

**KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT**

TECHNISCHE RAPPORTEN

T.R. - 10

E. Bouws

**De verwerking van golfmetingen ter berekening
van golfspektra**

De Bilt 1981

Publikatienummer: K.N.M.I. T.R. 10 (00)

Koninklijk Nederlands Meteorologisch Onderzoek,
Oceanografisch Onderzoek,
Postbus 201,
3730 AE De Bilt,
Nederland.

U.D.C.: 551.466 :
517.512.2

DE VERWERKING VAN GOLFMETINGEN TER BEREKENING VAN GOLFSPEKTRA.

door E. Bouws.

SAMENVATTING

Dit rapport bevat een beschrijving van de numerieke verwerking van golfmetingen tot golfspektra, zoals deze wordt uitgevoerd sinds mei 1981. Ter bevordering van de zuiverheid van de berekening van het spektrum wordt gebruik gemaakt van gedeeltelijke tapers. Ondanks deze maatregelen blijken toch nog laag-frekwente componenten voor te komen, die hun oorsprong vinden in de meting (o.a. onzuiverheid van de meting van de verticale versnelling). Deze kunnen - desgewenst - verwijderd worden met behulp van een hier beschreven lopend-middelingsfilter.

1. Inleiding.

Sinds 1967 verzamelt de afdeling oceanografisch onderzoek van het KNMI gedigitaliseerde golfmetingen. De verwerking hiervan is aanvankelijk geschied met behulp van een rekenmethode ter berekening van het variantiedichtheidsspektrum, zoals beschreven door Blackman & Tukey (1959). Hierbij wordt van de meetreeks eerst de autocovariantie berekend, waaruit door fourier-transformatie het spectrum wordt verkregen.

Deze methode kost veel rekentijd, terwijl anderzijds de zogenaamde fast-fourier-transformatie (FFT) methode ter beschikking kwam (Singleton, 1969), die maar ongeveer 10% van de oorspronkelijke rekentijd vergt en daarbij het voordeel heeft, dat een groot oplossend vermogen kan worden bereikt zonder dat dit extra rekentijd kost, zoals in sterke mate het geval is bij de autocovariantiemethode. Het overgrote deel van de golfmetingen zijn dan ook met behulp van de FFT-methode verwerkt.

Ook het gebruik van FFT heeft een ontwikkeling doorgemaakt. Aanvankelijk werden in verband met de beperkte geheugencapaciteit van de computer de tijdreeksen opgesplitst in stukken van 100 seconden, overeenkomstig het gewenste oplossend vermogen van 0,01 Hz, zonder gebruik van een venster voor de onderdrukking van zijlobben.

Vervolgens werd het gemiddelde bepaald van de per segment berekende spektra. Het resultaat werd, analoog aan de praktijk met het autocovariantiespektrum, nog eens glad gestreken m.b.v. een ($\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$)-middeling.

Deze methode voldeed redelijk voor de berekening van zeegangsspektra, maar was betrekkelijk onnauwkeurig voor de bepaling van deiningcomponenten, vooral bij frekwenties kleiner dan 0,1 Hz.

Daarom werd na enige tijd overgegaan op een verfijnde methode, waarbij de berekening werd uitgevoerd over segmenten van 200 seconden, terwijl vervolgens het resultaat met een oplossend vermogen van 0,005 Hz werd herleid tot een spectrum met een oplossend vermogen van 0,01 Hz. Deze bewerking houdt reeds enig gladstrijken in, zodat de ($\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$)-middeling kon vervallen. Deze methode is in gebruik sinds het opbouwen van het golfmetingen-bestand op de B 6700 computer vanaf 1977.

Dat ook deze rekenmethode voor verbetering vatbaar is, wordt gedemonstreerd door Bouws (1980), aan de hand van vergelijkingen tussen de uitkomsten van de on-line spektrumberekeningen in het (oude) Controle en Informatiecentrum (CIC) in Hoek van Holland met de berekeningen op

het KNMI. Hieruit blijkt, dat de verschillen niet verwaarloosbaar zijn, al vallen deze in de praktijk mee.

In 1982 zal in het CIC een nieuw golfverwerkingssysteem in gebruik worden genomen. Bij de voorbereidingen voor het ontwerp daarvan door de Technisch Fysische Dienst TNO-TH is ook de auteur van dit rapport betrokken geweest. Uit proeven door Kuik (1980) met gesimuleerde golfmetingen overeenkomstig spektra van hoge zeegang bleek ondermeer, dat op betrekkelijk eenvoudige wijze de kwaliteit van de berekening van het golfspektrum kan worden verbeterd, door op elk van de segmenten waarop FFT wordt toegepast een partieel hanning-venster toe te passen zoals bijvoorbeeld aanbevolen in Hamming (1977), zie Thomson & Chow (1980); daarbij wordt 10% aan begin en einde van een segment afgerond analoog aan het hanning-venster, zie par. 2. Het oplossend vermogen neemt daardoor iets af, maar neemt door het verminderen van zijlobben in de praktijk juist toe. Dit laatste blijkt ook uit sommige resultaten van eigen proeven, die in par. 3 worden beschreven.

Uit deze proeven kwam ook naar voren, dat de golfmetingen in veel gevallen laag-frekvente componenten bevatten, onafhankelijk van de "spektrale ruis" veroorzaakt door de zijlobben van het golfspektrum.

Deze laag-frekvente componenten zijn in het geval van versnellings-golfmeters (waverider, shipborne -waverecorder, Boersma-golfmeter) niet reëel, doch veroorzaakt door niet-lineaire responsie van het golfmeet-systeem. In het geval van golfbaken kan sprake zijn van golfperioden in de orde van minuten, naast het veelal optredende verloop van het gemiddelde als gevolg van het getij. Al deze laag-frekvente componenten ($f < 0,04$ Hz) kunnen daarom het beste vóór de berekening van het spektrum en overige golfparameters worden weggefilterd. Een dergelijk filter wordt beschreven in par. 4.

Meer informatie op dit gebied kan men vinden in een aan dit TR verwant rapport van Thomson & Chow (1980), dat echter gericht is op getijmetingen. Zij verwijzen onder andere naar Hamming (1977) en Rabiner & Gold (1975).

2. Partieel hanning-venster.

In deze paragraaf wordt ingegaan op de verschillen op het punt van het optreden van zijlobben tussen het berekenen van een spektrum via de autocovariantiefunctie of via de rechtstreekse fourier-transformatie van een (deel-)tijdsreeks. Daarna wordt het partieel hanning-venster beschreven, zoals dit in het golfverwerkingsprogramma REGI is toegepast.

Blackman & Tukey (1959) hebben een aantal vensters (verdeling van gewichten, toegepast op functies in het tijdsdomein) beschreven, die ten doel hebben om de zuiverheid van het spektrum te vergroten. Stel bijvoorbeeld

$$C_i(\tau) = D_i(\tau) \cdot C_{00}(\tau) \quad (1)$$

is de covariantie van een tijdreeks, waarop het venster D_i is toegepast terwijl C_{00} de denkbeeldige covariantiefunctie voorstelt zonder begrenzing in de tijd. De fourier-transformatie van (1) is

$$P_i(f) = Q_i(f) * P_{00}(f) \quad (2)$$

waarbij Q_i de fouriergetransformeerde is van D_i , en P_{00} de fouriergetransformeerde van C_{00} , het continue variantiedichtheidsspektrum van de tijdreeks; * stelt convolutie voor. (Details hierover zie Blackman & Tukey, 1959, p. 72).

In het limietgeval van een oneindig lange $D_i(\tau)$ is $Q_i(f)$ een delta-functie, zodat $P_i = P_{00}$ met oneindig oplossend vermogen. Als $D_i(\tau)$ een rechthoekig venster voorstelt, waarbij $i = 0$ in de notatie van Blackman & Tukey, d.w.z.

$$\begin{aligned} D_0 &= 1 \quad \text{bij } |\tau| \leq T_m \\ D_0 &= 0 \quad \text{bij } |\tau| > T_m \end{aligned} \quad (3)$$

dan is de fouriergetransformeerde

$$Q_0(f) = 2 T_m \cdot \frac{\sin 2\pi f T_m}{2\pi f T_m}, \quad (4)$$

waarbij dus $2T_m$ de totale lengte is van het rechthoekige venster. Uit (4) volgt, dat na het eerste nulpunt van Q_0 bij $fT_m = 0,5$ er een reeks zijlobben volgt, waarvan de 15^e ($fT_m = 8,25$) nog altijd 2% van de maximum waarde bij $fT_m = 0$ bedraagt. Bovendien zijn er negatieve zijlobben waardoor (2) negatieve variantiedichtheid kan opleveren.

Dit probleem doet zich in veel mindere mate voor, wanneer het golfspektrum wordt berekend uit de fouriergetransformeerde $A(f)$ van de tijdreeks m.b.v. FFT:

$$P(f) = 2T \cdot A(f) \cdot A^*(f), \quad (5)$$

$$\text{waarbij: } A(f) = \frac{1}{2T} \int X_T(t) \cdot \exp[-2\pi i f t] dt, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} X_T(t) &= X(t) \quad \text{bij } |t| < T, \\ X_T(t) &= 0 \quad \text{bij } |t| > T, \end{aligned} \quad (7)$$

en $A^*(f)$ de toegevoegd complexe van $A(f)$. (Zie bijvoorbeeld Kinsman, 1965, p. 434 e.v.)

In dat geval is er wel sprake van een rechthoekige venster in (7); maar de fouriergetransformeerde hiervan, vergelijk met (4), heeft alleen betrekking op de complexe fourier-amplitude $A(f)$ en zijn toegevoegd complexe $A^*(f)$, waardoor geen negatieve zijlobben kunnen voorkomen en de grootte ervan kwadratisch afneemt. Het hangt dan af van de specificaties die gesteld worden aan de verwerking van golfmetingen, mede in het licht van de kwaliteit van de meetinstrumenten, of men het nog nodig vindt om dit effect te reduceren. Nu is het kwadraat van 2% (zie het vorige voorbeeld) van $50 \text{ m}^2/\text{Hz}$ (een niet ongebruikelijke variantiedichtheid bij hoge zeegang of deining) nog altijd $200 \text{ cm}^2/\text{Hz}$, en dat op een afstand van de piek $\Delta f \approx 0.08 \text{ Hz}$. Een dergelijke variantiedichtheid is in het verleden gebruikt als drempelwaarde voor het al of niet aanwezig zijn van variantiedichtheid van golven. In paragraaf 3 wordt aan de hand van praktisch voorbeelden nagegaan, in hoeverre het verwaarlozen van dit verschijnsel verantwoord is geweest.

Uit het voorgaande valt af te leiden, dat bij toepassing van FFT het niet voor de hand ligt om, zoals bij fourier-transformatie van een autocovariantie, de zijlobben te onderdrukken met bijvoorbeeld het hanningvenster (Blackman & Tukey, 1959):

$$\begin{aligned} D_2(\tau) &= \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi \tau}{T} \right) \quad \text{bij } |\tau| \leq T \\ &= 0 \quad \text{bij } |\tau| > T. \end{aligned} \quad (8)$$

Hamming (1977) stelde een tussenoplossing voor, dat hier wordt aangeduid met "partieel hanning venster", zie figuur 1:

$$\begin{aligned} D_K(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi m t}{T} \right) \quad \text{bij } 0 < t < T/m \text{ en} \\ &\quad \frac{2m-1}{m} T < t < 2T \\ D_K(t) &= 1 \quad \text{bij } T/m < t < \frac{2m-1}{m} T \\ D_K(t) &= 0 \quad \text{bij } t < 0 \text{ of } t > 2T. \end{aligned} \quad (9)$$

Uit proeven van Kuik (1980) met dit venster, waarbij gebruik gemaakt werd van een gesimuleerde tijdreeks van zeegang met ca. 5 m golfhoogte en een

piekfrekwentie omstreeks 0,1 Hz, bleek de reductie van de door zijlobben veroorzaakte "spectrale ruis" al aanzienlijk te zijn bij $m = 5$, d.w.z. met een taper over twee maal 10% van de getallenreeks. De breedte van $Q_K(f)$ is anderzijds maar 10% groter dan die van $Q_O(f)$, de fouriergetransformeerde van het rechthoekige venster. Uit de numerieke berekening van Q_K (zie aanhangsel A) bleek een sterke overeenkomst qua vorm met Q_O , afgezien van de breedte, zodat een functie $R_K(f)$ gedefinieerd kan worden:

$$R_K(f) = Q_K(f)/Q_O(f), \quad (10)$$

waarbij $Q_O(f)$ berekend voor een rechthoekige venster met $2T' = (1 - 1/2 m) \cdot 2T$. R_K blijkt af te nemen bij toenemende f , zie figuur 2a (getrokken lijn). De stippellijn geeft het verloop van R_K^2 in verband met het kwadrateren van de fourier-amplitudes ter verkrijging van het spectrum. Hieruit blijkt, dat Q_K vrijwel geen zijlobben meer vertoont bij $f > 0.05$ Hz. Ter vergelijking is in figuur 2b een soortgelijke functie R_N afgebeeld, waarbij Q_K is vervangen door de fouriergetransformeerde van een partieel Bartlett-venster met $m = 5$. Ook hier is prake van een sterke reductie van de zijlobben, maar R_B vertoont een sterkere oscillatie dan R_K .

Het gebruik van venster D_K vereist een normeringsfactor om de variantie t.o.v. de oorspronkelijke getallenreeks ongewijzigd te laten. Deze factor berekent men door D_K^2 te integreren over het interval $0 - 2T$:

$$\frac{m-1}{1} + \frac{1}{2\pi m} \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt = \frac{m - 5/8}{m}. \quad (11)$$

Voor $m = 5$ vindt men $7/8$. De getallenreeks dient dus met $(8/7)^{1/2} \approx 1,069$ te worden vermenigvuldigd.

3. Enkele proeven met het partieel hanning-venster.

Een aantal bijzondere golfmetingen van goede kwaliteit (geen uitbijters, ruis, laag-frekwente slingering e.d.) en een door de computer gegenereerde tijdreeks zijn gebruikt om na te gaan, wat het effect is van het partieel hanning-venster, zie Tabel 1.

Tabel 1.

Overzicht van tijdreeksen, gebruikt voor beproeving van venster.

| Volgnummer | Soort tijdreeks | H(m) | H_{m_0} (m) | T(s) | f_p (Hz) |
|------------|--|------|---------------|------|------------|
| 1 | simulatie: constante amplitude en periode | 4 | | 12 | |
| 2 | zeegang | | 4.4 | | 0.12 |
| 3 | zeegang | | 6.9 | | 0.07 |
| 4 | deining | | 3.2 | | 0.055 |
| 5 | deining | | 2.8 | | 0.06 |

Hiervan komt nr. 2 tamelijk in de buurt van de gesimuleerde golfmeetreeks die door Kuik (1980) is gebruikt. (Deze was in tegenstelling tot nr. 1 stochastisch van karakter en had een tamelijk realistische spektrale vorm overeenkomstig met zeegang). Figuren 3 t/m 6 laten vergelijkingen zien tussen de oude berekeningswijze met het rechthoekig venster en enkele varianten met het partieel hanning-venster. Deze vergelijkingen kunnen niet geheel exact zijn, omdat niet alle meetwaarden hetzelfde gewicht krijgen bij gebruik van verschillende vensters.

De gesimuleerde tijdreeks nr. 1 (figuur 3) heeft met opzet een periode van 12 seconden gekregen, zodat begin- en eindpunt van de segmenten van 200 seconden niet continu op elkaar aansluiten, met als gevolg zijlobben overeenkomstig (4). Toepassing van het partieel hanning-venster levert een aanzienlijke reductie van de zijlobben op bij $f > 0.06$ Hz, maar vooral bij $f > 0.09$ Hz, waar $S(f) \approx 0 \text{ m}^2/\text{Hz}$, als $f > 0.18$ Hz.

De minima bij $f = 0.05$ Hz en 0.10 Hz zijn het gevolg van het feit, dat juist bij die frekwenties formule (4) leidt tot $Q_0 = 0$, indien $T' = 90$ seconden, omdat $2\pi f T'$ dan een veelvoud van π is. Hierdoor is figuur 3 niet rechtstreeks vergelijkbaar met figuur 2a, die alleen betrekking heeft op de verhouding R_K , zonder acht te slaan op de fase van het argument in (4).

De spektra van zeegang en extreem laag-frekvente deining (tijdreeksen 2 t/m 5) vertonen daarmee vergeleken een enigszins tegenvallend resultaat. Blijkbaar zijn de laag-frekvente componenten reëel aanwezig, vooral in de metingen van zeegang (nrs. 2 en 3). Let wel, gezien de doorlaatkarakteristiek van de waverider-golfboei is het uitgesloten, dat dergelijke frekwenties op zee in deze vorm voorkomen, maar door onzuiverheden bij de versnellingsmeting kunnen dergelijke lage frekwenties optreden. De metingen

van deining (nrs. 4 en 5) geven daarentegen een duidelijke aanwijzing, dat nog aanzienlijkewinst valt te boeken op het punt van zuiverheid van de berekening door de segmenten veel langer te kiezen, indien de golven minder steil zijn dan in zeegang; zie ook figuur 2: de breedte van R_K is omgekeerd evenredig met de lengte van de tijdreeks wegens (4) en (10). De hoogfrequentie flank van het spektrum is alleen bekeken voor de metingen voor zeegang, nrs. 2 en 3. Hieruit blijkt duidelijk, dat het rechthoekige venster veel spektrale ruis heeft opgeleverd, dat het spektrum bij $f > 0.7$ Hz geheel domineerde.

Samenvattend kan gesteld worden, dat

- het aanbeveling verdient om de lengte van het venster zo groot mogelijk te kiezen; 200 seconden blijkt te kort te zijn, als golfcomponenten voorkomen met frequenties kleiner dan 0.08 Hz;
- natuurmetingen met waverider-boeien meestal enig laag-frekvent signaal bevatten, waarschijnlijk door afwijkingen van de versnellingsmeter ten opzichte van de vertikaal in steile golven, hetgeen het verschil tussen zeegang (nrs. 2 en 3) en deining (nrs. 4 en 5) verklaart;
- het rechthoekige venster bij frequenties groter dan 0.6 Hz relatief veel spetrale ruis heeft veroorzaakt, hetgeen afdoende wordt bestreden door gebruik van het partieel hanning-venster;
- het de moeite waard kan zijn om na te gaan hoe het partieel Bartlett-venster funktioneert, vergeleken met het partieel hanning-venster, zie figuur 2b.

4. Wegfilteren van laag-frekvent signaal.

Bij toepassing van het partieel hanning-venster bleek (zie paragraaf 3), dat de winst aan zuiverheid van de spektrale berekening vaak niet leidde tot een duidelijke afname van de variantiedichtheid bij frequenties kleiner dan de minimum frequentie van de doorlaatkarakteristiek van de waverider-golfboei; dit deed zich vooral voor bij hoge zeegang. Daarnaast komt het bij golfmetingen met waveriders soms voor, dat signalen optreden met frequenties rond de 0.02 Hz en met amplitudes van dezelfde grootte orde als het reële golfsignaal of meer, als gevolg van een mankement aan de versnellingsmeter van de golfboei. In dergelijke gevallen is het raadzaam om de tijdreeks vooraf te filteren.

Er is eerst gekeken naar een methode, waarbij het lopende gemiddelde $f_1(t)$ van de oorspronkelijke reeks $f(t)$ wordt afgetrokken:

$$f_1(t) = (2k + 1)^{-1} \sum_{s=-k}^k f(t + s\tau), \quad (12)$$

waarbij τ de bemonsteringsperiode is; $k \ll N$, waarbij N het totale aantal waarnemingspunten van de getallenreeks. De doorlaatkarakteristiek van $f_1(t)$ in het frekwentiedomein is:

$$F_1(f) \approx \left(\frac{\sin[\pi f\tau(2k+1)]}{\pi f\tau(2k+1)} \right)^2, \quad (13)$$

zie Cartwright et al. (1962). Het nadeel van dit filter is, dat het nogal sterk oscilleert, waardoor het spektrum van de gefilterde reeks $f(t) - f_1(t)$ ongewenste afwijkingen kan geen vertonen.

Een bruikbaar resultaat is verkregen door gebruik te maken van het gewogen lopend gemiddelde van $f(t)$:

$$f_2(t) = k^{-2} \sum_{s=-k}^k (k - |s|) \cdot f(t + s\tau). \quad (12')$$

De doorlaatkarakteristiek van $f_2(t)$ is:

$$F_2(f) \approx \left(\frac{\sin \pi f\tau k}{\pi f\tau k} \right)^4. \quad (13')$$

Het voordeel van $F_2(f)$ is, dat de zijlobben praktisch verwaarloosbaar zijn. Het gebruik van dit filter kost wel extra rekentijd, uiteraard afhankelijk van de middelingstijd τk . Het eerste nulpunt van F_2 vindt men bij $f = (\tau k)^{-1}$; bijvoorbeeld, bij gebruik van $\tau k = 20$ seconden laat het verschil-filter bij $f = 0.04$ Hz praktisch alles door, zie tabel 2. In bijzondere gevallen, waarbij men alleen geïnteresseerd is in componenten met $f > 0.2$ Hz (bijvoorbeeld in lage zeegang) kan τk beperkt blijven tot 5 seconden.

Tabel 2 geeft een orde van grootte van de spektrale reductiefactor $R(f, \tau k)$ van het $f_2(t)$ -filter:

$$R(f, \tau k) \approx \left[1 - \left(\frac{\sin \pi f\tau k}{\pi f\tau k} \right)^2 \right]^2.$$

Tabel 2. Reduktie van laag-frekwente componenten.

| f(Hz) | R(F, 20 sec) | R(f, 10 sec) |
|-------|--------------|--------------|
| 0.01 | 0.02 | 0.001 |
| 0.02 | 0.18 | 0.02 |
| 0.03 | 0.55 | 0.07 |
| 0.04 | 0.89 | 0.18 |
| 0.05 | 1.00 | 0.35 |

Uit proeven met een uiteenlopende verzameling golfmetingen bleek een redelijk overeenstemming. Tevens bleek echter, dat zeer krachtige componenten, samenhangend met laag-frekwente oscillaties van de waverider, zoveel zijlobben opleverden, ondanks de taper over begin en einde van de deeltijdreeksen, dat de werking van het filter grotendeels te niet werd gedaan. Uit figuur 2 kan men afleiden, dat effectieve onderdrukking van zijlobben pas plaatsvindt bij een verschilfrekwentie > 0.05 Hz, indien het venster 200 seconden lang is. Een verlenging van het venster tot tenminste 600 seconden is ook uit hoofde van het filteren van laag-frekwente signalen gewenst.

Zoals reeds in de inleiding is gesteld, beperkt dit rapport zich tot praktijkervaringen met digitaal filteren van golfregistraties. Aanbevolen lectuur, waarin o.a. het Butterworth- en het Lanczos-filter worden behandeld, is Thomson & Chow (1980). Wat het gebruik van dergelijke filters in de praktijk inhoudt, bijvoorbeeld op het punt van rekentijd, kan echter zonder eigen beproevingen niet worden vastgesteld.

Literatuur:

- Blackman, R.B., and J.W. Tukey, 1959. The measurement of power spectra, Dover, New York, 190 p.
- Bouws, E., 1980. Vergelijking van de on-line verwerkingsmethode van het CIC in Hoek van Holland met de off-line methode van het KNMI. KNMI-V-339.
- Cartwright, D.E., M.J. Tucker and D. Catton, 1962. Digital techniques for the study of sea waves, ship motion and allied processes. Trans. of Soc. Instr. Techn. 14: 1-16.
- Hamming, R.W., 1977. Digital filters. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 226 p.
- Kinsman, B., 1965. Wind waves. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 676 p.
- Kuik, A.J., 1980. Persoonlijke mededelingen.
- Rabiner, L.R., and B. Gold, 1975. Theory and applications of digital signal processing, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 762 p.
- Singleton, R.C., 1969. An algorithm for computing the mixed-radix FFT. IEEE Trans. AU-17: 93-103.
- Thomson, R.E., and K.Y. Chow, 1980. Butterworth and Lanczos-window cosine digital filters. Inst. of Ocean Sciences, Sidney, B.C., Canada, Pacific Marine Science Report 80-9.

Aanhangsel A.

Gebruik van procedure FFTREAL voor de berekening van de fourier-transformatie van speciale getallenreeksen.

(beschrijving algol-programma (BOUE) WINDOW, tekst zie aanhangsel B).

1. Inleiding.

De procedure FFTREAL is ca. 10 jaar geleden geschreven als Algol-bewerking van een op dat moment beschikbare Fortran-versie van de fast-fourier-transformatie procedure van R.C. Singleton (1969). Tot nu toe is deze procedure uitsluitend gebruikt om het variantie spektrum te berekenen van enkelvoudige tijdreeksen (golfregistraties). Daarbij is alleen het kwadraat van de absolute waarde van de spektraalkomponenten van belang:

$$S(f) \propto c^2(f) = a^2(f) + b^2(f), \quad (\text{A-1})$$

waarbij $a(f) + b(f)$ de complexe fourier-amplitude voorstelt. De fasehoek $\arctan(b/a)$ wordt niet gebruikt.

De berekening van golfspektra werd oorspronkelijk uitgevoerd per segment van elk 200 seconden lang, zonder taper, zodat sprake was van een "rechthoekig venster". Sinds 1981 worden de segmenten over tweemaal 10% getaperd, het "partieel hanning-venster".

Er was geen afleiding bekend van de fourier-getransformeerde van dit venster. Een eenvoudig toepasbare numerieke rekenmethode werd ontwikkeld voor de reële fourier-transformatie van een willekeurige functie $X(t)$, die gebruik maakt van FFTREAL:

$$\tilde{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (\text{A-2})$$

In alle hierna beschreven gevallen is $X(t)$ een even functie, d.w.z. $X(t) = X(-t)$, zodat:

$$\tilde{X}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (\text{A-3})$$

Het resultaat van enig experimenteren wordt beschreven in de volgende paragraaf. Wiskundige achtergronden worden hier niet behandeld, zodat men ermeê rekening moet houden, dat de uitkomsten met name van correcties afhankelijk zijn van de gebruikte voorbeelden.

2. Resultaten.

Het ligt voor de hand, dat een numerieke berekening van de fourier-transformatie van een eindig aantal getallen leidt tot afwijkingen ten opzichte van de exakte oplossing voor continue functies. Enkele voorbeelden daarvan worden hier gegeven voor respectievelijk het rechthoekige venster, het Bartlett-venster en het Hanning-venster. Gerekend werd met een getallenreeks van 2000, overeenkomstig 2000 seconden. De arrays A en B omvatten elk 1001 getallen, zie aanhangsel B, waarin de versie van het algol-programma WINDOW voor de berekening van het partieel Bartlett (Hanning)-venster.

(Overigens is array B voor ons niet van belang, wegens $X(t) = X(-t)$; dan is $\text{im } \tilde{X}(t) = -\text{im } \tilde{X}(-t)$, zodat deze tegen elkaar wegvallen). De numeriek berekende fouriergetransformeerde is

$$\left[\tilde{X}_n(f) \right]_{\text{Num}} = A(I),$$

waarbij $f = 0; .0005; .0010; \dots; .5000$ Hz., $I = 2000 f + 1$.

Rechthoekig venster: $X_0(t) = 1$ voor $|t| < 100$

$$X_0(t) = 0 \text{ voor } |t| \geq 100$$

(d.w.z. met inbegrip van de negatieve t-as 200 seconden lang).

De fourier-getransformeerde van de continue functie bedraagt:

$$\tilde{X}_0(f) = 200 \frac{\sin g}{g},$$

waarbij $g = 200 \pi f$. Numerieke berekening levert op (benaderd):

$$\left[\tilde{X}_0(f) \right]_{\text{Num}} \approx \tilde{X}_0(f) + 1 - \cos g.$$

De extra term $1 - \cos g$ is al in de eerste zijlobben merkbaar. Bij $f > 0.2$ Hz wordt hij overheersend.

Bartlett-venster: $X_1(t) = 1 - \frac{|t|}{100}$ voor $|t| < 100$

$$X_1(t) = 0 \text{ voor } |t| \geq 100.$$

De fourier-getransformeerde bedraagt:

$$\tilde{X}_1(f) = 100 \left(\frac{\sin g'}{g'} \right)^2,$$

waarbij $g' = 100 \pi f$. Numerieke berekening levert (goede benadering):

$$\left[\tilde{X}_1(f) \right]_{\text{Num}} \approx \tilde{X}_1(f) + 1.$$

Hanning-venster: $X_2(t) = 0.5 \left(1 + \cos \frac{\pi t}{100} \right)$ voor $|t| < 100$

$$X_2(t) = 0 \text{ voor } |t| \geq 100.$$

Ook hier is, vrijwel exakt:

$$\left[\tilde{X}_2(f) \right]_{\text{Num}} \approx \tilde{X}_2(f) + 1.$$

3. Slotopmerking.

In dit kader heeft het weinig zin om ons te gaan verdiepen in de oorzaak van de korrekties van de hierboven gepresenteerde voorbeelden. Uit de berekening van de fourier-transformaties van een partieel Hanning-venster en een partieel Bartlett venster van gelijke lengte als in de voorbeelden hierboven bleek, dat ook daar kennelijk sprake was van een benadering van 1 voor grote waarden van I , net als bij de volledige vensters. Het lag daarom voor de hand om ook hier de numerieke uitkomsten te corrigeren door met 1 af te trekken.

Literatuur:

R.C. Singleton. An algorithm for computing the mixed-radix FFT.
IEEE-Trans. AU-17: 93-103 (1969).

Aanhangsel B: Tekst van (BOUE) WINDOW, versie 7 sept. 1981.

N.B. (BOUE) FFTTR, dat de algol-procedure FFTREAL bevat, is security type A, en kan dus ook door andere users worden gebruikt d.m.v. \$INCLUDE, zie regel 6000. M dient te bestaan uit priemfactoren 2, 3 en 5 (M = 1000 in dit geval).

A(1) correep. met de nul-frekwentie, A(1001) met de nyquist-frekwentie (n.m. voor B).

```
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
7800
8000
8100
8200
8400
8800
9000
10000
11000
12000
13000
14000
14200
14400
15000
16000
17000
18000
19000

BEGIN X BEREK. VAN FOURIER TRANSF. VAN VENSTERS, M=1000
ARRAY A,B[0:1001], HW[0:1999];
LABEL ST;
INTEGER I, ISN,M; REAL SOM;
FILE LINE(KIND=PRINTER);
$INCLUDE "FFTTR" 00648000-01198000
M:=1000; FILL HW WITH 2000(0); ISN:=1; SOM:=0;
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL 79 DO HW[I]:=1; XPARTIEEL
FOR I:=80 STEP 1 UNTIL 99 DO HW[I]:= 1 -(I-80)/20.; XBARTLETT
X0.5*(1+COS(3.141592*(I-80)/20.)); XHANNING
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL 1999 DO SOM:=* +HW[I];
SOM:=*/2000;
SOM:=0;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
BEGIN A[I]:=HW[2*I -2]-SOM;
B[I]:=HW[2*I -1]-SOM;
END;
FFTREAL (A,B,M, ISN);
IF ISN=0 THEN BEGIN WRITE(LINE,<"ISN=0, STOP">); GO TO ST; END;
WRITE(LINE,<20F6.3>),FOR I:=0 STEP 1 UNTIL 120 DO HW[I];
WRITE(LINE[SPACE 1]);
WRITE(LINE,<10E10.3>,A);
WRITE(LINE[SPACE 1]);
WRITE(LINE,<10E10.3>,B);
ST:
END.
```

```
00001000
00002000
00003000
00004000
00005000
00006000
00007000
00007800
00008000
00008100
00008200
00008400
00008800
00009000
00010000
00011000
00012000
00013000
00014000
00014200
00014400
00015000
00016000
00017000
00018000
00019000
```

Onderschriften bij figuren.

- Fig. 1. Pariteel hanning-venster; $m = 5$: tweemaal 10% taper aan begin en einde van tijdreeks $2T$.
- Fig. 2. (a) R_K , verhouding tussen Q_K , de fourier-getransformeerde van partieel hanning-venster met $m = 5$ en $2T = 200$ seconden, en Q_O , idem van rechthoekig venster met $2T^{\hat{r}} = 180$ seconden.
(b) R_B , idem voor partieel Bartlett venster, zie tekst.
- Fig. 3. Tijdreeks nr. 1: spectra met
a: partieel hanning-venster ($m = 5$, $2T = 200$ s),
b: rechthoekig venster ($2T = 200$ s).
- Fig. 4. Tijdreeks nr. 2: spectra met
a: partieel hanning-venster ($m = 5$, $2T = 200$ s),
b: idem ($m = 5$, $2T = 600$ s),
c: rechthoekig venster ($2T = 200$ s).
LF: laag-frekwente deel
HF: hoog-frekwente deel: gemiddelde over frekwentie-intervallen van 0,1 Hz.
- Fig. 5. Tijdreeks nr. 3: idem fig. 4, met uitzondering van
b: partieel hanning-venster ($m = 5$, $2T = 750$ s).
- Fig. 6. Tijdreeksen nrs. 4 en 5: idem fig. 4, met uitzondering van hoog-frekwente deel.

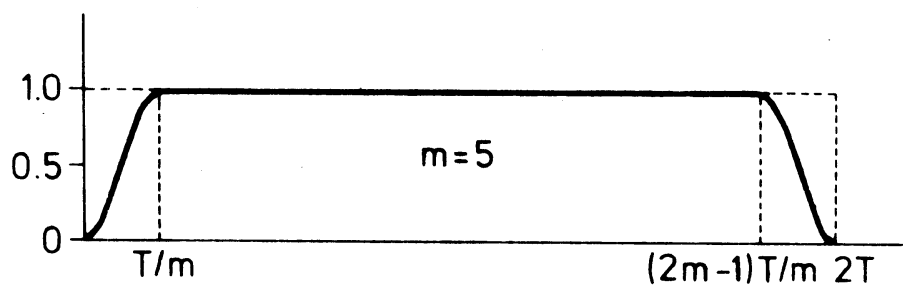


fig.1

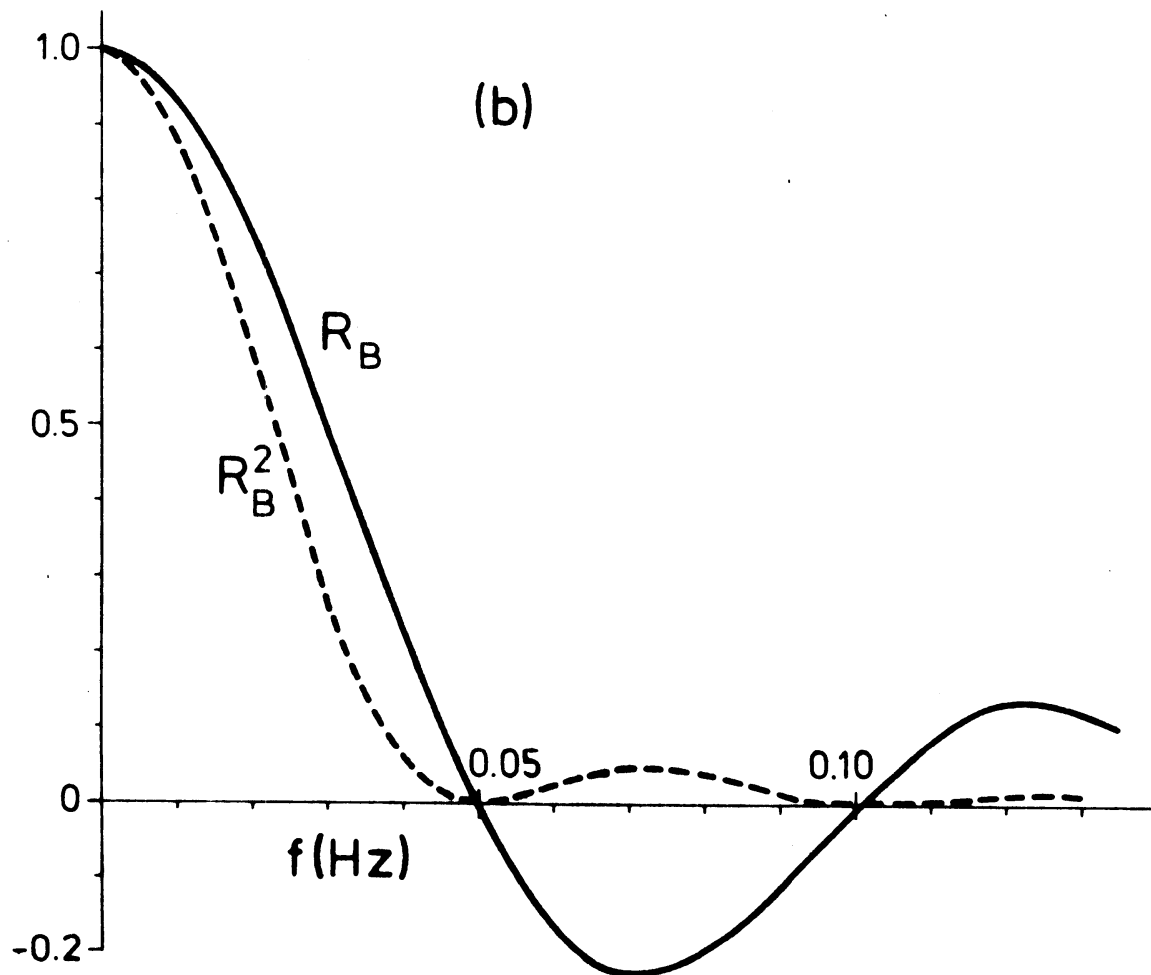
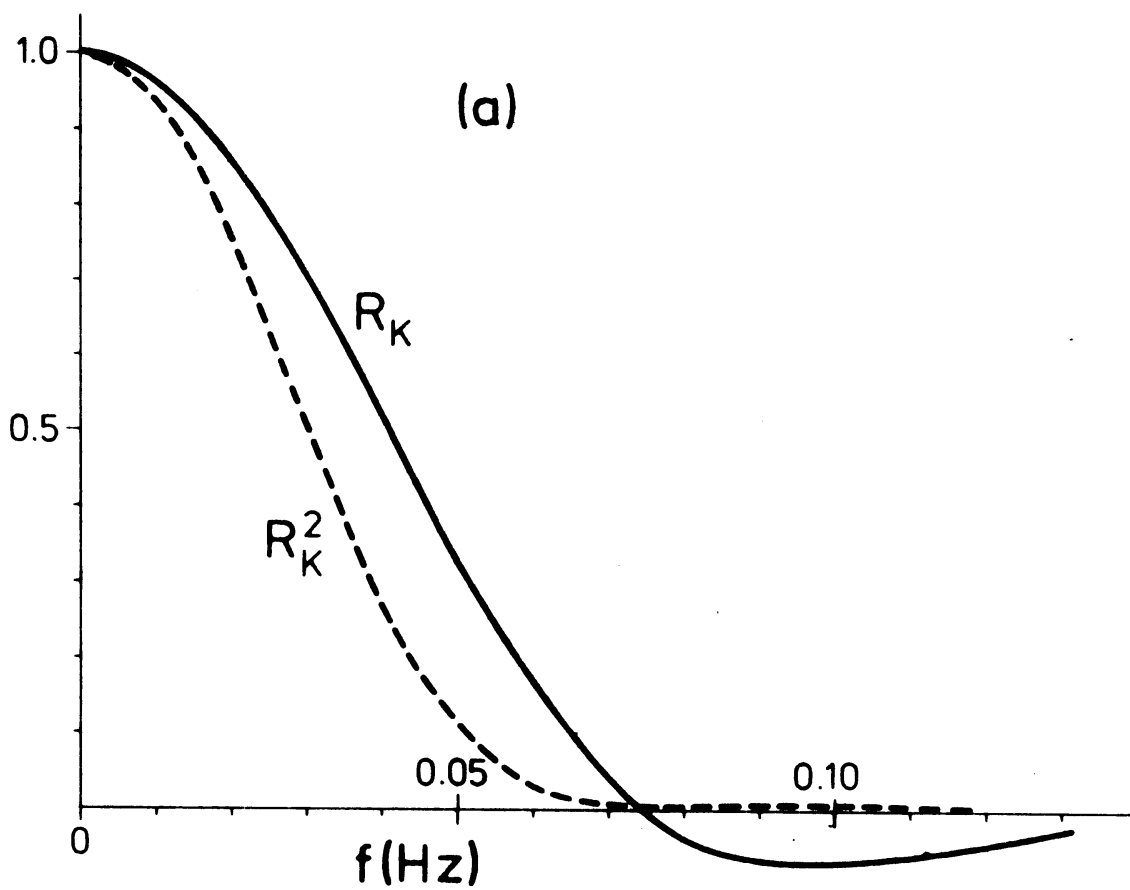


fig. 2

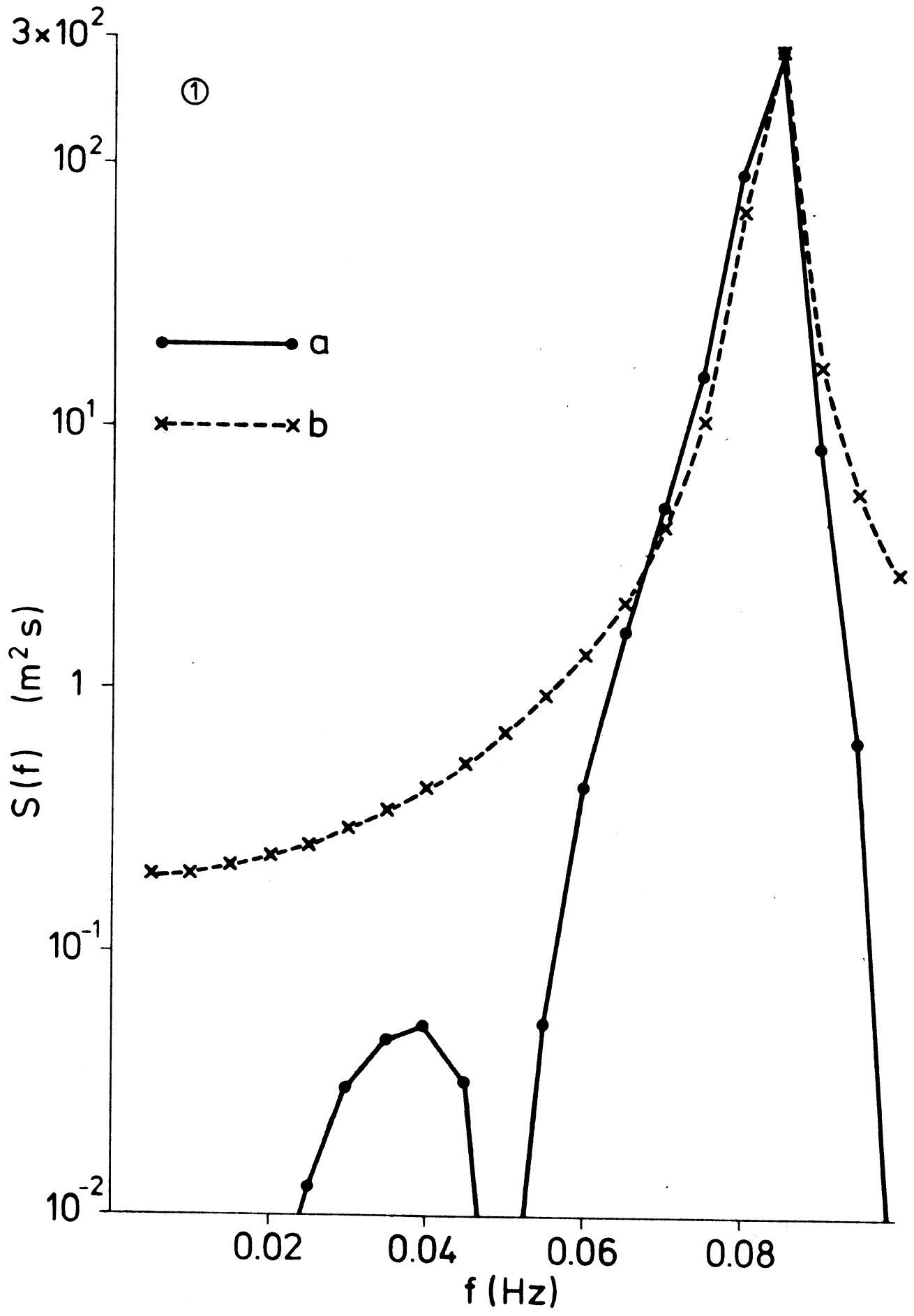


fig. 3

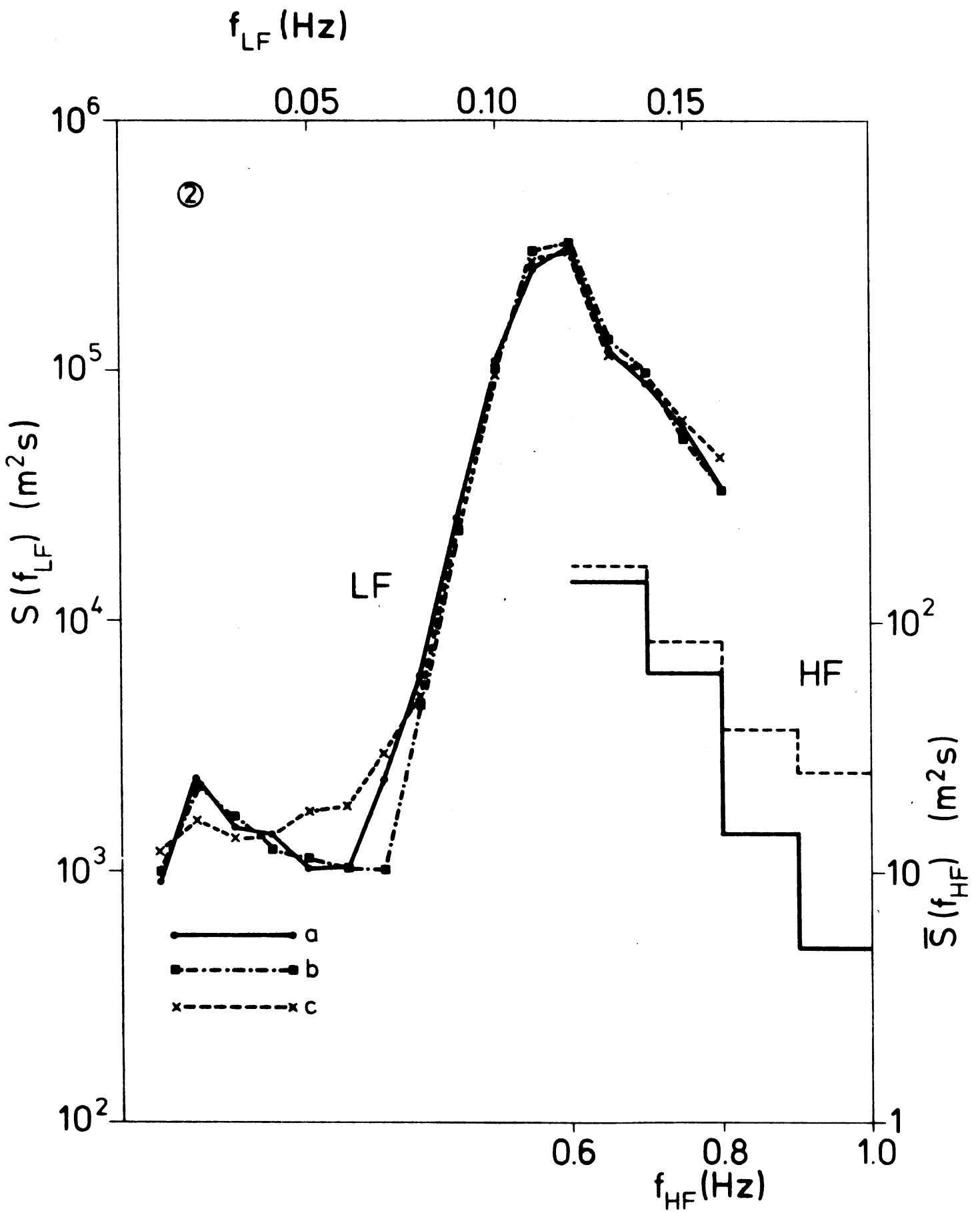


fig. 4

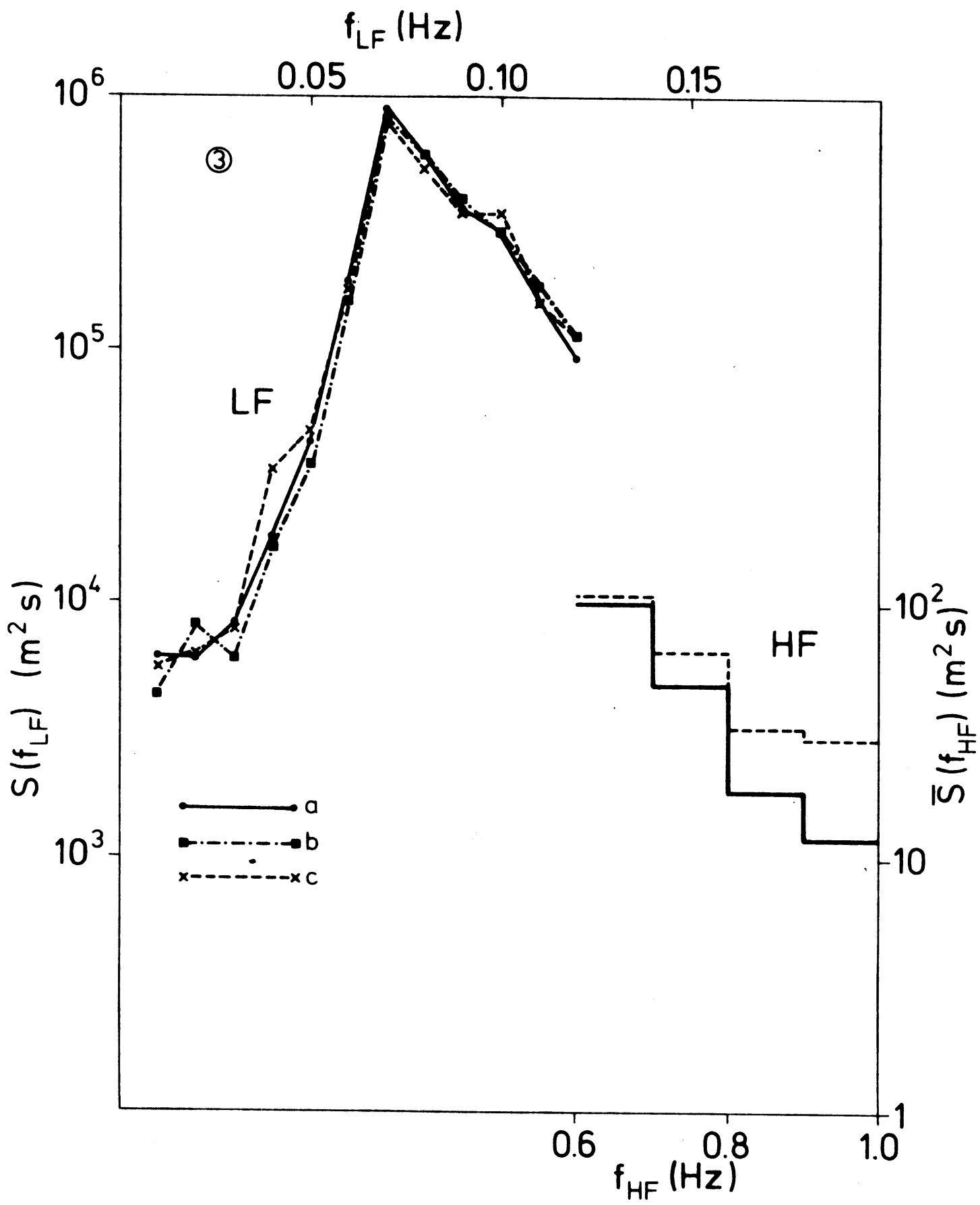


fig. 5

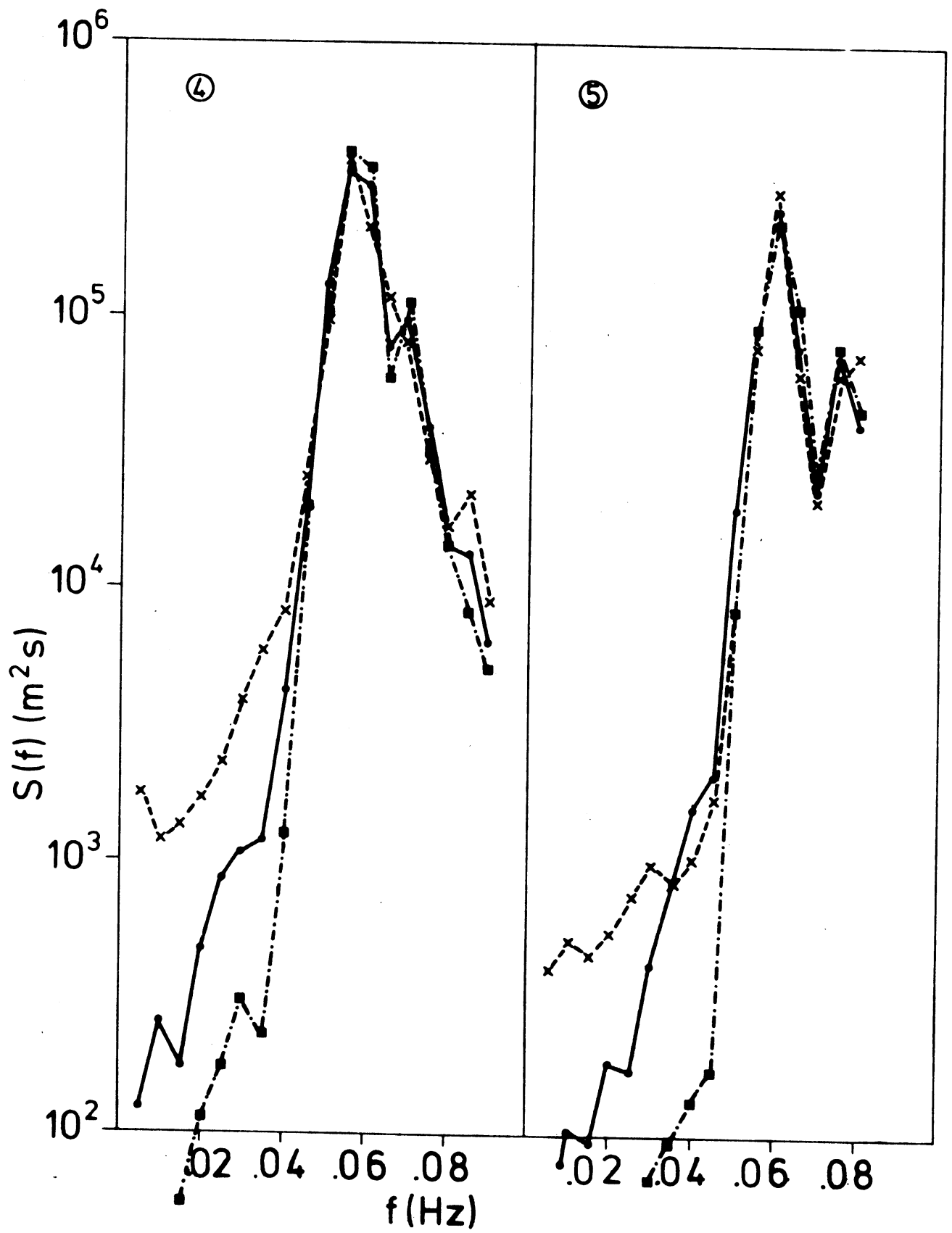


fig.6