzicht, daarbij gesteund door statistische informatie, die aangeeft wat voor weer

Zoals we al enkele malen hebben benadrukt, hebben we met de voorspelling van een stromingspatroon nog géén weersvoorspelling. Hier heeft de meteoroloog nog steeds een belangrijke taak. Hij zal de voorspelde stromingspatronen moeten vertalen in het bijbehorende weer. Dit is niet eenvoudig omdat allerlei meteorologische informatie, die hij bij de synoptische methode wel voorhanden heeft (bijvoorbeeld wolken en neerslagverdeling, mist, enz.), hem nu niet ten dienste staan of door het model slecht voorspeld wordt. Zo zijn modellen notoir slecht in het voorspellen van bewolking, terwijl bijvoorbeeld een verschijnsel als stralingsmist al helemaal niet aan bod komt. Gelukkig staan de meteoroloog echter weer andere hulpmiddelen ten dienste, zoals objectieve, statistische technieken, waaraan we in de volgende paragraaf enige woorden zullen wijden.

In principe kunnen we met wiskundige modellen voorspellingen leveren voor een willekeurig ver tijdstip in de toekomst. In de praktijk blijkt dat niet mogelijk en levert ook het meest geavanceerde model na 5 à 6 dagen geen bruikbare voorspelling meer. De oorzaak moet worden gezocht in onvolkomenheden in de modellen, maar ook, en misschien wel vooral, in fouten in de uitgangstoestand. We hebben al gezien dat het wereldwijde waarnemingsnetwerk erg *inhomogeen* is, en dat er grote gebieden zijn waar nauwelijks waarnemingen worden gedaan. Hier kunnen gemakkelijk fouten in de uitgangstoestand sluipen, die juist door het niet-lineaire karakter van de atmosfeer na enige tijd de voorspelling overal en op elke schaal zullen beïnvloeden. Bovendien is er dan nog de beperking van het numerieke rekenrooster. Verschijnselen op een schaal kleiner dan de onderlinge afstand van de roosterpunten, bijvoorbeeld een individuele bui, kunnen per definitie niet door het model worden beschreven. In werkelijkheid zullen individuele buien, alweer door het niet-lineaire karakter van de atmosfeer, hun invloed hebben op de ontwikkeling van depressies en daardoor weer op de allergrootste, planetaire golven. Dat wil zeggen zelfs al hadden we een perfect waarnemingsnetwerk, op den duur zal elk model falen, omdat verschijnselen met afmetingen onder een zekere grens niet kunnen worden beschreven.

Betekent dit nu dat we de atmosfeer willekeurig lang vooruit zouden kunnen voorspellen als ons waarnemingsnetwerk maar dicht en homogeen genoeg zou zijn en onze modellen maar voldoende verfijnd? Nee, dat is niet zo, want we lopen aan tegen een principiële voorspelbaarheidsgrens. Om in te zien hoe een deterministisch systeem als de atmosfeer toch een principiële eindige voorspelbaarheid kan hebben zijn twee overwegingen van belang:

- er is steeds een ondergrens aan de afmetingen van de verschijnselen die door de waarnemingen en het model kunnen worden beschreven. Deze grens kan in principe willekeurig klein gekozen worden, maar steeds is er blijft er zo'n ondergrens. Fouten ten gevolge van het verwaarlozen van kleinschaliger verschijnselen zullen na enige tijd in de voorspelling merkbaar worden. Deze tijdsduur hangt af van de tijdschaal waarop de verwaarloosde verschijnselen zich afspelen;
- naarmate de ruimtelijke afmeting van atmosferische verschijnselen kleiner wordt, neemt ook de tijdschaal af, waarop deze verschijnselen zich afspelen. Een kleine wervel die de gevallen blaadjes in de herfst doet opwaaien heeft een levensduur van enkele minuten, een bui bestaat uit enkele uren, een depressie blijft enkele dagen op de weerkaart zichtbaar, terwijl de lange planetaire golven hun identiteit weken tot maanden kunnen behouden.

in de atmosfeer te vergroten. En deze laatste verbeteringen zullen uiterst moeilijk blijken.

Verwacht mag worden, dat in de komende tien jaren analyse- en initialisatie-technieken zullen worden ontwikkeld, die beter gebruik maken van het bestaande waarnemingsnetwerk. Bovendien zal in toenemende mate gebruik worden gemaakt van informatie verkregen door middel van satellieten, zodat meer en meer gegevens beschikbaar zullen komen van tot nog toe 'lege' gebieden vooral op het Zuidelijk Halfrond.

Vergroting van het fysisch inzicht in de atmosfeer, zal een zeer moeizaam proces blijken, dat veel wetenschappelijk hoog-gekwalificeerde mankracht vereist. Voortgang zal dan ook langzaam zijn. Het model van het Europese Centrum blijkt systematische voorspelfouten te maken, vooral over West Europa, waar gemiddeld de luchtdruk te laag wordt voorspeld. Dit blijkt het gevolg te zijn van het feit dat lage drukgebieden, die ons gebied over de oceaan naderen, in het model niet snel genoeg opvullen. Het model gedraagt zich dus *systematisch* anders dan de werkelijkheid en dus begrijpen we het gedrag van de atmosfeer kennelijk niet goed. Dit is een voorbeeld van een mogelijkheid om door vergroting van inzicht in de toekomst betere voorspellingen te krijgen. De beschrijving van sommige processen is nog uiterst primitief. Een berucht voorbeeld is de beschrijving van bewolking in modellen, terwijl deze toch voor de hele stralings- en warmtehuishouding van de atmosfeer belangrijk zijn.

Met de verbetering van modellen en de uitvoering van statistische weervertalingstechnieken, zal de invloed van de meteoroloog op voorspellingen langer dan een dag vooruit afnemen. Deze zal zich dan kunnen concentreren op de korte termijnvoorspelling waar de menselijke factor vooralsnog van essentieel belang zal blijven.

Toch zullen wiskundige modellen wellicht ook een bijdrage kunnen leveren aan korte termijnweersvoorspellingen. Er wordt gewerkt aan de ontwikkeling van kleinschalige (zogenaamde *meso-schaal*-)modellen voor beperkte gebieden met een dicht waarnemingsnetwerk (bijvoorbeeld Nederland en directe omgeving). Dergelijke modellen die zich nu nog in een primitief stadium bevinden, stellen hoge eisen aan de analyse van de waarnemingen en aan de wijze waarop kleinschalige fysische processen worden geparаметrisceerd. Hier valt nog veel wetenschappelijk werk te verrichten.

Wiskundige modellen zijn nu niet meer weg te denken uit de operationele meteorologie. Ze hebben zich een *blijvende* en *belangrijke* plaats veroverd, een positie die ze in de komende decennia zonder twijfel nog zullen versterken. Hun constructie zal een uitdaging blijven voor meteorologen, fysici en mathematici en de interpretatie en toepassing van hun produkten zullen nog tot fraaie resultaten aanleiding geven.

5. Literatuur

- Charney, J.G., Fjörtoft, R. and Neumann, J. von, 1950, 'Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation', *Tellus* 2, 237-254.
 Courant, R., Friedrichs, K.O. and Lewy, H., 1928, 'Über die partiellen Differenzen-Gleichungen der Physik', *Mathematische Annalen* 100, 32-74.

er in het verleden is opgetreden bij soortgelijke stromingspatronen. Dit kan vrij eenvoudig door in het verleden te zoeken naar weerkaarten die lijken op het huidige stromingspatroon (*analogen*) en dan te kijken welk weer daarbij optrad. Het kan ook statistisch 'netter' door via lineaire regressie-technieken een verband te leggen, tussen bepaalde kenmerken van het stromingspatroon en bijbehorende weerselementen. Zo blijkt er een verband te bestaan tussen enerzijds de maximum temperatuur in De Bilt en anderzijds de hoogte van het 500 mbar vlak en de temperatuur van het 850 mbar vlak in en rond Nederland. Dit verband kan statistisch worden afgeleid uit de vele gegevens die we op het KNMI uit het verleden beschikbaar hebben. Nu worden de 500 mbar hoogte en 850 mbar temperatuur door de modellen voorspeld, zodat we deze relatie kunnen gebruiken om de bijbehorende maximum temperatuur te voorspellen. Hetzelfde kan met meer of minder succes worden gedaan voor vele andere weerselementen. Dit proces kan geheel worden geautomatiseerd en direct aan de wiskundige modellen worden toegevoegd, zodat er dan een echte weersverwachting tot stand kan komen, zonder enige menselijke tussenkomst. Hier en daar is men zelfs zo ver gegaan om de computer de woordelijke tekst van de verwachting te laten maken!

Ook op het KNMI worden dergelijke objectief-statistische methoden ontwikkeld en beproefd, maar de menselijke inbreng in de uiteindelijke verwachting wordt vooralsnog essentieel geacht.

Sinds kort worden dagelijks voorspellingen van het stromingspatroon tot zes dagen vooruit ontvangen van het Europese Centrum voor Weersverwachting op Middellange Termijn. Op het KNMI wordt thans onderzocht of en hoe deze voorspellingen kunnen worden vertaald in zinvolle en bruikbare weersverwachtingen op deze termijn. Ook hier worden subjectieve en objectief-statistische methoden naast elkaar gebruikt.

Samenvattend moet worden vastgesteld dat de operationele toepassing van wiskundige modellen van de atmosfeer een belangrijke plaats heeft veroverd binnen het KNMI. Sommige verwachtingen zouden eenvoudig niet zonder dergelijke modellen tot stand hebben kunnen komen.

Hoewel KNMI-ers weten hoe moeilijk het is om in de toekomst te kijken, zal ik in de volgende paragraaf toch proberen mijn persoonlijke visie te geven op de ontwikkeling van de modellen in de toekomst en op de toekomstige operationele toepassing ervan.

4.4 De toekomst

In de vorige paragrafen hebben we gezien dat het thans binnen ons bereik ligt, om met behulp van wiskundige modellen bruikbare weersvoorspellingen voor twee tot vijf dagen vooruit te leveren. Dat dit mogelijk is, is te danken aan twee factoren: de explosieve ontwikkeling van de computertechnologie en de vergroting van ons wetenschappelijk inzicht in de werking van de atmosfeer. Daarnaast is uiteraard de aanwezigheid van een wereldwijd waarnemings- en telecommunicatie-netwerk van belang.

De vergroting van de rekensnelheid en geheugencapaciteit van de computer zal nog wel even doorgaan. Dit zal het ons mogelijk maken de modellen verder te verfijnen, méér lagen te introduceren en de roosterpuntafstand te verkleinen. Maar zoals we hebben gezien, dit zal niet leiden tot verbetering van de voorspellingen of verlenging van de voorspeltermijn, als we niet tegelijkertijd ons waarnemingsnetwerk verbeteren en proberen ons fysisch inzicht

- Heijboer, L.C., 1977, 'Design of a Baroclinic Three-level Quasi-geostrophic Model with Special Emphasis on Developing Short Frontal Waves', Proefschrift, Universiteit van Utrecht.
- Richardson, L.F., 1922, *Weather Prediction by Numerical Process*, Heruitgegeven door Dover Publications en thans nog verkrijgbaar.

Aanbevolen tekstboeken

- Haltiner, G.J., *Numerical Weather Prediction*, Uitg. John Wiley & Sons, Inc., 1971.
- Mesinger, F. and Arakawa, A., *Numerical Methods used in Atmospheric Models*, Vol. I (1976) en Vol. II (1979). Uitg. Wereld Meteorologische Organisatie, Genève, in de GARP Publication Series No. 17.